введение навигационных сигналов на геостационарных спутниках, запуск и подключение отечественной аппаратуры к европейской спутниковой навигационной системе Galileo, разработка и внедрение наземных устройств и приемников, комбинированных с инерциональными и оптическими навигационными приборами, создание приемников, работающих внутри помещений и т. д.

Библиографический список

1. Барабанов, И. Н. Спутниковые навигационные системы GPS и ГЛОНАСС / И. Н. Барабанов // Межпредм. семинар Моск. инж.-физ. ин-та / Моск. инж.-физ. ин-т. М., 2008.

2. Немудов, В. Микросхемы для телекоммуникационной аппаратуры. Нужны ли отечественные разработки? / В. Немудов, И. Корнеев // Электроника, наука, технология, бизнес. 2008. № 6. С. 26–31.

3. Свириденко, В. ГЛОНАСС и аппаратура потребителей: сегодня и завтра / В. Свириденко // Chip News. 2008. № 4 (127). С. 27–30.

4. Специализированная СБИС типа «система на кристалле» навигационного приемника ГЛОНАСС/GPS / И. Корнеев, В. Немудов, О. Лагутин, В. Польщиков // Электрон. компоненты. 2007. № 4. С. 81–85.

5. Пакман, Д. Н. Проблемы обработки телеметрической информации в контуре автоматизированной системы управления космическими аппаратами / Д. Н. Пакман, М. В. Некрасов, А. Н. Антамошкин // Вестник СибГАУ. 2009. Вып. 1 (22). Ч. 1. С. 4–9.

V. V. Shaidurov, E. A. Veisov, O. V. Nepomnyashy

PROBLEMS AND DECISIONS OF DESIGNING OF MICROPROCESSOR MODULES OF NAVIGATING EQUIPMENT OF USERS GLONASS

The short history of creation and current state of problems in the field of satellite navigation is considered, systems GPS and GLONASS in particular are considered. The basic problems of development GLONASS are allocated and decisions of the marked problems are offered. The problem of designing of navigating receivers is considered. The basic ways of the decision are allocated at designing of the big integrated schemes and microprocessor modules of management by the receiver of satellite navigation. The structure and structure of the integrated microprocessor for management of the navigating receiver capable to conduct reception of signals in four systems is offered: GPS, Galoleo, Bejdou and GLONASS. The basic ways of development GLONASS in the light of globalisation of satellite navigation on a global scale are planned.

Keywords: space, navigation, system on a crystal, the microprocessor, the companion, GLONASS, GPS.

УДК 539.374

О. В. Гомонова, С. И. Сенашов

НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДВУМЕРНОЕ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРАНДТЛЯ*

Найдены новые поля скоростей для известного решения Прандтля, описывающего сжатие тонкого пластического слоя материала между двумя параллельными жесткими и шероховатыми плитами. Приведена методика построения других полей скоростей.

Ключевые слова: идеальная пластичность, поле скоростей, решение Прандтля.

Уравнения плоской задачи идеальной пластичности в стационарном случае имеют вид

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} - 2k\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos 2\theta + \frac{\partial\theta}{\partial y}\sin 2\theta\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial y} - 2k\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin 2\theta - \frac{\partial\theta}{\partial y}\cos 2\theta\right) = 0, \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\operatorname{tg} 2\theta + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \qquad (2)$$

где $\sigma -$ гидростатическое давление; $\theta -$ угол между осью Ox и первым главным направлением тензора напряже-

*Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (№ П1121).

ний; k – постоянная пластичности; v_x, v_y – компоненты вектора скорости деформаций.

Одним из практически важных и часто используемых в различных расчетах является решение Прандтля, которое описывает, в частности, сжатие тонкого пластического слоя материала жесткими плитами. Это решение имеет вид

$$\sigma_x = -p - k\left(x - 2\sqrt{1-y^2}\right),$$
$$\sigma_y = -p - kx,\ \ \tau = ky, \tag{3}$$

где p – произвольная постоянная.

Известно, что для полного описания пластического состояния тела необходимо знать поле скоростей.

Подставим уравнения (2) в систему (1):

$$y\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = \sqrt{1-y^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Из системы (4) следует, что, в силу ее линейности, она имеет бесконечное число решений, которые могут быть полезны для анализа напряженно-деформированного состояния пластической среды.

В настоящее время известно два класса решений этой системы: решение Надаи [1] и решение Ивлева–Сенашова [2], которые имеют вид

$$v_x = -\alpha xy + \beta x - \alpha \arcsin y -$$
$$-\alpha y\sqrt{1-y^2} - 2\beta\sqrt{1-y^2} + C_1,$$
$$v_y = \alpha\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) - \beta y + C_2,$$

где α, β, C_1, C_2 – произвольные постоянные (при $\alpha = 0$ получаем решение Надаи).

Приведем другие решения системы (4). Для этого заметим, что в переменных ξ, η, где $\sigma = k(\xi+\eta)$, $2\theta = \xi - \eta$, уравнения (2) запишутся в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\theta \frac{\partial v_y}{\partial \xi} = 0,$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial \eta} + \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial v_x}{\partial \eta} = 0. \tag{5}$$

Если ввести в (5) новые переменные по формулам

$$v_x = u\cos\theta - v\sin\theta,$$
$$v_y = u\sin\theta + v\cos\theta, \tag{6}$$

то получим систему

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{2}u = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{2}v = 0. \tag{7}$$

Далее поступаем по следующей методике: решаем систему (7), в ней вместо ξ и η подставляем выражения из решения Прандтля, совершаем замену (6) и находим поле скоростей, соответствующее решению (3).

Проделаем это на наиболее простом решении системы (7). Нетрудно видеть, что

$$v = u = \exp\frac{1}{2}(\xi+\eta)$$

есть решение системы уравнений (7). Подставим его в (6):

$$v_x = (\cos\theta - \sin\theta)\exp\frac{1}{2}(\xi+\eta),$$
$$v_y = (\cos\theta + \sin\theta)\exp\frac{1}{2}(\xi+\eta).$$

Из решения Прандтля (3) получим

$$\xi + \eta = -\frac{p}{k} - x - \sin 2\theta,$$
$$\cos 2\theta = y. \tag{8}$$

Окончательно находим новое поле скоростей:

$$v_x = \exp\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{p}{k} - x - \sin 2\theta\right)\right)(\cos\theta - \sin\theta),$$
$$v_y = \exp\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{p}{k} - x - \sin 2\theta\right)\right)(\cos\theta + \sin\theta).$$

Аналогично определяются и другие поля скоростей.

Для уравнений (7) решения указаны в [3]. Далее будет построено пять классов новых решений уравнений (5) с учетом решений [3].

Первый класс:

$$u = \cos\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right) + B\sin\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right],$$

где A, B, μ, λ – произвольные постоянные; $\mu^2 - \lambda^2 = 1$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\lambda}{2}\sin\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\times$$
$$\times\left[A\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right) + B\sin\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right] +$$
$$+\frac{\mu}{2}\cos\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\sin\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right) - B\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right].$$

Из уравнений (7) имеем

$$v = -\lambda\sin\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\times$$
$$\times\left[A\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right) + B\sin\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right] +$$
$$+\mu\cos\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\sin\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right) - B\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right].$$

Подставим u, v в уравнения (6) и с учетом равенств (8) и $\theta = \dfrac{\xi-\eta}{2}$ получим

$$v_x = \cos\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k} - x - \sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta) - B\sin(\mu\theta)\right]\cos\theta -$$
$$-\left(-\lambda\sin\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k} - x - \sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta) - B\sin(\mu\theta)\right] +\right.$$
$$\left.+\mu\cos\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k} - x - \sin 2\theta\right)\right)\left[-A\sin(\mu\theta) - B\cos(\mu\theta)\right]\right)\sin\theta,$$

$$v_y = \cos\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k} - x - \sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta) - B\sin(\mu\theta)\right]\sin\theta +$$
$$+\left(-\lambda\sin\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k} - x - \sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta) - B\sin(\mu\theta)\right] +\right.$$

$$+\mu\cos\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[-A\sin(\mu\theta)-B\cos(\mu\theta)\right]\cos\theta.$$

Второй класс:

$$u=\sin\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right].$$

где A, B, μ, λ – произвольные постоянные; $\mu^2-\lambda^2=1$. Тогда

$$v=-\lambda\cos\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)+B\sin\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right]+$$

$$+\mu\sin\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\sin\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)-B\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right],$$

$$v_x=\sin\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta)-B\sin(\mu\theta)\right]\cos\theta-$$

$$-\left(-\lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta)-B\sin(\mu\theta)\right]+\right.$$

$$\left.+\mu\sin\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[-A\sin(\mu\theta)-B\cos(\mu\theta)\right]\right)\sin\theta,$$

$$v_y=\sin\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta)-B\sin(\mu\theta)\right]\sin\theta+$$

$$+\left(\lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta)-B\sin(\mu\theta)\right]+\right.$$

$$\left.+\mu\sin\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[-A\sin(\mu\theta)-B\cos(\mu\theta)\right]\right)\cos\theta.$$

Третий класс:

$$u=\exp\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right],$$

где A, B, μ, λ – произвольные постоянные; $\mu^2+\lambda^2=1$. Тогда

$$v=\lambda\exp\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)+B\sin\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right]+$$

$$+\mu\exp\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\sin\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)-B\cos\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right],$$

$$v_x=\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta)-B\sin(\mu\theta)\right]\cos\theta-$$

$$-\left(-\lambda\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta)-B\sin(\mu\theta)\right]+\right.$$

$$\left.+\mu\exp\left(\lambda\left(-\frac{p}{2k}-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{1-y^2}}{2}\right)\right)\left[-A\sin(\mu\theta)-B\cos(\mu\theta)\right]\right)\sin\theta,$$

$$v_y=\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta)-B\sin(\mu\theta)\right]\sin\theta+$$

$$+\left(\lambda\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\cos(\mu\theta)-B\sin(\mu\theta)\right]+\right.$$

$$\left.+\mu\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[-A\sin(\mu\theta)-B\cos(\mu\theta)\right]\right)\cos\theta.$$

Четвертый класс:

$$u=\exp\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\exp\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)+B\exp\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right],$$

где A, B, μ, λ – произвольные постоянные; $\lambda^2-\mu^2=1$. Тогда

$$v=\lambda\exp\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\exp\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)+B\exp\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right]+$$

$$+\mu\exp\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[-A\exp\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)+B\exp\left(\mu\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right],$$

$$v_x=\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\exp(-\mu\theta)+B\exp(-\mu\theta)\right]\cos\theta-$$

$$-\left(-\lambda\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\exp(-\mu\theta)+B\exp(-\mu\theta)\right]+\right.$$

$$\left.+\mu\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[-A\exp(-\mu\theta)+B\exp(-\mu\theta)\right]\right)\sin\theta,$$

$$v_y=\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\exp(-\mu\theta)+B\exp(-\mu\theta)\right]\sin\theta+$$

$$+\left(\lambda\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[A\exp(-\mu\theta)+B\exp(-\mu\theta)\right]+\right.$$

$$\left.+\mu\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[-A\exp(-\mu\theta)+B\exp(-\mu\theta)\right]\right)\cos\theta.$$

Пятый класс:

$$u=\exp\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\frac{\xi-\eta}{2}+B\right],$$

где A, B, λ – произвольные постоянные; $\lambda^2=1$. Тогда

$$v=\lambda\exp\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left[A\frac{\xi-\eta}{2}+B\right]-A\exp\left(\lambda\frac{\xi+\eta}{2}\right),$$

$$v_x=\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[-A\theta+B\right]\cos\theta-$$

$$-\left(\lambda\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[-A\theta+B\right]-\right.$$

$$\left.-A\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\right)\sin\theta,$$

$$v_y=\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[-A\theta+B\right]\sin\theta+$$

$$+\left(\lambda\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\left[-A\theta+B\right]-\right.$$

$$\left.-A\exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{p}{k}-x-\sin 2\theta\right)\right)\right)\cos\theta.$$

Библиографический список

1. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. М. : Высш. шк., 1969.

2. Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин и др. М. : Физматлит, 2008.

3. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. М. : Физматлит, 2001.

O. V. Gomonova, S. I. Senashov

NEW EXACT SOLUTIONS WHICH DESCRIBE 2-DIMENSIONAL VELOCITY FIELD FOR PRANDTL'S SOLUTION

For the well-known Prandtl's solution which describes a pressing of a thin layer of plasticity material between two parallel and rough plates new velocity fields are found. Method of construction of the other fields is considered.

Keywords: ideal plasticity, velocity field, Prandtl's solution.

УДК 539.37

О. И. Кузоватова, В. М. Садовский

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОДАВЛИВАНИИ СВЯЗНОЙ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ*

Исследован процесс локализации деформаций в образцах из разнопрочного материала типа грунта при продавливании через фильеру с прямолинейными, выпуклыми и вогнутыми боковыми поверхностями. Использована специальная математическая модель, обобщающая классическую теорию упругости на случай материала, поразному сопротивляющегося растяжению и сжатию. Численное решение задачи построено с помощью итерационного процесса, на каждом шаге которого решаются уравнения теории упругости с начальными напряжениями на основе метода конечных элементов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод начальных напряжений, локализация деформаций, разнопрочная среда.

Постановка задачи. Рассмотрим образец из разнопрочного материала типа грунта, занимающий плоскую область Ω с границей Γ, состоящей из трех непересекающихся частей Γ_u, Γ_p и Γ_{up}, на первой из которых задан вектор перемещений $u=(u_1,u_2)$, на второй – вектор распределенной внешней нагрузки $p=(p_1,p_2)$, а на третьей ставятся смешанные граничные условия: при отсутствии перемещений точек границы в направлении нормали зафиксированы касательные напряжения

$$u_n = u\cdot n = 0\,,\ \tau\cdot\sigma\cdot n = p_{fr}\,,\ x\in\Gamma_{up}\,, \tag{1}$$

где $n=(n_1,n_2)$, $\tau=(\tau_1,\tau_2)$ – векторы нормали и касательной к границе соответственно; p_{fr} – заданная функция, моделирующая трение.

Задача состоит в определении векторного поля перемещений u и тензорного поля напряжений σ, удовлетворяющих граничным условиям

$$u=0 \text{ на } \Gamma_u\,,\ u_n=0 \text{ на } \Gamma_{up}$$

и уравнению равновесия в вариационной форме

$$\iint_\Omega \sigma:\varepsilon(\tilde u)\,d\Omega = \int_{\Gamma_p} p\cdot\tilde u\,d\gamma + \int_{\Gamma_{up}} p_{fr}\cdot\tilde u_\tau\,d\gamma \tag{2}$$

для любого векторного поля $\tilde u$, удовлетворяющего однородным граничным условиям в перемещениях на Γ_u и Γ_{up}. Здесь $2\varepsilon(u)=\nabla u+(\nabla u)^*$ – тензор деформаций, соответствующий векторному полю u (звездочка означает транспонирование). Кроме того, в области Ω должны быть выполнены определяющие уравнения, с помощью которых по заданному тензору деформаций в каждой точке Ω можно однозначно определить тензор напряжений.

Смешанные граничные условия на участке Γ_{up} возникают, например, при моделировании процесса продавливания среды через фильеру с жесткими границами. В этом случае величина p_{fr} представляет собой напряжение трения, равное нулю, если поверхность фильеры абсолютно гладкая.

Для описания напряженно-деформированного состояния разнопрочного материала, имеющего различные пределы прочности при растяжении и сжатии, будем использовать модель сыпучей среды с пластическими связями [1]. Под действием сжимающих или растягивающих напряжений меньше коэффициента сцепления (предела прочности связей) такая среда не деформируется. Достижение предела прочности связей отвечает состоянию равновесия, в котором деформация может быть произвольной положительной величиной. Напряжения выше этого предела невозможны. Регуляризованные определяющие соотношения деформирования разнопрочной среды, учитывающие упругость частиц и связующего, приводятся к системе уравнений

$$\sigma = a:\varepsilon - \frac{1}{1+\lambda}\,a:\Pi\left(\varepsilon - a^{-1}:\sigma_0\right), \tag{3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00148).