

O. V. Gomonova, S. I. Senashov

## NEW EXACT SOLUTIONS WHICH DESCRIBE 2-DIMENSIONAL VELOCITY FIELD FOR PRANDTL'S SOLUTION

For the well-known Prandtl's solution which describes a pressing of a thin layer of plasticity material between two parallel and rough plates new velocity fields are found. Method of construction of the other fields is considered.

Keywords: ideal plasticity, velocity field, Prandtl's solution.

© Гомонова О. В., Сенашов С. И., 2009

УДК 539.37

О. И. Кузоватова, В. М. Садовский

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОДАВЛИВАНИИ СВЯЗНОЙ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ\*

Исследован процесс локализации деформаций в образцах из разнопрочного материала типа грунта при продавливании через фильеру с прямолинейными, выпуклыми и вогнутыми боковыми поверхностями. Использована специальная математическая модель, обобщающая классическую теорию упругости на случай материала, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию. Численное решение задачи построено с помощью итерационного процесса, на каждом шаге которого решаются уравнения теории упругости с начальными напряжениями на основе метода конечных элементов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод начальных напряжений, локализация деформаций, разнопрочная среда.

**Постановка задачи.** Рассмотрим образец из разнопрочного материала типа грунта, занимающий плоскую область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ , состоящей из трех непересекающихся частей  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_p$  и  $\Gamma_{up}$ , на первой из которых задан вектор перемещений  $u = (u_1, u_2)$ , на второй – вектор распределенной внешней нагрузки  $p = (p_1, p_2)$ , а на третьей ставятся смешанные граничные условия: при отсутствии перемещений точек границы в направлении нормали зафиксированы касательные напряжения

$$u_n = u \cdot n = 0, \quad \tau \cdot \sigma \cdot n = p_{fr}, \quad x \in \Gamma_{up}, \quad (1)$$

где  $n = (n_1, n_2)$ ,  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  – векторы нормали и касательной к границе соответственно;  $p_{fr}$  – заданная функция, моделирующая трение.

Задача состоит в определении векторного поля перемещений  $u$  и тензорного поля напряжений  $\sigma$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_u, \quad u_n = 0 \text{ на } \Gamma_{up}$$

и уравнению равновесия в вариационной форме

$$\iint_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\tilde{u}) d\Omega = \int_{\Gamma_p} p \cdot \tilde{u} d\gamma + \int_{\Gamma_{up}} p_{fr} \cdot \tilde{u}_{\tau} d\gamma \quad (2)$$

для любого векторного поля  $\tilde{u}$ , удовлетворяющего однородным граничным условиям в перемещениях на  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_{up}$ . Здесь  $2\varepsilon(u) = \nabla u + (\nabla u)^*$  – тензор деформаций, соответствующий векторному полю  $u$  (звездочка означает транспонирование). Кроме того, в области  $\Omega$  должны

быть выполнены определяющие уравнения, с помощью которых по заданному тензору деформаций в каждой точке  $\Omega$  можно однозначно определить тензор напряжений.

Смешанные граничные условия на участке  $\Gamma_{up}$  возникают, например, при моделировании процесса продавливания среды через фильеру с жесткими границами. В этом случае величина  $p_{fr}$  представляет собой напряжение трения, равное нулю, если поверхность фильеры абсолютно гладкая.

Для описания напряженно-деформированного состояния разнопрочного материала, имеющего различные пределы прочности при растяжении и сжатии, будем использовать модель сыпучей среды с пластическими связями [1]. Под действием сжимающих или растягивающих напряжений меньше коэффициента сцепления (предела прочности связей) такая среда не деформируется. Достижение предела прочности связей отвечает состоянию равновесия, в котором деформация может быть произвольной положительной величиной. Напряжения выше этого предела невозможны. Регуляризованные определяющие соотношения деформирования разнопрочной среды, учитывающие упругость частиц и связующего, приводятся к системе уравнений

$$\sigma = a : \varepsilon - \frac{1}{1+\lambda} a : \Pi(\varepsilon - a^{-1} : \sigma_0), \quad (3)$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00148).

где  $\sigma$  – тензор напряжений;  $\sigma_0$  – тензор сцепления;  $a$  – симметричный положительно определенный тензор коэффициентов упругости частиц;  $\lambda$  – параметр регуляризации;  $\Pi$  – оператор проекции на конус допустимых деформаций  $C$  по норме  $|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon : a : \varepsilon}$ .

В модели сыпучей среды с абсолютно твердыми частицами, определяющие соотношения которой получаются из системы (3) в пределе при  $a \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ , потенциал напряжений равен  $\sigma_0 : \varepsilon + \delta_c(\varepsilon)$ , где  $\delta_c(\varepsilon)$  – индикаторная функция конуса  $C$ , равная нулю на конусе и бесконечности вне этого конуса. Двойственный потенциал деформаций  $\delta_k(\sigma - \sigma_0)$  выражается через индикаторную функцию сопряженного конуса  $K$ , который состоит из тензоров напряжений, образующих с тензорами из конуса  $C$  тупые углы в смысле скалярного произведения, задаваемого сверткой  $\sigma : \varepsilon$  [2].

**Вычислительный алгоритм.** Основная идея вычислительного алгоритма состоит в замене определяющих уравнений (3) итерационной формулой

$$\sigma^n = a : \varepsilon^n - \frac{1}{1 + \lambda} a : \Pi(\varepsilon^{n-1} - a^{-1} : \sigma_0)$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon^n(u^n) &= a : (\sigma^n + \Delta\sigma^{n-1}), \\ a : \Delta\sigma^{n-1} &= \Pi_{c^{-1}}(c : (a^{-1} : \varepsilon^{n-1}(u^{n-1}) - \sigma_0)), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $n = 1, 2, 3, K$ .

На первом шаге поле начальных напряжений  $\Delta\sigma^0$  считается тождественно равным нулю и решается упругая задача для ненапряженного материала с тензором модулей податливости  $a$ . На последующих шагах начальные напряжения вычисляются через поле деформаций, полученное по предыдущему решению. Итерации продолжаются до тех пор, пока норма разности двух приближенных решений на соседних шагах не станет меньше наперед заданной точности вычислений.

Задача на  $n$ -м шаге алгоритма сводится к минимизации интегрального функционала

$$\begin{aligned} I^n(u) &= \int_{\Omega} \left( \frac{|\varepsilon(u)|_{a^{-1}}^2}{2} - \Delta\sigma^{n-1} : \varepsilon(u) \right) d\Omega - \\ &- \int_{\Gamma_p} p \cdot u d\Gamma + \int_{\Gamma_{fp}} p_{fr} \cdot u_{\tau} d\gamma, \end{aligned}$$

или к численному решению вариационного уравнения

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( (\varepsilon(u^n) : a^{-1} - \Delta\sigma^{n-1}) : (\varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u^n)) \right) d\Omega = \\ = \int_{\Gamma_p} p \cdot (\tilde{u} - u^n) d\Gamma + \int_{\Gamma_{fp}} p_{fr} \cdot (\tilde{u}_{\tau} - u_{\tau}^n) d\gamma, \\ \tilde{u}, u^n \in U, \end{aligned} \quad (5)$$

для которого применима стандартная техника метода конечных элементов [3; 4]. Как обычно, пространство перемещений  $U$  аппроксимируется конечномерным подпространством  $U_h$  (где  $h$  – характерный параметр дискретизации), натянутом на заданную систему базисных функций из пространства  $U$ . В результате получается конечномерная задача квадратичного программирования, которая приводит к большой системе линейных алгебраических уравнений. В описанных ниже конкретных расче-

тах в качестве базисных функций выбирались стандартные кусочно-линейные сплайны, определенные на нерегулярной треугольной сетке, а система линейных уравнений решалась методом сопряженных градиентов. Преимущество этого метода состоит в том, что он позволяет достаточно просто реализовать технологию программирования, при которой в памяти компьютера постоянно хранятся только ненулевые коэффициенты матрицы системы и соответствующие им индексы – номера строк и столбцов [5].

Точное решение задачи, минимизирующее функционал  $I(u)$  на пространстве  $U$ , очевидно, удовлетворяет вариационному уравнению (5) с заменой напряжения  $\Delta\sigma^{n-1}$  напряжением

$$\Delta\sigma^{\infty} = a^{-1} : \Pi_{c^{-1}}(c : (a^{-1} : \varepsilon(u) - \sigma_0)). \quad (6)$$

Подставив в качестве варьируемого элемента  $\tilde{u}$  точное решение  $u$  в уравнение (5) и приближенное решение  $u^n$  в аналогичное уравнение с  $\Delta\sigma^{\infty}$ , после суммирования результатов получим

$$\int_{\Omega} \left( |\varepsilon(u^n - u)|_{a^{-1}}^2 - (\Delta\sigma^{n-1} - \Delta\sigma^{\infty}) : \varepsilon(u^n - u) \right) d\Omega = 0.$$

В терминах скалярного произведения

$$(\tilde{\varepsilon}, \varepsilon) = \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon} : a^{-1} : \varepsilon d\Omega$$

и соответствующей ему гильбертовой нормы  $\|\varepsilon\|_0 = \sqrt{(\varepsilon, \varepsilon)}$  последнее уравнение можно представить в виде

$$\|\varepsilon(\tilde{u} - u)\|_0 = (a : (\Delta\sigma^{n-1} - \Delta\sigma^{\infty}), \varepsilon(u^n - u)),$$

откуда по неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\|\varepsilon(u^n - u)\|_0 \leq \|a : (\Delta\sigma^{n-1} - \Delta\sigma^{\infty})\|_0. \quad (7)$$

Положим для простоты  $a = \lambda b$ ,  $c = (1 + \lambda)^{-1}$ , где  $\lambda$  – малый безразмерный параметр.

В силу неравенства Корна, левая часть (7) определяет на пространстве  $U$  норму  $\|u^n - u\|$ , эквивалентную норме  $H^1(\Omega)$ . Правая часть оценивается с помощью формул (4) и (6) с учетом того, что оператор проекции – не растягивающее отображение:

$$\begin{aligned} (1 + \lambda) \|a : (\Delta\sigma^{n-1} - \Delta\sigma^{\infty})\|_0 = \\ = \|\Pi_{a^{-1}}(\varepsilon(u^{n-1}) - a : \sigma_0) - \Pi_{a^{-1}}(\varepsilon(u) - a : \sigma_0)\|_0 \leq \\ \leq \|\varepsilon(u^{n-1} - u)\|_0 = \|u^{n-1} - u\|_1. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\|u^n - u\|_1 \leq \frac{1}{1 + \lambda} \|u^{n-1} - u\|_1 \leq \frac{1}{(1 + \lambda)^n} \|u^0 - u\|_1,$$

гарантирующая сходимость последовательности итераций к точному решению со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $1/(1 + \lambda) < 1$ .

**Численный эксперимент.** В качестве примера рассмотрим задачу о плоском деформированном состоянии однородного образца с прямыми границами, на верхней границе которого действует давление  $P = (0, -p_0)$ , ( $p_0 > 0$ ), распределенное равномерно (рис. 1).

В этом случае поле для интенсивности сдвига

$$\gamma(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_1^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_2^2 + \gamma_{12}^2},$$

где  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12})$ , может быть получено как на основе классической теории упругости (рис. 2, а), так и на основе модели разнородной среды с параметром внутреннего трения, соответствующего плотному грунту (рис. 2, б). Интенсивность увеличивается от белого цвета до черного по линейной зависимости. При этом следует отметить, что в разнородной среде в нижней части образца образуется коническая зона вывала (см. рис. 2, б).

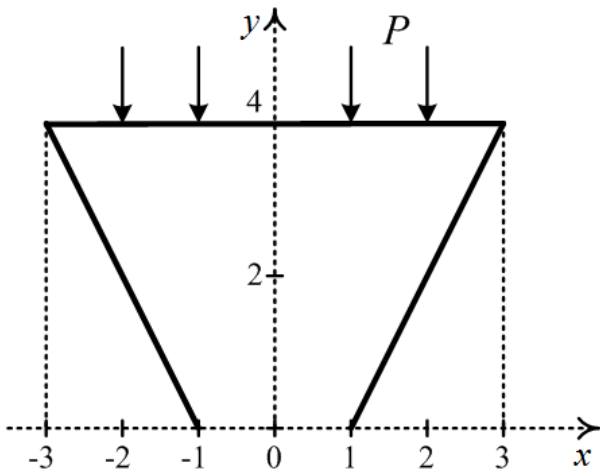
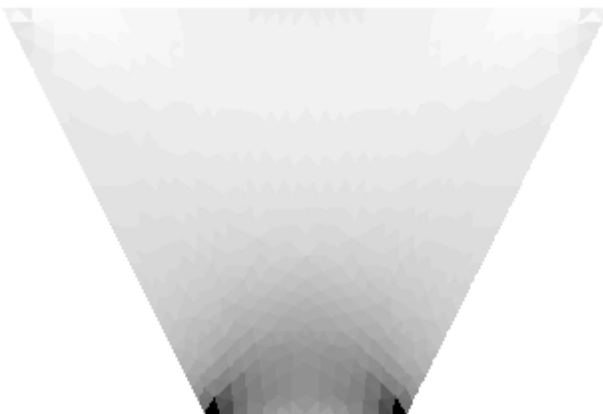


Рис. 1. Схема нагружения однородного образца с прямыми границами равномерно распределенной силой  $P$



а



б

Рис. 2. Интенсивность деформации сдвига для задачи, приведенной на рис. 1 (обозначения см. в тексте)

Также была рассмотрена задача о продавливании образца через фильеру с прямоугольными боковыми границами с применением неравномерно распределенной силы, приложенной к верхней границе области, с равномерно уменьшающейся нагрузкой от центра к боковым границам (рис. 3). И в этой задаче поле интенсивности сдвига может быть получено с использованием как классической теории упругости (рис. 4, а), так и модели разнородной среды (рис. 4, б).

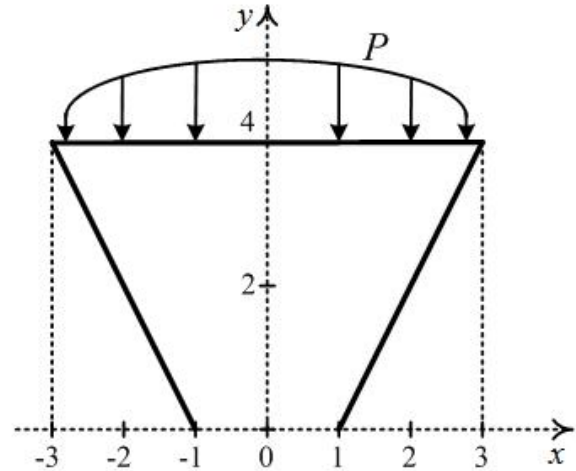
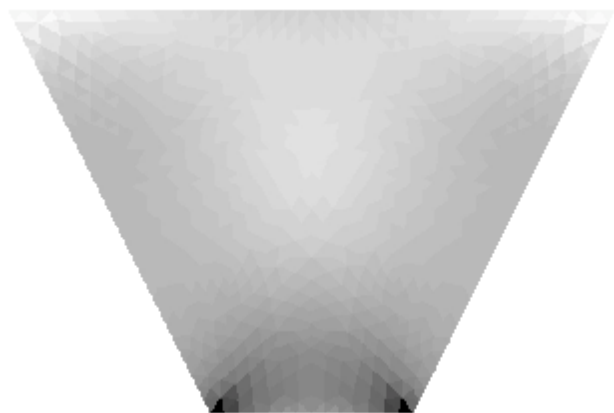


Рис. 3. Схема нагружения образца неравномерно распределенной силой  $P$  в задаче о продавливании образца через фильеру с прямоугольными границами



а



б

Рис. 4. Интенсивность деформации сдвига для задачи, представленной на рис. 3 (обозначения см. в тексте)

Сравнивая изображения на рис. 4, б и рис. 2, б, можно сделать вывод о том, что перераспределение внешнего давления с одним и тем же интегральным значением силы слабо влияет на изменение деформированного состояния в нижней части образца.

Задача о продавливании образца через фильеру с вогнутыми границами (рис. 5) имеет свои особенности по сравнению с задачей о продавливании образца через фильеру с прямоугольными боковыми границами.

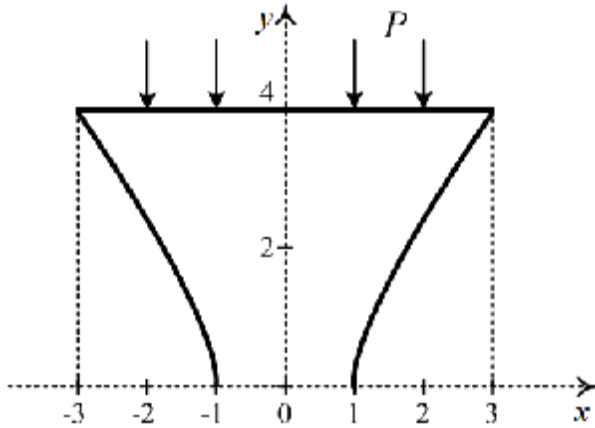
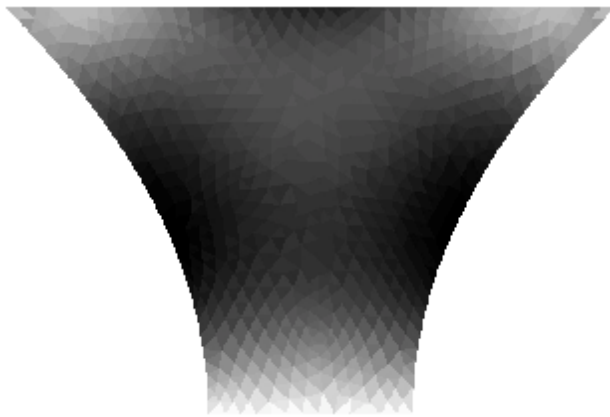
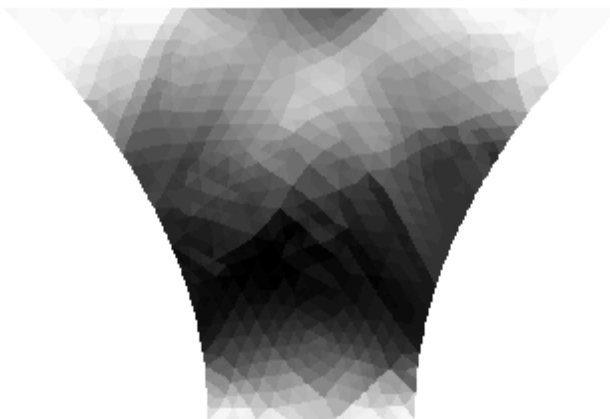


Рис. 5. Схема нагружения образца равномерно распределенной силой  $P$  в задаче о продавливании образца через фильеру с вогнутыми границами



*a*

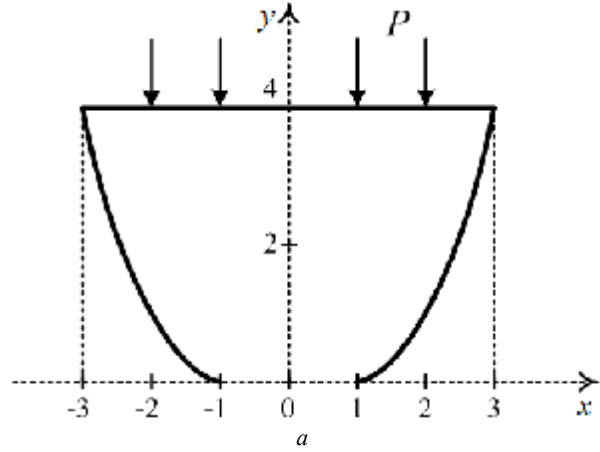


*б*

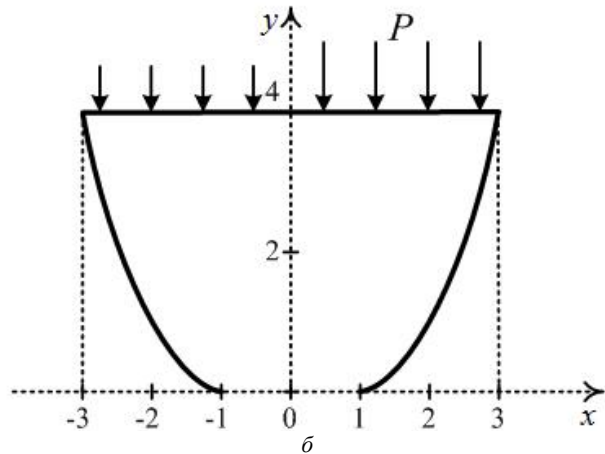
Рис. 6. Интенсивность деформации сдвига для задачи, приведенной на рис. 5, полученная на основе классической теории упругости (*a*) и на основе модели равнопрочной среды (*б*)

По сравнению с прямолинейными боковыми границами в случае вогнутых границ происходит перераспределение зон локализации деформаций как в упругой (рис. 6, *a*), так и в разнопрочной среде (рис. 6, *б*), а размер зоны вывала существенно увеличивается.

Далее была рассмотрена задача о продавливании образца через фильеру с выпуклыми границами (рис. 7).



*a*



*б*

Рис. 7. Схема нагружения образца в задачах о продавливании образца через фильеру с выпуклыми границами с равномерно (*a*) и неравномерно (*б*) распределенной силой  $P$

Полученные в результате ее решения поля интенсивности (рис. 8, 9) показывают, что в результате перераспределения давления появляется дополнительная линия локализации деформации, которая соответствует асимметричным условиям задачи.

Таким образом, на основе метода конечных элементов предложен вычислительный алгоритм для решения задач локализации деформаций в разнопрочной среде. В качестве примера рассмотрено плоское деформированное состояние образца из разнопрочного материала типа грунта при продавливании через фильеру с прямолинейными, выпуклыми и вогнутыми боковыми поверхностями. Преимущества предложенного алгоритма в сравнении с классическим подходом теории упругости наиболее заметны при решении задач в асимметричной постановке.

### Библиографический список

1. Мясников, В. П. Вариационные принципы теории предельного равновесия разнопрочных сред / В. П. Мясников, В. М. Садовский // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 3. С. 488–499.

2. Садовская, О. В. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О. В. Садовская, В. М. Садовский. М. : Физматлит, 2008.

3. Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. М. : Наука, 1981.

4. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. М. : Мир, 1979.

5. Кузоватова, О. И. Моделирование локализации деформации в разнопрочной среде / О. И. Кузоватова, В. М. Садовский // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2008. № 1 (3). С. 272–283.

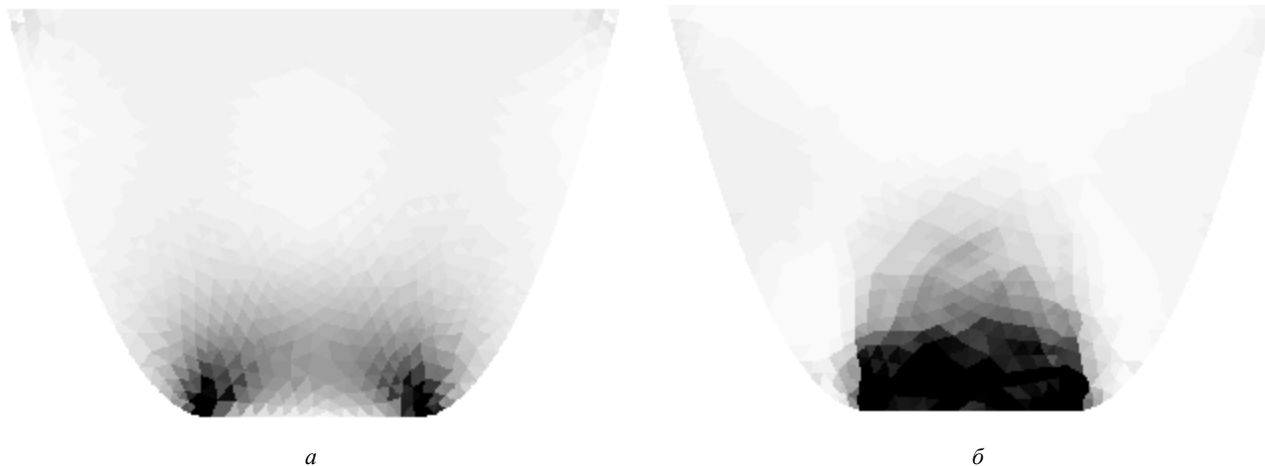


Рис. 8. Интенсивность деформации сдвига для задачи, представленной на рис. 7, а, полученная на основе классической теории упругости (а) и на основе модели равнопрочной среды (б)

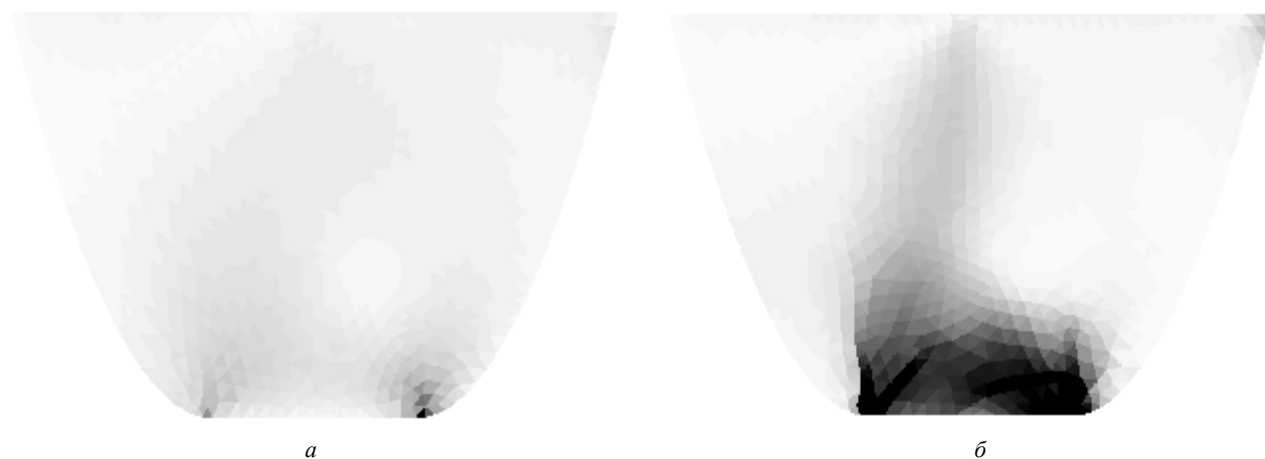


Рис. 9. Интенсивность деформации сдвига для задачи, представленной на рис. 7, б, полученная на основе классической теории упругости (а) и на основе модели равнопрочной среды (б)

O. I. Kuzovatova, V. M. Sadovskii

## NUMERICAL ANALYSIS OF THE PROCESS OF PUNCHING SHEAR OF A SOIL

*Special mathematical model, generalizing of classical model of the elasticity theory, is used for the analysis of directions of the deformations localization in samples from soil with different strengths. Numerical solution of the problems is carried out by means of iterative process, on each step of which the equations of the elasticity theory with initial stresses are solved on the basis of the finite-elements method.*

*Keywords: finite elements, initial stresses method, strains localization, material with different strengths.*

© Кузоватова О. И., Садовский В. М., 2009