

K. Ya. Ivanov, N. I. Galibei

TWO-STAGE GEAR REDUCERS. THE CHOICE OF OPTIMAL SCHEME

The optimization of basic parameters of a right-angle parallel-shaft reducer and the choice of the optimal scheme of a two-stage gear reducer on the basis of calculation methods developed at the Department of Applied Mechanics of Siberian State Technological University are considered.

Keywords: gear reducer; two-stage gear reducer; optimization of a structural scheme of a gear reducer.

© Иванов К. Я., Галибей Н. И., 2010

УДК 519.872, 519.21

А. А. Назаров, М. Г. Носова

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ВИДЕ ПЯТИФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ*

Предложена математическая модель процесса изменения демографической ситуации в виде пятифазной автономной системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Ее исследование выполнено методом моментов. Найдены первые и вторые моменты числа заявок, обслуживаемых в системе. Разработанная модель и метод применяются к прогнозированию процесса изменения демографической ситуации в Российской Федерации.

Ключевые слова: система массового обслуживания, демографическая ситуация, численность населения.

В последние годы в результате экономических и политических изменений в нашей стране возросла потребность в построении научно обоснованных демографических прогнозов. Одним из методов демографического прогнозирования является разработка и исследование математических моделей, в частности применение моделей и методов теории массового обслуживания для моделирования демографических процессов.

В данной статье в качестве математической модели процесса изменения численности женского населения, например женщин Российской Федерации, рассматривается функционирование пятифазной автономной системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов.

Определим процесс функционирования такой СМО. Будем полагать, что продолжительность обслуживания f каждой заявки складывается из пяти фаз:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5.$$

Здесь все τ_i – независимые и экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами μ_i , характеризующими продолжительности фаз обслуживания, $i = 1 \dots 5$.

Поскольку интенсивность рождаемости существенно зависит от возраста женщин, то целесообразно рассматривать $b(t)$ – интенсивность репродукции как функцию,

зависимую от возраста женщины. Для указания такой зависимости рассмотрим систему, в которой три фазы соответствуют различным этапам репродуктивного возраста женщин.

Будем считать, что для заявок, находящихся на обслуживании, на второй, третьей и четвертой фазах возможно генерирование новых требований. Интенсивности генерирования новых заявок равны соответственно $b_2(t)$, $b_3(t)$ и $b_4(t)$. Интенсивности репродукции на первой и пятой фазах будем считать равными нулю, т. е. $b_1(t) = 0$, $b_5(t) = 0$. Поскольку случайные величины τ_i распределены экспоненциально, то средняя продолжительность i -й фазы составляет $1/\mu_i$, $i = 1 \dots 5$. Тогда интенсивность репродукции на i -й фазе запишем в виде

$$b_i(t) = 0,488 \bar{b}_i(t) \mu_i,$$

где $\bar{b}_i(t)$ – суммарный коэффициент рождаемости в момент t [1]; 0,488 – вероятность рождения девочки; $i = 1 \dots 5$. Обслуживание каждой новой заявки начинается на первой фазе. Заявка, завершив обслуживание на i -й фазе, с вероятностью r_i переходит к обслуживанию на $i + 1$ -ю фазу, а с вероятностью $1 - r_i$ завершает свое обслуживание и покидает систему, $i = 1 \dots 4$. С вероятностью 1 после пятой фазы завершается полное обслуживание заявки.

Поскольку в рассматриваемой системе массового обслуживания отсутствует внешний источник заявок, так

* Работа выполнена при поддержке АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» Федерального агентства по образованию РФ по проекту «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применения к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

как все новые заявки генерируются требованиями, находящимися на обслуживании, а время обслуживания заявок состоит из фаз, то такую систему будем называть автономной системой с фазовым распределением, или РН-распределением времени обслуживания.

В терминах демографии под заявкой подразумевается женщина, репродуктивные вторая, третья и четвертая фазы составляют репродуктивный возраст женщины [1], а время обслуживания в системе – продолжительность ее жизни.

Обозначим через $n_i(t)$ число заявок, обслуживаемых на i -й фазе в момент времени t . Тогда случайный процесс

$$n(t) = \{n_1(t), n_2(t), n_3(t), n_4(t), n_5(t)\}^T$$

является пятимерной цепью Маркова с непрерывным временем. В терминах демографии $n_i(t)$ определяет численность женщин на фазе i , $i = 1 \dots 5$, т. е. в i -й возрастной группе.

Задача исследования данной математической модели состоит в нахождении наиболее важных числовых характеристик

$$P(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, t) = P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, n_3(t) = n_3, n_4(t) = n_4, n_5(t) = n_5\},$$

из которых определим первые и вторые моменты.

Для этого распределения запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{P(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, t)\} = & -P(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, t) \{n_1 \mu_1 + \sum_{i=2}^4 n_i (b_i(t) + \mu_i)\} + \\ & + P(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4, n_5, t) \sum_{i=2}^4 n_i b_i(t) + (n_1 + 1) \mu_1 \times \\ & \times \{P(n_1 + 1, n_2, n_3, n_4, n_5, t)(1 - r_1) + \\ & + P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, n_4, n_5, t) r_1\} + (n_2 + 1) \mu_2 \times \\ & \times \{P(n_1, n_2 + 1, n_3, n_4, n_5, t)(1 - r_2) + \\ & + P(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4, n_5, t) r_2\} + (n_3 + 1) \mu_3 \times \\ & \times \{P(n_1, n_2, n_3 + 1, n_4, n_5, t)(1 - r_3) + \\ & + P(n_1, n_2, n_3 + 1, n_4 - 1, n_5, t) r_3\} + (n_4 + 1) \mu_4 \times \\ & \times \{P(n_1, n_2, n_3, n_4 + 1, n_5, t)(1 - r_4) + \\ & + P(n_1, n_2, n_3, n_4 + 1, n_5 - 1, t) r_4\} + \\ & + (n_5 + 1) \mu_5 P(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 + 1, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим характеристическую функцию числа обслуживаемых заявок в пятифазной системе массового обслуживания в момент времени t в виде

$$\begin{aligned} H(u, t) = & \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5} P(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, t) \exp\{j \sum_{i=1}^5 u_i n_i\}, \end{aligned}$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $u = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}^T$ – пятимерный вектор. Характеристическая функция $H(u, t)$ является функцией векторного аргумента u и скалярного аргумента t .

Умножим (1) на $\exp\{j(u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 + u_4 n_4 + u_5 n_5)\}$ и просуммируем по n_1, n_2, n_3, n_4 и n_5 . Получим уравнение для характеристической функции $H(u, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = & j \frac{\partial H(u, t)}{\partial u_1} \mu_1 \times \\ & \times \{1 - e^{-j u_1} (1 - r_1) - e^{-j u_1} e^{j u_2} r_1\} + \\ & + j \sum_{i=2}^4 \frac{\partial H(u, t)}{\partial u_i} \{b_i(t)(1 - e^{j u_i}) + \\ & + \mu_i (1 - e^{-j u_i}) + \mu_i e^{-j u_i} r_i (1 - e^{j u_{i+1}})\} + j \frac{\partial H(u, t)}{\partial u_5} \mu_5 \{1 - e^{-j u_5}\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для нахождения числовых характеристик такой системы массового обслуживания применим метод моментов [2].

Известно, что производная k -го порядка в нуле от характеристической функции равна начальному моменту k -го порядка, умноженному на k -ю степень мнимой единицы [3]. Используя этот факт, найдем моменты первого и второго порядков для числа обслуживаемых заявок в рассматриваемой СМО.

Подставим в уравнение (2) его решение и продифференцируем полученное тождество поочередно по u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 . Обозначив

$$\left. \frac{\partial H(u, t)}{\partial u_i} \right|_{u_1=0, u_2=0, u_3=0, u_4=0, u_5=0} = j z_i(t), \quad i = \overline{1, 5},$$

получим следующую систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющую компоненты $z_i(t)$ вектора $z(t) = \{z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t), z_5(t)\}^T$:

$$\begin{cases} z_1'(t) = -\mu_1 z_1(t) + b_2(t) z_2(t) + b_3(t) z_3(t) + b_4(t) z_4(t), \\ z_2'(t) = \mu_1 r_1 z_1(t) - \mu_2 z_2(t), \\ z_3'(t) = \mu_2 r_2 z_2(t) - \mu_3 z_3(t), \\ z_4'(t) = \mu_3 r_3 z_3(t) - \mu_4 z_4(t), \\ z_5'(t) = \mu_4 r_4 z_4(t) - \mu_5 z_5(t). \end{cases} \quad (3)$$

Функция $z(t)$ в терминах теории массового обслуживания определяет среднее значение числа заявок, обслуживаемых в системе в момент времени t , а в терминах демографии имеет смысл среднего значения численности женского населения в каждой возрастной группе, определяемой номером фазы.

При $b_i(t) = b_i$ система (3) является линейной системой с постоянными коэффициентами [4]. Особенность этой системы заключается в том, что она распадается на две подсистемы, которые нужно решать последовательно. Аналитическое решение данной системы не представляет затруднения: нахождение собственных значений матрицы коэффициентов приводит к алгебраическому уравнению четвертой степени с комплексно сопряженными корнями. Численное решение выполним ниже при конкретных значениях параметров μ_i, r_i и $b_i(t) = b_i$.

Для нахождения моментов второго порядка продифференцируем второй раз поочередно по u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 равенство (2) и, обозначая

$$\left. \frac{\partial^2 H(u, t)}{\partial u_i^2} \right|_{u_1=0, u_2=0, u_3=0, u_4=0, u_5=0} = j^2 d_i(t),$$

$$\left. \frac{\partial^2 H(u, t)}{\partial u_i \partial u_j} \right|_{u_1=0, u_2=0, u_3=0, u_4=0, u_5=0} = j^2 d_{ij}(t),$$

где $d_i(t)$ – второй начальный момент величины $n_i(t)$; $d_{ij}(t)$ – второй смешанный начальный момент величин $n_i(t)$ и $n_j(t)$, $i = 1 \dots 5, j = 1 \dots 5$, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d_1'(t) &= -2\mu_1 d_1(t) + 2 \sum_{i=2}^4 d_{1i}(t) b_i(t) + \\ &+ \sum_{i=2}^4 b_i(t) z_i(t) + \mu_1 z_1(t), \\ d_2'(t) &= -2\mu_2 d_2(t) + 2d_{12}(t) \mu_1 r_1 + \mu_1 r_1 z_1(t) + \mu_2 z_2(t), \\ d_3'(t) &= -2\mu_3 d_3(t) + 2d_{23}(t) \mu_2 r_2 + \mu_2 r_2 z_2(t) + \mu_3 z_3(t), \\ d_4'(t) &= -2\mu_4 d_4(t) + 2d_{34}(t) \mu_3 r_3 + \mu_3 r_3 z_3(t) + \mu_4 z_4(t), \\ d_5'(t) &= -2\mu_5 d_5(t) + 2d_{45}(t) \mu_4 r_4 + \mu_4 r_4 z_4(t) + \mu_5 z_5(t), \\ d_{12}'(t) &= -(\mu_1 + \mu_2) d_{12}(t) + d_1(t) \mu_1 r_1 + \\ &+ \sum_{i=2}^4 d_{2i}(t) b_i(t) - \mu_1 r_1 z_1(t), \\ d_{13}'(t) &= -(\mu_1 + \mu_3) d_{13}(t) + d_{12}(t) \mu_2 r_2 + \sum_{i=2}^4 d_{i3}(t) b_i(t), \\ d_{14}'(t) &= -(\mu_1 + \mu_4) d_{14}(t) + d_{13}(t) \mu_3 r_3 + \sum_{i=2}^4 d_{i4}(t) b_i(t), \\ d_{15}'(t) &= -(\mu_1 + \mu_5) d_{15}(t) + d_{14}(t) \mu_4 r_4 + \sum_{i=2}^4 d_{i5}(t) b_i(t), \quad (4) \\ d_{23}'(t) &= -(\mu_2 + \mu_3) d_{23}(t) + \\ &+ d_{13}(t) \mu_1 r_1 + d_{22}(t) \mu_2 r_2 - \mu_2 r_2 z_2(t), \\ d_{24}'(t) &= -(\mu_2 + \mu_4) d_{24}(t) + d_{14}(t) \mu_1 r_1 + d_{23}(t) \mu_3 r_3, \\ d_{25}'(t) &= -(\mu_2 + \mu_5) d_{25}(t) + d_{15}(t) \mu_1 r_1 + d_{24}(t) \mu_4 r_4, \\ d_{34}'(t) &= -(\mu_3 + \mu_4) d_{34}(t) + d_{33}(t) \mu_3 r_3 + d_{24}(t) \mu_2 r_2 - \mu_3 r_3 z_3(t), \\ d_{35}'(t) &= -(\mu_3 + \mu_5) d_{35}(t) + d_{34}(t) \mu_4 r_4 + d_{25}(t) \mu_2 r_2, \\ d_{45}'(t) &= -(\mu_4 + \mu_5) d_{45}(t) + \\ &+ d_{35}(t) \mu_3 r_3 + d_{44}(t) \mu_4 r_4 - \mu_4 r_4 z_4(t), \end{aligned}$$

Очевидно, что $d_{ij}(t) = d_{ji}(t)$, $i = 1 \dots 5, j = 1 \dots 5$.

Решение системы (4) нетрудно выполнить при конкретных значениях параметров m_i, r_i и $b_i(t) = b_i$.

Применим предложенную математическую модель в виде автономной системы с РН-распределением времени обслуживания к исследованию демографической ситуации в Российской Федерации.

Предположим, что продолжительность жизни женщины условно можно разделить на пять фаз: средняя продолжительность первой фазы 15 лет, второй фазы – 5 лет, третьей фазы – 10 лет, четвертой фазы – 15 лет и пятой фазы – 30 лет. Поскольку продолжительности фаз τ_i – независимые и экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами μ_i , то тогда

$$\mu_1 = \frac{1}{15}, \mu_2 = \frac{1}{5}, \mu_3 = \frac{1}{10}, \mu_4 = \frac{1}{15}, \mu_5 = \frac{1}{30}.$$

Вторая, третья и четвертая фазы жизни составляют репродуктивный возраст женщины.

Начальной точкой будем считать 2005 г. Исходя из предположений относительно динамики суммарного коэффициента рождаемости, можно сделать прогнозную оценку демографической ситуации. Согласно данным Российского статистического ежегодника [5], суммарный коэффициент рождаемости в 2005 г. составлял 1,287. В последние годы по причине активно проводимой социальной

политики ожидается его повышение до значения 2,2. Для построения оптимистического сценария демографической ситуации положим значение суммарного коэффициента рождаемости 2,2 на всем интервале прогнозирования от 2005 до 2105 гг. Тогда, сохраняя пропорциональность коэффициента рождаемости, можно записать

$$b_2(t) = b_2 = 0,488 \cdot 0,236 \cdot \mu_2 = 0,023,$$

$$b_3(t) = b_3 = 0,488 \cdot 1,409 \cdot \mu_3 = 0,069,$$

$$b_4(t) = b_4 = 0,488 \cdot 0,568 \cdot \mu_4 = 0,018.$$

Будем полагать, что $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$. Согласно данным [5], в начальный момент времени $t_{2005} = 0$ имеем следующие начальные условия:

$$m_1(0) = 10,679, \quad m_2(0) = 6,017, \quad m_3(0) = 11,509,$$

$$m_4(0) = 15,933, \quad m_5(0) = 32,733,$$

где $m_i(t)$, $i = 1 \dots 5$ – численность женщин соответствующей возрастной группы, млн чел.

При данных значениях параметров модели система (3) решена в пакете MathCAD, тем самым построен сценарий изменения численности женщин в каждой возрастной группе на долгосрочную перспективу (до 2105 г.) (см. рисунок). Заметим, что, используя решение системы (4), можно найти вторые начальные моменты в долгосрочной перспективе до 2105 г., из которых затем получить значения дисперсий и среднеквадратических отклонений.



Динамика суммарной численности женщин до 2105 г.

Анализ графика показывает, что при таком предположении о суммарном коэффициенте рождаемости численность женского населения России возрастает. Это означает, что в России необходимо продолжать развитие социальных программ, целью которых является увеличение суммарного коэффициента рождаемости.

Таким образом, предложенная математическая модель демографических процессов в виде пятифазной автономной системы массового обслуживания, а также метод ее исследования могут быть применены для анализа сложившейся демографической ситуации в Российской Федерации и прогнозирования будущих тенденций демографических процессов.

Библиографические ссылки

1. Демографический энциклопедический словарь / под ред. Д. И. Валентя. М. : Сов. энцикл., 1985.
2. Назаров А. А. Теория массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2004.
3. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., испр. М. : Наука, 1986.

4. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969.

5. Российский статистический ежегодник. 2005 / Гос. комитет по статистике Рос. Федерации // Россия : унив. информ. система. URL: <http://uisrussia.msu.ru> (дата обращения: 28.08.2009).

A. A. Nazarov, M. G. Nosova

THE MATHEMATICAL MODEL OF DEMOGRAPHIC PROCESSES RESEARCH IN THE FORM OF A FIVE-PHASE SYSTEM OF MASS SERVICE

The mathematical model of the change process of a demographic situation in the form of five-phase independent system of mass service with unlimited number of devices is presented. The research is carried out by the method of moments. First and second moments of number of the applications served in system are found. The developed model and the method are applied to forecasting process of demographic changes in the Russian Federation.

Keywords: system of mass service, demographic situation, population.

© Назаров А. А., Носова М. Г., 2010

УДК 004.932

М. В. Дамов

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОНА В ОБЛАСТЯХ КАДРА С ОБЪЕКТАМИ МАЛОГО РАЗМЕРА В ВИДЕОПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Представлена общая концепция удаления искусственно наложенных изображений, естественных поврежденных видеоизображения и других объектов малого размера. Разработана классификация искусственно наложенных изображений. Рассматриваются алгоритмы обнаружения особенных точек и поиска движения в приложении к восстановлению видеопоследовательности.

Ключевые слова: поиск движения, видеопоследовательность, особенные точки, текстуры, текстурное заполнение.

В связи с развитием вычислительной техники становится актуальной задача реконструкции видеопоследовательностей: восстановление оригинального изображения под искусственно наложенными графическими объектами (логотипами телевизионных каналов, субтитрами и т. д.), удаление следов повреждения носителя информации (царапины на киноплёнке и т. д.) и других объектов малого размера (изображений на некотором фоне человека, дерева, камня и т. п.). Решение данной задачи в общем виде приведет к снижению затрат на повторное использование видеоматериалов, под которым понимается ремастеринг старых фильмов, ретрансляция материала различными телевизионными каналами с удалением ранее наложенных, но уже неактуальных изображений компьютерной графики, а также случайно попавших в кадр объектов, например, рекламных конструкций.

Наложённые изображения компьютерной графики, встречающиеся в видеоматериалах, можно разделить на следующие виды: телевизионные логотипы – изображения небольшого размера, как правило, размещённые в

одном или нескольких углах кадра или у границ кадра; титры – текстовые области с информацией о создателях фильма, могут быть размещены в любом месте кадра; субтитры – текстовые области у верхней или нижней границ кадра с периодически изменяющимся статическим текстом; бегущая строка – текстовая область у верхней или нижней границ кадра с перемещающимся текстом, перемещение текста осуществляется в соответствии с общепринятыми правилами чтения и письма.

Все разнообразие накладываемых изображений компьютерной графики можно классифицировать по различным признакам. Приведем наиболее часто встречающиеся: по размеру: маленькие (до 5 % экрана), средние (до 20 % экрана), большие (до 35 % экрана); по местоположению: угловые, вытянутые по горизонтальной границе кадра, вытянутые по вертикальной границе кадра, в соответствии со стандартом Substation Alpha или иное; по динамике: статические (изображение всегда постоянно), умеренно изменяющиеся (изображение без изменения размеров), полностью динамические (изображение изменяет