С помощью предложенного подхода можно учитывать причинно-следственные связи процессов обработки информации, влияющие на уровень защищенности информационных ресурсов. Использование факторного анализа является шагом к получению объективных количественных результатов в процессе управления информационной безопасности.

Библиографические ссылки

1. Волкова В. Н., Денисов А. А. Теория систем и системный анализ : учебник для вузов. М. : Изд-во «Юрайт», 2010.

2. Применение факторного анализа и эволюционного алгоритма оптимизации для решения задачи управления информационными рисками систем электронного документооборота / В. Г. Жуков [и др.] // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 3(37). С. 41–50.

3. Беллман Р. Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. М. : Наука, 1969.

4. Антамошкин А. Н., Золотарев В. В. Алгоритм расчета прогнозируемого трафика при проектировании распределенных систем обработки и хранения информации // Вестник СибГАУ. 2006. № 1. С. 5–10.

5. Сафонов А. А. Теория экономического анализа : учеб. пособие / под ред. Л. В. Моисеевой. Владивосток : Изд-во Владивост. гос. ун-та экономики и сервиса.

6. ГОСТ 34.003–90. Информационная технология. Комплекс стандартов на автоматизированные системы. Автоматизированные системы. Термины и определения. М. : Изд-во стандартов, 1990.

7. ГОСТ 27.002–89. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения. М. : Изд-во стандартов, 1989.

8. Половко А. М., Гуров С. В. Основы теории надежности. 2-е изд., перераб. и доп. СПб. : БХВ-Петербург, 2006.

V. V. Zolotarev, E. A. Danilova

ABOUT APPLICATION OF THE FACTORIAL ANALYSIS IN PROBLEMS OF THE AUTOMATED SYSTEMS ELEMENTS SECURITY ESTIMATION

This article considers a possibility of application of the factorial analysis in estimation of information systems security condition. A procedure of selection and classification of factors is described and calculation of influence of factors on size of result indicator is given here as well.

Keywords: risk management, information security risk, factorial analysis.

УДК 534.121.1

А. В. Лопатин, П. О. Деев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ[1]

Решена задача определения основной частоты колебаний трехслойной пластины, у которой три края жестко закреплены, а один край свободен. Вариационные уравнения движения пластины были получены с помощью принципа Гамильтона. Решение этих уравнений было выполнено методом Канторовича и обобщенным методом Галеркина.

Ключевые слова: трехслойная пластина, частота колебаний, обобщенный метод Галеркина.

Исследование изгибных колебаний трехслойных пластин является важным этапом их проектирования. Трехслойные пластины, совершающие изгибные колебания, обладают самыми разнообразными способами закрепления краев. К настоящему времени большинство решений задач об определении частот колебаний трехслойных пластин получены для случая, когда все четыре края шарнирно закреплены. Большой практический интерес представляет задача динамического анализа трехслойной пластины, в которой один из ее краев свободен, а три других жестко закреплены. Для трехслойных пластин рассматриваемая задача не имеет до настоящего времени своего решения. Такая ситуация обусловлена трудностями выбора функций, аппроксимирующих форму пластины в рамках моделей, учитывающих особенности движения трехслойной структуры. Вместе с тем из общей задачи

[1] Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг.».

определения спектра частот колебаний трехслойной пластины можно выделить одну частную задачу, решение которой можно получить в компактном виде. Речь идет о задаче вычисления основной частоты колебаний трехслойной пластины с рассматриваемыми граничными условиями. В настоящей статье решена задача определения основной частоты колебаний трехслойной пластины со свободным краем, которая состоит из двух одинаковых композитных несущих слоев и ортотропного заполнителя. Вариационные уравнения движения пластины были получены с помощью принципа Гамильтона. Решение этих уравнений было выполнено методом Канторовича и обобщенным методом Галеркина.

Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину, состоящую из двух одинаковых композитных слоев и ортотропного заполнителя. Отнесем срединную плоскость пластины к декартовым координатам *xy*. Размеры пластины по осям *x* и *y* обозначим *a* и *b* соответственно. Край пластины при $y = b$ свободен, а остальные три края ($y = 0$, $x = 0$, $x = a$) жестко закреплены.

Получим вариационное уравнение поперечных колебаний трехслойной пластины. Рассмотрим интеграл действия Гамильтона

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L d\tau, \tag{1}$$

где τ – время; $\tau_2 - \tau_1$ – интервал времени, на котором происходит движение пластины; L – функция Лагранжа. Числовые значения функционала S зависят от подынтегральной функции L, которая определяется следующим равенством:

$$L = T - U, \tag{2}$$

где T и U, соответственно, кинетическая энергия и потенциальная энергия изгиба трехслойной пластины, совершающей поперечные колебания. Кинетическая энергия и потенциальная энергия изгиба трехслойной пластины равна [1]:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left[B_\rho \left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)^2 + D_\rho \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \tau}\right)^2 + D_\rho \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \tau}\right)^2 \right] dxdy; \tag{3}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left[\begin{aligned} & D_{11}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \\ & + D_{22}\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)^2 + D_{33}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)^2 + \\ & + K_x\left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + K_y\left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \end{aligned} \right] dxdy, \tag{4}$$

где $w = w(x, y, \tau)$ – прогиб пластины; $\theta_x = \theta_x(x, y, \tau)$, $\theta_y = \theta_y(x, y, \tau)$ – углы поворота нормали к срединной плоскости; D_{11}, D_{12} $(D_{12} = D_{21})$, D_{22}, D_{33} – изгибные жесткости трехслойной пластины; K_x, K_y – сдвиговые жесткости трехслойной пластины; B_ρ – инерциальный параметр; D_ρ – параметр, обусловленный инерцией поворота.

Рассматривая свободные колебания трехслойной пластины, представим прогиб w и углы поворота θ_x, θ_y в следующем виде:

$$w(x, y, \tau) = w(x, y)\sin\omega\tau,$$

$$\theta_x(x, y, \tau) = \theta_x(x, y)\sin\omega\tau,$$

$$\theta_y(x, y, \tau) = \theta_y(x, y)\sin\omega\tau, \tag{5}$$

где ω – круговая частота колебаний; $w(x, y)$, $\theta_x(x, y)$, $\theta_y(x, y)$ – двумерные функции, определяющие форму трехслойной пластины при поперечных колебаниях.

Подставляя уравнения (5) в равенства (3) и (4), получим следующее:

$$T = T_{\max}\cos^2\omega\tau, \; U = U_{\max}\sin^2\omega\tau, \tag{6}$$

где $T_{\max}$ – максимальная кинетическая энергия пластины; $U_{\max}$ – максимальная потенциальная энергия изгиба пластины. Величины $T_{\max}$ и $U_{\max}$ определяются следующими выражениями:

$$T_{\max} = \frac{1}{2}\omega^2\int_0^a\int_0^b \left(B_\rho w^2 + D_\rho \theta_x^{\,2} + D_\rho \theta_y^{\,2}\right) dxdy,$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left[\begin{aligned} & D_{11}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \\ & + D_{22}\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)^2 + D_{33}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)^2 + \\ & + K_x\left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + K_y\left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \end{aligned} \right] dxdy, \tag{7}$$

где $w = w(x, y)$, $\theta_x = \theta_x(x, y)$, $\theta_y = \theta_y(x, y)$.

Подставляя выражения (2) и (6) в равенство (1), получим

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_1} \left(T_{\max}\cos^2\omega\tau - U_{\max}\sin^2\omega\tau\right) d\tau. \tag{8}$$

Будем рассматривать движение пластины за один период колебаний. Тогда

$$\tau_2 - \tau_1 = 2\pi/\omega. \tag{9}$$

С учетом соотношения (9) равенство (8) примет следующий вид:

$$S = T_{\max}\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2\omega\tau\, d\tau - U_{\max}\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega\tau\, d\tau. \tag{10}$$

Выполняя интегрирование по времени, найдем

$$S = \frac{\pi}{\omega}\left(T_{\max} - U_{\max}\right). \tag{11}$$

В соответствии с принципом Гамильтона, интеграл действия (11) для действительного движения трехслойной пластины в промежутке времени $2\pi/\omega$ имеет стационарное значение. Тогда

$$\delta S = 0, \tag{12}$$

где δ – знак вариации.

Принимая во внимание равенство (11), из уравнения (12) будем иметь следующее:

$$\delta\left(T_{\max} - U_{\max}\right) = 0. \tag{13}$$

Подставляя выражение (7) в формулу (13), получим

$$\int_0^a\int_0^b \left[\left(D_{11}\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right) + \right.$$

$$+ \left(D_{12}\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right) +$$

$$+D_{33}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right)+$$

$$+D_{33}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)+K_x\left(\theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\theta_x+$$

$$+K_x\left(\theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+$$

$$+K_y\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta\theta_y+K_y\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)-$$

$$-\omega^2\left(B_\rho w\delta w+D_\rho\theta_x\delta\theta_x+D_\rho\theta_y\delta\theta_y\right)\Big]dxdy=0. \quad (14)$$

Уравнение (14) представляет собой основное вариационное уравнение, которому должны удовлетворять собственные формы действительных поперечных колебаний трехслойной пластины. Получим решение этой задачи с помощью метода Канторовича и обобщенного метода Галеркина [2; 3].

На защемленных краях пластины $x = 0$ и $x = a$ реализуются следующие граничные условия:

$$w=0,\ \theta_x=0,\ \theta_y=0. \quad (15)$$

Метод Канторовича позволяет понизить размерность вариационного уравнения (14), если прогиб w и углы поворота θ_x, θ_y представить в следующем виде:

$$w(x,y)=w(y)U_x(x),$$
$$\theta_x(x,y)=\theta_x(y)V_x(x), \quad (16)$$
$$\theta_y(x,y)=\theta_y(y)V_x(x),$$

где $w(y)$, $\theta_x(y)$, $\theta_y(y)$ – неизвестные функции, аппроксимирующие форму пластины вдоль оси y; $U_x(x)$, $V_x(x)$ – известные функции, аппроксимирующие форму пластины вдоль оси x. Функции $U_x(x)$ и $V_x(x)$ имеют следующий вид:

$$U_x(x)=\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a}-1\right)\left[\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a}-1\right)-12\gamma_x\right],$$

$$V_x(x)=\frac{x}{a}\left(2\frac{x^2}{a^2}-3\frac{x}{a}+1\right), \quad (17)$$

где

$$\gamma_x=D_{11}/K_xa^2. \quad (18)$$

Безразмерный параметр γ_x характеризует сдвиговую податливость трехслойной пластины в направлении оси x. Из равенств (17) следует, что на краях пластины $x = 0$ и $x = a$ функции U_x и V_x равны нулю. Поэтому выбранная аппроксимация прогиба и углов поворота (16) удовлетворяет граничным условиям (15).

Подставляя выражения (16) в формулу (14) и интегрируя результат по x, получим следующее одномерное вариационное уравнение:

$$\int_0^b\Big\{K_x\left(J_{3x}\theta_x+I_{2x}w\right)\delta w+K_yI_{1x}\left(\theta_y+\frac{dw}{dy}\right)\delta\left(\frac{dw}{dy}\right)+$$

$$+\left[\left(D_{11}J_{2x}+K_xJ_{1x}\right)\theta_x+K_xJ_{3x}w+D_{12}I_{3x}\frac{d\theta_y}{dy}\right]\delta\theta_x+$$

$$+D_{33}\left(J_{1x}\frac{d\theta_x}{dy}+J_{3x}\theta_y\right)\delta\left(\frac{d\theta_x}{dy}\right)+$$

$$+\left[\left(D_{33}I_{2x}+K_yI_{1x}\right)\theta_y+K_yI_{1x}\frac{dw}{dy}+D_{33}J_{3x}\frac{d\theta_x}{dy}\right]\delta\theta_y-$$

$$-\left(D_{12}I_{3x}\theta_x+D_{22}I_{1x}\frac{d\theta_x}{dy}\right)\delta\left(\frac{d\theta_y}{dy}\right)-$$

$$-\omega^2\left(B_\rho I_{1x}w\delta w+D_\rho J_{1x}\theta_x\delta\theta_x+D_\rho I_{1x}\theta_y\delta\theta_y\right)\Big\}dy=0, \quad (19)$$

где $w=w(y)$, $\theta_x=\theta_x(y)$, $\theta_y=\theta_y(y)$.

В уравнении (19)

$$I_{1x}=\int_0^a U_x^2dx,\ I_{2x}=\int_0^a\left(\frac{dU_x}{dx}\right)^2dx,$$

$$I_{3x}=\int_0^a U_x\frac{dV_x}{dx}dx,\ J_{1x}=\int_0^a V_x^2dx,$$

$$J_{2x}=\int_0^a\left(\frac{dV_x}{dx}\right)^2dx,\ J_{3x}=\int_0^a V_x\frac{dU_x}{dx}dx. \quad (20)$$

Подставляя выражения (17) в уравнения (20), получим

$$I_{1x}=\frac{a\gamma_{1x}}{630},\ I_{2x}=\frac{2\gamma_{2x}}{105a},\ I_{3x}=-\frac{\gamma_{3x}}{105}, \quad (21)$$

$$J_{1x}=\frac{a}{210},\ J_{2x}=\frac{1}{5a},\ J_{3x}=\frac{\gamma_{3x}}{105}.$$

где

$$\gamma_{1x}=1+108\gamma_x+3\ 024\gamma_x^2,$$

$$\gamma_{2x}=1+84\gamma_x+2\ 520\gamma_x^2,\ \gamma_{3x}=1+42\gamma_x. \quad (22)$$

Выполним далее операцию варьирования функционала (19). В результате преобразований, учитывая равенства (21), получим следующее:

$$\int_0^b\left(K_xI_{2x}w-K_yI_{1x}\frac{d^2w}{dy^2}+K_xJ_{3x}\theta_x-K_yI_{1x}\frac{d\theta_y}{dy}-B_\rho\omega^2I_{1x}w\right)\times$$

$$\times\delta wdy+\left[K_yI_{1x}\left(\theta_y+\frac{dw}{dy}\right)\delta w\right]_0^b=0;$$

$$\int_0^b\Big[K_xJ_{3x}w+\left(D_{11}J_{2x}+K_xJ_{1x}\right)\theta_x-$$

$$-D_{33}J_{1x}\frac{d^2\theta_x}{dy^2}+\left(D_{12}I_{3x}-D_{33}J_{3x}\right)\frac{d\theta_y}{dy}-$$

$$-D_\rho\omega^2J_{1x}\theta_x\Big]\delta\theta_xdy+\left[D_{33}\left(J_{1x}\frac{d\theta_x}{dy}+J_{3x}\theta_y\right)\delta\theta_x\right]_0^b=0; \quad (23)$$

$$\int_0^b\Big[K_yI_{1x}\frac{dw}{dy}+\left(D_{33}J_{3x}-D_{12}I_{3x}\right)\frac{d\theta_x}{dy}+$$

$$+\left(D_{33}I_{2x}+K_yI_{1x}\right)\theta_y-D_{22}I_{1x}\frac{d^2\theta_y}{dy^2}-$$

$$-D_\rho\omega^2I_{1x}\theta_y\Big]\delta\theta_ydy+\left[\left(D_{12}I_{3x}\theta_x+D_{22}I_{1x}\frac{d\theta_y}{dy}\right)\delta\theta_y\right]_0^b=0.$$

При традиционном подходе к решению задачи об определении основной частоты колебаний трехслойной пластины из соотношений (23) в силу произвольности вариаций δw, $\delta\theta_x$, $\delta\theta_y$ можно получить разрешающие дифференциальные уравнения движения вдоль оси y:

$$K_x I_{2x} w - K_y I_{1x} \frac{d^2 w}{dy^2} + K_x J_{3x} \theta_x -$$

$$-K_y I_{1x} \frac{d\theta_y}{dy} - B_\rho \omega^2 I_{1x} w = 0;$$

$$K_x J_{3x} w + \left(D_{11} J_{2x} + K_x J_{1x}\right)\theta_x -$$

$$-D_{33} J_{1x} \frac{d^2\theta_x}{dy^2} + \left(D_{12} I_{3x} - D_{33} J_{3x}\right)\frac{d\theta_y}{dy} - D_\rho \omega^2 J_{1x} \theta_x = 0; \quad (24)$$

$$K_y I_{1x} \frac{dw}{dy} + (D_{33} J_{3x} - D_{12} I_{3x}) \frac{d\theta_x}{dy} +$$

$$+(D_{33} I_{2x} + K_y I_{1x})\theta_y - D_{22} I_{1x} \frac{d^2\theta_y}{dy^2} - D_\rho \omega^2 I_{1x} \theta_y = 0,$$

и естественные граничные условия на краях $y = 0$ и $y = b$:

$$K_y I_{1x} \left(\theta_y + \frac{dw}{dy}\right)\delta w = 0,$$

$$D_{33}\left(J_{1x} \frac{d\theta_x}{dy} + J_{3x}\theta_y\right)\delta\theta_x = 0,$$

$$\left(D_{12} I_{3x}\theta_x + D_{22} I_{1x} \frac{d\theta_y}{dy}\right)\delta\theta_y = 0. \quad (25)$$

Для случая, когда край $y = 0$ жестко закреплен, а край $y = b$ свободен, граничные условия (25) примут вид

$$y = 0,\ \ w = 0,\ \ \theta_x = 0,\ \ \theta_y = 0, \quad (26)$$

$$y = b,\ \ K_y I_{1x}\left(\theta_y + \frac{dw}{dy}\right) = 0,$$

$$D_{33}\left(J_{1x} \frac{d\theta_x}{dy} + J_{3x}\theta_y\right) = 0,$$

$$D_{12} I_{3x}\theta_x + D_{22} I_{1x} \frac{d\theta_y}{dy} = 0.. \quad (27)$$

Уравнения (27) означают, что на краю $y = b$ обращаются в ноль перерезывающая сила, крутящий момент и изгибающий момент.

Рассматриваемая задача определения первой частоты колебаний может быть решена с помощью обобщенного метода Галеркина [3]. Для реализации этого метода необходимо воспользоваться уравнениями (23). В соответствии с основной идеей метода Галеркина заменим функции $w(y)$, $\theta_x(y)$ и $\theta_y(y)$ приближенными аналитическими выражениями, которые достоверно аппроксимируют первую форму колебаний трехслойной пластины вдоль оси y. В качестве таких аппроксимирующих функций можно принять функции, полученные при решении задачи об изгибе консольно закрепленной балки под действием постоянной нагрузки [4]. Представим $w(y)$, $\theta_x(y)$, $\theta_y(y)$ в следующем виде:

$$w(y) = F U_y(y),\ \theta_x(y) = T_x U_y(y),$$

$$\theta_y(y) = T_y V_y(y), \quad (28)$$

где F, T_x, T_y – неизвестные числа; $U_y(y)$, $V_y(y)$ – аппроксимирующие функции, определяемые выражениями

$$U_y(y) = \frac{y}{b}\left[\frac{y^3}{b^3} - 4\frac{y^2}{b^2} + 6\frac{y}{b} - 12\gamma_y\left(\frac{y}{b} - 2\right)\right],$$

$$V_y(y) = \frac{y}{b}\left[\frac{y^2}{3b^2} - \frac{y}{b} + 1\right], \quad (29)$$

где

$$\gamma_y = D_{22} / K_y b^2. \quad (30)$$

Безразмерный параметр γ_y характеризует сдвиговую податливость трехслойной пластины в направлении y.

Вариации функций, определяемых равенствами (28), имеют вид

$$\delta w = U_y \delta F,\ \delta\theta_x = U_y \delta T_x,\ \delta\theta_y = V_y \delta T_y. \quad (31)$$

Подставляя равенства (28) и (31) в выражения (23), получим, учитывая произвольность вариаций δF, δT_x и δT_y, разрешающие уравнения обобщенного метода Галеркина:

$$\int_0^b \left[\begin{aligned}&\left(K_x I_{2x} U_y - K_y I_{1x}\frac{d^2 U_y}{dy^2}\right)F + \\ &+K_x J_{3x} U_y T_x - K_y I_{1x}\frac{dV_y}{dy}T_y - B_\rho \omega^2 I_{1x} U_y F\end{aligned}\right]\times$$

$$\times U_y dy + \left[R(y)\right]_0^b = 0;$$

$$\int_0^b \left\{K_x J_{3x} U_y F + \left[\left(D_{11} J_{2x} + K_x J_{1x}\right)U_y - D_{33} J_{1x}\frac{d^2 U_y}{dy^2}\right]T_x + \right.$$

$$\left. + \left(D_{12} I_{3x} - D_{33} J_{3x}\right)\frac{dV_y}{dy}T_y - D_\rho \omega^2 J_{1x} U_y T_x\right\}\times$$

$$\times U_y dy + \left[R_x(y)\right]_0^b = 0; \quad (32)$$

$$\int_0^b \left\{K_y I_{1x}\frac{dU_y}{dy}F + \left(D_{33} J_{3x} - D_{12} I_{3x}\right)\frac{dU_y}{dy}T_x + \right.$$

$$\left. + \left[\left(D_{33} I_{2x} + K_y I_{1x}\right)V_y - D_{22} I_{1x}\frac{d^2 V_y}{dy^2}\right]T_y - D_\rho \omega^2 I_{1x} V_y\right\}\times$$

$$\times V_y dy + \left[R_y(y)\right]_0^b = 0,$$

где

$$R(y) = K_y I_{1x}\left(V_y T_y + \frac{dU_y}{dy}F\right)U_y,$$

$$R_x(y) = D_{33}\left(J_{1x}\frac{dU_y}{dy}T_x + J_{3x} V_y T_y\right)U_y,$$

$$R_y(y) = \left(D_{12} I_{3x} U_y T_x + D_{22} I_{1x}\frac{dV_y}{dy}T_y\right)V_y. \quad (33)$$

При $y = 0, U_y = 0$ и $V_y = 0$. Тогда из равенств (28) следует, что $w(0) = 0$, $\theta_x(0) = 0$, $\theta_y(0) = 0$. Таким образом, выбранная аппроксимация (28) и (29) удовлетворяет граничным условиям (26) на защемленном краю трехслойной пластины. При $y = b$ для функций U_y и V_y и их первых производных справедливы следующие равенства:

$$U_y = 3\left(1 + 4\gamma_y\right),\ V_y = 1/3,$$

$$dU_y/dy = 4/l,\ dV_y/dy = 0. \quad (34)$$

Подставляя равенства (28) при $y = b$ в левые части уравнений (27) и учитывая формулы (34), получим три не равные нулю выражения:

$$K_y I_{1x}\left(\frac{1}{3}T_y + \frac{4}{l}F\right) \neq 0,\ D_{33}\left(\frac{4}{l}J_{1x}T_x + \frac{1}{3}J_{3x}T_y\right) \neq 0,$$

$$3D_{12}I_{3x}T_x\left(1+4\gamma_y\right)\neq 0. \qquad (35)$$

Подразумевается, что в общем случае $F\neq 0$, $T_x\neq 0$, $T_y\neq 0$. Из выражений (35) следует, что выбранная аппроксимация (28) и (29) не удовлетворяет традиционным граничным условиям (27) на свободном краю трехслойной пластины. Однако обобщенный метод Галеркина не требует обязательного точного удовлетворения функциями U_y и V_y граничных условий на свободном краю пластины. Уравнения (32) автоматически обеспечивают приближенное выполнение граничных условий при $y=b$.

Величины $\left[R(y)\right]_0^b$, $\left[R_x(y)\right]_0^b$, $\left[R_y(y)\right]_0^b$, входящие в уравнения (32), могут быть представлены в следующем виде:

$$\left[R(y)\right]_0^b=R(b)-R(0),\ \left[R_x(y)\right]_0^b=R_x(b)-R_x(0),$$

$$\left[R_y(y)\right]_0^b=R_y(b)-R_y(0). \qquad (36)$$

Подставляя $y=b$ в уравнения (33) и учитывая, что $U_y=0$ и $V_y=0$, получим $R(0)=0$, $R_x(0)=0$ и $R_y(0)=0$.

Тогда из формул (36) будем иметь:

$$\left[R(y)\right]_0^b=R(b),\ \left[R_x(y)\right]_0^b=R_x(b),$$

$$\left[R_y(y)\right]_0^b=R_y(b). \qquad (37)$$

Выполним в уравнениях (32) операцию интегрирования по y. В результате преобразований, учитывая равенства (37), получим

$$\left(K_xI_{2x}I_{1y}-K_yI_{1x}I_{2y}\right)F+K_xJ_{3x}I_{1y}T_x-$$

$$-K_yI_{1x}I_{3y}T_y-B_\rho\omega^2I_{1x}I_{1y}F+R(b)=0,$$

$$K_xJ_{3x}I_{1y}F+\left[\left(D_{11}J_{2x}+K_xJ_{1x}\right)I_{1y}-D_{33}J_{1x}I_{2y}\right]T_x+$$

$$+\left(D_{12}I_{3x}-D_{33}J_{3x}\right)I_{3y}T_y-D_\rho\omega^2J_{1x}I_{1y}T_y+R_x(b)=0, \qquad (38)$$

$$K_yI_{1x}J_{3y}F+\left(D_{33}J_{3x}-D_{12}I_{3x}\right)J_{3y}T_x+$$

$$+\left[\left(D_{33}I_{2x}+K_yI_{1x}\right)J_{1y}-D_{22}I_{1x}J_{2y}\right]T_y-$$

$$-D_\rho\omega^2I_{1x}J_{1y}T_y+R_y(b)=0,$$

где

$$I_{1y}=\int_0^b U_y^2dy,\ I_{2y}=\int_0^b U_y\frac{d^2U_y}{dy}dy,\ I_{3y}=\int_0^b U_y\frac{dV_y}{dy}dy,$$

$$J_{1y}=\int_0^b V_y^2dy,\ J_{2y}=\int_0^b V_y\frac{d^2V_y}{dy}dy,\ J_{3y}=\int_0^b V_y\frac{dU_y}{dy}dy. \qquad (39)$$

Подставляя выражения (29) в формулы (39), найдем

$$I_{1y}=\frac{8b}{315}\gamma_{1y},\ I_{2y}=-\frac{12}{35b}\gamma_{2y},\ I_{3y}=\frac{\gamma_{3y}}{35},$$

$$J_{1y}=\frac{b}{14},\ J_{2y}=-\frac{1}{5b},\ J_{3y}=\frac{6}{35}\bar{\gamma}_{3y}, \qquad (40)$$

где

$$\gamma_{1y}=91+999\gamma_y+3\,024\gamma_y^2,\ \gamma_{2y}=-5+28\gamma_y+560\gamma_y^2,$$

$$\gamma_{3y}=5+56\gamma_y,\ \bar{\gamma}_{3y}=5+14\gamma_y. \qquad (41)$$

Определим значения величин $R(b)$, $R_x(b)$, $R_y(b)$, входящих в уравнения (38). Полагая в уравнениях (33) $y=b$ и учитывая равенства (34), будем иметь следующее:

$$R(b)=\frac{12}{b}\left(1+4\gamma_y\right)K_yI_{1x}F+\left(1+4\gamma_y\right)K_yI_{1x}T_y,$$

$$R_x(b)=\frac{12}{b}\left(1+4\gamma_y\right)D_{33}J_{1x}T_x+\left(1+4\gamma_y\right)D_{33}J_{3x}T_y, \qquad (42)$$

$$R_y(b)=\left(1+4\gamma_y\right)D_{12}J_{3x}T_x.$$

Подставляя выражения (42) в уравнения (38), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left(K_xI_{2x}I_{1y}-K_xI_{1x}\bar{I}_{2y}\right)F+K_xJ_{3x}I_{1y}T_x-$$

$$-K_yI_{1x}\bar{I}_{2y}T_y-B_\rho\omega^2I_{1x}I_{1y}F=0,$$

$$K_xJ_{3x}I_{1y}F+\left[\left(D_{11}J_{2x}+K_xJ_{1x}\right)I_{1y}-D_{33}J_{1x}\bar{I}_{2y}\right]T_x+$$

$$+\left(D_{12}I_{3x}I_{3y}-D_{33}J_{3x}\bar{I}_{3y}\right)T_y-D_\rho\omega^2J_{1x}I_{1y}T_x=0, \qquad (43)$$

$$K_yI_{1x}J_{3y}F+\left(D_{33}J_{3x}J_{3y}-D_{12}I_{3x}\bar{J}_{3y}\right)T_x+$$

$$+\left[\left(D_{33}I_{2x}+K_yI_{1x}\right)J_{1y}-D_{22}I_{1x}J_{2y}\right]T_y-D_\rho\omega^2I_{1x}J_{1y}T_y=0,$$

где

$$\bar{I}_{2y}=I_{2y}-\frac{12}{b}\left(1+4\gamma_y\right),\ \bar{I}_{3y}=I_{3y}-\left(1+4\gamma_y\right),$$

$$\bar{J}_{3y}=J_{3y}-\left(1+4\gamma_y\right). \qquad (44)$$

Учитывая выражения (40) и (41), преобразуем равенства (44) к виду

$$\bar{I}_{2y}=-\frac{24}{35b}\bar{\gamma}_{2y},\ \bar{I}_{3y}=-J_{3y},\ \bar{J}_{3y}=-I_{3y}, \qquad (45)$$

где

$$\bar{\gamma}_{2y}=15+84\gamma_y+280\gamma_y^2. \qquad (46)$$

Приведем уравнения (43) к уравнениям с безразмерными коэффициентами. Для этого подставим равенства (40), (45) в формулы (43) и затем умножим каждое уравнение на величину $396900ab/\sqrt{D_{11}D_{22}}$. В результате преобразований получим

$$a_{11}F+a_{12}F_x+a_{13}F_y-\eta b_{11}F=0,$$

$$a_{21}F+a_{22}F_x+a_{23}F_y-\eta b_{22}F=0, \qquad (47)$$

$$a_{31}F+a_{32}F_x+a_{33}F_y-\eta b_{33}F=0,$$

где

$$F_x=aT_x,\ F_y=bT_y. \qquad (48)$$

Коэффициенты системы равны

$$a_{11}=48\left(4\alpha\frac{\gamma_{2x}\gamma_{1y}}{\gamma_x}+\frac{9}{\alpha}\frac{\gamma_{1x}\bar{\gamma}_{2y}}{\gamma_y}\right),$$

$$a_{22}=48\left(\alpha\frac{\gamma_{3x}\gamma_{1y}}{\gamma_x}+27\beta_{33}\bar{\gamma}_{2y}\right),$$

$$a_{33}=9\left(\frac{\gamma_{1x}\bar{\gamma}_{3y}}{\alpha\gamma_y}+60\beta_{33}\gamma_{2x}\right),$$

$$a_{12}=a_{21}=96\alpha\frac{\gamma_{3x}\gamma_{1y}}{\gamma_x}, \qquad (49)$$

$$a_{13}=a_{31}=\frac{108}{\alpha}\frac{\gamma_{1x}\bar{\gamma}_{3y}}{\gamma_y},$$

$$a_{23}=a_{32}=108\gamma_{3x}\left(6\beta_{33}\bar{\gamma}_{3y}-\beta_{12}\gamma_{3y}\right),$$

$$b_{11}=16\gamma_{1x}\gamma_{1y},\ b_{22}=48r_x\gamma_{1y},\ b_{33}=45r_y\gamma_{1x}.$$

В равенствах (49) введены следующие обозначения:

$$\alpha = \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}\frac{b^2}{a^2},\ \beta_{12} = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}},\ \beta_{33} = \frac{D_{33}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}, \quad (50)$$

$$r_x = \frac{D_\rho}{B_\rho a^2},\ r_y = \frac{D_\rho}{B_\rho b^2}. \quad (51)$$

Величина η, входящая в уравнения (47) и определяемая равенством

$$\eta = \frac{B_\rho \omega^2 a^2 b^2}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}, \quad (52)$$

является безразмерным частотным параметром.

Таким образом, задача определения основной частоты колебаний рассматриваемой трехслойной пластины сведена к вычислению параметра η, при котором однородная система (47) будет иметь нетривиальное решение. Приравняем к нулю определитель системы (47), т. е.

$$\det\begin{Bmatrix} a_{11}-\eta b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\eta b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\eta b_{33} \end{Bmatrix} = 0. \quad (53)$$

Из условия (53), учитывая, что $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$, получим характеристический полином третьей степени

$$H_3\eta^3 - H_2\eta^2 + H_1\eta - H_0 = 0, \quad (54)$$

где

$$\begin{gathered} H_3 = b_{11}b_{22}b_{33}, \\ H_2 = a_{11}b_{22}b_{33} + a_{22}b_{11}b_{33} + a_{33}b_{11}b_{22}, \\ H_1 = b_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}^2\right) + \\ +b_{22}\left(a_{11}a_{33} - a_{13}^2\right) + b_{33}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right), \\ H_0 = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - \\ -a_{13}^2 a_{22} - a_{23}^2 a_{11} - a_{12}^2 a_{33}. \end{gathered} \quad (55)$$

Уравнение (54) имеет три вещественных корня. Наименьший из этих корней будет определять требуемый частотный параметр η.

Если не учитывать инерцию поворота, то для вычисления параметра η можно получить простую формулу. Пусть $D_\rho = 0$. Тогда из формул (51) следует, что $r_x = 0$ и $r_y = 0$. В этом случае коэффициенты b_{22} и b_{33} обратятся в ноль, и из уравнений (55) будем иметь следующее:

$$H_3 = 0,\ H_2 = 0,\ H_1 = b_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}^2\right). \quad (56)$$

Подставляя равенства (56) в уравнение (54), получим

$$\eta = H_0 / H_1. \quad (57)$$

Величина частотного параметра з, определяемого из уравнения (54) или с помощью формулы (57), зависит от безразмерных параметров γ_x, γ_y, α, β_{12}, β_{33}, r_x, r_y, которые содержат всю информацию о жесткостных, геометрических и инерциальных характеристиках трехслойной пластины с композитными несущими слоями и ортотропным заполнителем.

При известном частотном параметре η основная частота колебаний трехслойной пластины может быть получена из равенства (52) и представлена в следующем виде:

$$\omega = \frac{\lambda}{ab}\sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}D_{22}}}{B_\rho}}, \quad (58)$$

где

$$\lambda = \sqrt{\eta}. \quad (59)$$

Получим формулы для вычисления изгибных жесткостей D_{mn} $\left(mn = 11, 12, 22, 33\right)$, сдвиговых жесткостей K_x, K_y и инерциальных параметров B_ρ, D_ρ. Рассмотрим структуру трехслойной пластины. Пусть суммарная толщина несущих слоев равна t, а толщина заполнителя равна h. Материал несущих слоев характеризуется коэффициентами жесткости $A_{mn}^{(t)}$ $\left(mn = 11,\ 12,\ 22,\ 33\right)$, трансверсальными модулями сдвига $G_{xz}^{(t)}$, $G_{yz}^{(t)}$ и плотностью ρ_t. Аналогичные характеристики заполнителя обозначим $A_{mn}^{(h)}$ $\left(mn = 11,\ 12,\ 22,\ 33\right)$, $G_{xz}^{(h)}$, $G_{yz}^{(h)}$, ρ_h.

В рамках сдвиговой теории, используемой в настоящей работе для описания движения трехслойной пластины, изгибные и сдвиговые жесткости, а также инерциальные параметры могут быть определены по следующим формулам:

$$D_{mn} = A_{mn}^{(t)}\frac{t^3}{12}\xi_{mn},\ \left(mn = 11,\ 12,\ 22,\ 33\right), \quad (60)$$

$$K_x = G_{xz}^{(t)} t \zeta_{xz},\ K_y = G_{yz}^{(t)} t \zeta_{yz}, \quad (61)$$

$$B_\rho = \rho_t t \zeta_\rho,\ D_\rho = \rho_t \frac{t^3}{12}\zeta_\rho, \quad (62)$$

где

$$\xi_{mn} = \xi + \frac{A_{mn}^{(h)}}{A_{mn}^{(t)}}\frac{h^3}{t^3}, \quad (63)$$

$$\xi = 1 + 3\frac{h}{t} + 3\frac{h^2}{t^2}, \quad (64)$$

$$\zeta_{xz} = \left(1+\frac{h}{t}\right)^2\left(1+\frac{h}{t}\frac{G_{xz}^{(t)}}{G_{xz}^{(h)}}\right)^{-1},$$

$$\zeta_{yz} = \left(1+\frac{h}{t}\right)^2\left(1+\frac{h}{t}\frac{G_{yz}^{(t)}}{G_{yz}^{(h)}}\right)^{-1}, \quad (65)$$

$$\zeta_\rho = 1 + \frac{\rho_h}{\rho_t}\frac{h}{t},\ \xi_\rho = \xi + \frac{\rho_h}{\rho_t}\frac{h^3}{t^3}. \quad (66)$$

Получим расчетные формулы для параметров γ_x, γ_y, α, β_{12}, β_{33}, r_x, r_y. Подставляя формулы (60), (61) в выражения (18) и (30), будем иметь следующее:

$$\gamma_x = \frac{1}{12}\frac{A_{11}^{(t)}}{G_{xz}^{(t)}}\left(\frac{t^2}{a^2}\right)\frac{\xi_{11}}{\zeta_{xz}},\ \gamma_y = \frac{1}{12}\frac{A_{22}^{(t)}}{G_{yz}^{(t)}}\left(\frac{t^2}{b^2}\right)\frac{\xi_{22}}{\zeta_{yz}}. \quad (67)$$

Из равенств (50) с учетом соотношения (60) получим

$$\alpha = \sqrt{\frac{A_{11}^{(t)}}{A_{22}^{(t)}}}\sqrt{\frac{\xi_{11}}{\xi_{22}}}\frac{b^2}{a^2},\ \beta_{12} = \frac{A_{12}^{(t)}}{\sqrt{A_{11}^{(t)}A_{22}^{(t)}}}\frac{\xi_{12}}{\sqrt{\xi_{11}\xi_{22}}},$$

$$\beta_{33} = \frac{A_{33}^{(t)}}{\sqrt{A_{11}^{(t)}A_{22}^{(t)}}}\frac{\xi_{33}}{\sqrt{\xi_{11}\xi_{22}}}. \quad (68)$$

Подставляя равенства (62) в формулы (51), найдем

$$r_x = \frac{1}{12}\frac{t^2}{a^2}\frac{\xi_\rho}{\zeta_\rho},\ r_y = \frac{1}{12}\frac{t^2}{b^2}\frac{\xi_\rho}{\zeta_\rho}. \quad (69)$$

Формула для частоты колебаний (58) с учетом равенства (60) и первого из равенств (62) примет следующий вид:

$$\omega = \lambda \frac{t}{ab} \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{A_{11}^{(t)} A_{22}^{(t)}}}{\rho_t}} \sqrt{\frac{\sqrt{\xi_{11}\xi_{22}}}{\zeta_\rho}}. \qquad (70)$$

В трехслойных пластинах часто используется так называемый легкий заполнитель, обладающий малой жесткостью в плоскости xy. Для такой структуры можно принять $A_{mn}^{(h)} = 0 \; (mn = 11, 12, 22, 33)$. Тогда из формулы (63) следует, что $\xi_{mn} = \xi \; (mn = 11, 12, 22, 33)$. В этом случае равенства (67) и (68) примут следующий вид:

$$\gamma_x = \frac{1}{12} \frac{A_{11}^{(t)}}{G_{xz}^{(t)}} \left(\frac{t^2}{a^2}\right) \frac{\xi}{\zeta_{xz}}, \; \gamma_y = \frac{1}{12} \frac{A_{22}^{(t)}}{G_{yz}^{(t)}} \left(\frac{t^2}{b^2}\right) \frac{\xi}{\zeta_{yz}}, \qquad (71)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{A_{11}^{(t)}}{A_{22}^{(t)}} \frac{b^2}{a^2}}, \; \beta_{12} = \frac{A_{12}^{(t)}}{\sqrt{A_{11}^{(t)} A_{22}^{(t)}}}, \; \beta_{33} = \frac{A_{33}^{(t)}}{\sqrt{A_{11}^{(t)} A_{22}^{(t)}}}. \qquad (72)$$

Параметры r_x и r_y остаются без изменений.

Подставляя в формулу (70) $\xi_{11} = \xi_{22} = \xi$, получим для определения основной частоты колебаний трехслойной пластины с легким заполнителем следующее выражение:

$$\omega = \lambda \frac{t}{ab} \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{A_{11}^{(t)} A_{22}^{(t)}}}{\rho_t}} \sqrt{\frac{\xi}{\zeta_\rho}}. \qquad (73)$$

Как уже отмечалось, задача определения основной частоты колебаний трехслойной пластины со свободным краем не имеет решения до настоящего времени. Поэтому для верификации полученных в статье формул выполним сравнение вычисленных с их помощью частот с частотами, найденными методом конечных элементов.

Рассмотрим пластину с ортотропными несущими слоями и легким ортотропным заполнителем. Для такой пластины расчетные формулы (72), (71), (69) примут следующий вид:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\overline{E}_x^{(t)}}{\overline{E}_y^{(t)}} \frac{b^2}{a^2}}, \; \beta_{12} = \frac{\overline{E}_x^{(t)} \nu_{xy}^{(t)}}{\sqrt{\overline{E}_x^{(t)} \overline{E}_y^{(t)}}}, \; \beta_{33} = \frac{G_{xy}^{(t)}}{\sqrt{\overline{E}_x^{(t)} \overline{E}_y^{(t)}}},$$

$$\gamma_x = \frac{1}{12} \frac{\overline{E}_x^{(t)}}{G_{xz}^{(t)}} \left(\frac{t^2}{a^2}\right) \frac{\xi}{\zeta_{xz}}, \; \gamma_y = \frac{1}{12} \frac{\overline{E}_y^{(t)}}{G_{yz}^{(t)}} \left(\frac{t^2}{b^2}\right) \frac{\xi}{\zeta_{yz}}, \qquad (74)$$

$$r_x = \frac{1}{12} \frac{t^2}{a^2} \frac{\xi_\rho}{\zeta_\rho}, \; r_y = \frac{1}{12} \frac{t^2}{b^2} \frac{\xi_\rho}{\zeta_\rho}.$$

Выражение для частоты колебаний следует из равенства (73), т. е.

$$\omega = \lambda \frac{t}{ab} \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{\overline{E}_x^{(t)} \overline{E}_y^{(t)}}}{\rho_t}} \sqrt{\frac{\xi}{\zeta_\rho}}. \qquad (75)$$

Пусть материал несущих слоев обладает следующими параметрами: $E_x^{(t)} = 54{,}551$ ГПа, $E_y^{(t)} = 54{,}551$ ГПа, $G_{xy}^{(t)} = 20{,}668$ ГПа, $\nu_{xy}^{(t)} = 0{,}319\,7$, $\nu_{yx}^{(t)} = 0{,}319\,7$, $G_{xz}^{(t)} = 3{,}779$ ГПа, $G_{yz}^{(t)} = 3{,}779$ ГПа, $\rho_t = 1\,500$ кг/м^3. Материал заполнителя имеет $G_{xz}^{(h)} = 440$ МПа, $G_{yz}^{(h)} = 220$ МПа $\rho_h = 83$ кг/м^3. Пусть размеры пластины в плане принимают следующие значения: $b = 1$ м, $a = 1, 3, 5$ м. Толщина несущих слоев $t = 0{,}001$ м, а толщина заполнителя $h = 0{,}01; 0{,}05; 0{,}1$ м. Для пластины с рассмотренными выше характеристиками найдем частоту колебаний $f = \omega / 2\pi$. Входящий в формулу (75) безразмерный частотный параметр λ (напомним, что $\lambda = \sqrt{\eta}$) определяется из решения уравнения (54). Значения частот, определенных для различных значений a и h, приведены в табл. 1. Далее получим значения основной частоты колебаний рассматриваемой трехслойной пластины с помощью метода конечных элементов. Для этих целей воспользуемся пакетом COSMOS/M [5]. Моделирование трехслойной пластины было выполнено с помощью конечного элемента SHELL4L, который позволяет рассчитывать трехслойные конструкции. Частоты колебаний рассматриваемой трехслойной пластины, найденные методом конечных элементов, приведены в табл. 2. Сравнение данных таблиц позволяет сделать вывод, что разница между частотами, вычисленными разными способами, не превышает 5 %.

Таким образом, решена задача определения основной частоты колебаний трехслойной пластины, три края которой жестко закреплены, а один свободен. Для решения уравнений движения был использован метод Канторовича и обобщенный метод Галеркина. Была выполнена верификация разработанной модели вычисления основной частоты колебаний. Определение основной частоты колебаний трехслойной пластины может быть надежно, без значительных вычислительных усилий выполнено по формулам, предложенным в статье. Полученные формулы окажутся особенно полез-

Таблица 1

Частоты колебаний, вычисленные с учетом инерции поворота

h, м	a, м		
	1	3	5
0,01	102,23	21,771	17,017
0,05	304,381	66,563	52,124
0,10	440,017	99,286	77,931

Таблица 2

Частоты колебаний, вычисленные методом конечных элементов

h, м	a, м		
	1	3	5
0,01	99,759	21,614	16,911
0,05	293,335	65,816	51,694
0,10	420,151	97,888	77,167

ными при проектировании трехслойных пластин, когда ограничения накладываются на основную частоту колебаний.

Библиографические ссылки

1. Vasiliev V. V. Mechanics of composite structures. Taylor & Francis, 1993.

2. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate methods of higher analysis. New York : John Wiley & Sons, 1958.

3. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М., Машиностроение, 1965.

4. Пратусевич Я. А. Вариационные принципы в строительной механике. М. ; Л. : ОГИЗ, 1948.

5. COSMOS/M : User Guide // Structural Research & Analysis Corporation, 2003.

A. V. Lopatin, P. O. Deev

DETERMINATION OF THE FUNDAMENTAL FREQUENCY FOR RECTANGULAR SANDWICH PLATE WITH FREE EDGE

In the article the problem of determination of the fundamental frequency of sandwich plate with three clamped edges and one free edge is solved. Variation equations of plate dynamics were obtained with the help of Hamilton principle. The equations were solved via Kantorovich method and via generalized Galerkin method.

Keywords: sandwich plate, vibration frequency, generalized Galerkin method.

УДК 519.62

В. А. Нестеров

МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ БАЛКИ С НИЗКОЙ ТАНСВЕРСАЛЬНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Разработан конечный элемент балки, в расчете которой учитываются трансверсальные сдвиговые деформации. При вариационной реализации метода конечных элементов получена матрица жесткости пространственной балки. В качестве одних из основных узловых кинематических параметров присутствуют углы трансверсального сдвига.

Ключевые слова: балка, метод конечных элементов, трансверсальный сдвиг.

В последние годы все чаще композитные конструкции используются в производстве космической техники. Композиты обладают высокой удельной прочностью и жесткостью, а также способностью к направленному изменению механических свойств в соответствии с назначением и условиями эксплуатации конструкции. В частности, космические антенны представляют собой композитные рамные конструкции балочного типа. Вместе с тем композитные конструкции, в том числе и балки, отличаются рядом особенностей, которые должны быть учтены при проектировании и расчете. Основная среди них – низкая сдвиговая жесткость по отношению к трансверсальным напряжениям. Учет указанной особенности при реализации численного (конечно-элементного) расчета приводит к повышению порядка разрешающих уравнений за счет введения в рассмотрение углов трансверсального сдвига. Это обстоятельство отличает матрицу жесткости, полученную в работе, от традиционных балочных конечных элементов.

Рассмотрим пространственную задачу об изгибе слоистой балки с низкой жесткостью при трансверсальном сдвиге. Для решения воспользуемся вариационным алгоритмом метода конечных элементов. Уравнения равновесия конечного элемента балки получим вариационным методом, для этого выделим элемент длиной l и запишем для него выражение полной потенциальной энергии

$$E = U + \Pi, \tag{1}$$

где U – потенциальная энергия деформации; Π – потенциал внешних сил.

В качестве исходного для U возьмем соответствующее выражение из линейной теории упругости трехмерного тела: