ными при проектировании трехслойных пластин, когда ограничения накладываются на основную частоту колебаний.

Библиографические ссылки

1. Vasiliev V. V. Mechanics of composite structures. Taylor & Francis, 1993.

2. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate methods of higher analysis. New York : John Wiley & Sons, 1958.

3. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М., Машиностроение, 1965.

4. Пратусевич Я. А. Вариационные принципы в строительной механике. М. ; Л. : ОГИЗ, 1948.

5. COSMOS/M : User Guide // Structural Research & Analysis Corporation, 2003.

A. V. Lopatin, P. O. Deev

DETERMINATION OF THE FUNDAMENTAL FREQUENCY FOR RECTANGULAR SANDWICH PLATE WITH FREE EDGE

In the article the problem of determination of the fundamental frequency of sandwich plate with three clamped edges and one free edge is solved. Variation equations of plate dynamics were obtained with the help of Hamilton principle. The equations were solved via Kantorovich method and via generalized Galerkin method.

Keywords: sandwich plate, vibration frequency, generalized Galerkin method.

УДК 519.62

В. А. Нестеров

МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ БАЛКИ С НИЗКОЙ ТАНСВЕРСАЛЬНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Разработан конечный элемент балки, в расчете которой учитываются трансверсальные сдвиговые деформации. При вариационной реализации метода конечных элементов получена матрица жесткости пространственной балки. В качестве одних из основных узловых кинематических параметров присутствуют углы трансверсального сдвига.

Ключевые слова: балка, метод конечных элементов, трансверсальный сдвиг.

В последние годы все чаще композитные конструкции используются в производстве космической техники. Композиты обладают высокой удельной прочностью и жесткостью, а также способностью к направленному изменению механических свойств в соответствии с назначением и условиями эксплуатации конструкции. В частности, космические антенны представляют собой композитные рамные конструкции балочного типа. Вместе с тем композитные конструкции, в том числе и балки, отличаются рядом особенностей, которые должны быть учтены при проектировании и расчете. Основная среди них – низкая сдвиговая жесткость по отношению к трансверсальным напряжениям. Учет указанной особенности при реализации численного (конечно-элементного) расчета приводит к повышению порядка разрешающих уравнений за счет введения в рассмотрение углов трансверсального сдвига. Это обстоятельство отличает матрицу жесткости, полученную в работе, от традиционных балочных конечных элементов.

Рассмотрим пространственную задачу об изгибе слоистой балки с низкой жесткостью при трансверсальном сдвиге. Для решения воспользуемся вариационным алгоритмом метода конечных элементов. Уравнения равновесия конечного элемента балки получим вариационным методом, для этого выделим элемент длиной l и запишем для него выражение полной потенциальной энергии

$$E = U + \Pi, \quad (1)$$

где U – потенциальная энергия деформации; Π – потенциал внешних сил.

В качестве исходного для U возьмем соответствующее выражение из линейной теории упругости трехмерного тела:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \\ + \tau_{xy} e_{xy} + \tau_{yz} e_{yz} + \tau_{xz} e_{xz})\, dxdydz, \quad (2)$$

где V – объем элемента балки; σ_x, σ_y, σ_z – нормальные напряжения; τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} – касательные напряжения; e_x, e_y, e_z – линейные деформации вдоль осей системы координат; e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} – деформации сдвига в соответствующих плоскостях.

Будем полагать, что главные направления ортотропии материала совпадают с осями локальной системы координат, ось X которой совпадает с продольной осью балки, а две другие (Y и Z) составляют с первой декартову систему.

В этом случае физические соотношения, представляющие собой закон Гука для ортотропного материала, имеют следующий вид:

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy}\frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{xz}\frac{\sigma_z}{E_z}, \quad (3)$$

$$e_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{yx}\frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{yz}\frac{\sigma_z}{E_z}, \quad (4)$$

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E_z} - \mu_{zx}\frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{zy}\frac{\sigma_y}{E_y}, \quad (5)$$

$$e_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}, \quad (6)$$

$$e_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}}, \quad (7)$$

$$e_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}}, \quad (8)$$

где $E_{x(y,z)}$ – модуль упругости соответствующего направления; $G_{xy\,(yz,\,xz)}$ – модуль сдвига в соответствующей плоскости; μ_{xy}, μ_{yx}, μ_{yz}, μ_{zy}, μ_{xz}, μ_{zx} – коэффициенты Пуассона.

Имеет место свойство симметрии упругих постоянных:

$$E_x\mu_{xy} = E_y\mu_{yx};\quad E_x\mu_{xz} = E_z\mu_{zx};\quad E_y\mu_{yz} = E_z\mu_{zy}. \quad (9)$$

Запишем геометрические соотношения линейной теории:

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (10)$$

$$e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (11)$$

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (12)$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (13)$$

$$e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad (14)$$

$$e_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad (15)$$

где u_x, u_y, u_z – проекции перемещения произвольной точки на соответствующие оси координат.

Введем в физические соотношения следующие допущения [1]:

$$E_y \to \infty;\quad E_z \to \infty;\quad \mu_{yx} = 0;\quad \mu_{zx} = 0;\quad G_{yz} \to \infty. \quad (16)$$

Тогда вместо выражений (10), (11), (12) и (14), соответственно, получим:

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E_x}, \quad (17)$$

$$e_y = 0, \quad (18)$$

$$e_z = 0, \quad (19)$$

$$e_{yz} = 0. \quad (20)$$

С учетом формулы (18) из выражения (11) следует, что перемещения u_y не зависят от координаты y. Аналогично, из выражения (12) с учетом формулы (19) следует, что перемещения u_z не зависят от координаты z:

$$u_y = v(x,z), \quad (21)$$

$$u_z = w(x,y). \quad (22)$$

Согласно гипотезе плоских сечений имеем следующие законы распределения нормальных (к упругой линии балки) перемещений:

$$u_y = v(x) - z\beta, \quad (23)$$

$$u_z = w(x) + y\beta, \quad (24)$$

где $v(x)$ и $w(x)$ – соответственно, перемещения вдоль осей Y и Z точек, лежащих на продольной оси балки X; в – угол поворота сечения относительно оси X.

Согласно той же гипотезе имеем следующий линейный закон распределения по сечению продольных перемещений:

$$u_x = u(x) + y\theta_y(x) + z\theta_z(x), \quad (25)$$

где $u(x)$ – перемещения вдоль оси X точек, лежащих на этой оси; θ_y, θ_z – углы наклона сечения к соответствующим координатным осям.

Подставляя выражения (23)–(25) в геометрические соотношения для деформаций сдвига, можно увидеть, что выражение (14) удовлетворится тождественно, а вместо формул (13) и (15) получим следующие выражения:

$$e_{xy} = \theta_y + \frac{dv}{dx} - z\frac{d\beta}{dx}, \quad (26)$$

$$e_{xz} = \theta_z + \frac{dw}{dx} + y\frac{d\beta}{dx}. \quad (27)$$

Подставим выражение (25) в формулу (10) и получим выражение для продольных деформаций:

$$e_x = \frac{du}{dx} + y\frac{d\theta_y}{dx} + z\frac{d\theta_z}{dx}. \quad (28)$$

По аналогии с задачей об изгибе балки в плоскости введем в рассмотрение осредненные деформации трансверсального сдвига, которые определяются по следующим формулам:

$$\psi_y = \theta_y + \frac{dv}{dx}, \quad (29)$$

$$\psi_z = \theta_z + \frac{dw}{dx}. \quad (30)$$

Перепишем выражение для потенциальной энергии деформации (2) с учетом принятых допущений (18)–(20).

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_x e_x + \tau_{xy} e_{xy} + \tau_{xz} e_{xz})dxdydz. \quad (31)$$

Подставляя в подынтегральное выражение (31) соотношения для деформаций (26)–(28), получим:

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)}\left\{\sigma_x\left(\frac{du}{dx}+y\frac{d\theta_y}{dx}+z\frac{d\theta_z}{dx}\right)+\right.$$
$$\left.+\tau_{xy}\left(\theta_y+\frac{dv}{dx}-z\frac{d\beta}{dx}\right)+\tau_{xz}\left(\theta_z+\frac{dw}{dx}+y\frac{d\beta}{dx}\right)\right\}dxdydz. \quad (32)$$

Если использовать физические соотношения (17), (6) и (8), то выражение (31) можно представить в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2}\iiint\limits_V (E_x e_x^2 + G_{xy} e_{xy}^2 + G_{xz} e_{xz}^2)dxdydz, \quad (33)$$

а выражение (32) в виде

$$U = \frac{1}{2}\iiint\limits_V\left\{E_x\left(\frac{du}{dx}+y\frac{d\theta_y}{dx}+z\frac{d\theta_z}{dx}\right)^2+\right.$$
$$\left.+G_{xy}\left(\theta_y+\frac{dv}{dx}-z\frac{d\beta}{dx}\right)^2+G_{xz}\left(\theta_z+\frac{dw}{dx}+y\frac{d\beta}{dx}\right)^2\right\}dV. \quad (34)$$

Произведем в выражении (32) интегрирование по площади поперечного сечения балки. В результате получим следующее:

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_{(x)}\left(\begin{array}{l} N\frac{du}{dx}+M_y\frac{d\theta_y}{dx}+M_z\frac{d\theta_z}{dx}+ \\ +M_{yz}\frac{d\beta}{dx}+Q_y\psi_y+Q_z\psi_z \end{array}\right)dx, \quad (35)$$

где

$$N = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)}\sigma_x dydz;$$
$$M_y = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} y\sigma_x dydz;$$
$$M_z = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} z\sigma_x dydz; \quad (36)$$
$$Q_y = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)}\tau_{xy} dydz;$$
$$Q_z = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)}\tau_{xz} dydz;$$
$$M_{yz} = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)}\left(\tau_{xz}y-\tau_{xy}z\right)dydz.$$

Заменяя в выражениях (36) напряжения σ_x, τ_{xy} и τ_{xz} их значениями, найденными из соотношений (17), (6) и (8), в которых, в свою очередь, деформации e_x, e_{xy} и e_{xz} учтены согласно выражениям (28), (26) и (27), получим физические соотношения в виде

$$N = B\frac{du}{dx}+C_1\frac{d\theta_y}{dx}+C_2\frac{d\theta_z}{dx};$$
$$Q_y = K_1\psi_y + C_4\frac{d\beta}{dx}; \quad Q_z = K_2\psi_z + C_5\frac{d\beta}{dx};$$
$$M_y = C_1\frac{du}{dx}+D_1\frac{d\theta_y}{dx}+C_3\frac{d\theta_z}{dx};$$
$$M_z = C_2\frac{du}{dx}+C_3\frac{d\theta_y}{dx}+D_2\frac{d\theta_z}{dx}; \quad (37)$$
$$M_{yz} = C_4\psi_y + C_5\psi_z + D_{12}\frac{d\beta}{dx},$$

где B, C, D и K – параметры жесткости, вычисляемые по следующим формулам:

$$B = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} E\,dydz; \quad C_1 = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} y\,E\,dydz;$$
$$C_2 = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} z\,E\,dydz; \quad C_3 = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} y\,z\,E\,dydz;$$
$$C_4 = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} z\,G_{xy}dydz; \quad C_5 = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} y\,G_{xz}dydz;$$
$$D_1 = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} y^2 E\,dydz; \quad D_2 = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} z^2 E\,dydz; \quad (38)$$
$$K_1 = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} G_{xy}dydz; \quad K_2 = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)} G_{xz}dydz;$$
$$D_{12} = \int\limits_{(y)}\int\limits_{(z)}\left(y^2 G_{xz} + z^2 G_{xy}\right)dydz.$$

Примем для продольных перемещений оси стержня u, угла поворота сечения относительно оси X (β) и углов трансверсального сдвига ψ линейный характер изменения вдоль оси, а для прогибов обоих направлений – кубический:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x; \quad v(x) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3;$$
$$w(x) = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 x^2 + \alpha_{10} x^3; \quad (39)$$
$$\psi_y(x) = \alpha_{11} + \alpha_{12} x;$$
$$\psi_z(x) = \alpha_{13} + \alpha_{14} x; \quad \beta(x) = \alpha_{15} + \alpha_{16} x.$$

Изменения вдоль оси X углов поворота сечения по причине изгиба будут определяться по формулам

$$\frac{dv}{dx} = \alpha_4 + 2\alpha_5 x + 3\alpha_6 x^2; \quad \frac{dw}{dx} = \alpha_8 + 2\alpha_9 x + 3\alpha_{10} x^2. \quad (40)$$

Сформируем вектор кинематических переменных:

$$\boldsymbol{\delta} = \left\{u \quad v \quad \frac{dv}{dx} \quad w \quad \frac{dw}{dx} \quad \psi_y \quad \psi_z \quad \beta\right\}^T. \quad (41)$$

Тогда уравнения (39) можно записать в виде следующего матричного выражения:

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\alpha}, \quad (42)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор постоянных:

$$\alpha = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8$$
$$\alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \alpha_{13} \quad \alpha_{14} \quad \alpha_{15} \quad \alpha_{16}\}^T; \quad (43)$$

$\boldsymbol{S}$ – матрица со следующей структурой и компонентами

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Введем в рассмотрение векторы узловых кинематических параметров:

– в первом узле:

$$\boldsymbol{\delta}_e^{(1)} = \left\{u^{(1)} \quad v^{(1)} \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)^{(1)} \quad w^{(1)} \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)^{(1)} \quad \psi_y^{(1)} \quad \psi_z^{(1)} \quad \beta^{(1)}\right\}; \quad (45)$$

– во втором узле:

$$\boldsymbol{\delta}_e^{(2)} = \left\{u^{(2)} \quad v^{(2)} \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)^{(2)} \quad w^{(2)} \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)^{(2)} \quad \psi_y^{(2)} \quad \psi_z^{(2)} \quad \beta^{(2)}\right\}. \quad (46)$$

Через $\boldsymbol{\delta}_e$ обозначим вектор узловых кинематических параметров балочного элемента:

$$\boldsymbol{\delta}_e = \{\boldsymbol{\delta}_e^{(1)}\ \boldsymbol{\delta}_e^{(2)}\}^T. \tag{47}$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\delta}_e$ найдем с помощью соотношения (42), которое следует записать для двух значений продольной координаты: $X = 0$ и $X = l$ (l – длина балочного элемента). Результат запишем в матричном виде:

$$\boldsymbol{\delta}_e = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \tag{48}$$

где $\boldsymbol{T}$ – матрица размерностью 16×16 со структурой и компонентами, приведенными ниже.

Подставляя вектор $\boldsymbol{\alpha}$, найденный из выражения (48), в уравнение (42), получим значения компонент вектора $\boldsymbol{\delta}$, выраженные через узловые кинематические параметры:

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_e, \tag{49}$$

где

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}, \tag{50}$$

где $\boldsymbol{T}$ – квадратная матрица следующего вида:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & t & t^2 & t^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2t & 3t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & t^2 & t^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2t & 3t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t
\end{bmatrix}.$$

Матрица $\boldsymbol{P}$ имеет размерность 8×16. У нее следующие структура и компоненты:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}
p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{2,10} & p_{2,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_{32} & p_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{3,10} & p_{3,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{4,12} & p_{4,13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5,12} & p_{5,13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{6,14} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{7,15} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{8,16}
\end{bmatrix},$$

$$p_{11} = p_{66} = p_{77} = p_{88} = 1 - \frac{x}{l};$$

$$p_{19} = p_{6,14} = p_{7,15} = p_{8,16} = \frac{x}{l};$$

$$p_{22} = p_{44} = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3};$$

$$p_{23} = p_{45} = x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2};$$

$$p_{2,10} = p_{4,12} = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3};$$

$$p_{2,11} = p_{4,13} = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2};$$

$$p_{32} = p_{54} = -6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3};$$

$$p_{33} = p_{55} = 1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2};$$

$$p_{3,10} = p_{5,12} = 6\frac{x}{l^2} - 6\frac{x^2}{l^3};$$

$$p_{3,11} = p_{5,13} = -2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}.$$

Матричное соотношение (49) в развернутом виде имеет следующее представление:

$$v = \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right)v^{(1)} + \left(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^{(1)} + \\ + \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right)v^{(2)} + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^{(2)}, \tag{51}$$

$$\frac{dv}{dx} = \left(-6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3}\right)v^{(1)} + \left(1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^{(1)} + \\ + \left(6\frac{x}{l^2} - 6\frac{x^2}{l^3}\right)v^{(2)} + \left(-2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^{(2)}, \tag{52}$$

$$w = \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right)w^{(1)} + \left(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)^{(1)} + \\ + \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right)w^{(2)} + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)^{(2)}, \tag{53}$$

$$\frac{dw}{dx} = \left(-6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3}\right)w^{(1)} + \left(1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)^{(1)} + \\ + \left(6\frac{x}{l^2} - 6\frac{x^2}{l^3}\right)w^{(2)} + \left(-2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)^{(2)}, \tag{54}$$

$$\psi_y = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\psi_y^{(1)} + \frac{x}{l}\psi_y^{(2)}, \tag{55}$$

$$\psi_z = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\psi_z^{(1)} + \frac{x}{l}\psi_z^{(2)}, \tag{56}$$

$$\beta = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\beta^{(1)} + \frac{x}{l}\beta^{(2)}, \tag{57}$$

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u^{(1)} + \frac{x}{l}u^{(2)}. \tag{58}$$

Подставим соотношения для кинематических переменных (51)–(58) в выражение потенциальной энергии деформации (34), выполним интегрирование и полученную функцию продифференцируем по каждой из компонент вектора узловых переменных $\boldsymbol{\delta}_e$. В результате получим матрицу жесткости балочного элемента со следующими компонентами и структурой:

$$k_{11} = -k_{19} = k_{99} = Bl;$$

$$k_{13} = -k_{16} = -k_{1,11} = k_{1,14} - k_{39} = \\ = k_{69} = k_{9,11} = -k_{9,14} = -\frac{C_1}{l};$$

$$k_{15} = -k_{17} = -k_{1,13} = k_{1,15} = \\ = -k_{59} = k_{79} = k_{9,13} = -k_{9,15} = -\frac{C_2}{l};$$

$$k_{22} = -k_{2,10} = k_{10,10} = 12\frac{D_1}{l^3}; \ \ k_{33} = k_{11,11} = 4\frac{D_1}{l};$$

$$k_{23} = k_{2,11} = -k_{3,10} = -k_{10,11} = 6\frac{D_1}{l^2}; \ \ k_{35} = k_{11,13} = 4\frac{C_3}{l};$$

$$k_{24} = -k_{2,12} = -k_{4,10} = k_{10,12} = 12\frac{C_3}{l^3}; \;\; k_{3,11} = 2\frac{D_1}{l};$$

$$k_{25} = k_{2,13} = k_{3,4} = -k_{3,12} = -k_{39} =$$

$$= k_{4,11} = -k_{5,10} = -k_{10,13} = -k_{11,12} = 6\frac{C_3}{l^2};$$

$$k_{36} = -k_{3,14} = -k_{6,11} = k_{11,14} = -\frac{D_1}{l};$$

$$k_{3,13} = k_{5,11} = 2\frac{C_3}{l}; \qquad (59)$$

$$k_{37} = -k_{3,15} = k_{5,6} = -k_{5,14} = -k_{67} = k_{6,13} =$$

$$= k_{6,15} = -k_{7,11} = k_{7,14} = k_{11,15} = k_{13,14} = -k_{14,15} = -\frac{C_3}{l};$$

$$k_{44} = k_{12,12} = 12\frac{D_2}{l^3};$$

$$k_{45} = k_{4,13} = -k_{5,12} = -k_{12,13} = 6\frac{D_2}{l^2};$$

$$k_{55} = k_{13,13} = 4\frac{D_2}{l};$$

$$k_{57} = -k_{5,15} = -k_{7,13} = k_{13,15} = -\frac{D_2}{l};$$

$$k_{5,13} = 2\frac{D_2}{l}; \;\; k_{66} = k_{14,14} = \frac{D_1}{l} + \frac{K_1 l}{3};$$

$$k_{68} = -k_{6,16} = k_{7,8} = -k_{7,16} = k_{8,14} =$$

$$= k_{8,15} = -k_{14,16} = -k_{15,15} = -\frac{C_4 + C_5}{4};$$

$$k_{6,14} = -\frac{D_1}{l} + \frac{K_1 l}{6}; \;\; k_{77} = k_{15,15} = \frac{D_2}{l} + \frac{K_2 l}{3};$$

$$k_{7,15} = -\frac{D_2}{l} + \frac{K_2 l}{6}; \;\; k_{88} = -k_{8,16} = k_{16,16}\frac{D_{12}}{l};$$

$$\boldsymbol{K}_e = \begin{bmatrix}
k_{11} & 0 & k_{13} & 0 & k_{15} & k_{16} & k_{17} & 0 & k_{19} & 0 & k_{1,11} & 0 & k_{1,13} & k_{1,14} & k_{1,15} & 0 \\
 & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{2,10} & k_{2,11} & k_{2,12} & k_{2,13} & 0 & 0 & 0 \\
 & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & 0 & k_{39} & k_{3,10} & k_{3,11} & k_{3,12} & k_{3,13} & k_{3,14} & k_{3,15} & 0 \\
 & & & k_{44} & k_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{4,10} & k_{4,11} & k_{4,12} & k_{4,13} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & 0 & k_{59} & k_{5,10} & k_{5,11} & k_{5,12} & k_{5,13} & k_{5,14} & k_{5,15} & 0 \\
 & & & & & k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} & 0 & k_{6,11} & 0 & k_{6,13} & k_{6,14} & k_{6,15} & k_{6,16} \\
 & & & & & & k_{77} & k_{78} & k_{79} & 0 & k_{7,11} & 0 & k_{7,13} & k_{7,14} & k_{7,15} & k_{7,16} \\
 & & & & & & & k_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{8,14} & k_{8,15} & k_{8,16} \\
 & & & & & & & & k_{99} & 0 & k_{9,11} & 0 & k_{9,13} & k_{9,14} & k_{9,15} & 0 \\
 & & & & & & & & & k_{10,10} & k_{10,11} & k_{10,12} & k_{10,13} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & k_{11,11} & k_{11,12} & k_{11,13} & k_{11,14} & k_{11,15} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & k_{12,12} & k_{12,13} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & k_{13,13} & k_{13,14} & k_{13,15} & 0 \\
\text{с} & \text{и} & \text{м} & \text{м} & \text{е} & \text{т} & \text{р} & \text{и} & \text{ч} & \text{н} & \text{о} & & & k_{14,14} & k_{14,15} & k_{14,16} \\
 & & & & & & & & & & & & & & k_{15,15} & k_{15,16} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & k_{16,16}
\end{bmatrix}. \qquad (60)$$

Матрица жесткости (60) является матрицей коэффициентов разрешающей системы линейных алгебраических уравнений, возникающей в задачах прочностного расчета пространственных балок, в которых она должна быть дополнена вектором узловых нагрузок. Эта же матрица фигурирует в задаче об устойчивости балки и в модальном анализе (определение частот и форм собственных колебаний).

Таким образом, получена матрица жесткости балочного элемента, предназначенная для конечно-элементного анализа пространственных балок, податливых при трансверсальном сдвиге. Она может быть использована как в расчетах отдельных балок, так и в расчетах стержневых конструкций рамного типа, деформирование которых происходит без депланации сечений.

Библиографические ссылки

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988.

V. A. Nesterov

STIFFNESS MATRIX OF THE TRIDIMENTIONAL BEAM FINITE ELEMENT WITH LOW TRANSVERSE SHEAR STIFFNESS

The finite element of a beam with low value of transverse shear stiffness is considered. In variation realization of of final elements method the matrix of rigidity of tridimentional beam is received. As one of the basic central kinematic parametric variables occur transverse shear strains.

Keywords: a beam, finite element method, transverse shear strains.