УДК 519.677

А. В. Старовойтов

О МНОГОМЕРНОМ АНАЛОГЕ АЛГОРИТМА КУЛИ–ТЬЮКИ*

Представлено применение рекуррентных последовательностей ортогональных базисов на n-мерный случай для вывода формул варианта быстрого n-мерного преобразования Фурье, использующего $\frac{2^n-1}{2^n}N^n\log_2 N$ комплексных умножений и $nN^n\log_2 N$ комплексных сложений, где $N=2^s$ – число отсчетов по одной из осей.

Ключевые слова: пространство сигналов, последовательность ортогональных базисов, многомерное дискретное преобразование Фурье.

Рекуррентные последовательности ортогональных базисов в пространстве сигналов хорошо изучены [1] и имеют многочисленные приложения, в том числе для получения формул быстрого преобразования Фурье.

В данной работе обобщение рекуррентных последовательностей ортогональных базисов на n-мерный случай применяется для вывода формул варианта быстрого n-мерного преобразования Фурье (nБПФ), использующего $\frac{2^n-1}{2^n}N^n\log_2 N$ комплексных умножений и $nN^n\log_2 N$ комплексных сложений, где $N=2^s$ – число отсчетов по одной из осей (известный в литературе, см., например [2]). Этот вариант nБПФ содержит меньшее число операций комплексного умножения, чем обычно применяемый, в котором многомерное преобразование Фурье осуществляется повторным применением одномерных БПФ (см., например, [3; 4]).

При построении n-мерных реккурентных последовательностей ортогональных базисов мы придерживаемся схемы изложения, предложенной в [1] для одномерного случая.

Пространство периодических n-мерных сигналов. Для полноты изложения мы приводим определения и основные утверждения из теории многомерных сигналов, которые будем использовать далее.

Определение 1. При фиксированном N будем называть n-мерным периодическим сигналом периодическую, с периодом N по каждой переменной, комплекснозначную функцию целочисленного аргумента.

Вместе с операциями сложения двух сигналов x_1, x_2:

$$y(j)=x_1(j)+x_2(j)$$

и умножения сигнала x на комплексное число c:

$$y(j)=c\cdot x(j),$$

где $x(j)$ – отсчет сигнала x в точке $j\in\mathbb{Z}^n$, множество сигналов C_N^n становится линейным комплексным пространством. Нулевым элементом в C_N^n является сигнал O такой, что $\mathrm{O}(j)=0$ при всех $j\in\mathbb{Z}^n$. Введем в C_N^n скалярное произведение и норму:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{j\in B_n(N)}x(j)\overline{y(j)},$$

$$\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2},$$

где $B_n(N)$ – множество целочисленных векторов из $[0,N-1]^n$.

Определение 2. Единичным n-мерным периодическим, с периодом N по каждой переменной, импульсом назовем сигнал δ_N^n такой, что $\delta_N^n(j)=1$, если каждая координата вектора j делится на N и $\delta_N^n(j)=0$ в противном случае.

Для единичного импульса справедливы следующие утверждения, вытекающие сразу из определения.

1. $\delta_N^n(j_1,\ldots,j_n)=\delta_N^n(|j_1|,\ldots,|j_n|)$;
2. $\delta_N^n(j_1,\ldots,j_n)=\delta_N^1(j_1)\cdot\ldots\cdot\delta_N^1(j_n)$;
3. Для $x\in\mathrm{C}_N^n$ справедливо равенство

$$x(j)=\sum_{t\in B_n(N)}x(t)\delta_N^n(j-t) \qquad (1)$$

при любом $j\in B_n(N)$.

Пусть $w_N=\exp(\frac{2\pi i}{N})$. Тогда справедлива *лемма 1*:

$$\delta_N^n(j)=\frac{1}{N^n}\sum_{t\in B_n(N)}w_N^{(j,t)}, \qquad (2)$$

где (j,t) – скалярное произведение векторов j и t.

Равенство (2) проверяется непосредственно.

Определение 3. n-кратным дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) называется отображение $F_N:\mathrm{C}_N^n\to\mathrm{C}_N^n$, сопоставляющее с сигналом x сигнал X со значениями

$$X(j)=\sum_{t\in B_n(N)}x(t)w_N^{-(j,t)},\ j\in B_n(N).$$

Отметим, что для ДПФ справедлива формула обращения

$$x(t)=\frac{1}{N^n}\sum_{j\in B_n(N)}X(j)\cdot w_N^{(j,t)}$$

и равенство Парсеваля: если $X=F_N(x)$, $Y=F_N(y)$, то

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{N^n}\langle X,Y\rangle.$$

Рекуррентные последовательности ортогональных базисов. Положим $N=2^s$, $N_\nu=2^{s-\nu}$, $\Delta_\nu=2^{\nu-1}$. Построим рекуррентную последовательность базисов $f_0, f_1, \ldots, f_s$, где f_t – t-й базис, состоящий из N^n сигналов $f_t(k)$, $k\in B_n(N)$. Значение сигнала $f_t(k)$ в отсчете $j=(j_1,\ldots,j_n)$, $j\in B_n(N)$ будем обозначать, как $f_t(k;j)$.

Обозначим через $B_n^1(N)$ множество целочисленных векторов из $[0,N_\nu-1]^n$, а через $B_n^2(N)$ множество целочисленных векторов из $[0,\Delta_\nu-1]^n$. Определим последовательность ортогональных базисов следующим образом:

* Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00326.

$$f_0(k;j)=\delta_N^n(j-k)=$$
$$=\delta_N^1(j_1-k_1)\delta_N^2(j_2-k_2)...\delta_N^n(j_n-k_n), k,j\in B_n^{(N)};$$
$$f_v(l_1+\sigma_1\Delta_v+p_1\Delta_{v+1}, l_2+\sigma_2\Delta_v+$$
$$+p_2\Delta_{v+1}, ..., l_n+\sigma_n\Delta_v+p_n\Delta_{v+1})= \tag{3}$$
$$=\sum_{\tau_1=0}^{1}...\sum_{\tau_n=0}^{1} w_{\Delta_{v+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i(l_i+\sigma_i\Delta_v)}\times$$
$$\times f_{v-1}(l_1+2\Delta_v p_1+\tau_1\Delta_v, ..., l_n+2\Delta_v p_n+\tau_n\Delta_v),$$

где $p=(p_1, ..., p_n)\in B_n^1(N)$; $l=(l_1, ..., l_n)\in B_n^2(N)$; σ_i равно 0 или 1 при всех $i=1, ..., n$; $v=1, ..., s$.

Для изучения свойств рекуррентной последовательности базисов полезно использовать понятие реверсной перестановки [1].

Пусть j – целое число из множества $J=\{0,1, ..., 2^v-1\}$ представимо в двоичной системе в виде $j_{v-1}2^{v-1}+...+j_1 2+j_0$ где $j_i=0,1$ для всех $i=0, ..., v-1$. Вектор $(j_{v-1}, ..., j_1, j_0)_2$ будем называть двоичным кодом числа j. Сопоставим с числом j число $j_1\in J$, которое задается двоичным кодом $(j_0, j_1, ..., j_{v-1})_2$. Перестановка $\mathrm{rev}_v(j)=j_1$ множества J называется реверсной. Для реверсной перестановки справедливы равенства:

$$2\mathrm{rev}_{v-1}(q)=\mathrm{rev}_v(q);$$
$$2\mathrm{rev}_{v-1}(q)+1=\mathrm{rev}_v(\Delta_v+q). \tag{4}$$

Используя реверсную подстановку, легко показать, что

$$f_v(l_1+p_1\Delta_{v+1}, ..., l_n+p_n\Delta_{v+1})=$$
$$=\sum_{q_1=0}^{\Delta_{v+1}-1}...\sum_{q_n=0}^{\Delta_{v+1}-1} w_{\Delta_{v+1}}^{\sum_{i=0}^{n} l_i \mathrm{rev}_v(q_i)} f_0(q_1+p_1\Delta_{v+1}, ..., q_n+p_n\Delta_{v+1}),$$

где $p=(p_1, ..., p_n)\in B_n^1(N)$, $l=(l_1, ..., l_n)\in B_n^2(N)$, $v=1, ..., s$.

В частности, при $v=s$ имеем

$$f_s(l;j)=\sum_{q_1=0}^{N-1}...\sum_{q_n=0}^{N-1} w_N^{\sum_{i=1}^{n} l_i \mathrm{rev}_v(q_i)}\times$$
$$\times\delta_N^n(j_1-q_1, ..., j_n-q_n)=w_N^{\sum_{i=0}^{n} l_i \mathrm{rev}_v(j_i)}.$$

Теорема 1. При каждом $v=0, ..., s$ система сигналов $f_v=f_v(k)$, $k\in B_n(N)$, ортогональна и $\|f_v(k)\|^2=2^{nv}$.

Доказательство. Пусть $v=0$. Тогда

$$\langle f_0(k), f_0(k')\rangle=\sum_{j\in B_n(N)}\delta_N^n(j-k)\cdot\delta_N^n(j-k').$$

Последняя сумма может быть отлична от нуля только в том случае, когда $k=k'$, а в остальных случаях она равна 1, и теорема доказана.

Пусть теперь $v=1, ..., s$. Возьмем $k,k'\in B_n(N)$, которые представим в следующем виде:

$$k=(k_1, ..., k_n)=(l_1+p_1\Delta_{v+1}, ..., l_n+p_n\Delta_{v+1}),$$
$$k'=(k_1', ..., k_n')=(l_1'+p_1'\Delta_{v+1}, ..., l_n'+p_n'\Delta_{v+1}),$$

где $l=(l_1, ..., l_n)$ и $l'=(l_1', ..., l_n')$ принадлежат $B_n^2(N)$, а $p=(p_1, ..., p_n)$ и $p'=(p_1', ..., p_n')$ принадлежат $B_n^1(N)$. Тогда

$$\langle f_v(k), f_v(k')\rangle=\langle f_v(l_1+p_1\Delta_{v+1}, ..., l_n+p_n\Delta_{v+1}),$$
$$f_v(l_1'+p_1'\Delta_{v+1}, ..., l_n'+p_n'\Delta_{v+1})\rangle=$$
$$=\langle\sum_{q_1=0}^{\Delta_{v+1}-1}...\sum_{q_n=0}^{\Delta_{v+1}-1} w_{\Delta_{v+1}}^{\sum_{i=0}^{N} l_i \mathrm{rev}_v(q_i)} f_0(q_1+p_1\Delta_{v+1}, ..., q_n+p_n\Delta_{v+1}),$$
$$\sum_{q_1'=0}^{\Delta_{v+1}-1}...\sum_{q_n'=0}^{\Delta_{v+1}-1} w_{\Delta_{v+1}}^{\sum_{i=0}^{N} l_i' \mathrm{rev}_v(q_i')} f_0(q_1'+p_1'\Delta_{v+1}, ..., q_n'+p_n'\Delta_{v+1})\rangle=$$
$$=\sum_{q_1=0}^{\Delta_{v+1}-1}...\sum_{q_n=0}^{\Delta_{v+1}-1}\sum_{q_1'=0}^{\Delta_{v+1}-1}...\sum_{q_n'=0}^{\Delta_{v+1}-1} w_{\Delta_{v+1}}^{\sum_{i=1}^{n} l_i \mathrm{rev}_v(q_i)-l_i' \mathrm{rev}_v(q_i')}\times$$
$$\times\delta_N^n(q_1-q_1'+(p_1-p_1')\Delta_{v+1}, ..., q_n-q_n'+(p_n-p_n')\Delta_{v+1}).$$

Аргументы единичного импульса δ_N^n по модулю не превосходят $N-1$. При $p_t=p_t'$ при некотором t аргументы отличны от нуля при всех $q_i, q_i'\in 0:\Delta_{v+1}-1$, $i=1, ..., N$, поскольку $|q_i-q_i'|\leq\Delta_{v+1}-1$. Значит, $\langle f_v(k), f_v'(k')\rangle=0$ при $p_j\neq p_j'$.

Пусть $p_j=p_j'$ при всех $j=1, ..., n$, тогда

$$\langle f_v(k), f_v(k')\rangle=\sum_{q_1=0}^{\Delta_{v+1}-1}...\sum_{q_n=0}^{\Delta_{v+1}-1} w_{\Delta_{v+1}}^{\sum_{i=1}^{n}(l_i-l_i')\mathrm{rev}_v(q_i)}=$$
$$=\sum_{q_1=0}^{\Delta_{v+1}-1}...\sum_{q_n=0}^{\Delta_{v+1}-1} w_{\Delta_{v+1}}^{\sum_{i=1}^{n} q_i'}=\Delta_{v+1}...\Delta_{v+1}\delta_{\Delta_{v+1}}^n(l_1-l_1', ..., l_n-l_n').$$

Из последней формулы заключаем, что скалярное произведение $\langle f_v(k, f_v(k')\rangle$ отлично от нуля только при $p_j=p_j'$, $l_i=l_i'$ при всех $i,j=1, ..., n$. В последнем случае $\|f_v(k_1,...,k_n)\|=\Delta_{v+1}...\Delta_{v+1}=2^{nv}$ при всех $k_1, ..., k_n=0:N-1$. Теорема доказана.

Применение последовательности ортогональных базисов к быстрому дискретному преобазованию Фурье. Пусть $x(j)=x(j_1, ..., j_n)\in\mathrm{C}_N^n$, $j\in B_n(N)$. Сопоставим с сигналом $x(j)$ сигнал $x_0(j)=x(\mathrm{rev}_s(j_1), ..., \mathrm{rev}_s(j_n))$ и разложим $x_0(j)$ по базису f_v:

$$x_0=\frac{1}{2^{nv}}\sum_{k\in B_n(N)}x_v(k)f_v(k), \tag{5}$$

где $\frac{1}{2^{nv}}$ – нормирующий множитель. Домножим обе части равенства (5) скалярно на $f_v(l)$, для некоторого $l\in B_n(N)$. Тогда

$$\langle x_0, f_v(l)\rangle=x_v(l),$$
$$x_v(k)=\sum_{j\in B_n(N)}x_0(j)f_v(k)=$$
$$=\sum_{j\in B_n(N)}x(\mathrm{rev}_s(j_1), ..., \mathrm{rev}_s(j_n))f_v(k;j)$$

и коэффициенты $x_v(k)$ в (5) определены.

В частности, при $v=0$ имеем из (1)

$$x_0(k)=\sum_{j\in B_n(N)}x(\mathrm{rev}_s(j_1), ...,$$
$$\mathrm{rev}_s(j_n)\delta_N^n(j-k)=x(\mathrm{rev}_s(k_1), ..., \mathrm{rev}_s(k_n)). \tag{6}$$

Из рекуррентных соотношений (3) имеем:

$$x_\nu(l_1+\delta_1\Delta_\nu+p_1\Delta_{\nu+1},\ ...,\ l_n+\delta_n\Delta_\nu+p_n\Delta_{\nu+1})=$$
$$=\langle x_0, f_\nu(l_1+\delta_1\Delta_\nu+p_1\Delta_{\nu+1},\ ...,\ l_n+\delta_n\Delta_\nu+p_n\Delta_{\nu+1})\rangle=$$
$$=\sum_{\tau_1=0}^{1}...\sum_{\tau_n=0}^{1} w_{\Delta_\nu+1}^{\sum_{i=1}^{n}\tau_i(l_i+\sigma_i\Delta_\nu)}\times$$
$$\times\langle x_0, f_{\nu-1}(l_1+2\Delta_\nu p_1+\tau_1\Delta_\nu,\ ...,\ l_n+2\Delta_\nu p_n+\tau_n\Delta_\nu)\rangle= \quad (7)$$
$$=\sum_{\tau_1=0}^{1}...\sum_{\tau_n=0}^{1} w_{\Delta_\nu+1}^{\sum_{i=1}^{n}\tau_i(l_i+\sigma_i\Delta_\nu)} x_{\nu-1}\times$$
$$\times(l_1+2\Delta_\nu p_1+\tau_1\Delta_\nu,\ ...,\ l_n+2\Delta_\nu p_n+\tau_n\Delta_\nu),$$

где $p=(p_1,\ ...,\ p_n)\in B_n^1(N)$, $l=(l_1,\ ...,\ l_n)\in B_n^2(N)$, $\nu=1,\ ...,\ s$, а $\sigma_1,...,\sigma_n$ равно 0 или 1.

Так как

$$x_s(k)=x(k_1,\ ...,\ k_n)=$$
$$=\sum_{j\in B_n(N)} x(\mathrm{rev}_s(j_1),\ ...,\ \mathrm{rev}_s(j_n))\cdot w_N^{-\sum_{i=0}^{n}k_i\mathrm{rev}_s(j_i)}=$$
$$=\sum_{j\in B_n(N)} x(j)w_N^{-\sum_{i=0}^{n}k_ij_i}=X(k),$$

где $k\in B_n(N)$, то коэффициенты $x_s(k)$ определяют компоненты спектра сигнала x на основном периоде.

Из (6) и (7) получаем реккурентную схему для вычисления спектра сигнала $x\in \mathrm{C}_N^n$:

$$x_0(k)=x(\mathrm{rev}_s(k_1),\ ...,\ \mathrm{rev}_s(k_n));$$
$$x_\nu(l_1+\sigma_1\Delta_\nu+p_1\Delta_{\nu+1},\ ...,\ l_n+\sigma_n\Delta_\nu+p_n\Delta_{\nu+1})=$$
$$=\sum_{\tau_1=0}^{1}...\sum_{\tau_n=0}^{1} w_{\Delta_{\nu+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i(l_i+\sigma_i\Delta_\nu)}\times \quad (8)$$
$$\times x_{\nu-1}(l_1+2\Delta_\nu p_1+\tau_1\Delta_\nu,\ ...,\ l_n+2\Delta_\nu p_n+\tau_n\Delta_\nu),$$

где $p=(p_1,\ ...,\ p_n)\in B_n^1(N)$, $l=(l_1,\ ...,\ l_n)\in B_n^2(N)$, $\nu=1,\ ...,\ s$ и $\sigma_1,\ ...,\ \sigma_n$ равны 0 или 1.

Найдем теперь число операций комплексного сложения и умножения, необходимых для нахождения спектра сигнала по схеме (8).

Лемма 2. При некотором r даны векторы $t=(t_1,\ ...,t_r)$ и $\sigma=(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_r)$, где $t_i,\sigma_i\in\overline{0,1}$. Тогда вычисление всех значений некоторой функции

$$S(\sigma)=\sum_t f(t)(-1)^{\langle\sigma,t\rangle}$$

требует $r\cdot 2^r$ сложений (вычитаний).

Доказательство. Для доказательства применим индукцию по r.

Пусть $r=2$. Тогда

$$S(\sigma)=S(\sigma_1,\sigma_2)=\sum_{t_1=0}^{1}\sum_{t_2=0}^{1}f(t_1,t_2)\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+\sigma_2t_2}=$$
$$=f(0,0)+f(1,0)(-1)^{\sigma_1}+$$
$$+f(0,1)(-1)^{\sigma_2}+f(1,1)(-1)^{\sigma_1+\sigma_2}.$$

Обозначим

$$S_1(\sigma)=S(0,0)=f(0,0)+f(1,0)+f(0,1)+f(1,1)=$$
$$=(f(0,0)+f(1,0))+(f(0,1)+f(1,1))=S_1^*+S_3^*;$$
$$S_2(\sigma)=S(1,0)=f(0,0)-f(1,0)+f(0,1)-f(1,1)=$$
$$=(f(0,0)-f(1,0))+(f(0,1)-f(1,1))=S_2^*+S_4^*;$$
$$S_3(\sigma)=S(0,0)=f(0,0)+f(1,0)-f(0,1)-f(1,1)=$$
$$=(f(0,0)+f(1,0))-(f(0,1)+f(1,1))=S_1^*-S_3^*;$$
$$S_1(\sigma)=S(0,0)=f(0,0)-f(1,0)-f(0,1)+f(1,1)=$$
$$=(f(0,0)-f(1,0))-(f(0,1)-f(1,1))=S_2^*-S_4^*,$$

где $S_1^*=f(0,0)+f(1,0)$; $S_2^*=f(0,0)-f(1,0)$; $S_3^*=f(0,1)+f(1,1)$; $S_4^*=f(0,1)-f(1,1)$.

Для вычисления S_i^*, $i=1, 2, 3, 4$ требуется применить четыре сложения (вычитания), а для вычисления всех значений S требуется восемь таких операций, и утверждение леммы верно.

Пусть утверждение леммы верно при $r=k$, т. е. для произвольной функции $g(t)$ все значения функции

$$S(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_k)=\sum_t g(t)(-1)^{\langle\sigma,t\rangle},$$

где $t=(t_1,\ ...,\ t_k)$, вычисляются за $2\cdot 2^k$ сложений (вычитаний).

Рассмотрим $r=k+1$.

$$S(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_{k+1})=$$
$$=\sum_{t_1=0}^{1}...\sum_{t_{k+1}=0}^{1}f(t_1,\ ...,\ t_{k+1})\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+...+\sigma_{k+1}t_{k+1}}=$$
$$=\sum_{t_1=0}^{1}...\sum_{t_k=0}^{1}f(t_1,\ ...,\ t_k,0)\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+...+\sigma_kt_k}+$$
$$+\sum_{t_1=0}^{1}...\sum_{t_k=0}^{1}f(t_1,\ ...,\ t_k,1)\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+...+\sigma_kt_k+\sigma_{k+1}}.$$

Введем обозначения:

$$S(\sigma_1,\sigma_2,\ ...,\ \sigma_k,0)=S_1(\sigma_1,\sigma_2,\ ...,\ \sigma_k)=$$
$$=\sum_{t_1=0}^{1}...\sum_{t_k=0}^{1}f(t_1,\ ...,\ t_k,0)\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+...+\sigma_kt_k}+$$
$$+\sum_{t_1=0}^{1}...\sum_{t_k=0}^{1}f(t_1,\ ...,\ t_k,1)\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+...+\sigma_kt_k}=$$
$$=\sum_{t_1=0}^{1}...\sum_{t_k=0}^{1}(f(t_1,\ ...,\ t_k,0)+f(t_1,\ ...,\ t_k,1))\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+...+\sigma_kt_k};$$
$$S(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k,1)=S_2(\sigma_1,\sigma_2,\ ...,\ \sigma_k)=$$
$$=\sum_{t_1=0}^{1}...\sum_{t_k=0}^{1}f(t_1,\ ...,\ t_k,0)\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+...+\sigma_kt_k}-$$
$$-\sum_{t_1=0}^{1}...\sum_{t_k=0}^{1}f(t_1,\ ...,\ t_k,1)\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+...+\sigma_kt_k}=$$
$$=\sum_{t_1=0}^{1}...\sum_{t_k=0}^{1}(f(t_1,\ ...,\ t_k,0)-f(t_1,\ ...,\ t_k,1))\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+...+\sigma_kt_k}.$$

Определим, сколько требуется операций сложения (вычитания) для вычисления S_1 и S_2.

Обозначим $f^+(t_1,\ ...,\ t_k)=f(t_1,\ ...,\ t_k,0)+f(t_1,\ ...,\ t_k,1)$, $f^-(t_1,\ ...,\ t_k)=f(t_1,\ ...,\ t_k,0)-f(t_1,\ ...,\ t_k,1)$. Для вычисления всех значений f^+ требуется 2^k сложений и для вычисления $S_1=\sum_{t_1=0}^{1}...\sum_{t_k=0}^{1}f^+(t_1,\ ...,\ t_k)\cdot(-1)^{\sigma_1t_1+...+\sigma_kt_k}$

требуется $k2^k$ согласно индукционному предположению.

Тогда общее количество операций сложения (вычитания) для вычисления S_1 составит $k2^k + 2^k$. Такое же количество операций необходимо для S_2.

Поэтому определение всех значений S требует $(k+1)2^{k+1}$ сложений (вычитаний), что и требовалось доказать.

Теорема 2. Реккурентная схема вычисления спектра сигнала $x \in \mathrm{C}_N^n$ ($N = 2^s$)

$$x_0(k) = x(\mathrm{rev}_s(k_1), ..., \mathrm{rev}_s(k_n));$$
$$x_\nu(l_1 + \sigma_1\Delta_\nu + p_1\Delta_{\nu+1}, ..., l_n + \sigma_n\Delta_\nu + p_n\Delta_{\nu+1}) =$$
$$= \sum_{\tau_1=0}^{1}...\sum_{\tau_n=0}^{1} w_{\Delta_{\nu+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i(l_i+\sigma_i\Delta_\nu)} \times \qquad (9)$$
$$\times x_{\nu-1}(l_1 + 2\Delta_\nu p_1 + \tau_1\Delta_\nu, ..., l_n + 2\Delta_\nu p_n + \tau_n\Delta_\nu),$$

требует $\dfrac{2^n - 1}{2^n} N^n \log_2 N$ комплексных умножений и $nN^n \log_2 N$ комплексных сложений.

Доказательство. Вначале найдем число комплексных умножений. Комплексные умножения производятся только при умножении на $w_N^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i(l_i+\sigma_i\Delta_\nu)}$. Определим, сколько требуется произведений (9) при заданных параметрах $\nu^*, l^* = (l_1^*, ..., l_n^*)$ и $p^* = (p_1^*, ..., p_n^*)$. Для этого рассмотрим произведения

$$w_{\Delta_{\nu^*+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i(l_i^*+\sigma_i\Delta_{\nu^*})} \times$$
$$\times x_{\nu^*-1}(l_1^* + 2p_1^*\Delta_\nu + \tau_1\Delta_{\nu^*}, ..., l_n^* + 2p_n^*\Delta_\nu + \tau_n\Delta_{\nu^*}),$$

где $\sigma_i \in \overline{0,1}$.

Заметим, что

$$w_{\Delta_{\nu^*+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i(l_i^*+\sigma_i\Delta_{\nu^*})} = w_{\Delta_{\nu^*+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i l_i^* + \tau_i\sigma_i\Delta_{\nu^*}} =$$
$$= w_{\Delta_{\nu^*+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i l_i^*} \cdot w_{\Delta_{\nu^*+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i\sigma_i\Delta_{\nu^*}} = (-1)^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i\sigma_i} \cdot w_{\Delta_{\nu^*+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i l_i^*}, \qquad (10)$$

т. е. произведение

$$w_{\Delta_{\nu^*+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i(l_i^*+\sigma_i\Delta_{\nu^*})} \times$$
$$\times x_{\nu^*-1}(l_1^* + 2p_1^*\Delta_\nu + \tau_1\Delta_{\nu^*}, ..., l_n^* + 2p_n^*\Delta_\nu + \tau_n\Delta_{\nu^*})$$

при фиксированных (определенных) параметрах $\nu^*, l^* = (l_1^*, ..., l_n^*)$ и $p^* = (p_1^*, ..., p_n^*)$ можно заменить на комплексное произведение

$$w_{\Delta_{\nu^*+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i l_i^*} \cdot x_{\nu^*-1}(l_1^* + 2p_1^*\Delta_\nu + \tau_1\Delta_{\nu^*}, ..., l_n^* + 2p_n^*\Delta_\nu + \tau_n\Delta_{\nu^*}), \qquad (11)$$

поскольку величина $(-1)^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i\sigma_i}$ может принимать значения только ± 1.

Число комплексных произведений вида (11) равно числу всевозможных векторов $\tau = (\tau_1, ..., \tau_n)$, где $\tau_i \in \overline{0,1}$, т. е. $2^n - 1$, так как при $r = 0$ имеем произведение действительных чисел. Так как параметр $\nu \in 1:s$, векторы $l = (l_1, ..., l_n)$ и $p = (p_1, ..., p_n)$, где $p_i = 0, 1, ..., N^\nu - 1$ ($N^\nu = N/2^\nu$), $l_i = 0, 1, ..., \Delta_\nu - 1$ ($\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$), то общее количество комплексных умножений равно $s(\dfrac{N}{2^\nu} \cdot 2^{\nu-1})^n \cdot (2^n - 1) = \dfrac{2^n - 1}{2^n} N^n \log_2 N$.

Найдем количество комплексных сложений в алгоритме. При фиксированном ν^* и $l^* = (l_1^*, ..., l_n^*), p^* = (p_1^*, ..., p_n^*)$ имеем

$$x_\nu^*(l_1^* + \sigma_1\Delta_{\nu^*} + p_1\Delta_{\nu^*+1}, ..., l_n^* + \sigma_n\Delta_{\nu^*} + p_n^*\Delta_{\nu^*+1}) =$$
$$= \sum_{\tau_1=0}^{1}...\sum_{\tau_n=0}^{1} w_{\Delta_{\nu^*+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i(l_i^*+\sigma_i\Delta_\nu^*)} \times \qquad (12)$$
$$\times x_{\nu^*-1}(l_1^* + 2p_1^*\Delta_\nu + \tau_1\Delta_{\nu^*}, ..., l_n^* + 2p_n^*\Delta_\nu + \tau_n\Delta_{\nu^*}).$$

Из (10) следует, что для вычисления (12) нам требуется вычислить выражения

$$f(\tau) = w_{\Delta_{\nu^*+1}}^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i l_i^*} x_{\nu^*-1}(l_1^* + 2p_1^*\Delta_\nu + \tau_1\Delta_{\nu^*}, ..., l_n^* + 2p_n^*\Delta_\nu + \tau_n\Delta_{\nu^*}),$$

которые зависят только от $\tau = (\tau_1, ..., \tau_n)$, где $\tau_i \in \overline{0:1}$. Тогда (12) можно представить как

$$x_\nu^*(l_1^* + \sigma_1\Delta_{\nu^*} + p_1\Delta_{\nu^*+1}, ..., l_n^* + \sigma_n\Delta_{\nu^*} + p_n^*\Delta_{\nu^*+1}) =$$
$$= \sum_{\tau_1=0}^{1}...\sum_{\tau_n=0}^{1}(-1)^{\sum_{i=0}^{n}\tau_i\sigma_i} \cdot f(\tau).$$

Теперь из леммы 2 для вычисления $x_\nu^*(l_1^* + \sigma_1\Delta_{\nu^*} + p_1\Delta_{\nu^*+1}, ..., l_n^* + \sigma_n\Delta_{\nu^*} + p_n^*\Delta_{\nu^*+1})$ потребуется $n2^n$ комплексных сложений.

Так как параметр $\nu \in 1:s$, векторы $l = (l_1, ..., l_n)$ и $p = (p_1, ..., p_n)$, где $p_i = 0, 1, ..., N^\nu - 1$ ($N^\nu = N/2^\nu$), $l_i = 0, 1, ..., \Delta_\nu - 1$ ($\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$), то общее количество комплексных сложений (вычитаний) равно $s(\dfrac{N}{2^\nu} \cdot 2^{\nu-1})^n \cdot (n2^n) = nN^n \log_2 N$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Малоземов В. Н., Машарский С. М. Основы дискретного гармонического анализа. Ч. 2. СПб. : НИИ математики и механики, 2003.

2. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов : пер. с англ. М. : Мир, 1988.

3. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М. : Мир, 1989.

4. Опенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. ; под ред. С. Я. Шаца. М. : Связь, 1979.

A. V. Starovoytov

ABOUT MULTIDIMENSIONAL ANALOG OF ALGORITHM OF COOLEY–TUKEY

In this article, recurring sequences of orthogonal basis in n-dimensional case has being applied for express of formulas of the n-dimensional fast Fourier transformation, which using $\frac{2^n-1}{2^n}N^n\log_2 N$ *complex multiplication and* $nN^n\log_2 N$ *complex addition, where* $N=2^s$ *– number of counting on one of the axis.*

Keywords: space of signals, orthogonal basis sequence, multidimensional discrete Fourier transform.

© *Старовойтов А. В., 2010*

УДК 539.21:537.86

С. С. Аплеснин, А. И. Москвин

МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ, ИНДУЦИРУЕМЫЙ ОРБИТАЛЬНЫМ УПОРЯДОЧЕНИЕМ ЭЛЕКТРОНОВ

Исследована взаимосвязь орбитального порядка и температуры образования спонтанного магнитного момента, постоянной решетки, корреляционных функций орбитальных и магнитных моментов между ближайшими соседями в непрерывной модели Потса для ряда параметров электрон-решеточного и спин-решеточного взаимодействия. Найдено изменение диэлектрической проницаемости и орбитальных корреляционных функций во внешнем магнитном поле.

Ключевые слова: диэлектрическая проницаемость, магнитоэлектрический эффект, электрон-решеточное взаимодействие, орбитальный и спиновый момент.

Исследование мультиферроиков, в которых сосуществует хотя бы два из трех параметров порядка: магнитный, электрический или кристаллографический [1], является актуальной задачей, так как описывает возможность с помощью электрического поля управлять магнитными свойствами материала и, наоборот, осуществлять модуляцию электрических свойств магнитным полем. В перспективе такие материалы могут найти широкое техническое применение в качестве сенсоров, датчиков, устройств записи-считывания информации. Если в спиновой электронике запись информации происходит путем преобразования намагниченности в электрическое напряжение, то в мультиферроиках связь между магнитной и электрической подсистемами проявляется через магнитоэлектрический эффект [2; 3].

Твердые растворы $Co_xMn_{1-x}S$ можно отнести к классу мультиферроиков [4]. В области температур $T = 230$ К обнаружена корреляция между упругой, магнитной и электрической подсистемой. Это подтверждается следующими фактами: найдено изменение угла наклона постоянной решетки, сдвиг пика поглощения рамановской моды, зависимость от предыстории температурного поведения намагниченности и сопротивления при «отжиге» в магнитном поле, нелинейной зависимостью вольт-амперной характеристики в магнитном поле, и наличие максимума в изменении диэлектрической проницаемости во внешнем магнитном поле от температуры [5]. На взаимодействие между электрической, магнитной и упругой подсистем при температурах $T = 120$ К указывает также образование ферромагнитного порядка, максимум по температуре относительного изменения диэлектрической проницаемости, измеренной во внешнем магнитном поле и в отсутствие поля [6], аномалия коэффициента теплового расширения решетки.

Предполагается, что замещение ионов марганца кобальтом приводит к перераспределению электронной плотности между e_g- и t_{2g}-состояниями. Конкуренция кулоновского взаимодействия между электронами, расположенными на одной орбитали и между орбиталями, совместно с изменением интегралов перескока приводит к упорядочению электронов на определенных орбиталях и к орбитальному магнетизму. В результате перераспределения электронной плотности меняется упругая энергия и под действием электрон-фононного взаимодействия индуцируются связанные моды колебаний ионов.

Цель работы состоит в установлении взаимосвязи между магнитной, электрической и упругой подсистемами и определении тенденций изменения параметров решетки, величины корреляционных функций орбитальных и спиновых моментов в зависимости от параметра электрон-решеточного и спин-фононного взаимодействия.

Модель взаимосвязи электронной и упругой подсистем. Для интерпретации полученных результатов в твердом растворе $Co_xMn_{1-x}S$ [5; 6] необходимо рассматривать взаимосвязь электронной и кристаллической струк-