3. Каплун А. Б, Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера : практ. руководство. М. : Едиториал УРСС, 2003.

4. Хвалько А. А., Бутов В. Г. // Современные проблемы радиоэлектроники : сб. науч. тр. Красноярск : ИПК СФУ, 2009.

A. A. Hvalko, V. G. Butov, A. P. Zhukov, S. B. Suntsov, A. A. Yaschuk

COMPLEX OFMECHANICAL ANALYSIS OF THE ONBOARD EQUIPMENT AND ADEQUACY OF FINITE-ELEMENT MODEL PROBLEM

The issues related to the applied software programs package creation for carrying out the satellite on-board equipment mechanical analysis using FEM as well as to the algorithm for simplification of the above models and estimation of there correctness are considered in this article.

Keywords: hardware and software complex, mechanical analysis, satellite-borne equipment, simplified model, finite-element model.

УДК 519.62

В. А. Нестеров, А. В. Лопатин

ВЫВОД РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНЫ С НИЗКОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ[1]

Рассматривается вариационная постановка задачи о деформировании пластины с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью. Выполнен вывод разрешающих уравнений равновесия и естественных граничных условий при двух вариантах выбора основных угловых переменных: углов наклона нормали и углов трансверсального сдвига.

Ключевые слова: пластина, трансверсальная сдвиговая деформация.

В настоящее время в современной технике наряду с традиционными получили распространение композиционные материалы, которые обладают высокой удельной прочностью и жесткостью. Композитные пластины отличаются рядом особенностей, которые должны быть учтены при проектировании и расчете. К их числу относится низкая сдвиговая жесткость по отношению к трансверсальным напряжениям. Эта особенность привела к появлению новых, более сложных по сравнению с традиционными, расчетных моделей с высокой степенью достоверности описывающих поведение композитных пластин.

Вывод разрешающих уравнений расчета конструкций с помощью метода конечных элементов (МКЭ) вариационным методом предполагает формирование энергетического функционала, под которым подразумевается выражение полной потенциальной энергии упругого тела. Это выражение состоит из суммы потенциальной энергии деформации U и потенциала внешних сил П:

$$E = U + \Pi. \tag{1}$$

В качестве исходного для U примем соответствующее выражение из теории упругости трехмерного тела:

$$U = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \left(\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \tau_{xy} e_{xy} + \tau_{xz} e_{xz} + \tau_{yz} e_{yz}\right) \times \times dxdydz, \tag{2}$$

где σ_x, σ_y, σ_z – нормальные напряжения; τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} – касательные напряжения; e_x, e_y, e_z – линейные деформации вдоль осей системы координат; e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} – деформации сдвига в соответствующих плоскостях.

Напряжения и деформации связаны физическими соотношениями. Для ортотропного материала они имеют следующий вид:

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy}\frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{xz}\frac{\sigma_z}{E_z}; \; e_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{yx}\frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{yz}\frac{\sigma_z}{E_z};$$

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E_z} - \mu_{zx}\frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{zy}\frac{\sigma_y}{E_y}; \tag{3}$$

$$e_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}; \; e_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}}; \; e_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}}, \tag{4}$$

где $E_{x(y,\,z)}$ – модуль упругости соответствующего направления; $G_{xy(yz,\,xz)}$ – модуль сдвига в соответствующей плоскости; μ_{xy}, μ_{yx}, μ_{yz}, μ_{zy}, μ_{xz}, μ_{zx} – коэффициенты Пуассона.

Имеет место свойство симметрии упругих постоянных:

[1] Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.».

$$E_x\mu_{xy} = E_y\mu_{yx};\ E_y\mu_{yz} = E_z\mu_{zy};\ E_x\mu_{xz} = E_z\mu_{zx}. \quad (5)$$

Запишем геометрические соотношения линейной теории:

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x};\ e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y};\ e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (6)$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x};\ e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y};\ e_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad (7)$$

где u_x, u_y, u_z – проекции перемещения произвольной точки на соответствующие оси координат.

Дальнейшие преобразования выражения (2) выполним по алгоритму приведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной теории оболочек [1].

Примем следующие допущения о поведении материала пластины:

$$E_z \to \infty;\ \mu_{zx} \to 0;\ \mu_{zy} \to 0. \quad (8)$$

Тогда вместо (3) получим:

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy}\frac{\sigma_y}{E_y};\ e_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{yx}\frac{\sigma_x}{E_x};\ e_z = 0. \quad (9)$$

Из третьего геометрического соотношения (6) с учетом $e_z = 0$ следует, что вертикальные перемещения u_z зависят только от координат x и y:

$$u_z = w(x; y). \quad (10)$$

Перепишем геометрические соотношения для e_{xz} и e_{yz} следующим образом:

$$e_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};\ e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (11)$$

Проинтегрируем (11) по толщине пластины в пределах от 0 (координата начальной плоскости) до z (координата произвольной плоскости). В итоге получим

$$\int_0^z e_{xz}dz = \int_0^z \frac{\partial u_x}{\partial z}dz + \int_0^z \frac{\partial w}{\partial x}dz;$$

$$\int_0^z e_{yz}dz = \int_0^z \frac{\partial u_y}{\partial z}dz + \int_0^z \frac{\partial w}{\partial y}dz. \quad (12)$$

Введем в (12) вместо e_{xz} и e_{yz} их осредненные по толщине значения, вычисляемые по следующим формулам:

$$\psi_x = \frac{1}{h}\int_{-s}^{h-s} e_{xz}dz;\ \psi_y = \frac{1}{h}\int_{-s}^{h-s} e_{yz}dz, \quad (13)$$

где h – толщина пластины; $(h - s)$ и $(-s)$ – координаты по вертикали верхней и нижней поверхностей пластины соответственно.

В результате, вместо (12) получим следующие уравнения:

$$\psi_x z = u_x(z) - u_x(z=0) + z\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\psi_y z = u_y(z) - u_y(z=0) + z\frac{\partial w}{\partial y} \quad (13)$$

или

$$u_x(z) = u + z\theta_x;\ u_y(z) = v + z\theta_y, \quad (14)$$

где $\theta_{x(y)}$ – угол поворота нормали к соответствующей оси; u, v, w – перемещения произвольной точки начальной плоскости вдоль осей x, y, z соответственно:

$$\theta_x = \psi_x - \frac{\partial w}{\partial x};\ \theta_y = \psi_y - \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (15)$$

Подставим (14) в геометрические соотношения для e_x и e_y (6) и e_{xy} (7):

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \theta_x}{\partial x};\ e_y = \frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial \theta_y}{\partial y};$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right). \quad (16)$$

С учетом выполненных преобразований для деформаций перепишем выражение потенциальной энергии деформации (2) в виде

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \left\{\delta_x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right) + \delta_y\left(\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \tau_{xy}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)\right] + \tau_{xz}\psi_x + \tau_{yz}\psi_y\right\} dxdydz. \quad (17)$$

Проинтегрируем (17) по толщине пластины, т. е. по z в пределах от $-s$ до $h - s$:

$$U = \frac{1}{2}\int_a^b\int_c^d \begin{pmatrix} N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + N_{xy}\varepsilon_{xy} + M_x\chi_x + \\ +M_y\chi_y + M_{xy}\chi_{xy} + Q_x\psi_x + Q_y\psi_y \end{pmatrix} dxdy, \quad (18)$$

где через a и b обозначены координаты торцов пластины, перпендикулярные оси x, через c, d – координаты торцов пластины, перпендикулярные оси y.

В подынтегральном выражении функционала (18) также присутствуют N, Q, M – внутренние погонные усилия и ε, χ – деформации начальной плоскости.

Внутренние усилия в общем случае вычисляются по формулам

$$N_x = \int_{-s}^{h-s}\sigma_x dz;\ N_y = \int_{-s}^{h-s}\sigma_y dz;\ N_{xy} = \int_{-s}^{h-s}\tau_{xy}dz;$$

$$M_x = \int_{-s}^{h-s}\sigma_x z\,dz;\ M_y = \int_{-s}^{h-s}\sigma_y z\,dz; \quad (19)$$

$$M_{xy} = \int_{-s}^{h-s}\tau_{xy}z\,dz;\ Q_x = \int_{-s}^{h-s}\tau_{xz}dz;\ Q_y = \int_{-s}^{h-s}\tau_{yz}dz.$$

Деформации начальной плоскости определяются соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\chi_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x};\ \chi_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y};\ \chi_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}. \quad (20)$$

Разрешая первые два соотношения (9) относительно напряжений, получим

$$\sigma_x = A_{11}e_x + A_{12}e_y;\ \sigma_y = A_{21}e_x + A_{22}e_y, \quad (21)$$

где параметры $A_{ij}(i, j = 1, 2)$ в данном случае определяются равенствами

$$A_{11} = \frac{E_x}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}};\ A_{22} = \frac{E_y}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}};$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{\mu_{xy}E_x}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}. \quad (22)$$

Подставим напряжения σ_x, σ_y (21) и τ_{xy} (4), учитывая (16), в выражение (19). Тогда формулы для внутренних усилий примут следующий вид:

$$N_x = B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y + C_{11}\chi_x + C_{12}\chi_y;$$

$$N_y = B_{21}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y + C_{21}\chi_x + C_{22}\chi_y;$$

$$N_{xy} = B_{33}\varepsilon_{xy} + C_{33}\chi_{xy};\ Q_x = K_x\ \psi_x;$$

$$Q_y = K_y\ \psi_y;\ M_{xy} = C_{33}\varepsilon_{xy} + D_{33}\chi_{xy}; \quad (23)$$

$$M_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + D_{11}\chi_x + D_{12}\chi_y;$$

$$M_y = C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + D_{21}\chi_x + D_{22}\chi_y,$$

где B, C, D и K – мембранные, смешанные, изгибные жесткости соответственно, вычисляемые по формулам

$$\begin{gathered}
B_{11} = \int_{-s}^{h-s} A_{11} dz;\; B_{12} = B_{21} = \int_{-s}^{h-s} A_{12} dz;\\
B_{22} = \int_{-s}^{h-s} A_{22} dz;\; B_{33} = \int_{-s}^{h-s} A_{33} dz;\\
C_{11} = \int_{-s}^{h-s} A_{11} z\, dz;\; C_{12} = C_{21} = \int_{-s}^{h-s} A_{12} z\, dz;\\
C_{22} = \int_{-s}^{h-s} A_{22} z\, dz;\; C_{33} = \int_{-s}^{h-s} A_{33} z\, dz; \qquad (24)\\
D_{11} = \int_{-s}^{h-s} A_{11} z^2\, dz;\; D_{12} = D_{21} = \int_{-s}^{h-s} A_{12} z^2\, dz;\\
D_{22} = \int_{-s}^{h-s} A_{22} z^2\, dz;\; D_{33} = \int_{-s}^{h-s} A_{33} z^2\, dz,
\end{gathered}$$

где $A_{33} = G_{xy}$.

Определение жесткостей (24) для ортотропной однородной пластины, начальная плоскость которой совпадает с ее срединой плоскостью, может быть вычислено по формулам

$$\begin{gathered}
B_{11} = A_{11} h;\; B_{12} = B_{22} = A_{12} h;\\
B_{22} = A_{22} h;\; B_{33} = A_{33} h;\\
D_{11} = A_{11}\frac{h^3}{12};\; D_{12} = D_{21} = A_{12}\frac{h^3}{12};\\
D_{22} = A_{22}\frac{h^3}{12};\; D_{33} = A_{33}\frac{h^3}{12}. \qquad (25)
\end{gathered}$$

Все смешанные жесткости при этом окажутся равными 0, а трансверсальные сдвиговые жесткости предстанут в виде

$$K_x = G_{xz} h;\; K_y = G_{yz} h. \qquad (26)$$

Отметим, что формулы для перерезывающих сил в (23) получены при подстановке e_{xz}, e_{yz} из (4) в (13) и замене касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} их осредненными значениями: Q_x/h и Q_y/h соответственно.

Потенциал внешних сил для пластины, нагруженной по верхней поверхности распределенной нагрузкой p_z, определяется следующим интегралом:

$$\Pi = \int_a^b\int_c^d p_z w\, dxdy. \qquad (27)$$

Таким образом, выражение полной потенциальной энергии пластины имеет вид (1), в котором потенциальная энергия деформации задается интегралом (18), а потенциал внешних сил – (27). Выражение полной потенциальной энергии (1) со слагаемыми U и Π в виде (18) и (27) позволяет получить дифференциальные уравнения равновесия пластины и естественные граничные условия к ним. В дальнейших выкладках сосредоточим внимание на функционале потенциальной энергии деформации (18). Представим его в следующем виде:

$$U = \int_a^b\int_c^d F\, dxdy, \qquad (28)$$

где

$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + N_{xy}\varepsilon_{xy} + M_x\chi_x + \\ + M_y\chi_y + M_{xy}\chi_{xy} + Q_x\psi_x + Q_y\psi_y \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Сформируем на основе (28) функционал Лагранжа. Для этого в подынтегральном выражении (28) выразим усилия через деформации согласно физическим соотношениям (23). В результате, вместо уравнения (29) получим

$$\begin{gathered}
F = \frac{1}{2}B_{11}\varepsilon_x^2 + C_{11}\varepsilon_x\chi_x + \frac{1}{2}D_{11}\chi_x^2 + \\
+ B_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + C_{12}\varepsilon_x\chi_y + C_{12}\varepsilon_y\chi_x + D_{12}\chi_x\chi_y + \\
+ \frac{1}{2}B_{22}\varepsilon_y^2 + C_{22}\varepsilon_y\chi_y + \frac{1}{2}D_{22}\chi_y^2 + \frac{1}{2}B_{33}\varepsilon_{xy}^2 + \\
+ C_{33}\varepsilon_{xy}\chi_{xy} + \frac{1}{2}D_{33}\chi_{xy}^2 + \frac{1}{2}K_x\psi_x^2 + \frac{1}{2}K_y\psi_y^2 \qquad (30)
\end{gathered}$$

Теперь подставим в (30) геометрические соотношения (20) и углы трансверсального сдвига, выраженные из (15), после чего получим выражение

$$\begin{gathered}
F = \frac{1}{2}B_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + C_{11}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{1}{2}D_{11}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)^2 + \\
+ B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + C_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \\
+ D_{12}\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{1}{2}B_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + C_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \\
+ \frac{1}{2}D_{22}\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)^2 + C_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) + \\
+ \frac{1}{2}B_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}D_{33}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)^2 + \qquad (31)\\
+ \frac{1}{2}K_x\left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}K_y\left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.
\end{gathered}$$

С учетом (31) функционал (28) представим в общем виде:

$$U = \int_a^b\int_c^d F\begin{pmatrix} u, v, w, \theta_x, \theta_y, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta_x}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta_y}{\partial y}\end{pmatrix} dxdy. \qquad (32)$$

Вариация функционала (32) имеет вид

$$\delta U = \int_a^b\int_c^d \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \cdots + \frac{\partial F}{\partial(\partial u/\partial x)}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \\ &+ \cdots + \frac{\partial F}{\partial(\partial\theta_x/\partial x)}\delta\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} dxdy. \qquad (33)$$

Преобразуем входящие в (33) слагаемые, где присутствует вариация по той или иной производной, следующим образом:

$$\begin{gathered}
\int_a^b\int_c^d \frac{\partial F}{\partial(\partial u/\partial x)}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial(\partial u/\partial x)}\delta u\Big|_a^b dy - \\
- \int_a^b\int_c^d \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial(\partial u/\partial x)}\right]\delta u\, dxdy. \qquad (34)
\end{gathered}$$

По схеме (34) преобразуются интегралы от всех остальных слагаемых, включающих вариации по производным от кинематических функций.

Вычислим производные от комплекса F (31) по всем тем переменным, по которым в (33) осуществляется варьирование. При этом получится следующее:

$$\frac{\partial F}{\partial u}=0;\ \frac{\partial F}{\partial v}=0;\ \frac{\partial F}{\partial w}=0. \qquad (35)$$

Запишем вариацию функционала (33) с учетом преобразованных интегралов (34) и вычисленных производных:

$$\delta U=\int_a^b\int_c^d\left(Q_x\delta\theta_x+Q_y\delta\theta_y\right)dxdy+\int_c^d N_x\delta u\Big|_a^b dy-$$
$$-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u\,dxdy+\int_a^b N_{xy}\delta u\Big|_c^d dx-$$
$$-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\delta u\,dxdy+$$
$$+\int_c^d N_{xy}\delta v\Big|_a^b dy-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\delta v\,dxdy+\int_a^b N_y\delta v\Big|_c^d dx-$$
$$-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial N_y}{\partial y}\delta v\,dxdy+\int_c^d Q_x\delta w\Big|_a^b dy-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\delta w\,dxdy+$$
$$+\int_a^b Q_y\delta w\Big|_c^d dx-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\delta w\,dxdy+$$
$$+\int_c^d M_x\delta\theta_x\Big|_a^b dy-$$
$$-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta\theta_x\,dxdy+\int_a^b M_{xy}\delta\theta_x\Big|_c^d dx-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta\theta_x\,dxdy+$$
$$+\int_c^d M_{xy}\delta\theta_y\Big|_a^b dy-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta\theta_y\,dxdy+\int_a^b M_y\delta\theta_y\Big|_c^d dx-$$
$$-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial M_y}{\partial y}\delta\theta_y\,dxdy. \qquad (36)$$

Сгруппируем двойные интегралы в (36) по соответствующим вариациям независимых переменных (δu, δv, δw, $\delta\theta_x$, $\delta\theta_y$). Подынтегральные выражения в них будут являться уравнениями равновесия. Остальные члены в (36) формируют естественные граничные условия. Запишем уравнения равновесия пластины и граничные условия к ним в традиционном виде:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0;\quad N_x\delta u=0$$

и $N_{xy}\delta v=0$ при $x = a$ и $x = b$;

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0;\quad N_y\delta v=0$$

и $N_{xy}\delta u=0$ при $y = c$ и $y = d$;

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+p_z=0;\quad Q_x\delta w=0$$

при $x = a$ и $x = b$, $Q_y\delta w=0$ при $y = c$ и $y = d$; (37)

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0;\quad M_x\delta\theta_x=0$$

и $M_{xy}\delta\theta_y=0$ при $x = a$ и $x = b$;

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0;\quad M_y\delta\theta_y=0$$

и $M_{xy}\delta\theta_x=0$ при $y = c$ и $y = d$.

При выводе (37) учтена вариация по прогибу от потенциала внешних сил (27). Это привело к появлению нагрузочного члена p_z в третьем уравнении равновесия.

Следует отметить, что уравнения равновесия из системы (37) часто используются при решении статической задачи о деформировании пластин с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью. В частности, они могут быть выведены из соответствующих уравнений, полученных в [1] из условий равновесия бесконечно малого элемента произвольной ортотропной оболочки. При использовании вариационного вывода системы уравнений равновесия естественные граничные условия получаются «автоматически».

Система уравнений (37) может быть использована при анализе таких расчетных случаев, когда граничные условия на краях пластины сформулированы относительно углов наклона нормали. Это классические варианты граничных условий: свободная кромка, свободное или шарнирное опирание или полное защемление края пластины. Если граничные условия отличаются от классических, например, как в случаях шарнирного опирания краев с фиксированным сдвигом или при защемлении со свободным сдвигом, уравнениями равновесия в виде (37) воспользоваться нельзя. Теперь рассмотрим иной вариант вариационной постановки задачи. Будем полагать в качестве основных кинематических переменных перемещения точек базовой плоскости u, v, w и углы трансверсального сдвига ψ_x и ψ_y. Перепишем подынтегральное выражение функционала (28). Для этого, используя выражения для углов поворота (15), выразим изменения кривизны и кручения (20) через прогиб и углы сдвига:

$$\chi_x=\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\quad \chi_y=\frac{\partial\psi_y}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$
$$\chi_{xy}=\frac{\partial\psi_x}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \qquad (38)$$

Подставляя (38) и мембранные деформации из выражений (20) в (30), получим

$$F=\frac{1}{2}B_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+C_{11}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}D_{11}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+$$
$$+C_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+C_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+$$
$$+D_{12}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}B_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+C_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}D_{22}\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+\frac{1}{2}B_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+$$
$$+C_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}D_{33}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2}K_x\psi_x^2+\frac{1}{2}K_y\psi_y^2. \qquad (39)$$

Таким образом, функционал (28) в общем случае предстанет в следующем виде:

$$U=\int_a^b\int_c^d F\left(u;v;w;\psi_x;\psi_y;\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial v}{\partial x};\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial w}{\partial x};\frac{\partial w}{\partial y};\right.$$
$$\left.\frac{\partial \psi_x}{\partial x};\frac{\partial \psi_x}{\partial y};\frac{\partial \psi_y}{\partial x};\frac{\partial \psi_y}{\partial y};\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y};\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy. \quad (40)$$

Вариация функционала (40) имеет вид:

$$\delta U=\int_a^b\int_c^d\left\{\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial v}\delta v+\frac{\partial F}{\partial w}\delta w+\right.$$
$$+\frac{\partial F}{\partial \psi_x}\delta\psi_x+\frac{\partial F}{\partial \psi_y}\delta\psi_y+\frac{\partial F}{\partial(\partial u/\partial x)}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$
$$+\cdots+\frac{\partial F}{\partial(\partial\psi_x/\partial x)}\delta\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial(\partial^2 w/\partial x^2)}\delta\times \quad (41)$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\cdots\frac{\partial F}{\partial(\partial^2 w/\partial y^2)}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right\}dxdy.$$

В функционале (41) присутствуют вариации вторых производных от прогиба. Соответствующие интегралы должны быть преобразованы следующим образом:

$$\int_a^b\int_c^d\frac{\partial F}{\partial(\partial^2 w/\partial x^2)}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dxdy=$$
$$=\int_c^d\frac{\partial F}{\partial(\partial^2 w/\partial x^2)}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_a^b dy-$$
$$-\int_c^d\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial(\partial^2 w/\partial x^2)}\right]\delta w\Big|_a^b dy+ \quad (42)$$
$$+\int_a^b\int_c^d\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial F}{\partial(\partial^2 w/\partial x^2)}\right]\delta w\,dxdy.$$

Вычислим производные от комплекса F (39) по всем переменным, присутствующим в функционале (40). В результате получим соотношения вида:

$$\frac{\partial F}{\partial\psi_x}=K_x\psi_x=Q_x;\quad \frac{\partial F}{\partial(\partial u/\partial x)}=N_x;$$
$$\frac{\partial F}{\partial(\partial\psi_x/\partial x)}=M_x \text{ и т. д.} \quad (43)$$

Запишем вариацию функционала (41) с учетом преобразованных интегралов (34), (42) и вычисленных производных (43):

$$\delta U=\int_a^b\int_c^d\left(Q_x\delta\psi_x+Q_y\delta\psi_y\right)dxdy+$$
$$+\int_c^d N_x\delta u\Big|_a^b dy-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u\,dxdy+\int_a^b N_{xy}\delta u\Big|_c^d dx-$$
$$-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\delta u\,dxdy+\int_c^d N_{xy}\delta v\Big|_a^b dy-$$
$$-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\delta v\,dxdy+\int_a^b N_y\delta v\Big|_c^d dx-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\delta v\,dxdy+$$
$$+\int_c^d M_x\delta\psi_x\Big|_a^b dy-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta\psi_x\,dxdy+$$
$$+\int_a^b M_{xy}\delta\psi_x\Big|_c^d dx-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta\psi_x\,dxdy+$$
$$+\int_c^d M_{xy}\delta\psi_y\Big|_a^b dy-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta\psi_y\,dxdy+$$
$$+\int_a^b M_y\delta\psi_y\Big|_c^d dx-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial M_y}{\partial y}\delta\psi_y\,dxdy-$$
$$-\int_c^d M_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_a^b dy+\int_c^d\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta w\Big|_a^b dy-$$
$$-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\delta w\,dxdy-\int_a^b M_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Big|_c^d dx+$$
$$+\int_a^b\frac{\partial M_y}{\partial y}\delta w\Big|_c^d dx-\int_a^b\int_c^d\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\delta w\,dxdy-$$
$$-2\int_a^b\int_c^d\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}\delta w\,dxdy-\int_c^d M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Big|_a^b dy+$$
$$+\int_a^b\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta w\Big|_c^d dx-\int_a^b M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_c^d dx+\int_c^d\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta w\Big|_a^b dy. \quad (44)$$

Сгруппируем подынтегральные выражения в двойных интегралах с одинаковыми вариациями независимых переменных. Сокращая их на соответствующие вариации, получим уравнения равновесия. Остальные слагаемые в (44) формируют естественные граничные условия:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0;\quad N_x\delta u=0 \text{ и } N_{xy}\delta v=0 \text{ при } x=a$$
$$\text{и } x=b;\quad \frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0;\quad N_y\delta v=0$$
$$\text{и } N_{xy}\delta u=0 \text{ при } y=c \text{ и } y=d;$$
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=0; \quad (45)$$
$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)\delta w=0;\quad M_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0;$$
$$M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0;\quad \text{при } x=a \text{ и } x=b;$$
$$\left(\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)\delta w=0;\quad M_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0;$$
$$M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0;\quad \text{при } y=c \text{ и } y=d;$$
$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0;\quad M_x\delta\psi_x=0;$$
$$M_{xy}\delta\psi_y=0;\quad \text{при } x=a \text{ и } x=b;$$
$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0;\quad M_y\delta\psi_y=0;$$
$$M_{xy}\delta\psi_x=0;\quad \text{при } y=c \text{ и } y=d.$$

Система уравнений равновесия (45) записана для случая, когда нет распределенной нагрузки (а есть, например, только торцевая, которая учитывается статическими граничными условиями).

Проблема о деформировании пластин, податливых при трансверсальном сдвиге, с неклассическими граничными условиями слабо изучена. Поэтому соответствующую этой проблеме дифференциальную постановку в определенном смысле можно считать новой, а описанный вывод системы (45) вариационным способом – оригинальным.

Таким образом, сформированы системы уравнений равновесия и соответствующих им граничных условий

(37) и (45) для различных вариантов групп основных кинематических переменных. В первой системе – это u, v, w, θ_x и θ_y, во второй – u, v, w, ψ_x и ψ_y. Эти системы путем несложных преобразований сводятся одна к другой. Но они имеют самостоятельное значение в ряде случаев. Допустим, если задача расчета пластины решается приближенными методами, например, методом Бубнова–Галеркина. Тогда при выборе в качестве одних из основных переменных углов наклона сечения θ_x и θ_y (это имеет смысл сделать при классических вариантах граничных условий) следует работать с системой (37). Если же граничные условия нетрадиционные (защемление со свободным сдвигом или шарнирное опирание с фиксированным сдвигом), то системой (37) нельзя воспользоваться, а нужно рассматривать систему (45), и в качестве основных угловых кинематических переменных назначить ψ_x и ψ_y.

Библиографическая ссылка

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988.

V. A. Nesterov, A. V. Lopatin

DERIVATION OF RESULTING EQUATIONS OF BALANCE OF A PLATE WITH LOW TRANSVERSE SHEAR STIFFNESS

A variational statement of a problem of deformation of a plate with low value of transverse shear stiffness is considered in this article. The derivation of the resulting equations of balance and natural boundary conditions is performed in two optional variants of the basic angular variables: surface normal tilting angles and transverse shear angles.

Keywords: plate, transverse shear.

УДК 621.791.72

С. В. Суковатенко, Н. Н. Горяшин, В. Д. Лаптенок

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОВОЛЬТНОГО ИСТОЧНИКА УСКОРЯЮЩЕГО НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ СВАРКИ НА БАЗЕ РЕЗОНАНСНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Предложена математическая модель высоковольтного источника ускоряющего напряжения для электронно-лучевой сварки на базе мостового резонансного преобразователя с коммутацией ключевого элемента при нуле напряжения. Данная модель позволяет проводить динамический анализ подобных систем при больших возмущающих воздействиях.

Ключевые слова: резонансный преобразователь напряжения, электронно-лучевая сварка.

Известно, что к высоковольтному источнику ускоряющего напряжения (ВИУН) для электронно-лучевой сварки (ЭЛС) предъявляются особые требования по стабилизации и регулированию выходного напряжения, устойчивости к высоковольтным пробоям в электронной пушке, работе в импульсных режимах сварки [1]. Для обеспечения требований, предъявляемых к современным установкам ЭЛС, в качестве ВИУН используют высокочастотные инверторные преобразователи напряжения (ПН). Динамические характеристики таких ПН, как правило, оказывают существенное влияние на качество процесса сварки, что приводит к постановке задачи по поиску оптимальных решений при синтезе таких преобразователей с позиции повышения энергетической и динамической эффективности.

В статье предлагается рассмотреть ВИУН для ЭЛС на базе мостового резонансного преобразователя с подключением нагрузки к конденсатору резонансного контура (рис. 1) и переключением силовых ключей при нулевом значении напряжения (ПНН) [2]. Для анализа динамических характеристик и возможности выбора законов регулирования при управлении сварочным процессом задача сводится к адекватному математическому моделированию основных режимов рассматриваемого ПН.

Использование вышеуказанной топологии ПН вызвано большим коэффициентом передачи высоковольтного повышающего трансформатора, который обусловливает большие значения паразитных межвитковых, межслойных и межобмоточных емкостей вторичной обмотки, а большие габариты значительно повышают индуктивность рассеяния. Поэтому резонансной емкостью $C_р$ является паразитная емкость вторичной обмотки, пересчитанная к первичной обмотке, а резонансной индуктивностью $L_р$ является индуктивность рассеяния первичной обмотки и