По своим частотным характеристикам все лексемы ИТБ разделяются на две группы: 1) лексемы, имеющие наибольшую частоту (основные лексемы); 2) лексемы, частота которых не превышает некоторого числового порога. Из них впоследствии формируются реляционные ряды, каждый из которых однозначно соответствует одной из основных лексем.

При этом структура МЛ-компонента [7], отражающего основную лексему, дополняется соответствующими переходными вероятностями.

Построение ИТБ согласно реляционной модели позволяет значительно снизить трудоемкость его прохождения и увеличить эффективность системы обучения в целом. При этом применение реляционной модели хорошо сочетается с другими методами оптимизации структуры ИТБ, в частности с методами оптимального разбиения ИТБ на блоки и модули [5].

### Библиографические ссылки

1. Ковалев И. В., Усачев А. В. Мультилингвистический метод изучения иностранной терминологической лексики на базе мнемотехнического подхода // Первая Всерос. науч. интернет-конф. «Соц.-психол. пробл. развития личности». Вып. 4. Тамбов : ТГУ, 2001. С. 57.

2. Карасева М. В., Ковалев И. В., Суздалева Е. А. Модель архитектуры мультилингвистической адаптивно-обучающей технологии // Новые информ. технологии в унив. образовании : тез. междунар. науч.-метод, конф. Кемерово : КемГУ и ИДМИ, 2002. С. 204–205.

3. Огнерубов С. С. Алгоритмы оптимизации блочно-модульной структуры информационно-терминологического базиса // Вестн. унив. комплекса. Вып. 20. 2006. С. 104–118.

4. Программа анализа и формирования информационного мультилингвистического терминологического базиса, на основе реляционной модели оптимизации, TuMLas v.1,0 : программа для ЭВМ : свидетельство об офиц. регестрации № 50200701261 / В. О. Лесков, И. В. Ковалев. Зарегистр. ВНТИЦ. 2010.

5. Лесков В. О., Огнерубов С. С. Реляционная модель и алгоритмы оптимизации модульной структуры мультилингвистического информационно-терминологического базиса // Вестн. унив. комплекса. Вып. 21. 2009. С. 116–133.

6. Лесков В. О. Система предварительной обработки текстов, основанная на скрытой марковской модели, в контексте мультилингвистической адаптивно-обучающей технологии // Вестн. унив. комплекса. Вып. 23. 2006. С. 110–119.

7. Ковалев И. В., Карасева М. В., Суздалева Е. А. Системные аспекты организации и применения мультилингвистической адаптивно-обучающей технологии // Образоват. технологии и общество – Educational Technology & Society. Вып. 5(2). 2002. С. 198–212.

M. V. Karaseva, D. V. Kustov

## INFORMATIONAL AND TERMINOLOGICAL BASIS IN MULTILINGUAL ADAPTIVE-TRAINING TECHNOLOGY

*The paper considers functional assignment and structure of the algorithmic software of the multilingual adaptive-training technology. It is realized as a program system TuMLas v. 1,0. The relation model of the informational and terminological basis structure and the initial informational and terminological basis structure are presented as a conceptual ER-diagram.*

*Keywords: multilingual technology, software system, ER-diagram.*



---

УДК 517.552

А. С. Кацунова

## О ПОВТОРНОМ ОСОБОМ ИНТЕГРАЛЕ КОШИ–СЕГЕ

*Получен аналог формулы Пуанкаре–Бертрана для особого интеграла Коши–Сеге в шаре. Главное значение интеграла рассмотрено в смысле Керзмана–Стейна.*

*Ключевые слова: интеграл Коши–Сеге, главное значение особого интеграла в смысле Керзмана–Стейна, формула перестановки повторного интеграла.*

Будем рассматривать $n$-мерное комплексное пространство $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Если $z, w \in \mathbf{C}^n$, то $\langle z, w \rangle = z_1 w_1 + \ldots + z_n w_n$, а $|z| = \sqrt{\langle \overline{z}, z \rangle}$, где $\overline{z} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$.

Пусть $B_z(\varepsilon)$ – шар в $\mathbf{C}^n$ с центром в точке $z$ радиуса $\varepsilon$, т. е.

$$B_z(\varepsilon) = \left\{ \varsigma \in \mathbf{C}^n : \left| \varsigma - z \right| < \varepsilon \right\}.$$

Тогда $B$ – единичный шар из $\mathbf{C}^n$, а именно

$$B = B_0(1) = \left\{\varsigma : \ |\varsigma| < 1\right\},$$

а $S$ – граница шара $B$:

$$S = \left\{\varsigma : \ |\varsigma| = 1\right\}.$$

Обозначим через $K(\varsigma, z)$ ядро интеграла Коши–Сеге для шара, т. е.

$$K(\varsigma, z) = \frac{1}{\left(1 - \langle \bar{\varsigma}, z \rangle\right)^n},$$

а через $\sigma(\varsigma)$ дифференциальную форму

$$\sigma(\varsigma) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar{\varsigma}_k \, d\bar{\varsigma}[k] \wedge d\varsigma,$$

где $d\bar{\varsigma}[k] = d\bar{\varsigma}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{\varsigma}_{k-1} \wedge d\bar{\varsigma}_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\bar{\varsigma}_n$, $d\varsigma = d\varsigma_1 \wedge \ldots \wedge d\varsigma_n$.

Для любых точек $\varsigma, z \in S$ выполняются соотношения [1; 2]

$$C_1 \left|1 - \langle \bar{\varsigma}, z \rangle\right| \le |\varsigma - z| \le C_2 \sqrt{\left|1 - \langle \bar{\varsigma}, z \rangle\right|}. \qquad (1)$$

**Интегральное представление Коши–Сеге.** *Теорема 1* [3]. Для любой функции $f$, голоморфной в $B$ и непрерывной в $\overline{B}$, справедлива формула

$$f(z) = \int_S f(\varsigma) K(\varsigma, z) \sigma(\varsigma), \quad z \in B.$$

Рассмотрим для точек $z \in S$ главное значение в смысле Керзмана–Стейна [1; 2]:

$$v.p.h. \int_S f(\varsigma) K(\varsigma, z) \sigma(\varsigma) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S \setminus E_z(\varepsilon)} f(\varsigma) K(\varsigma, z) \sigma(\varsigma),$$

где $E_z(\varepsilon) = \left\{\varsigma : \left|1 - \langle \bar{\varsigma}, z \rangle\right| < \varepsilon\right\}$. Оно отличается от обычного главного значения $v.p.$ по Коши тем, что из границы области выбрасывается не шар $B_z(\varepsilon)$, а «эллипсоид» $E_z(\varepsilon)$. Далее в работе для точек $z \in S$ будем рассматривать главное значение в смысле Керзмана–Стейна и знак $v.p.h.$ будем иногда опускать.

*Теорема 2* [1; 2]. При $n > 1$ справедлива формула

$$v.p.h. \int_S f(\varsigma) K(\varsigma, z) \sigma(\varsigma) = \frac{1}{2}, \quad z \in S.$$

Обозначим для интегрируемой на $S$ функции $f$ предельное значение интеграла

$$\int_S f(\varsigma) K(\varsigma, z) \sigma(\varsigma)$$

изнутри шара $B$ через $K^+[f]$.

Функция $f$ удовлетворяет на $S$ условию Гельдера с показателем $\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, (т. е. $f \in C^\alpha(S)$), если для точек $\varsigma, z \in S$ выполняется неравенство [2]:

$$|f(\varsigma) - f(z)| \le C \left|1 - \langle \bar{\varsigma}, z \rangle\right|^\alpha.$$

Заметим, если функция $f$ удовлетворяет на $S$ условию Гельдера относительно метрики $\left|1 - \langle \bar{\varsigma}, z \rangle\right|$, то она также будет удовлетворять условию Гельдера относительно метрики $|\varsigma - z|$ с тем же показателем (так как верно соотношение (1).

*Теорема 3* [1; 2]. Если $f \in C^\alpha(S)$, $0 < \alpha \le 1$, то интеграл $K^+[f]$ непрерывно продолжается на $\overline{B}$ и $K^+[f] \in C^\alpha(S)$ и справедливо равенство

$$K^+[f] = v.p.h. \int_S f(\varsigma) K(\varsigma, z) \sigma(\varsigma) + \frac{f(z)}{2}, \quad z \in S.$$

Целью работы является получение аналога формулы Пуанкаре–Бертрана для особого интеграла Коши–Сеге в случае, когда главное значение особого интеграла рассматривается в смысле Керзмана–Стейна.

**Вспомогательные результаты.** Следствием оценок, приведенных в [4], являются леммы 1 и 2.

*Лемма 1.* Пусть $f \in C^\alpha(S \times S)$, тогда для $z \in S$

$$\int_{S_w} d\sigma(w) \int_{S_\varsigma} f(\varsigma, w) K(\varsigma, z) \, \sigma(\varsigma) = \int_{S_\varsigma} K(\varsigma, z) \, \sigma(\varsigma) \int_{S_w} f(\varsigma, w) \, d\sigma(w),$$

где $d\sigma(w)$ – мера Лебега на $S$.

*Лемма 2.* Пусть $f \in C^\alpha(S \times S)$, тогда для $z \in S$ и $0 \le \nu < n$

$$\int_{S_w} d\sigma(w) \int_{S_\varsigma} \frac{f(\varsigma, z)}{\left|1 - \langle \bar{\varsigma}, z \rangle\right|^\nu} \, d\sigma(\varsigma) = \int_{S_\varsigma} f(\varsigma, z) \, d\sigma(\varsigma) \int_{S_w} \frac{d\sigma(w)}{\left|1 - \langle \bar{\varsigma}, z \rangle\right|^\nu}.$$

*Теорема 4.* Пусть $f(\varsigma, w) = f_0(\varsigma, w) \cdot |1 - \langle \bar{\varsigma}, w \rangle|^{-\nu}$, $f_0(\varsigma, w) \in C^\alpha(S \times S)$, $0 \le \nu < n$, тогда

$$\int_{S_w} d\sigma(w) \int_{S_\varsigma} f(\varsigma, w) K(\varsigma, z) \, \sigma(\varsigma) = \int_{S_\varsigma} K(\varsigma, z) \, \sigma(\varsigma) \int_{S_w} f(\varsigma, w) \, d\sigma(w), \ z \in S.$$

*Доказательство.* Введем разбиение единицы следующим образом. Рассмотрим множество $M = \overline{B}_\varsigma \times \overline{B}_w = \left\{(\varsigma, w) : \ \varsigma \in \overline{B}, \ w \in \overline{B}\right\}$. Введем в нем компактные окрестности $M_1$ множества

$\{(\varsigma,w)\in M:\ \varsigma=w\}$ и $M_2$ множества $\{(\varsigma,w)\in M:\ \varsigma=z\}$, пересекающиеся лишь по одной точке $(z,z)$. Тогда открытые множества $U_1=M\setminus M_1$ и $U_2=M\setminus M_2$ являются покрытием множества $M\setminus\{(z,z)\}$. Пусть $\alpha_1(\varsigma,w)$ и $\alpha_2(\varsigma,w)$ – гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, т. е. $\alpha_1+\alpha_2\equiv 1$ на $U_1\cup U_2$, $0\le\alpha_1\le 1$, $0\le\alpha_2\le 1$. Тогда $\alpha_1(\varsigma,w)\equiv 0$ в окрестности точки $\varsigma=w$ при фиксированном $w\ne z$, $\alpha_1(z,w)=1$, а $\alpha_2(\varsigma,w)\equiv 0$ в окрестности точки $\varsigma=z$ и $\alpha_2(w,w)=1$.

Тогда

$$\int_{S_w} d\sigma(w)\int_{S_\varsigma} f(\varsigma,w)K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)=$$
$$=\int_{S_w} d\sigma(w)\int_{S_\varsigma}\big(\alpha_1(\varsigma,w)+\alpha_2(\varsigma,w)\big)\,f(\varsigma,w)\,K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)=$$
$$=\int_{S_w} d\sigma(w)\int_{S_\varsigma}\alpha_1(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)+$$
$$+\int_{S_w} d\sigma(w)\int_{S_\varsigma}\alpha_2(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma).$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{S_w} d\sigma(w)\int_{S_\varsigma}\alpha_1(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma).$$

Так как $\alpha_1(\varsigma,w)=0$ в области $S_\varsigma\cap E_w(\varepsilon)$, то в последнем интеграле, применив лемму 1, можно поменять порядок интегрирования. Тогда получим

$$\int_{S_w} d\sigma(w)\int_{S_\varsigma}\alpha_1(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)=$$
$$=\int_{S_\varsigma} d\sigma(w)\int_{S_w}\alpha_1(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma).$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{S_w} d\sigma(w)\int_{S_\varsigma}\alpha_2(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma).$$

Так как $\alpha_2(\varsigma,w)=0$ в области $S_\varsigma\cap E_z(\varepsilon)$, то, применив лемму 2, можно поменять порядок интегрирования:

$$\int_{S_w} d\sigma(w)\int_{S_\varsigma}\alpha_2(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)=$$
$$=\int_{S_\varsigma} K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)\int_{S_w}\alpha_2(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,d\sigma(w).$$

Таким образом,

$$\int_{S_w} d\sigma(w)\int_{S_\varsigma}\alpha_1(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)+$$
$$+\int_{S_w} d\sigma(w)\int_{S_\varsigma}\alpha_2(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)=$$
$$=\int_{S_\varsigma} K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)\int_{S_w}\alpha_1(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,d\sigma(w)+$$
$$+\int_{S_\varsigma} K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)\int_{S_w}\alpha_1(\varsigma,w)\,f(\varsigma,w)\,d\sigma(w)=$$
$$=\int_{S_\varsigma} K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)\int_{S_w}\big(\alpha_1(\varsigma)+\alpha_2(\varsigma)\big)\,f(\varsigma,w)\,d\sigma(w)=$$
$$=\int_{S_\varsigma} K(\varsigma,z)\,\sigma(\varsigma)\int_{S_w} f(\varsigma,w)\,d\sigma(w).$$

*Лемма 3.* Для точек $z^0,\varsigma^0\in S$ справедливо равенство

$$\int_S K(w,z^0)K(\varsigma^0,w)\,\sigma(w)=0,\quad z^0\ne\varsigma^0.$$

*Доказательство.* Рассмотрим разбиение единицы, аналогичное разбиению из предыдущей теоремы. Рассмотрим множество $M=\bar{B}$. Введем в нем компактные окрестности $M_1$ множества $\{w\in M:\ w=\varsigma^0\}$ и $M_2$ множества $\{w\in M:\ w=z^0\}$. Тогда открытые множества $U_1=M\setminus M_1$ и $U_2=M\setminus M_2$ являются покрытием множества $M$. Пусть $\alpha_1(w)$ и $\alpha_2(w)$ – гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, т. е. $\alpha_1+\alpha_2\equiv 1$ на $U_1\cup U_2$, $0\le\alpha_1\le 1$, $0\le\alpha_2\le 1$. Тогда $\alpha_1(w)\equiv 0$ в окрестности точки $w=\varsigma^0$ при фиксированном $\varsigma^0\ne z^0$, $\alpha_1(z^0)=1$, а $\alpha_2(w)\equiv 0$ в окрестности точки $w=z$ и $\alpha_2(\varsigma^0)=1$.

Тогда

$$\int_S K(w,z^0)\;K(\varsigma^0,w)\,\sigma(w)=$$
$$=\int_S\big(\alpha_1(w)+\alpha_2(w)\big)\,K(w,z^0)\;K(\varsigma^0,w)\,\sigma(w)=$$
$$=\int_S\alpha_1(w)\,K(w,z^0)\;K(\varsigma^0,w)\,\sigma(w)+$$
$$+\int_S\alpha_2(w)\,K(w,z^0)\;K(\varsigma^0,w)\,\sigma(w).$$

Преобразуем каждое слагаемое отдельно, воспользовавшись теоремой 3 и учитывая, что $\alpha_1(z^0)=1$, $\alpha_2(\varsigma^0)=1$, $\overline{\sigma(w)}\big|_S=\sigma(w)\big|_S$ и $K(\varsigma,w)=\overline{K(w,\varsigma)}$:

$$\int_S\alpha_1(w)\,K(w,z^0)\;K(\varsigma^0,w)\,\sigma(w)=$$
$$=\lim_{z\to z^0\in S}\int_S\alpha_1(w)\,K(\varsigma^0,w)\;K(w,z)\sigma(w)-\frac{\alpha_1(z^0)K(\varsigma^0,z^0)}{2}=$$
$$=\lim_{\substack{z\to z^0\in S\\ \varsigma\to\varsigma^0\in S}}\int_S\alpha_1(w)\,K(\varsigma,w)\;K(w,z)\sigma(w)-\frac{K(\varsigma^0,z^0)}{2},$$

$$\int_S \alpha_2(w)\; K(w,z^0)\; K(\varsigma^0,w)\; \sigma(w) =$$

$$= \int_S \alpha_2(w)\; K(w,z^0)\; \overline{K(w,\varsigma^0)}\; \sigma(w) =$$

$$= \overline{\int_S \overline{\alpha_2(w)\; K(w,z^0)}\; K(w,\varsigma^0)\; \sigma(w)} =$$

$$= \lim_{\varsigma\to\varsigma^0\in S} \overline{\int_S \overline{\alpha_2(w)\; K(w,z^0)}\; K(w,\varsigma)\; \sigma(w)} - \overline{\overline{\frac{\alpha_2(\varsigma^0)K(\varsigma^0,z^0)}{2}}} =$$

$$= \lim_{\varsigma\to\varsigma^0\in S} \int_S \alpha_2(w)\; K(w,z^0)\; K(\varsigma,w)\; \sigma(w) - \frac{K(\varsigma^0,z^0)}{2} =$$

$$= \lim_{\substack{z\to z^0\in S\\ \varsigma\to\varsigma^0\in S}} \int_S \alpha_2(w)\; K(w,z)\; K(\varsigma,w)\; \sigma(w) - \frac{K(\varsigma^0,z^0)}{2}.$$

Тогда, применяя теорему 1, получим

$$\int_S K(w,z^0)\; K(\varsigma^0,w)\; \sigma(w) =$$

$$= \lim_{\substack{z\to z^0\in S\\ \varsigma\to\varsigma^0\in S}} \int_S \alpha_1(w)\; K(\varsigma,w)\; K(w,z)\sigma(w) - \frac{K(\varsigma^0,z^0)}{2} +$$

$$+ \lim_{\substack{z\to z^0\in S\\ \varsigma\to\varsigma^0\in S}} \int_S \alpha_2(w)\; K(w,z)\; K(\varsigma,w)\; \sigma(w) - \frac{K(\varsigma^0,z^0)}{2} =$$

$$= \lim_{\substack{z\to z^0\in S\\ \varsigma\to\varsigma^0\in S}} \int_S K(w,z)\; K(\varsigma,w)\; \sigma(w) - K(\varsigma^0,z^0) =$$

$$= K(\varsigma^0,z^0) - K(\varsigma^0,z^0) = 0.$$

**Основной результат.** *Теорема 5.* Пусть $f \in C^\alpha(S\times S)$, тогда для $z\in S$

$$\int_{S_w} K(w,z)\; \sigma(w) \int_{S_\varsigma} f(\varsigma,w)\; K(\varsigma,w)\; \sigma(\varsigma) =$$

$$= \int_{S_\varsigma}\int_{S_w} f(\varsigma,w)\; K(w,z)\; K(\varsigma,w)\; \sigma(\varsigma)\; \sigma(w) + \frac{f(z,z)}{4}.$$

*Доказательство.* Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\int_{S_w} K(w,z)\; \sigma(w) \int_{S_\varsigma} f(\varsigma,w)\; K(\varsigma,w)\; \sigma(\varsigma) =$$

$$= \int_{S_w} K(w,z)\; \sigma(w) \int_{S_\varsigma} \big(f(\varsigma,w) - f(w,w)\big)\; K(\varsigma,w)\; \sigma(\varsigma) +$$

$$+ \int_{S_w} K(w,z)\; \sigma(w) \int_{S_\varsigma} \big(f(w,w) - f(z,w)\big)\; K(\varsigma,w)\; \sigma(\varsigma) +$$

$$+ \int_{S_w} K(w,z)\; \sigma(w) \int_{S_\varsigma} \big(f(z,w) - f(z,z)\big)\; K(\varsigma,w)\; \sigma(\varsigma) +$$

$$+ f(z,z) \int_{S_w} K(w,z)\; \sigma(w) \int_{S_\varsigma} K(\varsigma,w)\; \sigma(\varsigma).$$

В первых трех интегралах по теореме 4 можно поменять порядок интегрирования. По теореме 2

$$\int_{S_w} K(w,z)\; \sigma(w) \int_{S_\varsigma} K(\varsigma,w)\; \sigma(\varsigma) = \frac{1}{4},$$

а по лемме 3

$$\int_{S_\varsigma}\int_{S_w} K(w,z) K(\varsigma,w)\; \sigma(w)\; \sigma(\varsigma) = 0.$$

Тем самым доказан аналог формулы Пуанкаре–Бертрана для особого интеграла Коши–Сеге и для главного значения в смысле Керзмана–Стейна.

## Библиографические ссылки


1. Kerzman N., Stein E. M. The Szego kernel in terms of Cauchy-Fantappie kernels // Duke Math. J. 1978. Vol. 45. № 3. P. 197–224.
2. Alt W. Singulare integrale mit gemischten homogenitaten auf mannigrfaltigkeiten und anwendungen in der funktionentheorie // Math. Zeit. 1974. B. 137. № 3. S. 227–256.
3. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbf{C}^n$. М. : Мир, 1984.
4. Кацунова А. С. О формуле перестановки повторного особого интеграла Бохнера–Мартинелли в строго псевдовыпуклых областях // Журн. СФУ. Математика и физика. 2011. Т. 4(1). С. 102–111.


A. S. Katsunova

## ON ITERATIVE SINGULAR CAUCHY-SZEGO INTEGRAL

*The article presents an obtained Poincare–Bertrand formula analog for Cauchy–Szego integral in a full-sphere. Principal value of integral in terms of Kerzman–Stein is considered in the article.*

*Keywords: Cauchy–Szego integral, principal value of integral in terms of Kerzman–Stein, formula of change of integration order for iterative integral.*