дискретность измерения переменных, характеризующих состояние исследуемого процесса, случайные ошибки, непредставительность выборок, действие случайных возмущений и т. д. И, наконец, в-третьих, чаще всего мы лишены на практике возможности проводить желаемые эксперименты, потому что объекты «включены» в реально функционирующий производственный процесс. Необходимо с большой осторожностью на этапе математической постановки задачи произносить ставшие обычными допущения: «Пусть объект описывается…», «Имеем генеральную совокупность» и т. п. Только учет всех перечисленных выше факторов позволяет строить качественные модели реальных дискретно-непрерывных процессов и использовать их в дальнейшем для целей управления.

Библиографические ссылки

1. Медведев А. В. Теория непараметрических систем. Процессы // Вестник СибГАУ. 2010. Вып. 3. С. 4–9.

2. Медведев А. В. Теория непараметрических систем. Моделирование // Вестник СибГАУ. 2010. Вып. 4. С. 4–9.

3. Медведев А. В. Непараметрические системы адаптации. Новосибирск : Наука, 1983.

4. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации. М. : Наука, 1984.

5. Методы классической и современной теории автоматического управления : в 2 т. Т. 2. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М. : Изд. Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана, 2004.

A. V. Medvedev

THEORY OF NON-PARAMETRIC SYSTEMS. K-MODELS

Some problems of identification in a wide sense are considered in the paper. Identification of intertia-free objects and objects with mamory are investigated in condition of non-parametric a priory information. A case when a priory information corresponds either non-parametric level simultaneously is researched. It belongs to the system of multiply connected objects. Non-parametric models of some static and dynamic objects wuth delay are given.

Keywords: identification, a priory information, identification in “wide”, non-parametric models, discrete-continuous processes, K-models.

© Медведев А. В., 2011

УДК 519.872

А. А. Назаров, Е. А. Судыко

НЕЭРГОДИЧНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОМПЬЮТЕРНОЙ СЕТИ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

Рассмотрена математическая модель компьютерной сети случайного доступа с конфликтами заявок, при возникновении которых обе заявки переходят в источник повторных вызовов. Для процесса изменения состояний системы построена вложенная цепь Маркова. Сформулирована теорема о неэргодичности цепи Маркова, что доказывает неустойчивость функционирования рассматриваемой компьютерной сети связи, управляемой протоколом случайного множественного доступа.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, RQ-системы, конфликты заявок.

Рассмотрим сеть связи случайного доступа. Обращение к общему ресурсу (моноканалу) реализуется протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте. Абонентская станция, сформировав сообщение, отправляет его на общий ресурс. Если ресурс свободен, то начинает осуществляться немедленная передача сообщения, которая заканчивается успешно, если за это время другие заявки не поступали. Если же за время передачи одного сообщения поступает другое, то происходит наложение сигналов, в результате чего сообщения искажаются. Сообщения, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о конфликте, считаются искаженными и переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), откуда вновь подаются на обслуживание после случайной задержки.

В качестве математической модели сети случайного доступа рассмотрим (см. рисунок) однолинейную немарковскую RQ-систему (Retrial Queues) с конфликтами заявок, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Требование, обратившееся к прибору и заставшее его свободным, немедленно занимает прибор и начинает обслуживаться в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения $B(x)$. Если за время обслуживания заявки другие требования не поступали, то обслуживаемая заявка покидает систему после полного завершения обслуживания. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт и обе переходят в ИПВ, где осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ, а на приборе начинается этап оповещения о конфликте, продолжительность которого имеет функцию распределения $A(x)$. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. И если прибор свободен, то заявка из ИПВ немедленно занимает его для обслуживания. Если же прибор занят, то вновь возникает конфликт и обе заявки переходят в ИПВ.

Таким образом, математической моделью сети случайного доступа будем называть RQ-систему с конфликтами заявок и оповещением о конфликте.

Важным вопросом в теории массового обслуживания является определение условий существования стационарного режима в RQ-системах. Несмотря на обилие работ [1; 2], посвященных данному вопросу, проблема эргодичности RQ-систем с конфликтами заявок не нашла должного отражения в научной литературе. В работе мы использовали условие Каплана и теорему Сеннота [3] для доказательства неэргодичности математических моделей компьютерных сетей связи с конфликтами заявок.

Неэргодичность математической модели определяет неустойчивость функционирования рассматриваемой компьютерной сети связи, управляемой протоколом случайного множественного доступа.

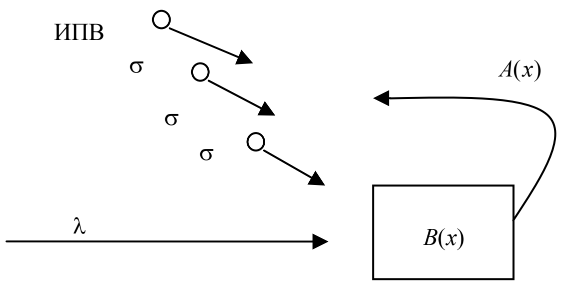

Схема функционирования немарковской RQ-системы

Введем обозначение $i(t)$ – число заявок в ИПВ в момент времени t.

Так как случайный процесс $i(t)$ для рассматриваемой RQ-системы является полумарковским, а эргодические свойства полумарковского процесса полностью определяются эргодическими свойствами его вложенной цепи Маркова, то для рассматриваемого процесса $i(t)$ определим его вложенную цепь и выполним исследование ее эргодических свойств.

Рассмотрим моменты времени

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots,$$

где t_n – момент окончания режима функционирования прибора завершением обслуживания или этапа оповещения о конфликте, и освобождением прибора; тогда процесс $\nu_n = i(t_n)$ с дискретным временем n является вложенной цепью Маркова для полумарковского процесса $i(t)$.

Найдем переходные вероятности $P_{ij} = P\{\nu_{n+1} = j \mid \nu_n = i\}$ вложенной цепи Маркова ν_n.

За один шаг возможны следующие переходы цепи Маркова из состояния $\nu_n = i$ в состояния $\nu_{n+1} = j$, где $j = \{i-1, i, i+1, i+2, i+3, i+4, \ldots\}$. Определим события, соответствующие этим переходам:

– $i \to i-1$: на прибор поступила заявка из ИПВ, обслуживание которой завершилось успешно;

– $i \to i$: на прибор поступила заявка из внешнего потока, обслуживание которой завершилось успешно; или на прибор поступила заявка из ИПВ, но ее обслуживание прервалось заявкой из ИПВ, произошел конфликт и на приборе начался этап оповещения о конфликте, за время которого других заявок из внешнего потока не поступало;

– $i \to i+1$: на прибор поступила заявка из внешнего потока, ее обслуживание прервалось заявкой из ИПВ, произошел конфликт и на приборе начался этап оповещения о конфликте, за время которого других заявок из внешнего потока не поступало; или на прибор поступила заявка из ИПВ, ее обслуживание прервано заявкой из внешнего потока, произошел конфликт и на приборе начался этап оповещения о конфликте, за время которого других заявок из внешнего потока не поступало; либо на прибор для обслуживания встала заявка из ИПВ, ее обслуживание прервалось заявкой из ИПВ, произошел конфликт и на приборе начался этап оповещения о конфликте, за время которого из внешнего потока поступила одна заявка;

– $i \to i+k,\ k = \overline{2,\infty}$: на прибор поступила заявка из внешнего потока, ее обслуживание прервано заявкой из внешнего потока, произошел конфликт и на приборе начался этап оповещения о конфликте, за время которого из внешнего потока поступило $k-2$ заявки; либо на прибор поступила заявка из внешнего потока, ее обслуживание прервалось заявкой из ИПВ, произошел конфликт и на приборе начался этап оповещения о конфликте, за время которого из внешнего потока поступила $k-1$ заявка; или на прибор поступила заявка из ИПВ, ее обслуживание прервано заявкой из внешнего потока, произошел конфликт и на приборе начался этап оповещения о конфликте, за время которого из внешнего потока поступала $k-1$ заявка; либо на прибор поступила заявка из ИПВ, ее обслуживание прервалось заявкой из ИПВ, произошел конфликт и на приборе начался этап оповещения о конфликте, за время которого из внешнего потока поступило k заявок.

Пусть $P\{\Delta_n = k \mid x\} = \dfrac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$ – условная вероятность того, что на интервале оповещения о конфликте поступит k заявок при условии, что средняя продолжительность этапа оповещения о конфликте равна x [4].

Так как x есть значение случайной величины с функцией распределения $A(x)$, то усредняя по x, получим значение безусловных вероятностей

$$f(k) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dA(x).$$

Тогда, учитывая описание модели, запишем вероятности P_{ij} переходов цепи Маркова ν_n в виде

$$P_{ii-1} = \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} B^*\left(\lambda + (i-1)\sigma\right),$$

$$P_{ii} = \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{(i-1)\sigma}{\lambda + (i-1)\sigma}\left[1 - B^*\left(\lambda + (i-1)\sigma\right)\right] \times$$
$$\times f(0) + \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} B^*\left(\lambda + i\sigma\right);$$

$$P_{ii+1} = \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma}\left[1 - B^*\left(\lambda + i\sigma\right)\right] f(0) +$$
$$+ \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{\lambda}{\lambda + (i-1)\sigma}\left[1 - B^*\left(\lambda + (i-1)\sigma\right)\right] f(0) +$$
$$+ \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{(i-1)\sigma}{\lambda + (i-1)\sigma}\left[1 - B^*\left(\lambda + (i-1)\sigma\right)\right] f(1);$$

$$P_{ii+k} = \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma}\left[1 - B^*\left(\lambda + i\sigma\right)\right] f(k-1) +$$
$$+ \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{\lambda}{\lambda + (i-1)\sigma}\left[1 - B^*\left(\lambda + (i-1)\sigma\right)\right] f(k-1) +$$
$$+ \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{(i-1)\sigma}{\lambda + (i-1)\sigma}\left[1 - B^*\left(\lambda + (i-1)\sigma\right)\right] f(k) +$$
$$+ \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma}\left[1 - B^*\left(\lambda + i\sigma\right)\right] f(k-2); \qquad (1)$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} P_{ii+k} = 1, \qquad (2)$$

где (2) – условие нормировки, а $B^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dB(x)$ – преобразование Лапласа–Стилтьеса функции распределения $B(x)$.

Таким образом, в явном виде записаны значения переходных вероятностей P_{ij} для вложенной цепи Маркова ν_n.

Применяя условие Каплана и теорему Сеннота, найдем условия неэргодичности построенной цепи Маркова.

Обозначим

$$\varphi_i(z) = \frac{z^i - \sum_j P_{ij} z^j}{1 - z}, \qquad (3)$$

$$\gamma_i = \sum_{j=0}^{\infty} (j - i) P_{ij}. \qquad (4)$$

Условие Каплана. Если существует положительная константа B, положительное целое число N, и $0 \le z < 1$, такое, что

$$\varphi_i(z) \ge -B \qquad (5)$$

для всех $i > N$ и $c \le z < 1$, то будем говорить, что выполнено условие Каплана (5).

Теорема Сеннота. Если для цепи Маркова выполняются условия Каплана (5), $\gamma_i < \infty \quad (i \ge 0)$ и существует такое N, что

$$\gamma_i \ge 0 \quad (i \ge N), \qquad (6)$$

тогда цепь Маркова неэргодична.

Обозначим b – среднее значение времени обслуживания в рассматриваемой RQ-системе, т. е.

$$b = \int_0^{\infty} x\, dB(x), \qquad (7)$$

а a – среднее значение продолжительности этапа оповещения о конфликте в рассматриваемой RQ-системе, т. е.

$$a = \int_0^{\infty} x\, dA(x). \qquad (8)$$

Отметим свойство преобразования Лапласа–Стилтьеса $B^*(\alpha)$, заключающееся в выполнении предельного равенства

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha B^*(\alpha) = B'(0), \qquad (9)$$

где величина $B'(0) = B'(x)\big|_{x=0}$ – значение производной в нуле от функции распределения $B(x)$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Цепь Маркова, переходные вероятности которой определяются равенствами (1), является неэргодической при любых значениях загрузки $\rho = \lambda b > 0$.

Доказательство. Неравенство (5), сформулированное в условии Каплана, перепишем в виде

$$\varphi_i(z) = z^i - \sum_j P_{ij} z^j \ge -(1 - z) B. \qquad (10)$$

Найдем предельные при $i \to \infty$ значения коэффициентов при степенях z:

$$\lim_{i \to \infty} P_{ii-1} = 0, \quad \lim_{i \to \infty} P_{ii+k} = f(k), \quad k = \overline{0, \infty}. \qquad (11)$$

Тогда, учитывая предельные неравенства (11) при $i \to \infty$, неравенство (10) примет вид

$$0 \ge -(1 - z) B, \qquad (12)$$

который выполняется для любых значений $c \le z < 1$ и значений параметров системы, в том числе и для любых значений параметра ρ.

Перепишем неравенство (6), сформулированное в теореме Сеннота, в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j - i) P_{ij} = -\frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} B^*\left(\lambda + (i-1)\sigma\right) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} k \left\{ \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{(i-1)\sigma}{\lambda + (i-1)\sigma} \left\{1 - B^*\left(\lambda + (i-1)\sigma\right)\right\} \times \right.$$
$$\times f(k) + \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \times \left\{1 - B^*\left(\lambda + i\sigma\right)\right\} f(k-1) + \qquad (13)$$
$$+ \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{\lambda}{\lambda + (i-1)\sigma} \left\{1 - B^*\left(\lambda + (i-1)\sigma\right)\right\} f(k-1) +$$
$$\left. + \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \left\{1 - B^*\left(\lambda + i\sigma\right)\right\} f(k-2) \right\} > 0.$$

Найдем предел при $i \to \infty$ выражения (13), учитывая свойство преобразования Лапласа–Стилтьеса (9), получим неравенство

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(j-i)P_{ij} = \lambda\int_0^{\infty} x\, dA(x) = \lambda\, a > 0\,, \tag{14}$$

которое выполняется для любых значений параметров системы, в том числе и для любых значений параметра ρ.

Из выполнения предельных неравенств (12) и (14) следует существование такого натурального числа i_0, что для всех $i > i_0$ выполняются допредельные неравенства (10) и (13).

Таким образом, выполнение условия Каплана и теоремы Сеннота доказывает сформулированную теорему.

Теорема доказана.

Итак, в немарковской RQ-системе с конфликтами заявок и оповещением о конфликте стационарного режима не существует при любых значениях ρ, что доказывает неустойчивое функционирование рассматриваемой компьютерной сети случайного доступа.

Библиографические ссылки

1. Artalejo J. R., Dudin A. N., Klimenok V. I. Stationary analysis of a retrial queue with preemptive repeated attempts // Operations Research Letters. 2001. № 28(4). P. 173–180.

2. Kernane T. Conditions for stability and instability of retrial queueing systems with general retrial times // Statistics and Probability Letters. 2008. № 78. P. 3244–3248.

3. Sennot L. I., Humblet P. A., Tweedie R. L. Mean drifts and the non-ergodicity of Markov chains // Operations research. 1983. № 31(4). P. 783–789.

4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания : учеб. пособие. Томск : Изд-во науч.-тех. лит., 2004.

A. A. Nazarov, E. A. Sudyko

NONERGODICITY OF MATHEMATIC MODEL OF A RANDOM ACCESS NETWORK

We have considered a random access communication network with conflicts of requests, which mean that the arriving request and request under service are sent to a retrial pool. For a process of system states changing the embedded Markov chain is built up. The theorem on non-ergodicity of Markov chain, which proves the instability of functioning of the computer communication network managed by a random multiple access, is formulated.

Keywords: mass service theory, RQ-systems, conflicts of requests.

© Назаров А. А., Судыко Е. А., 2011

УДК 519.622

Е. А. Новиков

РАЗРАБОТКА (4,2)-МЕТОДА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ*

Получены коэффициенты L-устойчивого (4,2)*-метода третьего порядка точности для решения жестких задач. Построено неравенство для контроля точности вычислений. Проведены расчеты, подтверждающие работоспособность и эффективность алгоритма переменного шага.*

Ключевые слова: жесткая задача, (m,k)-метод, контроль точности.

При моделировании динамических процессов в электрических сетях, радиоэлектронике, химической кинетике и других важных приложениях возникает необходимость численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1; 2]. Стремление к все более точному описанию физических процессов приводит к росту размерности и жесткости соответствующей системы уравнений. В этом случае эффективность алгоритмов интегрирования существенно зависит от свойств устойчивости численной формулы [3; 4]. Здесь получены коэффициенты *L*-устойчивого (4,2)-метода третьего порядка точности для численного решения жестких задач.

Класс (*m*,*k*)-методов. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y),\ y(t_0) = y_0,\ \ t_0 \le t \le t_k\,, \tag{1}$$

где y и f − вещественные N-мерные вектор-функции; t − независимая переменная. Ниже будем предполагать, что задача (1) жесткая.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00106).