Найдем предел при $i \to \infty$ выражения (13), учитывая свойство преобразования Лапласа–Стилтьеса (9), получим неравенство

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(j-i)P_{ij}=\lambda\int_0^{\infty}x\,dA(x)=\lambda\,a>0\,, \tag{14}$$

которое выполняется для любых значений параметров системы, в том числе и для любых значений параметра ρ.

Из выполнения предельных неравенств (12) и (14) следует существование такого натурального числа i_0, что для всех $i > i_0$ выполняются допредельные неравенства (10) и (13).

Таким образом, выполнение условия Каплана и теоремы Сеннота доказывает сформулированную теорему.

Теорема доказана.

Итак, в немарковской RQ-системе с конфликтами заявок и оповещением о конфликте стационарного режима не существует при любых значениях ρ, что доказывает неустойчивое функционирование рассматриваемой компьютерной сети случайного доступа.

Библиографические ссылки

1. Artalejo J. R., Dudin A. N., Klimenok V. I. Stationary analysis of a retrial queue with preemptive repeated attempts // Operations Research Letters. 2001. № 28(4). P. 173–180.

2. Kernane T. Conditions for stability and instability of retrial queueing systems with general retrial times // Statistics and Probability Letters. 2008. № 78. P. 3244–3248.

3. Sennot L. I., Humblet P. A., Tweedie R. L. Mean drifts and the non-ergodicity of Markov chains // Operations research. 1983. № 31(4). P. 783–789.

4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания : учеб. пособие. Томск : Изд-во науч.-тех. лит., 2004.

A. A. Nazarov, E. A. Sudyko

NONERGODICITY OF MATHEMATIC MODEL OF A RANDOM ACCESS NETWORK

We have considered a random access communication network with conflicts of requests, which mean that the arriving request and request under service are sent to a retrial pool. For a process of system states changing the embedded Markov chain is built up. The theorem on non-ergodicity of Markov chain, which proves the instability of functioning of the computer communication network managed by a random multiple access, is formulated.

Keywords: mass service theory, RQ-systems, conflicts of requests.

УДК 519.622

Е. А. Новиков

РАЗРАБОТКА (4,2)-МЕТОДА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ*

Получены коэффициенты L-устойчивого (4,2)-*метода третьего порядка точности для решения жестких задач. Построено неравенство для контроля точности вычислений. Проведены расчеты, подтверждающие работоспособность и эффективность алгоритма переменного шага.*

Ключевые слова: жесткая задача, (m,k)-метод, контроль точности.

При моделировании динамических процессов в электрических сетях, радиоэлектронике, химической кинетике и других важных приложениях возникает необходимость численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1; 2]. Стремление к все более точному описанию физических процессов приводит к росту размерности и жесткости соответствующей системы уравнений. В этом случае эффективность алгоритмов интегрирования существенно зависит от свойств устойчивости численной формулы [3; 4]. Здесь получены коэффициенты L-устойчивого (4,2)-метода третьего порядка точности для численного решения жестких задач.

Класс (*m*,*k*)-методов. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y),\ y(t_0) = y_0,\ \ t_0 \le t \le t_k\,, \tag{1}$$

где y и f − вещественные N-мерные вектор-функции; t − независимая переменная. Ниже будем предполагать, что задача (1) жесткая.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00106).

Зададимся значениями целых чисел m и k, $k \le m$ и введем в рассмотрение следующие множества:

$$M_m = \{1, 2, ..., m\},$$
$$M_k = \{m_i \in M_m \mid 1 = m_1 < m_2 < \dots < m_k \le m\},$$
$$M_{m-k} = M_m \setminus M_k,$$
$$J_i = \{m_{j-1} \in M_m \mid j > 1, m_j \in M_k, m_j \le i\}, \; 2 \le i \le m.$$

Для решения задачи (1) будем применять (m,k)-схемы вида [5]

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m} p_i k_i, \; D_n = E - ahf'_n,$$
$$D_n k_i = hf(y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j) + \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} k_j, \; i \in M_k, \quad (2)$$
$$D_n k_i = k_{i-1} + \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} k_j, \; i \in M_{m-k}.$$

Здесь E − единичная матрица; $f_n' = \partial f(y_n)/\partial y$ − матрица Якоби системы (1); h − шаг интегрирования; a, p_i, α_{ij} и β_{ij} − вещественные константы, определяющие свойства точности и устойчивости методов (2). В отличие о других известных одношаговых численных схем, в (m, k)-методах правая часть задачи (1) вычисляется не для всех стадий. За счет этого значительно упрощается проблема замораживания матрицы Якоби, т. е. проблема использования одной матрицы D_n на нескольких шагах интегрирования. Для описания традиционных одношаговых методов достаточно одной константы m (число стадий). В данных схемах для описания затрат на шаг необходимо введение двух постоянных m и k. Вычислительные затраты на шаг интегрирования в методах (2) следующие: один раз вычисляется матрица Якоби и осуществляется декомпозиция матрицы D_n, k раз вычисляется функция f и m раз осуществляется обратный ход метода Гаусса.

Устойчивость численных методов обычно исследуют на скалярной тестовой задаче

$$y' = \lambda y, \;\; y(t_0) = y_0, \; t \ge 0,$$

где λ − произвольное комплексное число, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Применяя численную схему (2) для решения данной задачи, имеем $y_{n+1} = Q(x)y_n$, $x = h\lambda$. Схема называется устойчивой при $x = h\lambda$, если $|Q(x)| \le 1$. Область R комплексной плоскости называется областью устойчивости схемы, если она устойчива в каждой точке области. Схема называется A-устойчивой, если ее область устойчивости включает всю полуплоскость $\mathrm{Re}(h\lambda) < 0$. Схема называется L-устойчивой, если она A-устойчива и $|Q(h\lambda)| \to 0$ при $\mathrm{Re}(h\lambda) \to -\infty$.

Максимальный порядок (*m*,2)-методов. Рассмотрим $(m,2)$-схемы следующего вида:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m} p_i k_i, \; D_n = E - ahf'_n,$$
$$D_n k_1 = hf(y_n), \; D_n k_i = k_{i-1}, \; 2 \le i \le s_1 - 1, \quad (3)$$
$$D_n k_{s_1} = hf(y_n + \sum_{j=1}^{s_1-1} \beta_{s_1,j} k_j) + \alpha_{s_1,s_1-1} k_{s_1-1},$$
$$D_n k_i = k_{i-1} + \alpha_{i,s_1-1} k_{s_1-1}, \;\; s_1 + 1 \le i \le m,$$

где m и s_1, $s_1 \le m$ – произвольные целые постоянные. Нетрудно видеть, что схемы (3) описывают всевозможные варианты $(m,2)$-методов.

Теорема. При любом выборе множеств M_k и J_i и при любом m нельзя построить $(m,2)$-метод выше четвертого порядка.

Без потери общности для простоты доказательство проведем для скалярной задачи (1), точное решение $y(t_{n+1})$ которой можно записать в виде

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + \frac{1}{2}h^2 f'f + \frac{1}{6}h^3[f'^2 f + f''f^2] +$$
$$+\frac{1}{24}h^4[f'^3 f + 4ff'f''f^2 + f'''f^3] + \frac{1}{120}h^5[f'^4 f + 4ff'f'''f^3 +$$
$$+5f'^2 f''f^2 + f''^2 f^3 + f^{IV} f^4] + O(h^6),$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении $y(t_n)$. Учитывая, что ряд Тейлора для D_n^{-1} имеет вид

$$D_n^{-1} = E + ahf'_n + a^2h^2 f_n'^2 + a^3h^3 f_n'^3 + \dots,$$

получим, что второе вычисление функции $f(y_{n,c})$ будет осуществляться в точке

$$y_{n,c} = y_n + \sum_{j=1}^{s_1-1} \beta_{s_1,j} k_j =$$
$$= y_n + \sum_{i=1}^{4} c_i h^i f_n'^{(i-1)} f_n + O(h^5),$$

где числа c_i, $1 \le i \le 4$ определяются через коэффициенты схемы (3), а элементарные дифференциалы вычислены на приближенном решении y_n. Учитывая ряд для точного решения $y(t_{n+1})$, для доказательства теоремы достаточно показать, что в представлении функции $f(y_{n,c})$ в виде ряда Тейлора по степеням h не содержится слагаемое $h^5 f_n''^2 f_n^3$. Разлагая $f(y_{n,c})$ в ряд Тейлора в окрестности точки y_n до членов с h^5 включительно, имеем

$$f(y_{n,c}) = hf_n + c_1 h^2 f_n' f_n + h^3[c_2 f_n'^2 f_n +$$
$$+\frac{1}{2} f_n'' f_n^2] + h^4[c_3 f_n'^3 f_n + c_1 c_2 f_n' f_n'' f_n^2 +$$
$$+\frac{1}{6} c_1^3 f_n''' f_n^3] + h^5[c_4 f_n'^4 f_n + c_1 c_3 f_n'^2 f_n'' f_n^2 +$$
$$+\frac{1}{2} c_1^2 c_2 f_n' f_n''' f_n^3 + \frac{1}{24} c_1^4 f_n^{IV} f_n^4] + O(h^6),$$

что завершает доказательство.

Исследование (4,2)-метода. Для решения задачи (1) рассмотрим численную формулу

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{4} p_i k_i, \; D_n = E - ahf'_n,$$
$$D_n k_1 = hf(y_n), \; D_n k_2 = k_1, \quad (4)$$
$$D_n k_3 = hf(\tilde{y}_{n+1}) + \alpha_{32} k_2, \; D_n k_4 = k_3 + \alpha_{42} k_2,$$

где схему

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2 \quad (5)$$

называют внутренней схемой метода (4).

Для построения численной формулы третьего порядка точности разложим стадии k_i, $1 \le i \le 4$ в ряды Тейлора в окрестности точки y_n, т. е.

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf_n + ah^2 f_n' f_n + a^2 h^3 f_n'^2 f_n + a^3 h^4 f_n'^3 f_n + O(h^5),\\
k_2 &= hf_n + 2ah^2 f_n' f_n + 3a^2 h^3 f_n'^2 f_n + 4a^3 h^4 f_n'^3 f_n + O(h^5),\\
k_3 &= (1+\alpha_{32})hf_n + (a + 3a\alpha_{32} + \beta_{31} + \beta_{32})h^2 f_n' f_n +\\
&+ (a^2 + 6a^2\alpha_{32} + 2a\beta_{31} + 3a\beta_{32})h^3 f_n'^2 f_n +\\
&+ \frac{1}{2}(\beta_{31}+\beta_{32})^2 h^3 f_n'' f_n^2 + (a^3 + 10a^3\alpha_{32} + 3a^2\beta_{31} +\\
&+ 6a^2\beta_{32})h^4 f_n'^3 f_n + \frac{1}{2}a(\beta_{31}+\beta_{32})^2 h^4 f_n' f_n'' f_n^2 +\\
&+ a(\beta_{31}+\beta_{32})(\beta_{31}+2\beta_{32})h^4 f_n'' f_n' f_n^2 +\\
&+ \frac{1}{6}(\beta_{31}+\beta_{32})^3 h^4 f_n''' f_n^3 + O(h^5), \qquad (6)\\
k_4 &= (1+\alpha_{32}+\alpha_{42})hf_n + (2a + 4a\alpha_{32} + 3a\alpha_{42} +\\
&+ \beta_{31} + \beta_{32})h^2 f_n' f_n + (3a^2 + 10a^2\alpha_{32} + 6a^2\alpha_{42} +\\
&+ 3a\beta_{31} + 4a\beta_{32})h^3 f_n'^2 f_n + \frac{1}{2}(\beta_{31}+\beta_{32})^2 h^3 f_n'' f_n^2 +\\
&+ (4a^3 + 20a^3\alpha_{32} + 10a^3\alpha_{42} + 6a^2\beta_{31} +\\
&+ 10a^2\beta_{32})h^4 f_n'^3 f_n + a(\beta_{31}+\beta_{32})^2 h^4 f_n' f_n'' f_n^2 +\\
&+ a(\beta_{31}+\beta_{32})(\beta_{31}+2\beta_{32})h^4 f_n'' f_n' f_n^2 +\\
&+ \frac{1}{6}(\beta_{31}+\beta_{32})^3 h^4 f_n''' f_n^3 + O(h^5).
\end{aligned}$$

Подставим разложения стадий (6) в первую формулу (4). В результате запишем

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + [p_1 + p_2 + (1+\alpha_{32})p_3 + (1+\alpha_{32} +\\
&+ \alpha_{42})p_4]hf_n + [ap_1 + 2ap_2 + (a + 3a\alpha_{32} + \beta_{31} +\\
&+ \beta_{32})p_3 + (2a + 4a\alpha_{32} + 3a\alpha_{42} + \beta_{31} +\\
&+ \beta_{32})p_4]h^2 f_n' f_n + [a^2 p_1 + 3a^2 p_2 + (a^2 + 6a^2\alpha_{32} +\\
&+ 2a\beta_{31} + 3a\beta_{32})p_3 + (3a^2 + 10a^2\alpha_{32} + 6a^2\alpha_{42} +\\
&+ 3a\beta_{31} + 4a\beta_{32})p_4]h^3 f_n'^2 f_n + \frac{1}{2}(p_3+p_4)(\beta_{31} + \qquad (7)\\
&+ \beta_{32})^2 h^3 f_n'' f_n^2 + [a^3 p_1 + 4a^3 p_2 + (a^3 + 10a^3\alpha_{32} +\\
&+ 3a^2\beta_{31} + 6a^2\beta_{32})p_3 + (4a^3 + 20a^3\alpha_{32} +\\
&+ 10a^3\alpha_{42} + 6a^2\beta_{31} + 10a^2\beta_{32})p_4]h^4 f_n'^3 f_n +\\
&+ \frac{1}{2}a(\beta_{31}+\beta_{32})^2(p_3 + 2p_4)h^4 f_n' f_n'' f_n^2 +\\
&+ a(p_3+p_4)(\beta_{31}+\beta_{32})(\beta_{31}+2\beta_{32})h^4 f_n'' f_n' f_n^2 +\\
&+ \frac{1}{6}(\beta_{31}+\beta_{32})^3(p_3+p_4)h^4 f_n''' f_n^3 + O(h^5).
\end{aligned}$$

Условия порядка. Сравним полученное соотношение (7) с разложением точного решения $y(t_{n+1})$ в ряд Тейлора в окрестности точки t_n до членов с h^3 включительно. В результате получим условия третьего порядка точности схемы (4), которые имеют вид

$$\begin{aligned}
&p_1 + p_2 + (1+\alpha_{32})p_3 + (1+\alpha_{32}+\alpha_{42})p_4 = 1,\\
&ap_1 + 2ap_2 + (a + \beta_{31} + \beta_{32} + 3a\alpha_{32})p_3 +\\
&+ (2a + \beta_{31} + \beta_{32} + 4a\alpha_{32} + 3a\alpha_{42})p_4 = \frac{1}{2}, \qquad (8)\\
&a^2 p_1 + 3a^2 p_2 + (a^2 + 2a\beta_{31} + 3a\beta_{32} + 6a^2\alpha_{32})p_3 +\\
&+ (3a^2 + 3a\beta_{31} + 4a\beta_{32} + 10a^2\alpha_{32} + 6a^2\alpha_{42})p_4 = \frac{1}{6},\\
&(\beta_{31}+\beta_{32})^2(p_4+p_3) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Неравенство для контроля точности вычислений построим по аналогии [3]. Для этого потребуем, чтобы локальная ошибка δ_n метода (4) представлялась в виде

$$\delta_n = \xi h^4 f_n'^3 f_n + O(h^5), \qquad (9)$$

где ξ – некоторая постоянная. С применением (6) и (7) нетрудно видеть, что требование (9) приводит к следующим дополнительным соотношениям на коэффициенты метода:

$$\begin{aligned}
&(\beta_{31}+\beta_{32})^3(p_4+p_3) = \frac{1}{4},\\
&a(\beta_{31}+\beta_{32})(\beta_{31}+2\beta_{32})(p_4+p_3) = \frac{1}{8}, \qquad (10)\\
&a(\beta_{31}+\beta_{32})^2(2p_4+p_3) = \frac{1}{12},
\end{aligned}$$

при этом постоянная ξ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{24} - a^3 p_1 - 4a^3 p_2 - (a^3 + 3a^2\beta_{31} +\\
&+ 6a^2\beta_{32} + 10a^3\alpha_{32})p_3 - (4a^3 + 6a^2\beta_{31} + \qquad (11)\\
&+ 10a^2\beta_{32} + 20a^3\alpha_{32} + 10a^3\alpha_{42})p_4.
\end{aligned}$$

Устойчивость. Исследуем устойчивость схемы (4) на линейном скалярном уравнении $y' = \lambda y$. Применяя (4) для решения $y' = \lambda y$, получим $y_{n+1} = Q_4(x)y_n$, $x = h\lambda$, где $Q_4(x)$ есть дробно-рациональная функция. Мы не приводим $Q_4(x)$ в силу ее громоздкости. Из вида $Q_4(x)$ следует, что для L-устойчивости (4) необходимо выполнение соотношения

$$a(a-p_1) + (\beta_{31} - a)p_3 = 0. \qquad (12)$$

Теперь исследуем устойчивость промежуточной численной формулы (5). Применяя (5) для решения уравнения $y' = \lambda y$, получим $\tilde{y}_{n+1} = Q_2(x)y_n$, где $Q_2(x)$ имеет вид

$$Q_2(x) = \frac{1 + 0,25(3-8a)x + a(a-\beta_{31})x^2}{(1-ax)^2}.$$

Отсюда следует, что промежуточная схема (5) будет L-устойчивая, если $\beta_{31} = a$. Учитывая (12), имеем, что основная схема (4) и промежуточная (5) будут L-устойчивые, если

$$p_1 = \beta_{31} = a. \qquad (13)$$

Коэффициенты метода. Исследуем совместность нелинейной системы алгебраических уравнений (8) и (10) при условии (13). Из четвертого соотношения (8) и первого уравнения (10) следует, что $\beta_{31} + \beta_{32} = 3/4$. Учитывая (13), имеем $\beta_{32} = 3/4-a$. Из четвертого равенства (8) следует $p_3 + p_4 = 16/27$. Тогда из третьего уравнения (10) имеем $p_4 = a^{-1}(4-16a)/27$ и $p_3 = a^{-1}(32a-4)/27$. Подставляя полученные значения во второе равенство (10), получим квадратное уравнение относительно коэффициента a, т. е.

$$32a^2-48a+9=0. \qquad (14)$$

Данное уравнение имеет два вещественных корня: $a_1 = 3/4 + 3\sqrt{2}/8$ и $a_2 = 3/4-3\sqrt{2}/8$. Отметим, что для известных четырехстадийных численных формул уравнение относительно a имеет четвертую степень. Требование L-устойчивости промежуточной схемы (5) позволило понизить порядок до второго.

Оставшиеся коэффициенты p_2, α_{32} и α_{42} определим из трех первых уравнений (8). В результате получим следующие коэффициенты метода (4):

$$p_1=\beta_{31}=a,\ \beta_{32}=\frac{3}{4}-a,$$

$$p_2=\frac{3-57a+312a^2-528a^3}{54a^2(4a-1)^2}+$$

$$+\frac{a(4a-1)^2(-162a^2+196a-11)}{54a^2(4a-1)^2},$$

$$p_3=\frac{32a-4}{27a},\ p_4=\frac{4-16a}{27a},$$

$$\alpha_{32}=\frac{432a^3-1040a^2+392a-24}{64a(4a-1)},$$

$$\alpha_{42}=\frac{-216a^4+284a^3-154a^2+44a-3}{8a(4a-1)^2}.$$

Подставляя сюда корни уравнения (14), получим два набора коэффициентов вида

$$a=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\sqrt{2},\ p_1=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\sqrt{2},$$

$$p_2=-\frac{65}{324}-\frac{281}{648}\sqrt{2},\ p_3=\frac{64}{81}+\frac{16}{81}\sqrt{2},$$

$$p_4=-\frac{16}{81}-\frac{16}{81}\sqrt{2},\ \beta_{31}=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\sqrt{2}, \qquad (15)$$

$$\beta_{32}=-\frac{3}{8}\sqrt{2},\ \alpha_{32}=-\frac{85}{16}+\frac{395}{128}\sqrt{2},$$

$$\alpha_{42}=\frac{2\,121}{64}-\frac{3\,095}{128}\sqrt{2},\ \xi=\frac{2\,461}{3\,072}+\frac{145\sqrt{2}}{256},$$

и следующего

$$a=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\sqrt{2},\ p_1=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\sqrt{2},$$

$$p_2=-\frac{65}{324}+\frac{281}{648}\sqrt{2},\ p_3=\frac{64}{81}-\frac{16}{81}\sqrt{2},$$

$$p_4=-\frac{16}{81}+\frac{16}{81}\sqrt{2},\ \beta_{31}=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\sqrt{2}, \qquad (16)$$

$$\beta_{32}=\frac{3}{8}\sqrt{2},\ \alpha_{32}=-\frac{85}{16}-\frac{395}{128}\sqrt{2},$$

$$\alpha_{42}=\frac{2\,121}{64}+\frac{3\,095}{128}\sqrt{2},\ \xi=\frac{2\,461}{3\,072}-\frac{145\sqrt{2}}{256},$$

при которых схема (4) имеет третий порядок точности и является L-устойчивой вместе с промежуточной численной формулой (5).

Контроль точности вычислений. Согласно [6], для контроля точности вычислений метода (4) с локальной ошибкой (9) можно использовать ошибку ε_n вида

$$\varepsilon_n=\xi h^3 f_n'^2 f_n+O(h^4),$$

где постоянная ξ определена формулой (11). Величину ε_n оценим следующим способом. Определим коэффициенты b_i, $1\le i\le 4$, из условия выполнения соотношения

$$\sum_{i=1}^{4} b_i k_i = h^3 f_n'^2 f_n + O(h^4)\ .$$

Используя разложения (6) стадий k_i, $1\le i\le 4$, в ряды Тейлора в окрестности точки y_n до членов с h^3 включительно и приравнивая соответствующие соотношения на коэффициенты нулю, получим относительно b_i, $1\le i\le 4$, линейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}b_1+b_2+(1+\alpha_{32})b_3+(1+\alpha_{32}+\alpha_{42})b_4=0,\\ ab_1+2ab_2+(a+\beta_{31}+\beta_{32}+3a\alpha_{32})b_3+\\ +(2a+\beta_{31}+\beta_{32}+4a\alpha_{32}+3a\alpha_{42})b_4=0, \qquad (17)\\ a^2b_1+3a^2b_2+(a^2+2a\beta_{31}+3a\beta_{32}+6a^2\alpha_{32})b_3+\\ +(3a^2+3a\beta_{31}+4a\beta_{32}+10a^2\alpha_{32}+6a^2\alpha_{42})b_4=1,\\ (\beta_{31}+\beta_{32})^2(b_4+b_3)=0.\end{gathered}$$

Исследуя совместность (17), получим

$$b_4=\frac{4}{8a^2\alpha_{32}+4a^2\alpha_{42}+3a},\ b_3=-b_4,$$

$$b_2=-(1+\alpha_{32}+2\alpha_{42})b_4,\ b_1=(1+\alpha_{32}+\alpha_{42})b_4\,.$$

Подставляя сюда коэффициенты (15) и (16), получим два набора значений b_i, $1\le i\le 4$ вида

$$b_1=\frac{3\,968\,960-2\,745\,760\sqrt{2}}{331\,989},$$

$$b_2=\frac{53\,105\,312\sqrt{2}-76\,687\,712}{2\,987\,901},$$

$$b_3=\frac{698\,368\sqrt{2}-217\,088}{2\,987\,901},$$

$$b_4=\frac{217\,088-698\,368\sqrt{2}}{2\,987\,901},$$

и следующего

$$b_1=\frac{3\,968\,960+2\,745\,760\sqrt{2}}{331\,989},$$

$$b_2 = -\frac{76\,687\,712 + 53\,105\,312\sqrt{2}}{2\,987\,901},$$

$$b_3 = -\frac{217\,088 + 698\,368\sqrt{2}}{2\,987\,901},$$

$$b_4 = \frac{217\,088 + 698\,368\sqrt{2}}{2\,987\,901}.$$

Теперь, согласно [6], в неравенстве для контроля точности вычислений можно применять оценку ошибки вида

$$\varepsilon_n = \xi \sum_{i=1}^{4} b_i k_i. \qquad (18)$$

Отметим особенность построенной оценки. Для метода (4) в силу L-устойчивости выполняется соотношение $Q_4(x) \to 0$ при $x \to -\infty$. Так как для точного решения $y(t_{n+1}) = \exp(x)y(t_n)$ задачи $y' = \lambda y$, $y(t_0) = y_0$ выполняется аналогичное свойство, то естественным будет требование стремления к нулю оценки (18) при $x \to -\infty$. В силу того что оценивается главный член ошибки, т. е. первый член при разложении ошибки в ряд Тейлора, для (18) это требование не выполняется. Поэтому вместо (18) будем контролировать оценку вида

$$\varepsilon_n(j_n) = D_n^{1-j_n}\varepsilon_n, \quad 1 \le j_n \le 2, \qquad (19)$$

при этом имеет место $\varepsilon_n(2) \to 0$ при $x \to -\infty$. В результате для контроля точности вычислений и при выборе шага можно применять неравенство

$$\| \varepsilon_n(j_n) \| \le \varepsilon, \quad 1 \le j_n \le 2, \qquad (20)$$

где ε – требуемая точность расчетов. Нетрудно видеть, что в смысле главного члена оценки ε_n и $\varepsilon_n(j_n)$ совпадают при любом значении j_n. Отметим, что применение (19) вместо (18) не приводит к значительному увеличению вычислительных затрат. При $x \to 0$ оценка $\varepsilon_n(1) = \varepsilon_n$ правильно отражает поведение ошибки и нет смысла проверять (20) при других значениях j_n. При резком увеличении шага поведение ошибки ε_n может оказаться неудовлетворительным, что проявляется в повторных вычислениях решения. Поэтому если требуемая точность не выполняется, имеет смысл проверить (20) при $j_n = 2$.

Заметим также, что применение (20) для контроля точности вычислений не приводит к дополнительным вычислениям правой части и матрицы Якоби, потому что в данном неравенстве используются ранее вычисленные стадии k_i, $1 \le i \le 4$.

Результаты расчетов. Численный эксперимент проводился для десяти тестовых примеров [7]. В качестве критерия эффективности алгоритмов выбрано *if* – число вычислений правой части и *ij* – число обращений матрицы D_n на интервале интегрирования. Время вычисления не приводится, потому что для некоторых оно настолько мало, что не может служить объективной характеристикой эффективности метода.

Целью данного численного эксперимента является сравнение эффективности методов вида (4) с дополнительным требованием L-устойчивости промежуточной численной формулы (5) и без данного требования [8]. В конкретных расчетах левая часть $\|\varepsilon_n(j_n)\|$ неравенства (20) вычислялась по формуле

$$\| \varepsilon_n(j_n) \| = \max_{1 \le i \le N} \frac{|\varepsilon_n^i(j_n)|}{|y_n^i| + r},$$

где N − размерность задачи (1); r − некоторая положительная постоянная. Если по i-й компоненте решения выполняется неравенство $|y_n^i| < r$, то контролируется абсолютная ошибка εr, в противном случае – относительная ошибка ε.

Из анализа результатов расчетов следует, что алгоритм интегрирования с коэффициентами (15) эффективнее алгоритма с коэффициентами (16). Поэтому ниже будем рассматривать только метод (4), (15), который назовем ODE_A. Алгоритм интегрирования на основе схемы (4) без требования L-устойчивости (5) назовем ODE_B.

Для решения десяти примеров [7] алгоритму ODE_A потребовалось 748 вычислений правой части и 345 декомпозиций матрицы Якоби при точности $\varepsilon = 10^{-2}$ и *if* = 4 007 и *ij* = 2 231 при точности $\varepsilon = 10^{-4}$. Для алгоритма ODE_B вычислительные затраты следующие: *if* = 916, *ij* = 471 при $\varepsilon = 10^{-2}$ и *if* = 4743, *ij* = 2534 при $\varepsilon = 10^{-4}$. В конце интервала интегрирования фактическая точность вычислений не хуже задаваемой точности. По суммарным затратам эффективность обоих алгоритмов отличается не сильно. Однако на некоторых задачах, на которые приходится небольшой процент вычислительных затрат и жесткость которых достаточно велика, алгоритм ODE_A эффективнее ODE_B примерно в 1,3 раза.

Библиографические ссылки

1. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. М. : Мир, 1979.

2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи : монография. М. : Мир, 1999.

3. Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем : монография. Новосибирск : Наука, 1997.

4. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений : монография. М. : Мир, 1988.

5. Новиков Е. А., Шитов Ю. А., Шокин Ю. И. Одношаговые безытерационные методы решения жестких систем // ДАН СССР. Т. 301. № 6. 1988. С. 1310–1314.

6. Новиков Е. А. Оценка глобальной ошибки одношаговых методов решения жестких задач // Изв. вузов. Математика. 2011. № 6. С. 80–89.

7. Enright W. H., Hull T. E. Comparing numerical methods for the solutions of systems of ODE's // BIT. 1975. № 15. P. 10–48.

8. Новиков Е. А. Исследование (m, 2)-методов решения жестких систем // Вычисл. технологии. Т. 12. № 5. 2007. С. 103–115.

E. A. Novikov

DEVELOPMENT OF (4,2)-METHOD OF ORDER 3 FOR SOLVING STIFF PROBLEMS

We obtain the coefficients of (4,2)-*method for solving stiff systems in which both the main and the intermediate numerical schemes are L-stable. We construct an accuracy control inequality. Numerical tests confirming efficiency and workability of the constructed variable step algorithm were held.*

Keywords: stiff problem, (m,k)-methods, accuracy control.

УДК 621.318.562.5

А. Н. Пахомов, М. Ф. Коротков, А. А. Федоренко

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Приведена методика синтеза модальных регуляторов координат векторной системы «преобразователь частоты–асинхронный двигатель» методом стандартных уравнений. Дана оценка качества процессов регулирования координат путем анализа результатов имитационного моделирования системы в среде MatLab.

Ключевые слова: модальный регулятор, электропривод переменного тока, векторная система.

Теория систем векторного управления частотно регулируемого асинхронного электропривода разработана достаточно полно [1; 2]. Контуры регулирования в системе векторного управления выполняются, как правило, в соответствии с принципами подчиненного регулирования координат, что ограничивает их быстродействие и, как следствие, точность в динамических режимах. Обеспечить предельное быстродействие и точность в динамических режимах возможно, снабдив систему так называемым модальным регулятором, построенным на основе суммирования обратных связей по вектору состояния. Вопросы построения таких регуляторов применительно к векторным системам асинхронного электропривода в литературе отражены недостаточно, в связи с чем в данной работе ставится задача разработки методики проектирования модальных регуляторов векторных систем частотно управляемого асинхронного электропривода и проверка ее эффективности с помощью имитационного моделирования в среде MatLab.

В качестве объекта управления принята получившая наибольшее распространение система «преобразователь частоты с автономным инвертором напряжения с широтно-импульсной модуляцией – асинхронный двигатель». Поскольку у таких преобразователей автономный инвертор формирует не только частоту, но и амплитуду выходного напряжения, влияние звена постоянного тока на динамические свойства системы при синтезе можно не учитывать. Кроме того, частота модуляции современных преобразователей весьма высока, что позволяет пренебречь также его дискретными свойствами. Изложенное дает возможность представить в первом приближении преобразователь частоты безынерционным линейным звеном с коэффициентом передачи $k_п$.

Математическая модель асинхронного двигателя (АД) с учетом общепринятых допущений [2; 3], в декартовой системе координат u–v, вращающейся с произвольной скоростью ω_k, в форме Коши имеет следующий вид [3]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{di_{1u}}{dt} = \frac{1}{R_э T_э} u_{1u} - \frac{1}{T_э} i_{1u} + \frac{k_2}{T_2 R_э T_э} \Psi_{2u} + \\
&+ \frac{k_2 p_п}{R_э T_э} \omega \Psi_{2v} + \omega_k i_{1v}; \\
&\frac{di_{1v}}{dt} = \frac{1}{R_э T_э} u_{1v} - \frac{1}{T_э} i_{1v} + \frac{k_2}{T_2 R_э T_э} \Psi_{2v} - \\
&- \frac{k_2 p_п}{R_э T_э} \omega \Psi_{2u} - \omega_k i_{1u}; \\
&\frac{d\Psi_{2u}}{dt} = R_2 k_2 i_{1u} - \frac{1}{T_2} \Psi_{2u} + (\omega_k - p_п \omega) \Psi_{2v}; \\
&\frac{d\Psi_{2v}}{dt} = R_2 k_2 i_{1v} - \frac{1}{T_2} \Psi_{2v} - (\omega_k - p_п \omega) \Psi_{2u}; \\
&\frac{d\omega}{dt} = \frac{3 p_п k_2}{2J} i_{1v} \Psi_{2u} - \frac{3 p_п k_2}{2J} i_{1u} \Psi_{2v} - \frac{1}{J} M_с,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где u_{1u}, u_{1v}, i_{1u}, i_{1v}, Ψ_{2u}, Ψ_{2v} – проекции результирующих векторов напряжения статора $\bar{u}_1$, тока статора $\bar{i}_1$, потокосцепления ротора $\overline{\Psi}_2$ соответственно, на оси u и v декартовой системы координат; $\omega = \omega_{эл} / p_п$ – угловая скорость вращения ротора;