

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЕ НАГРУЗКИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ*

С помощью законов сохранения решена задача о распространении продольной плоской волны нагрузки в однородном полубесконечном упругопластическом стержне.

Ключевые слова: волна нагрузки, пластическая среда, закон сохранения, точное решение, стержень.

1. Рассмотрим процесс распространения пластических деформаций в полубесконечном упругопластическом стержне, вызванных приложенной к концу стержня динамической нагрузкой $p(t)$, не убывающей во времени (т. е. $dp/dt \geq 0$). Проведем решение в лагранжевой системе координат: за ось x возьмем ось стержня, начало координат $x = 0$ выберем на левом конце стержня. Предположим, что в процессе деформации не происходит бокового выпучивания стержня и что влияние поперечных деформаций стержня на процесс распространения продольных волн пренебрежимо мало. Рассмотрим малые деформации стержня и будем предполагать, что плотность стержня в процессе деформирования не изменяется. Единственной отличной от нуля составляющей тензора напряжений будет $\sigma_{xx} = \sigma$, отличными от нуля составляющими тензора деформаций будут $\epsilon_{xx} = \epsilon$ и $\epsilon_{yy} = \nu\epsilon$.

В этом случае уравнение движения без учета массовых внешних сил приобретает вид [1]

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \tag{1}$$

Поскольку плотность постоянна, то без потери общности ниже полагаем $\rho = 1$.

Принимая определяющие соотношения деформационной теории пластичности (для одноосного напряженного состояния) в следующем виде

$$\sigma = \sigma(\epsilon), \tag{2}$$

будем считать, что $\sigma(\epsilon)$ есть монотонно возрастающая по ϵ функция (рис. 1) и что для всех ϵ производная $d\sigma/d\epsilon$ есть монотонно убывающая функция (т. е. $d^2\sigma/d^2\epsilon < 0$). Для напряжений $\sigma \leq \sigma_s$ (σ_s – предел текучести) зависимость $\sigma(\epsilon)$, согласно закону Гука, линейна:

$$\sigma = E\epsilon \text{ при } \sigma \leq \sigma_s, \tag{3}$$

где E – модуль упругости.

Из уравнений сплошности в случае малых деформаций получим соотношение

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dv}{dx}. \tag{4}$$

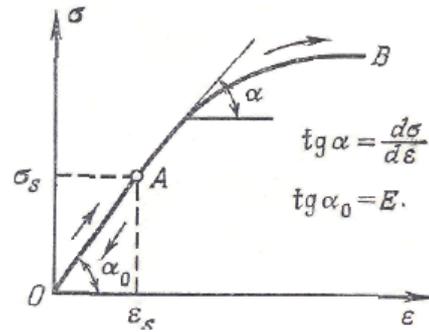


Рис. 1

Учитывая зависимость $\sigma = \sigma(\epsilon)$ при нагружении и вводя обозначение

$$a^2(\sigma) = \frac{d\sigma}{d\epsilon}, \tag{5}$$

где $d\sigma/d\epsilon$ – тангенс угла наклона касательной к кривой $\sigma(\epsilon)$, имеем

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{a^2(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \tag{6}$$

Подставляя соотношение (4) в (6), получим систему двух уравнений с частными производными первого порядка [1]:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\sigma}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{a^2(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{7}$$

для двух функций $v(x, t), \sigma(x, t)$.

В этом уравнении $a(\sigma)$ есть скорость распространения продольных волн в стержне.

Так как скорость распространения волн в общем случае есть функция напряжения, то система уравнений (7) является системой квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка гиперболического типа. Определим для нее характеристики и соотношения на характеристиках.

Характеристики системы уравнений (7) определяются путем интегрирования дифференциальных уравнений характеристик:

$$dx = \mp a(\sigma) dt. \tag{8}$$

*Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (№ П1121) и «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1 (3023).

Эти уравнения в общем случае не удастся проинтегрировать в плоскости (x, t) до того, как решена задача, так как a есть функция напряжения $\sigma(x, t)$.

Вдоль характеристик $dx = \mp a(\sigma)dt$ выполняются соотношения

$$dv \mp \frac{1}{a(\sigma)} d\sigma = 0. \quad (9)$$

Эти соотношения носят название дифференциальных уравнений характеристик в плоскости годографа (σ, u) . После интегрирования получим

$$v = \mp \int_0^\sigma \frac{d\sigma_1}{a(\sigma_1)} + C_{1,2} \text{ при } dx = \mp a(\sigma)dt. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь простейший случай распространения волн нагружения в однородном полубесконечном стержне, находившемся в начальный момент в невозмущенном состоянии.

Определим решение уравнения (7) при заданных начальных условиях (условиях Коши)

$$v = (x, 0) = 0 \quad (11)$$

и краевом условии

$$\sigma(0, t) = -p(t) \quad (p(t) > 0), \quad (12)$$

причем чтобы обеспечить процесс нагрузки, должно быть $p'(t) > 0$.

Условия (11), (12) означают, что в начальный момент стержень находится в недеформированном состоянии и состоянии покоя. Удовлетворение начальным условиям связано с решением задачи Коши в области (рис. 2), ограниченной осью x и положительной характеристикой $t_s Q$.

2. Для простоты рассмотрим следующее выражение для функции (2):

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon \text{ при } \sigma \leq \sigma_s, \\ \sigma(\varepsilon) &= 2\sqrt{\varepsilon}, \text{ при } \sigma > \sigma_s. \end{aligned} \quad (13)$$

Общий случай рассматривается аналогично.

Для непрерывности функции $\sigma(\varepsilon)$ в точке ε_s полагаем $E = 1/\sqrt{\varepsilon_s}$.

В этом случае плоскость xot разобьется на две области: упругую, ограниченную осью x и прямой $t_s Q$, и пластической областью, расположенной выше прямой $t_s Q$. Заметим, что уравнение этой прямой имеет вид $x = a_0(t - t_s)$ (см. рис. 2). В упругой области имеем линейную задачу, которая без труда решается традиционными методами. Поэтому будем искать решение задачи Коши для уравнений (7) только в пластической области.

Постановка задачи. Найти значение функций $v(x, t)$, $\sigma(x, t)$ в точке $M(x_m, t_m)$, если известно значение искомым функций вдоль $t_s Q$ и $t_s P$. Здесь точки

$P(0, t_p)$, $Q(x_q, t_q)$ определяются как точки пересечения соответствующих характеристик, проведенных из точки M . В силу (13) уравнения (7–10) запишутся так:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sigma \frac{\partial v}{\partial x}.$$

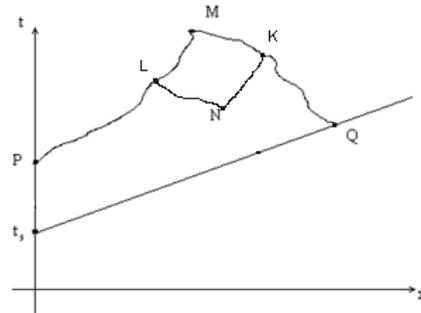


Рис. 2

Характеристики:

$$dx = \mp \sqrt{\sigma} dt.$$

Соотношения на характеристиках

$$dv = \mp \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}}$$

после интегрирования запишутся в виде

$$v \pm 2\sqrt{\sigma} = C_{1,2}.$$

Введем инварианты Римана по формулам $\xi = v + 2\sqrt{\sigma}$, $\eta = v - 2\sqrt{\sigma}$, тогда система (7) запишется в виде

$$\xi_t = \sqrt{\sigma} \xi_x, \quad \eta_t = -\sqrt{\sigma} \eta_x. \quad (14)$$

3. Закон сохранения ищем в виде [2]

$$\begin{aligned} \partial_t A(\xi, \eta) + \partial_x B(\xi, \eta) &= \\ = (\sqrt{\sigma} A_\xi + B_\xi) \xi_x + (-\sqrt{\sigma} A_\eta + B_\eta) \eta_x &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения для определения A и B :

$$(\sqrt{\sigma} A_\xi + B_\xi) = 0, \quad (-\sqrt{\sigma} A_\eta + B_\eta) = 0 \quad (15)$$

или

$$2(\xi - \eta) A_{\xi\eta} - A_\xi + A_\eta = 0. \quad (16)$$

Заметим, что для функции B мы получаем аналогичное уравнение

$$2(\xi - \eta) B_{\xi\eta} - B_\xi + B_\eta = 0. \quad (16^*)$$

С учетом закона сохранения запишем интеграл по замкнутому контуру $t_s QMP$:

$$\oint_{t_s QMP} A dx - B dt = \int_{t_s Q} + \int_{QM} + \int_{MP} + \int_{Pt_s} = 0. \quad (17)$$

Вдоль контуров $t_s Q$ и Pt_s интегралы можно вычислить после определения A, B и с учетом начальных и граничных условий. Определим A, B таким образом, чтобы вдоль QM и MP интегралы были равны нулю.

Имеем

$$\int_{QM} A dx - B dt = \int_{QM} (-\sqrt{\sigma} A - B) dt = t(-\sqrt{\sigma} A - B) \Big|_Q^M + \int_{QM} t d(\sqrt{\sigma} A + B),$$

$$\int_{MP} A dx - B dt = \int_{MP} (\sqrt{\sigma} A - B) dt = t(\sqrt{\sigma} A - B) \Big|_M^P - \int_{MP} t d(\sqrt{\sigma} A - B).$$

Получаем

$$d(\sqrt{\sigma} A + B) \Big|_{\xi=\text{const}} = 0, \quad d(\sqrt{\sigma} A - B) \Big|_{\eta=\text{const}} = 0. \quad (18)$$

С учетом (15) для уравнения (18) получаем

$$\frac{1}{4} A - 2\sqrt{\sigma} A_\eta = 0 \quad \text{вдоль } QM \text{ при } \xi = \text{const}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{4} A + 2\sqrt{\sigma} A_\xi = 0 \quad \text{вдоль } MP \text{ при } \eta = \text{const}. \quad (20)$$

Для преобразования условий (19) и (20) заметим следующее. Пусть вдоль линии $\xi = \text{const}$ нам известна функция A , тогда вдоль этой линии нам известна и A_η . Поэтому решая уравнение (19), без труда получаем

$$A = \frac{1}{\sqrt{|\eta - \xi_0|}} \quad \text{вдоль } QM \text{ при } \xi = \xi_0 = \text{const}. \quad (21)$$

Аналогично из (20) имеем

$$A = \frac{1}{\sqrt{|\xi - \eta_0|}} \quad \text{вдоль } QM \text{ при } \eta = \eta_0 = \text{const}. \quad (22)$$

Поэтому для определения координаты t_m точки M необходимо решить задачу Гурса (21), (22) для уравнения (16).

Определим x_m из соотношения (17).

Вдоль контуров $t_s Q$ и Pt_s интегралы можно вычислить после определения A, B и с учетом начальных и граничных условий. Определим A, B таким образом, чтобы вдоль QM и MP интегралы были равны нулю.

Имеем

$$\int_{QM} A dx - B dt = \int_{QM} (-A - B / \sqrt{\sigma}) dx = x(-A - B / \sqrt{\sigma}) \Big|_Q^M + \int_{QM} x d(A + B / \sqrt{\sigma}),$$

$$\int_{MP} A dx - B dt = \int_{MP} (A - B / \sqrt{\sigma}) dx = x(A - B / \sqrt{\sigma}) \Big|_M^P - \int_{MP} x d(A - B / \sqrt{\sigma}).$$

Получаем

$$\begin{aligned} d(A + B / \sqrt{\sigma}) \Big|_{\xi=\text{const}} &= 0, \\ d(A - B / \sqrt{\sigma}) \Big|_{\eta=\text{const}} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом уравнений (15) для уравнения (18) получаем

$$B + 2(\xi - \eta)B_\eta = 0 \quad \text{вдоль } QM \text{ при } \xi = \xi_0 = \text{const}, \quad (24)$$

$$-B + 2(\xi - \eta)B_\xi = 0 \quad \text{вдоль } MP \text{ при } \eta = \eta_0 = \text{const}. \quad (25)$$

Решая уравнение (24), без труда получаем новое граничное условие

$$B = \sqrt{|\eta - \xi_0|} \quad \text{вдоль } QM \text{ при } \xi = \xi_0 = \text{const}. \quad (26)$$

Аналогично из (25) имеем

$$B = \sqrt{|\xi - \eta_0|} \quad \text{вдоль } QM \text{ при } \eta = \eta_0 = \text{const}. \quad (27)$$

Поэтому для определения координаты x_m точки M необходимо решить задачу Гурса (26), (27) для уравнения (16*).

Для решения этих двух задач воспользуемся функцией Римана для уравнений (16) и (16*). Из свойств функции Римана следует, что для уравнения (16) с условиями на характеристиках (21), (22) и для уравнения (16*) с условиями (26) и (27) она будет одна и та же. Функция Римана имеет следующий вид:

$$v(\xi_0, \eta_0, \xi, \eta) = \left(\frac{\xi_0 - \eta_0}{\xi_0 - \eta}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_0 - \eta_0}{\xi - \eta_0}\right)^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, t\right), \quad (28)$$

где $1 - t = \left(\frac{\xi - \eta}{\xi_0 - \eta}\right)\left(\frac{\xi_0 - \eta_0}{\xi - \eta_0}\right)$; F – гипергеометрическая функция первого рода.

Окончательно получаем значение функции A в точке $N(\xi_1, \eta_1)$:

$$\begin{aligned} A(N) &= A(M)v(M) + \int_{\xi_1}^{\xi_0} v\left(-\frac{A}{2(\xi - \eta)} + A_\xi\right) d\xi + \\ &+ \int_{\eta_0}^{\eta_1} v\left(\frac{A}{2(\xi - \eta)} + A_\eta\right) d\eta. \end{aligned}$$

Здесь точка M имеет координаты (ξ_0, η_0) .

Аналогичная формула будет для B в точке N [3].

Библиографические ссылки

1. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1979.
2. Киряков П. П., Сенатов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения для решения уравнений механики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981.

S. I. Senashov

CONSERVATION LAWS IN THE PROBLEM ABOUT PLANE WAVE OF LOADING IN ELASTIC-PLASTIC ROD

In paper was constructed conservation laws for equations of plane wave of loading in elastic-plastic rod. This is given possibility the solve the problem in analytical form.

Keywords: elastic-plastic rod, conservation laws, exact solutions.

© Сенашов С. И., 2011

УДК 519.248:[33+301]

Д. С. Слепов

ОЦЕНИВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ КРЕДИТНЫХ ДЕРИВАТИВОВ

Рассматриваются подходы к оцениванию корреляционных кредитных деривативов. Исследована однофакторная модель гауссовской копулы, ставшая рыночным стандартом. Предложен способ моделирования структур зависимостей, основанный на применении широкомультипликативной аппроксимации эвентологических распределений. Произведено сравнение моделей на численном примере.

Ключевые слова: кредитные деривативы, гауссовская копула, эвентология, широкая зависимость, широкомультипликативная аппроксимация.

Примерами корреляционных кредитных деривативов являются обеспеченные долговые обязательства (CDO) и корзинный своп кредитного дефолта. В основе подобных финансовых инструментов лежит портфель из некоторых долговых обязательств, а выплаты по ним зависят от количества дефолтов в портфеле. Подробнее рассмотрим CDO как наиболее популярный.

Предположим, что CDO имеет следующую структуру: портфель из 100 облигаций, который разбит на 3 транша, имеющих разную субординацию и объем [1]. Младший транш имеет номинал 5 % от совокупного номинала портфеля, средний транш – 20 % и старший транш – 75 %. Транши получают денежные потоки, генерируемые базовым портфелем в порядке старшинства. В первую очередь денежный поток обеспечивает обещанную доходность по старшему траншу, во вторую очередь – по среднему траншу. Оставшиеся денежные потоки поступают к младшему траншу. В случае дефолтов в портфеле облигаций первым пострадает младший транш, он аккумулирует все убытки по портфелю, пока они не превысят 5 % от совокупного номинала. Убытки свыше 5 % будет аккумулировать средний транш вплоть до 25 %. Только в случае превышения убытков уровня 25 % старший транш начнет нести потери.

Подобное структурирование портфеля на транши позволяет получить долговые инструменты с различными уровнями риска и доходности. Доходность в данном случае и будет являться ценой транша. Уровень доходности пропорционален ожидаемым убыткам по траншу, поэтому задача оценивания траншей сводится к оценке ожидаемых убытков.

Цену транша определяют несколько параметров (вероятность дефолта, ставка возмещения и др.), однако данная работа фокусируется на корреляции между дефолтами, так как она играет ключевую роль при ценообразовании. Поэтому оценивание траншей CDO требует моделей, которые позволяют фиксировать структуру зависимостей и рассчитывать распределение убытков по портфелю.

Далее рассматривается наиболее популярная однофакторная модель гауссовской копулы, ставшая рыночным стандартом. Затем представляется эвентологическая модель. Приводится численный пример для сравнения моделей.

Однофакторная модель гауссовской копулы. Наиболее распространенным подходом для моделирования коррелированных рисков дефолта является подход с использованием копул. Копула – многомерная функция распределения, связывающая множество маргинальных распределений. В то время как маргинальные распределения описывают индивидуальный риск дефолта каждого актива, копула описывает зависимости между индивидуальными рисками дефолта через многомерное распределение. В частности, популярным практическим инструментом, особенно после работы Ли [2], стала однофакторная модель гауссовской копулы.

Чтобы представить данную модель, рассмотрим гомогенный портфель, состоящий из обязательств N компаний. Определим T_i как момент времени дефолта i -й компании, а $p_i(t) = P(T_i \leq t)$ как интегральную риск-нейтральную вероятность того, что компания i допустит дефолт до момента времени t . Поскольку рассматривается гомогенный портфель