S. I. Senashov

## CONSERVATION LAWS IN THE PROBLEM ABOUT PLANE WAVE OF LOADING IN ELASTIC-PLASTIC ROD

*In paper was constructed conservation laws for equations of plane wave of loading in elastic-plastic rod. This is given possibility the solve the problem in analytical form.*

*Keywords: elastic-plastic rod, conservation laws, exact solutions.*



УДК 519.248:[33+301]

Д. С. Слепов

## ОЦЕНИВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ КРЕДИТНЫХ ДЕРИВАТИВОВ

*Рассматриваются подходы к оцениванию корреляционных кредитных деривативов. Исследована однофакторная модель гауссовской копулы, ставшая рыночным стандартом. Предложен способ моделирования структур зависимостей, основанный на применении широкомультипликативной аппроксимации эвентологических распределений. Произведено сравнение моделей на численном примере.*

*Ключевые слова: кредитные деривативы, гауссовская копула, эвентология, широкая зависимость, широкомультипликативная аппроксимация.*

Примерами корреляционных кредитных деривативов являются обеспеченные долговые обязательства (CDO) и корзинный своп кредитного дефолта. В основе подобных финансовых инструментов лежит портфель из некоторых долговых обязательств, а выплаты по ним зависят от количества дефолтов в портфеле. Подробнее рассмотрим CDO как наиболее популярный.

Предположим, что CDO имеет следующую структуру: портфель из 100 облигаций, который разбит на 3 транша, имеющих разную субординацию и объем [1]. Младший транш имеет номинал 5 % от совокупного номинала портфеля, средний транш – 20 % и старший транш – 75 %. Транши получают денежные потоки, генерируемые базовым портфелем в порядке старшинства. В первую очередь денежный поток обеспечивает обещанную доходность по старшему траншу, во вторую очередь – по среднему траншу. Оставшиеся денежные потоки поступают к младшему траншу. В случае дефолтов в портфеле облигаций первым пострадает младший транш, он аккумулирует все убытки по портфелю, пока они не превысят 5 % от совокупного номинала. Убытки свыше 5 % будет аккумулировать средний транш вплоть до 25 %. Только в случае превышения убытков уровня 25 % старший транш начнет нести потери.

Подобное структурирование портфеля на транши позволяет получить долговые инструменты с различными уровнями риска и доходности. Доходность в данном случае и будет являться ценой транша. Уровень доходности пропорционален ожидаемым убыткам по траншу, поэтому задача оценивания траншей сводится к оценке ожидаемых убытков.

Цену транша определяют несколько параметров (вероятность дефолта, ставка возмещения и др.), однако данная работа фокусируется на корреляции между дефолтами, так как она играет ключевую роль при ценообразовании. Поэтому оценивание траншей CDO требует моделей, которые позволяют фиксировать структуру зависимостей и рассчитывать распределение убытков по портфелю.

Далее рассматривается наиболее популярная однофакторная модель гауссовской копулы, ставшая рыночным стандартом. Затем представляется эвентологическая модель. Приводится численный пример для сравнения моделей.

**Однофакторная модель гауссовской копулы.** Наиболее распространенным подходом для моделирования коррелированных рисков дефолта является подход с использованием копул. Копула – многомерная функция распределения, связывающая множество маргинальных распределений. В то время как маргинальные распределения описывают индивидуальный риск дефолта каждого актива, копула описывает зависимости между индивидуальными рисками дефолта через многомерное распределение. В частности, популярным практическим инструментом, особенно после работы Ли [2], стала однофакторная модель гауссовской копулы.

Чтобы представить данную модель, рассмотрим гомогенный портфель, состоящий из обязательств $N$ компаний. Определим $T_i$ как момент времени дефолта $i$-й компании, а $p_i(t) = P(T_i \le t)$ как интегральную риск-нейтральную вероятность того, что компания $i$ допустит дефолт до момента времени $t$. Поскольку рассматривается гомогенный портфель

$p_i(t) = p(t)$ для всех $i$, предполагается, что нам известны риск-нейтральные вероятности дефолта. Левый хвост распределения моментов объявления дефолта может быть оценен на основе рыночных цен облигаций.

Используя упрощенный подход Мертона к оценке компаний, предположим, что компания объявляет дефолт в случае, если стоимость активов $X_i$ становиться меньше определенного уровня $x$ (уровня долга), где $X_i$ – случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение.

Далее соотнесем риск-нейтральные вероятности дефолта с вероятностями того, что величина активов компании будет ниже определенного уровня:

$$P(T_i \le t) = P(X_i \le x). \tag{1}$$

Уровень долга $x$ может быть найден как

$$x = N^{-1}[P(T_i \le t)], \tag{2}$$

где $N^{-1}$ – функция, обратная интегральному нормальному распределению.

В рассматриваемой модели предполагается, что

$$X_i = \sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}Z_i, \tag{3}$$

где $F$ и $Z_i$ – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Заметим, что правила сложения независимых случайных величин гарантируют, что $X_i$ также имеет стандартное нормальное распределение.

Здесь $F$ – общий фактор, влияющий на дефолты всех компаний, а $Z_i$ – фактор, характерный только для компании $i$.

В уравнении (3) параметр ρ – коэффициент корреляции гауссовской копулы – может принимать значения между 0 и 1. Он определяет, насколько сильно общий фактор влияет на вероятность дефолта компании и измеряет степень корреляции между величинами активов (ρ – коэффициент корреляции между $X_i$ и $X_j$, $\forall\ i \ne j$).

Комбинируя (1), (2) и (3), получаем

$$P\left(T_i \le t \mid F = f\right) = N\left[\frac{N^{-1}[P\left(T_i \le t\right) - \sqrt{\rho}f]}{\sqrt{1-\rho}}\right],$$

где $P\left(T_i \le t \mid F = f\right)$ – условная вероятность дефолта, зависящая от значения общего фактора.

Обозначим через $P(k, t)$ вероятность наступления ровно $k$ дефолтов к моменту времени $t$. Поскольку условные вероятности дефолта независимы, мы можем найти условные вероятности наступления $k$ дефолтов из свойств биномиального распределения:

$$P\left(k,t \mid F = f\right) =$$
$$= C_N^k P^k\left(T_i \le t \mid F = f\right)\left[1 - P\left(T_i \le t \mid F = f\right)\right]^{N-k}.$$

Наконец, чтобы посчитать безусловные значения $P(k,\ t)$, необходимо проинтегрировать $P(k,\ t \mid F)$ по стандартному нормальному распределению.

**Модель мультипликативной аппроксимации.** В данной работе предлагается альтернативный подход для моделирования коррелированных рисков дефолта. Подход основан на использовании аппроксимаций эвентологических распределений широкомультипликативными сет-функциями, которые были предложены в работах Воробьева [3; 4].

В модели мультипликативной аппроксимации каждому обязательству из портфеля соответствует событие дефолта, множество событий дефолтов имеет мощность $N$, равное количеству обязательств в портфеле.

Рассмотрим эвентологическое пространство (Ω, $F$, **P**); конечное множество событий $\aleph \subseteq F$, состоящее из $N = |\aleph|$событий и эвентологическое распределение (Э-распределение) множества $\aleph$ в виде набора вероятностей $\{p(X), X \subseteq \aleph\}$, в котором

$$p(X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right).$$

В эвентологическом распределении содержится всеобъемлющая информация о структуре зависимостей множества событий $\tilde{\aleph}$. В наиболее общей ситуации, когда отсутствует какая-либо форма вероятностной независимости, структура зависимости $\aleph$ определяется максимальной совокупностью из $2^N - 1$ независимого параметра. Любой форме независимости множества событий соответствует способ параметризации распределения, определяемый сокращенной совокупностью параметров.

Для обнаружения, фиксации и применения различных форм независимости используется специальный инструментарий широкомультипликативных проекций и аппроксимаций Э-распределений, которые позволяет описывать структуру зависимости малым количеством параметров.

Известно, что любое полное Э-распределение $\{p(X), X \subseteq \aleph\}$ множества событий $\aleph \subseteq F$ можно связать с соответствующими мультиковариациями $\tau(X)$ формулами мультипликативного обращения Мёбиуса для $X \subseteq \aleph$:

$$p(X) = \prod_{Y \subseteq X} \tau(Y), \tag{4}$$

$$\tau(X) = \prod_{Y \subseteq X} p(Y)^{(-1)^{|X|-|Y|}}.$$

Формула (4) может быть переписана в эквивалентном виде:

$$p(X) = \prod_{m=0}^{|\aleph|} \prod_{Y_m \subseteq X} \tau(Y_m), \quad X \subseteq \aleph, \tag{5}$$

где $Y_m$ – $m$-подмножества событий из $\aleph$, т. е. $|Y_m| = m$, $m = 0, \ldots, |\aleph|$.

Сет-функции, стоящие в (5) под знаком внешнего произведения, называются широкомультипликативными проекциями сет-функции $p(X)$ и имеют специальное обозначение:

$$p^{[m]}(X) = \prod_{Y_m \subseteq X} \tau(Y_m), \ X \subseteq \aleph.$$

Сет-функция

$$\hat{p}^{[N_0]}(X) = \frac{\prod_{m=0}^{N_0} p^{[m]}(X)}{\sum_{X \subseteq \aleph} \prod_{m=0}^{N_0} p^{[m]}(X)} \qquad (6)$$

имеет название $N_0$-мультипликативная аппроксимация.

Для $N_0 = 2$ по определению в общем случае имеем

$$\hat{p}^{[2]}(X) = \frac{p^{[0]}(X)\, p^{[1]}(X)\, p^{[2]}(X)}{\sum_{X \subseteq \aleph} p^{[0]}(X)\, p^{[1]}(X)\, p^{[2]}(X)} = \frac{\prod_{x \in X} \tau(x) \prod_{\{x,y\} \subseteq X} \tau(xy)}{\sum_{X \subseteq \aleph} \prod_{x \in X} \tau(x) \prod_{\{x,y\} \subseteq X} \tau(xy)}. \qquad (7)$$

В рассматриваемом случае мы имеем дело с симметричными событиями, что соответствует гомогенному портфелю. Используя свойства симметричных событий [5], формулу (7) можно упростить:

$$\hat{p}^{[2]}(X_k) = \frac{\tau^k(Y_1)\,\tau^{C_k^2}(Y_2)}{\sum_{k=0}^{N} \tau^k(Y_1)\,\tau^{C_k^2}(Y_2)}, \qquad (8)$$

где $|X_k| = k$, $k = 0, \ldots, |\aleph|$. Полученная сет-функция определяет аппроксимированное Э-распределение через $\tau(Y_1)$ и $\tau(Y_2)$, которые могут быть найдены в результате решения системы уравнений [6]:

$$\begin{cases} \dfrac{\sum_{k=1}^{N} C_{N-1}^{k-1} \tau^k(Y_1) \tau^{C_k^2}(Y_2)}{\sum_{k=0}^{N} C_N^k \tau^k(Y_1) \tau^{C_k^2}(Y_2)} = p_{X_1}, |X_1| = 1, \\[2ex] \dfrac{\sum_{k=2}^{N} C_{N-2}^{k-2} \tau^k(Y_1) \tau^{C_k^2}(Y_2)}{\sum_{k=0}^{N} C_N^k \tau^k(Y_1) \tau^{C_k^2}(Y_2)} = p_{X_2}, |X_2| = 1, \end{cases} \qquad (9)$$

в которой $p_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right)$. Параметр $p_{X_1}$ равен риск-нейтральной вероятности дефолта, а параметр $p_{X_2}$ является аналогом ρ и определяет степень зависимости событий.

Решив систему (9) численными методами, рассчитать вероятность наступления ровно $k$ дефолтов можно как $p(k) = C_N^k \hat{p}^{[2]}(X_k)$.

**Численный пример.** Для того чтобы сравнить модели, рассмотрим следующий численный пример. Рассчитаем ожидаемые убытки $E[L]$ по траншам CDO, которые были описаны в первой секции. Предположим, что риск-нейтральная вероятность дефолта каждой облигации в течение года равна 1 %, а ставка возмещения – 50 %. Размер ожидаемых убытков для разных траншей определяется как

$$E[L_{\text{junior}}] = 1 - \sum_{k=0}^{10} \left( \frac{5 - 0,5k}{5} \right) p(k),$$

$$E[L_{\text{mezzanine}}] = 1 - \left( \sum_{k=0}^{10} p(k) + \sum_{k=11}^{50} \left( \frac{25 - 0,5k}{20} \right) p(k) \right),$$

$$E[L_{\text{senior}}] = 1 - \left( \sum_{k=0}^{50} p(k) + \sum_{k=75}^{100} \left( \frac{100 - 0,5k}{75} \right) p(k) \right).$$

Рассчитаем ожидаемые потери при различных уровнях корреляции (см. таблицу). Во втором столбце показаны ожидаемые потери в долях единицы для разных траншей при уровнях ρ, равных 0,15; 0,3 и 0,45, рассчитанных в рамках модели гауссовской копулы. Результаты эвентологической модели отражены в третьем столбце. Уровни $p_{X_2}$ выбирались таким образом, чтобы ожидаемые потери младших траншей совпадали с оценкой стандартной модели. Из данных таблицы видно, что эвентологическая модель недооценивает ожидаемые убытки по средним траншам CDO по сравнению с однофакторной моделью гауссовской копулы, а по старшим траншам – переоценивает.

**Ожидаемые потери при различных уровнях корреляции**

| | Стандартная модель | Эвентологическая модель |
|---|---|---|
| | ρ = 0,15 | $p_{X_2}$ = 0,000 256 |
| $E[L_{\text{junior}}]$ | 0,099 22 | 0,099 22 |
| $E[L_{\text{mezzanine}}]$ | 0,000 19 | 0,000 09 |
| $E[L_{\text{senior}}]$ | 0,000 00 | 0,000 03 |
| | ρ = 0,03 | $p_{X_2}$ = 0,000 554 |
| $E[L_{\text{junior}}]$ | 0,093 29 | 0,093 29 |
| $E[L_{\text{mezzanine}}]$ | 0,001 67 | 0,000 75 |
| $E[L_{\text{senior}}]$ | 0,000 00 | 0,000 25 |
| | ρ = 0,45 | $p_{X_2}$ = 0,001 06 |
| $E[L_{\text{junior}}]$ | 0,082 30 | 0,082 30 |
| $E[L_{\text{mezzanine}}]$ | 0,004 36 | 0,001 99 |
| $E[L_{\text{senior}}]$ | 0,000 02 | 0,000 65 |

Итак, предложен новый подход к моделированию коррелированных рисков дефолта. Построена эвентологическая модель мультипликативной аппроксимации, которая является аналогом однофакторной модели гауссовской копулы. С помощью численного примера произведено сравнение моделей.

Показано, что предложенная модель может быть использована для оценивания траншей CDO. Однако перспективы практического использования эвентологической модели зависят от двух факторов. Первый – это степень согласованности модели при одновременном оценивании разных траншей с рыночными ценами. Известно, что модель гаусовской копулы не обеспечивает адекватного решения при одновременном оценивании разных траншей, что приводит к «улыбке корреляции». Для эвентологической модели это предстоит выяснить в эмпирических исследованиях. Второй фактор – это простота имплементации модели. Здесь есть проблема с решением системы (9). При большом $N$ в процессе вычисления возникают очень маленькие и очень большие числа. Эмпирически выявлено, что данный факт не мешает получать решения вплоть до $N = 125$. Однако с ростом $N$ данная проблема может стать непреодолимой.

### Библиографические ссылки

1. Hull J. C. Options, Futures, and Other Derivatives. 7th ed. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2008.

2. Li D. X. On default correlation: copula approach // J. of Fixed Income. 2000. № 9. P. 43–54.

3. Воробьев О. Ю. Эвентология / Сиб. федер. ун-т. Красноярск, 2007.

4. Воробьев О. Ю. Широкая зависимость событий и аппроксимация эвентологических распределений широкомультипликативными сет-функциями // Тр. VIII ФАМ-конф. Красноярск, 2009. С. 101–122.

5. Воробьев О. Ю. Теоретические основания эвентологии. Структуры симметричных событий // Тр. II ФАМ-конф. Красноярск, 2003. С. 69–113.

6. Слепов Д. С. Один способ моделирования структур зависимостей симметричных событий // Тр. IX ФАМЭТ конф. Красноярск, 2010. С. 281–283.

D. S. Slepov

## VALUATION OF CORRELATION-DEPENDENT CREDIT DERIVATIVES

*This paper addresses the pricing of correlation-dependent credit derivatives. We first examine the one-factor Gaussian copula model that has become the market standard. Then we present a new approach to model parametrically a dependence structure. Our approach is based on using a multiplicative approximation. Eventually, we use a numerical example to compare these models.*

*Keywords: credit derivatives, default correlation, Gaussian copula, eventology, wide dependence of events, multiplicative approximation.*



УДК 004.932.2

И. В. Тупицын

## РЕКОНСТРУКЦИЯ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА НА ОСНОВЕ СТЕРЕОПАРЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ 3D-МОДЕЛИРОВАНИЯ

*Предложен алгоритм построения трехмерной модели сцены по стереоснимкам. Алгоритм состоит из конечного числа шагов. На первом этапе выполняется поиск соответствующих точек. На втором этапе производится вычисление их трехмерных координат. Третий этап подразумевает выполнение триангуляции для полученного облака точек. На основе предложенного алгоритма реализован программный продукт.*

*Ключевые слова: стереоизображение, эпиполярная геометрия, соответствующие точки, диспарантность, триангуляция.*

В настоящее время большой популярностью пользуется объемное представление данных. Для отображения объемных объектов необходимо построение их трехмерных моделей. Построение моделей вручную сопряжено с большими затратами, а применение специальной аппаратуры для сканирования трехмерных объектов не всегда возможно, так как глубина сканирования такими устройствами ограничена. Поэтому при построении моделей используются несколько ракурсов воспроизводимой сцены. Как правило, имеется лишь два ракурса. В статье приводятся способы получения трехмерной модели сцены по стереопаре, т. е. парой плоских изображений одного и того же объекта, полученных с немного различающихся позиций. Для построения трехмерной модели сцены необходимо найти пространственные координаты точек, принадлежащих поверхностям объектов воспроизводимой сцены. Исходными данными является стереопара. Также в некоторых случаях могут быть использованы опорные точки, т. е. точки, для которых пространственные координаты известны. Наличие опорных точек позволяет устранить неоднозначности конструкции [1].

Перед вычислением пространственных координат необходимо произвести сопоставление изображений стереопары, т. е. поиск точек на левом и правом изображениях, соответствующих одной и той же области трехмерного пространства. Существует два различных метода сопоставления изображений. Первый метод основан на поиске характерных признаков изображенных объектов (границ, угловых точек и т. д.). Недостатком данного метода при реконструкции трехмерных объектов является ограниченность множества точек, для которых производится восстанов-