Итак, в работе рассмотрены этапы процесса реконструкции трехмерной модели по нескольким изображениям, который, используя только информацию, содержащуюся на самих изображениях, позволяет получить детализированную модель реконструируемого объекта. Детализация модели достигается за счет использования плотных карт диспарантности для поиска соответствующих точек. По большей части от выбора алгоритма построения плотной карты диспарантности зависит время, затрачиваемое на получение модели, а также точность реконструкции.

Полученная таким образом модель может быть привязана к исходному объекту при помощи небольшого числа опорных точек. Дальнейшая изыскательская работа позволит оптимизировать процесс построения трехмерных моделей по стереоизображениям. Программная реализация и внедрение алгоритмов построения трехмерной модели сцен по стереоизображениям с использованием возможностей параллельных систем позволит в значительной степени автоматизировать работы по обработке данных, полученных при дистанционном зондировании Земли, а также работы по оперативному построению трехмерных моделей реальных объектов.

Библиографические ссылки

1. Жук Д. В., Тузиков А. В. Реконструкция трехмерной модели по двум цифровым изображениям // Информатика. 2006. № 1. С. 16–26.
2. Veksler O. Stereo correspondence by dynamic programming on a tree // Proc. CVPR. 2005. Vol. 2. P. 384–390.
3. Naveed I. R., Huijun Di, Guang You Xu. Refine stereo correspondence using bayesian network and dynamic programming on a color based minimal span tree // ACIVS. 2006. P. 610–619.
4. Kolmogorov V., Zabih R. Computing visual correspondence with occlusions using graph cuts // ICCV. 2001. Vol. 2. P. 508–515.
5. Boykov Y., Veksler O., Zabih R. Fast approximate energy minimization via graph cuts // IEEE TPAMI. 2001. № 23(11). P. 1222–1239.
6. Hartley R., Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision. Cambridge, U. K. : Cambridge Univ. Press, 2001.
7. Форсайт Д. А., Понс Ж. Компьютерное зрение: современный подход. М. : Вильямс, 2004.
8. Синицын С. И. Гибридный рекурсивно-инкрементный алгоритм построения триангуляции Делоне // Материалы конф. «Graphicon». Н. Новгород, 2006. С. 175–177.

I. V. Toupitsyn

RECONSTRUCTION OF THREE DIMENSIONAL MODEL OF THE OBJECT BY STEREOPAIR FOR SOLVING 3D MODELLING TASKS

A 3D model scene building algorithm by stereopair is presented. The algorithm includes three steps. On the first step the search of corresponding points is performed. On the second step three dimensional coordinates of found corresponding points are calculated. And on the third step triangulation for three dimensional points are made. On the basis of the proposed algorithm is implemented software product.

Keywords: stereoimage, epipolar geometry, the corresponding points, disparity, triangulation.

УДК 539.3+539.4

Н. А. Федорова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦИЙ СО СЛОЖНЫМИ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ СТРУКТУРАМИ АРМИРОВАНИЯ

Для определения предельных деформаций плоских конструкций с криволинейными траекториями армирования в рамках плоской задачи получены разрешающие уравнения для линейной ортотропной неоднородной задачи упругости. Многообразие структур армирования на базе ортогональных систем координат достигается построением изогональных траекторий к данным координатным линиям.

Ключевые слова: армирование, структурная модель, изогональные траектории.

Для безопасной работы конструкций с концентраторами напряжений, в окрестности которых возникают большие градиенты полей напряжений, что часто встречается в авиационных конструкциях, их армируют высокопрочными волокнами с целью восприятия волокнами этих градиентов. Но волокна могут и не выполнить эту роль, тогда нагрузка будет влиять на связующее. До последнего времени армирование плоских конструкций осуществлялось прямолинейными волокнами. Однако такая структура армирования может быть эффективной лишь в частных случаях нагружения, при которых внутренние силовые потоки преимущественно направлены вдоль траекторий армирования. Реальные конструктивные элементы работают в более сложных условиях нагружения. Для таких конструкций нужно вводить специальные структуры армирования, которые в определенной мере были бы согласованы с характером полей градиентов напряжений, проводить поиск структур армирования, которые снижают нагрузки, действующие на конструкцию.

На основе структурной модели [1] в работах [2–6] рассмотрены сложные структуры армирования по криволинейным ортогональным траекториям.

Влияние сложного нагружения на распределение силовых линий полей напряжений иллюстрирует следующая задача об эксцентрическом кольце. В данной работе на основе представления решения в виде тригонометрического ряда [7] по криволинейным координатам биполярной системы (ξ, η) получены следующие результаты для неравномерно нагруженного эксцентрического кольца. Для неравномерной нагрузки на граничном контуре вида $\text{const} + \cos \alpha^* \eta$ (α^* – заданная амплитуда) контурные графики для компонент напряжений $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_{\xi\eta}$ в биполярной системе координат приведены на рис. 1–3.

Многообразие структур армирования на базе ортогональной системы координат достигается построением изогональных траекторий к данным координатным линиям. Детерминантным методом в каждом случае устанавливается тип разрешающих систем дифференциальных уравнений, ставится соответствующая краевая задача.

Определение изогональных траекторий. Изогональная траектория – это плоская линия, пересекающая все кривые заданного на плоскости однопараметрического семейства под одним и тем же углом α. Углы β_1 и β наклона траектории и кривой к оси *OX* связаны соотношением $\beta_1 = \beta \pm \alpha$.

Если однопараметрическое семейство плоских кривых задано в виде уравнения

$$F(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

(где a – параметр), то изогональные траектории строятся из уравнения

$$\frac{\dfrac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dx_1} + \dfrac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1} - \dfrac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}\dfrac{dy_1}{dx_1}} = k, \tag{2}$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$ – известное значение; α – фиксированный угол, под которым изогональная траектория пересекает все кривые заданного на плоскости однопараметрического семейства. Исключая a из двух последних уравнений, получим соотношение, связывающее координаты x_1, y_1 точки изогональной траектории и угловой коэффициент касательной k, т. е. дифференциальное уравнение изогональных траекторий семейства (1). Общий интеграл полученного уравнения дает семейство от одного параметра изогональных траекторий [8].

Рассмотрим примеры построения изогональных траекторий к данным координатным линиям.

1. В биполярной системе координат (ξ, η) координатные линии $\xi = \xi_0 = \text{const}$ представляют собой эксцентрические окружности с центрами на оси *OX*:

$$(x - a \operatorname{cth} \xi_0)^2 + y^2 = \frac{a^2}{(\operatorname{sh} \xi_0)^2}. \tag{3}$$

Координатные линии $\eta = \eta_0 = \text{const}$ – дуги окружностей с центрами на оси *OY* и проходящие через две точки $x = \pm a$ (полюсы):

$$x^2 + (y + a \operatorname{ctg} \eta_0)^2 = \frac{a^2}{(\sin \eta_0)^2}. \tag{4}$$

После введения соответствующей каждому из уравнений (3), (4) линейной замены координат приведем их к уравнению однопараметрического семейства окружностей вида

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0,$$

где b – параметр семейства, переобозначения координат не проводим. Для данного уравнения построим семейство изогональных траекторий, следуя (2) [8]. Получим для точек x_1, y_1, лежащих на траектории, дифференциальное уравнение

$$\frac{\dfrac{dy_1}{dx_1} + \dfrac{x_1}{y_1}}{1 - \dfrac{x_1}{y_1}\dfrac{dy_1}{dx_1}} = k. \tag{5}$$

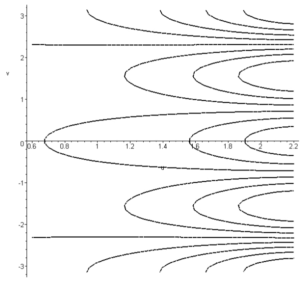

Рис. 1

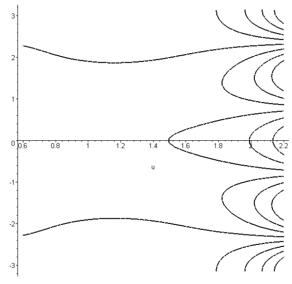

Рис. 2

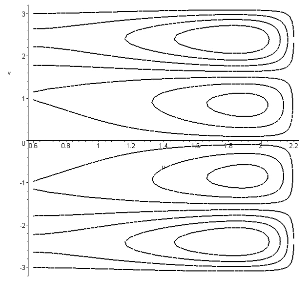

Рис. 3

После преобразований уравнение (5) запишем как однородное дифференциальное уравнение, его решение имеет вид

$$C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{k\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{y_1}}, \tag{6}$$

где C – произвольная константа. Каждому семейству окружностей соответствует свое семейство изогональных траекторий в виде семейства спиралей (6).

2. В эллиптической системе координат координатными линиями являются ξ-эллипсы и η-гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2\mathrm{ch}^2\,\xi}+\frac{y^2}{a^2\mathrm{sh}^2\,\xi}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2\cos^2\eta}-\frac{y^2}{a^2\sin^2\eta}=1, \tag{7}$$

где $2a$ – фокусное расстояние. Связь между декартовыми (x, y) и эллиптическими координатами (ξ, η) дается формулами

$$x=a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta,\ y=a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta. \tag{8}$$

Запишем (7) как однопараметрическое семейство кривых и построим, следуя (2), соответствующее семейство изогональных траекторий. Введем параметр $b^2=a^2\mathrm{ch}\,\xi$, тогда однопараметрическое семейство запишем в виде

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2-a^2}=1. \tag{9}$$

Семейство изогональных траекторий проще находить, если известно дифференциальное уравнение исходного однопараметрического семейства кривых. Чтобы получить дифференциальное уравнение заданного семейства плоских кривых, необходимо продифференцировать (7), затем из полученного уравнения и уравнения семейства исключить параметр b. В итоге получим дифференциальное уравнение семейства

$$xy(y')^2+y'(x^2-y^2-a^2)-xy=0. \tag{10}$$

При рассмотрении семейства гипербол его дифференциальное уравнение совпадает с (10), но при этом параметры плоских кривых удовлетворяют условию $a^2<b^2-a^2<0$ [8]. Для семейств эллипсов и гипербол получим в соответствии с изложенным выше собой дифференциальное уравнение изогональных траекторий

$$\begin{gathered} x_1y_1(y_1'-k)^2+(y_1'-k)(ky_1'+1)\times \\ \times(x_1^2-y_1^2-a^2)-x_1y_1(ky_1'+1)^2=0. \end{gathered} \tag{11}$$

Разрешая (11) относительно y_1', получим два дифференциальных уравнения первого порядка. Представим его форму после ввода промежуточных обозначений. Пусть

$$\begin{gathered} S1=-k^2+x_1^2-y_1^2-a^2+k^2y_1^2+a^2k^2-4x_1y_1, \\ S2=a^4-2ax_1^2+k^4x_1^4+2k^2x_1^4-2ak^4x_1^2+2x_1^2y_1^2+ \\ +2y_1^4k^2+k^4y_1^4+2ak^4y_1^2+4k^2x_1^2y_1^2+2k^4x_1^2y_1^2+ \\ +x_1^4+y_1^4+a^2k^2y_1^2-a^2k^2x_1^2+2a^2y_1^2+2a^4k^2+a^4, \end{gathered}$$

тогда искомые уравнения запишем в виде

$$y_1'=\frac{S1\pm\sqrt{S2}}{2(ky_1^2+a^2k+x_1y_1k^2-x_1y_1-kx_1^2)}. \tag{12}$$

Иллюстрации изогональных траекторий к рассмотренным семействам эллипсов представлены на рис. 4 (k = 1) для $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $k=\mathrm{tg}\alpha$. Из вида уравнения (12) следует, что при построении изогональных траекторий могут возникнуть зоны сингулярности для определенных значений k и размеров плоской конструкции. При технологическом конструировании изделий всегда можно выбрать соответствующие размеры вне зоны сингулярности. Иллюстрации изогональных траекторий к рассмотренным семействам гипербол приведены на рис. 5–6 для $k=1$ и $k=0{,}1$ соответственно. Пример изогональных траекторий к семейству парабол вида $y=ax^2$ показан на рис. 7 для $k=3$.

Как видим, уравнения изогональных траекторий содержат параметр k, при изменении значения которого имеем множество разнообразных траекторий. Располагая армирующие семейства волокон вдоль найденных траекторий, получаем разнообразную структуру армирования, при управлении которой можно перераспределять поля напряжений и деформаций внутри пластины.

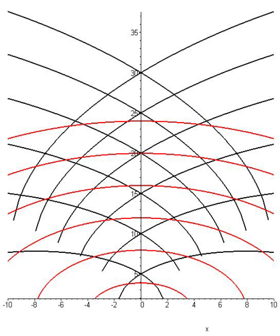

Рис. 4

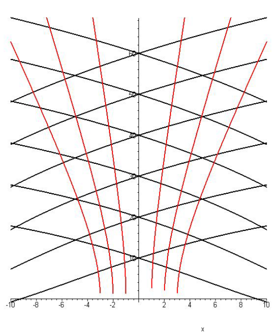

Рис. 5

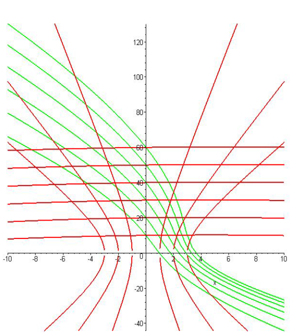

Рис. 6

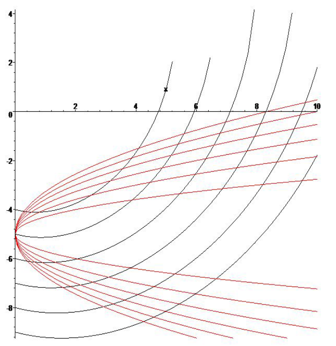

Рис. 7

Изогональные траектории в полярной системе координат. Пусть задана полярная система координат (ρ, θ). Запишем соотношение (2), отражающее геометрическое определение изогональных траекторий, связывающее направления траекторий и направления семейства, в полярной системе координат. Учтем, что тангенс угла μ между полярным радиусом и касательной в фиксированной точке для любой линии, заданной уравнением $\rho = \rho(\theta)$ в полярных координатах, запишется как $\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\rho'}$. Последняя формула выражает геометрический смысл производной функции $\rho = \rho(\theta)$. Тогда соотношение (2), соответствующее полярной системе координат, запишем в виде

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{k\frac{\rho_1}{\rho_1'} + 1}{\frac{\rho_1}{\rho_1'} - 1}, \qquad (13)$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \neq \pi/2$ – постоянный угол, под которым данное семейство пересекается семейством изогональных траекторий.

Рассмотрим уравнение однопараметрического семейства кривых в полярной системе координат $\Phi(\rho, \theta, a) = 0$. Чтобы построить изогональные траектории, нужно составить дифференциальное уравнение семейства, затем заменить в нем $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ на производные по формуле (13). В результате получим дифференциальное уравнение для определения изогональной траектории в полярной системе координат. Когда $\alpha = \pi/2$, то производная ρ' заменяется на $-\frac{\rho^2}{\rho'}$ (осуществляется предельный переход в (13) при $k \to \infty$).

Пример 1. Рассмотрим пример построения семейства изогональных траекторий к семейству кардиоид. Пусть задано семейство кардиоид в полярной системе координат:

$$\rho = a(1 + \cos\theta),$$

где a – параметр. Дифференцируем уравнение семейства по θ, из полученного уравнения и уравнения семейства исключаем параметр a, находим искомое дифференциальное уравнение семейства

$$\rho'(1 + \cos\theta) + \rho\sin\theta = 0. \qquad (14)$$

Заменим в (14) производные по формуле (13), индексы опускаем, получим уравнение для изогональных траекторий $\rho'(1 + \cos\theta - k\sin\theta) + \rho(k + \sin\theta + k\cos\theta) = 0$.

Интеграл данного уравнения удается найти в аналитическом виде:

$$\rho(\theta) = C(k^2\cos\theta - \cos\theta + 2k\sin\theta - k^2 - 1).$$

В случае $k = \operatorname{tg} a$ кривые, пересекающие заданное семейство кардиоид под углом a, задаются уравнением

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta - 2a)).$$

Семейство кардиоид и изогональные ему траектории, пересекающие кривые данного семейства под углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$, изображены на рис. 8.

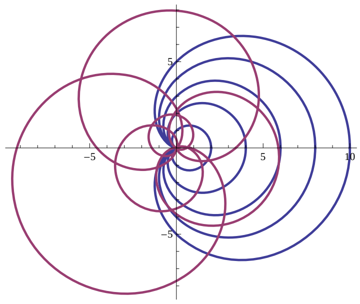

Рис. 8

Пример 2. Рассмотрим семейство логарифмических спиралей $\rho(\theta) = ae^{\theta}$. Дифференциальное уравнение семейства: $\rho' = \rho$. Изогональные траектории найдем, решив уравнение (13) для фиксированных значений k, при $k = 1$ решение этого уравнения $\rho = \text{const}$, т. е. заданное семейство спиралей под углом $\frac{\pi}{4}$ пересекает семейство концентрических окружностей с центром в начале координат (рис. 9).

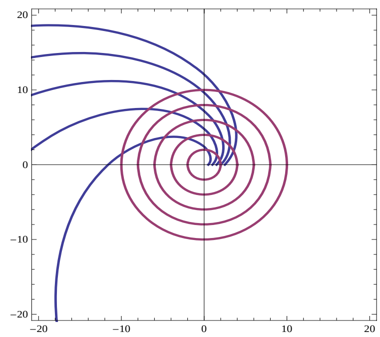

Рис. 9

Пример 3. Введем специальную структуру армирования: прямолинейные радиальные направления. Это пучок прямых с центром в начале координат. Пусть тангенс угла пересечения семейства прямых изогональными траекториями равен $k = \operatorname{tg}\alpha$, причем $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Уравнение изогональных траекторий к данному семейству в полярной системе координат дает семейство логарифмических спиралей вида $\rho = Ce^{\frac{\theta}{k}}$, где C – произвольная константа.

Множество структур армирования на основе выбранного прямолинейного радиального направления представлено на рис. 10–12 для значений $k = 1, 2, 3$ соответственно.

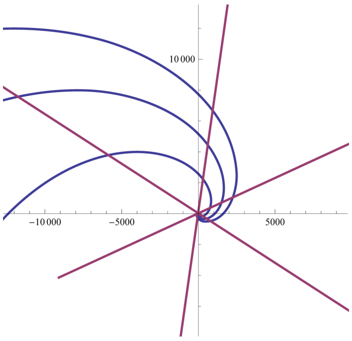

Рис. 10

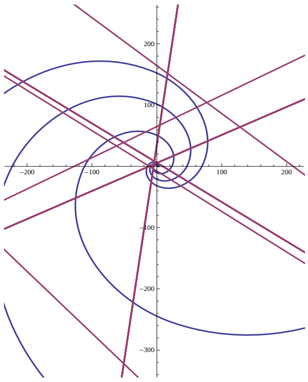

Рис. 11

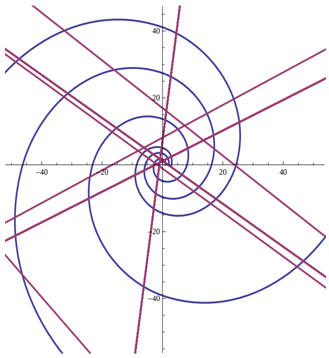

Рис. 12

Заметим, что при технологической реализации процесса изготовления армированной конструкции необходимо произвести вырез в виде некоторой окружности в начале координат, затем волокна располагают вдоль радиальных направлений. В качестве второго семейства армирующих волокон предлагается выбирать построенные изогональные траектории, т. е. найденные разнообразные семейства логарифмических спиралей.

Армирование по изогональным траекториям. Зададим некоторую криволинейную ортогональную систему координат (ξ,η). Направим траектории армирования следующим образом: одна траектория армирования совпадает с линией криволинейной ортогональной системы координат, другая ей изогональна, т. е. пересекает ее под постоянным углом α, $k=\mathrm{tg}\alpha$. Тогда один угол армирования, например, $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$, второй угол армирования $\varphi_2=\mathrm{arctg}\,k$. Другой вариант армирования – $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\mathrm{arctg}\,k$.

Запишем условие постоянства сечений волокон m-го семейства в соответствии с [4; 6]:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(H_2\omega_m\cos\varphi_m)+\frac{\partial}{\partial\eta}(H_1\omega_m\sin\varphi_m)=0, \qquad (16)$$

где $H_1(\xi,\eta), H_2(\xi,\eta)$ – дифференциальные коэффициенты Ламе; ω_m – интенсивности армирования, $m=1,2$. Для указанных структур армирования из уравнения (16) в первом случае ($\varphi_1=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2=\mathrm{arctg}\,k$) получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\eta}(H_1\omega_1\sin\varphi_1)=0,\\ \frac{\partial}{\partial\xi}(H_2\omega_2\cos\varphi_2)+\frac{\partial}{\partial\eta}(H_1\omega_2\sin\varphi_2)=0.\end{gathered} \qquad (17)$$

Дополнительные условия на интенсивности ω_1,ω_2 зададим на том контуре, где волокна входят в конструкцию. Предположим, что $\omega_1^0(\eta)$, $\omega_2^0(\eta)$, $\omega_1^0(\xi)$ – известные функции, заданные на линиях $\xi=\xi^0=\mathrm{const}$, $\eta=\eta^0=\mathrm{const}$. Первое уравнение в (17) можно проинтегрировать:

$$\omega_1(\xi,\eta)=\frac{H_2(\xi,\eta^0)\omega_1^0(\xi)}{H_2(\xi,\eta)}.$$

Поскольку криволинейная ортогональная система координат вводится аналитическими функциями комплексного переменного [6], то в каждой точке (ξ,η) коэффициенты Ламе равны между собой: $H_1(\xi,\eta)=H_2(\xi,\eta)$. При записи второго уравнения в (17) воспользуемся заменой $\omega_3=H_1\omega_2=H_2\omega_2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\omega_3)+k\frac{\partial}{\partial\eta}(\omega_3)=0. \qquad (18)$$

Уравнение (18) является однородным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка, условия на интенсивности ω_1,ω_2 на контуре, где волокна входят в конструкцию, соответствуют задаче Коши. Ищем семейство решений, содержащих произвольную функцию, предварительно строим обыкновенное дифференциальное уравнение в форме

$$\frac{d\xi}{1}=\frac{d\eta}{k}. \qquad (19)$$

Находим общий интеграл (19), он равен $-k\xi+\eta=\mathrm{const}$. Тогда общее решение (18) запишем как

$$\omega_3=F_1(-k\xi+\eta),$$

где F_1 – любая непрерывно дифференцируемая функция. Укажем очевидное решение: $\omega_3=\mathrm{const}$. Далее решаем задачу Коши. Пусть $\omega_3=H_2(\xi^0,\eta)\omega_2^0(\eta)$ при $\xi=\xi^0$. Разрешая общий интеграл (19) относительно переменной η, записываем искомое решение в виде

$$\omega_2=\frac{H_2(\xi^0,\eta)\omega_2^0(-k\xi+\eta+k\xi^0)}{H_2(\xi,\eta)}.$$

Во втором случае $(\varphi_1 = 0,\ \ \varphi_2 = \operatorname{arctg} k)$ уравнения (16) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(H_2 \omega_1 \cos \varphi_1) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(H_2 \omega_2 \cos \varphi_2) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_1 \omega_2 \sin \varphi_2) = 0.$$

Решения находим аналогично (17):

$$\omega_1(\xi, \eta) = \frac{H_2(\xi^0, \eta)\omega_1^0(\eta)}{H_2(\xi, \eta)},$$

$$\omega_2 = \frac{H_2(\xi^0, \eta)\omega_2^0(-k\xi + \eta + k\xi^0)}{H_2(\xi, \eta)}.$$

Полученные значения для интенсивностей армирования используем далее в работе для вычисления коэффициентов при построении разрешающей системы уравнений. Различные решения для интенсивностей приводят к различным разрешающим уравнениям задачи армированной среды.

В работе [6] установлена разрешающая система трех дифференциальных уравнений в криволинейных ортогональных координатах относительно трех компонент тензора деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$:

$$C_1 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi^2} + C_2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \eta^2} + C_3 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \xi \partial \eta} + C_4 \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \eta} +$$
$$+ C_6 \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \xi} + C_7 \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \eta} + C_8 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi} + C_9 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \eta} +$$
$$+ C_{10}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{12} = 0; \qquad (20)$$
$$a_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \eta} + a_{13} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \xi} + a_{14} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \eta} + a_{15} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi} + a_{16} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \eta} +$$
$$+ F_1(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}\varphi_{2,\eta}) + H_1 H_2 \Phi_1 = 0;$$
$$a_{21} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \xi} + a_{22} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \eta} + a_{23} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \xi} + a_{24} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \eta} + a_{25} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi} + a_{26} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \eta} +$$
$$+ F_2(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}\varphi_{2,\eta}) + H_1 H_2 \Phi_2 = 0.$$

Значения коэффициентов C_s, $s = 1, \ldots 12$, через параметры Ламе приведены в [6]. В разрешающей системе (20) первое уравнение является уравнением совместности деформаций в произвольной криволинейной системе координат, два остальных уравнения – это уравнения равновесия плоской задачи в криволинейной системе координат, выраженные через компоненты деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$. Для коэффициентов a_{ij}, в соответствии с введенным способом армирования, получаем выражения

$$a_{11} = H_2(\Omega m_3 + E_1\omega_1 + E_2\omega_2 \frac{1}{(1+k^2)^2}),$$

$$a_{12} = H_1 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k}{(1+k^2)^2},$$

$$a_{13} = H_2\left(\Omega \nu m_3 + E_2\omega_2 \frac{k^2}{(1+k^2)^2}\right),$$

$$a_{14} = H_1 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k^3}{(1+k^2)^2},$$

$$a_{15} = 2H_2 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k}{(1+k^2)^2},$$

$$a_{16} = 2H_1\left(E_2\omega_2 \frac{k^2}{(1+k^2)^2} + \Omega m_4 / 2\right),$$

$$a_{21} = H_2 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k}{(1+k^2)^2},$$

$$a_{22} = H_1\left(\nu m_3 \Omega + E_2\omega_2 \frac{k^2}{(1+k^2)^2}\right),$$

$$a_{23} = H_2 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k^3}{(1+k^2)^2}, \qquad (21)$$

$$a_{24} = H_1(\Omega m_3 + E_2\omega_2 \frac{k^4}{(1+k^2)^2}),$$

$$a_{25} = 2H_2\left(\Omega m_4 / 2 + E_2\omega_2 \frac{k^2}{(1+k^2)^2}\right),$$

$$a_{26} = 2H_1 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k^3}{(1+k^2)^2},$$

где $\Omega = 1 - (\omega_1 + \omega_2)$; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала связующего; E_m – модуль Юнга материала m-го семейства армирующих волокон, $m_3 = \frac{E}{1-\nu^2}$, $m_4 = \frac{E}{1+\nu}$. Значения символа δ_α, входящего в выражения (21), равны единице или минус единице и учитывают выбор знака в формулах тригонометрии при переходе от синуса и косинуса угла α к его тангенсу в зависимости от величины угла армирования.

Исследуем тип разрешающей системы (20) для рассматриваемого случая армирования аналогично подходу [6]. Для этого найдем корни λ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & -2\lambda \\ (a_{11}\lambda^2 + a_{12}\lambda) & (a_{13}\lambda^2 + a_{14}\lambda) & (a_{15}\lambda^2 + a_{16}\lambda) \\ (a_{21}\lambda^2 + a_{22}\lambda) & (a_{23}\lambda^2 + a_{24}\lambda) & (a_{25}\lambda^2 + a_{26}\lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (22)$$

где коэффициенты $a_{ij}, i = 1,2;\ j = \overline{1,6}$ из (21).

Уравнение (22) представляет собой полное алгебраическое уравнение четвертого порядка. Его коэффициенты зависят от технических характеристик материала связующего и арматуры, интенсивностей армирования волокнами первого и второго семейства и параметра k, который задается при построении траекторий, изогональных к данному семейству кривых.

Исследуем корни характеристического уравнения при фиксированном материале, но изменяя интенсивности армирования и параметр k. Рассмотрим следующие варианты комбинации выбора материала для матрицы (связующего) и арматуры (армирующих волокон): связующее – алюминий, армируем стальными волокнами; связующее – медь, армируем волокнами из вольфрама; связующее – графит, армируем волокнами из стали. Зададим различные варианты значений интенсивности и параметра k. Результаты представим в виде таблицы.

Получили, что все корни могут быть действительными; корни могут быть действительными и комплексно сопряженными; все корни могут быть комплексно сопряженными. Основное влияние на характер корней оказывает значение параметра k – тангенса угла армирования по изогональной траектории.

Как видим из таблицы, разные значения углов армирования приводят к разным типам системы разрешающих дифференциальных уравнений (гиперболическому, эллиптическому, смешанному типам), а следовательно, и к разным постановкам краевых задач. Им соответствуют существенно разные решения, что позволяет управлять напряженно-деформированным состоянием конструкции.

Многообразие структур армирования на базе ортогональной системы координат достигается путем построения изогональных траекторий к данным координатным линиям, оно зависит от выбора параметра k и значений интенсивностей армирования. С изменением структур армирования существенным образом изменяются поля напряжений и деформаций.

Таким образом, разработан метод получения многообразия новых структур армирования путем построения изогональных траекторий к некоторым заданным координатным линиям. Решения новых краевых задач неоднородной анизотропной теории упругости показывают широкие возможности управления полями напряжений и деформаций в плоских тонкостенных конструкциях за счет целевого выбора криволинейных структур армирования.

Библиографические ссылки

1. Nemirovsky Yu. V. On the elastic-plastic behavior of the reinforced layer // Int. J. Mech. Sci. 1970. Vol. 12. P. 898–903.
2. Федорова Н. А. Решение плоской задачи упругой среды, армированной тремя семействами волокон // Вычисл. технологии. 2005. Т. 5. С. 90–100.
3. Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Моделирование деформирования плоских авиационных конструкций, армированных двумя семействами криволинейных волокон // Вестник СибГАУ. Вып. 6 (13). 2006. С. 38–44.
4. Бушманов С. П., Немировский Ю. В. Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композитных материалов. 1983. № 2. С. 278–284.
5. Немировский Ю. В., Кургузов В. Д. Прочность и жесткость стеновых железобетонных панелей со сложными структурами армирования // Изв. вузов. Строительство. 2003. № 2. С. 4–11.
6. Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Армирование плоских конструкций по криволинейным ортогональным траекториям // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2010. С. 96–104.
7. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М. : Гостехиздат, 1950.
8. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М. : Гостехиздат, 1953.

Корни характеристического уравнения при фиксированном материале в зависимости от интенсивности армирования и параметра *k*

Материал	Интенсивности армирования	$k=1$	$k=\sqrt{3}$	$k=1/\sqrt{3}$
Алюминий + сталь	$\omega_1=0,2$; $\omega_2=0,2$	$0,5;1,3$; $-0,36\pm0,27i$	$0,005;7,98$; $-0,36;-4,75$	$0,28\pm1,02i$; $-0,36;-4,75$
Алюминий + сталь	$\omega_1=0,3$; $\omega_2=0,3$	Все корни действительные	Все корни действительные	$0,33\pm0,85i$; $-0,35\pm0,48i$
Медь + вольфрам	$\omega_1=0,2$; $\omega_2=0,2$	0,48; 1,35; $-0,8\pm0,257i$	Все корни действительные	$0,28\pm i$; $-0,307\pm0,58i$
Графит + сталь	$\omega_1=0,2$; $\omega_2=0,2$	Все корни действительные	Все корни действительные	$0,318\pm0,42i$; $-0,46\pm0,344i$

N. A. Fedorova

SIMULATING THE PLANE AIRCRAFT CONSTRUCTIONS DEFORMATION WITH COMPLEX CURVILINEAR REINFORCEMENT STRUCNURES

For determining of limitary deformations for planar constructions reinforced with curvelinear trajectories the resolving equations are obtained for orthotropic non-homogeneous linear elasticity problem. A variety of orthogonal systems – oriented reinforcement structures is obtained by isogonal trajectories designing for current coordinate lines.

Keywords: reinforcement, structure model, isogonal trajectories.