

УДК 512.54

Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-2-273-278

Для цитирования: Сенашов В. И. О нижнем слое в группах // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24, № 2. С. 273–278. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-2-273-278.

For citation: Senashov V. I. [On the bottom layer in groups]. *Siberian Aerospace Journal*. 2023, Vol. 24, No. 2, P. 273–278. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-2-273-278.

О нижнем слое в группах

В. И. Сенашов

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, Красноярск, Академгородок, 50/44
E-mail: sen1112home@mail.ru

Рассматривается вопрос о возможности восстановления информации о группе по ее нижнему слою, т. е. по множеству её элементов простых порядков. Вопрос является классическим для математического моделирования: восстановление недостающей информации об объекте по части сохранившихся данных. Группа называется распознаваемой по нижнему слою при дополнительных условиях, если она однозначно восстанавливается по нижнему слою при этих условиях. Группа G называется почти распознаваемой по нижнему слою при дополнительных условиях, если существует конечное число попарно неизоморфных групп, удовлетворяющих этим условиям, с одинаковым нижним слоем таким же, как у группы G . Группа G называется нерасознаваемой по нижнему слою при дополнительных условиях, если существует бесконечное число попарно неизоморфных групп, удовлетворяющих этим условиям, с одинаковым нижним слоем таким же, как у группы G . Приводятся результаты по распознаваемости групп по нижнему слою в различных классах групп. Понятие распознаваемости по нижнему слою введено по аналогии с активно исследуемой распознаваемостью по спектру, т. е. по множеству порядков элементов группы. В работе рассматриваются группы, без единичного элемента совпадающие со своим нижним слоем. Приводятся примеры групп с этими условиями в классах абелевых и неабелевых групп. Устанавливаются свойства таких групп. Полученные результаты могут быть полезны при кодировании информации в сеансах космической связи.

Ключевые слова: группа, нижний слой, периодичность, группа Фробениуса, регулярный автоморфизм.

On the bottom layer in groups

V. I. Senashov

Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: sen1112home@mail.ru

The question of the possibility of restoring information about a group by its lower layer, that is, by the set of its elements of prime orders, is considered. The question is classical for mathematical modeling: restoration of the missing information about the object from the part of the preserved data. A group is said to be recognizable from the bottom layer under additional conditions if it is uniquely reconstructed from the bottom layer under these conditions. A group G is said to be almost recognizable from the bottom layer under additional conditions if there exists a finite number of pairwise nonisomorphic groups satisfying

these conditions, with the same bottom layer as the group G . A group G is called unrecognizable from the bottom layer under additional conditions if there is an infinite the number of pairwise non-isomorphic groups that satisfy these conditions and have the same bottom layer as the group G . Results are given on the recognition of groups by the bottom layer in various classes of groups. The concept of recognizability by the lower layer was introduced by analogy with the actively studied recognizability by spectrum, that is, by the set of orders of group elements. In this paper, we consider groups that, without a single element, coincide with their bottom layer. Examples of groups with these conditions in the classes of Abelian and non-Abelian groups are given. The properties of such groups are established. The results can be applied when encoding information in space communications.

Keywords: group, bottom layer, periodicity, Frobenius group, regular automorphism.

Введение

Нижним слоем группы G называется множество её элементов простых порядков. По нижнему слою группы иногда можно полностью однозначно распознать группу, иногда можно установить свойства группы с данным нижним слоем.

Группа называется распознаваемой по нижнему слою при дополнительных условиях, если она однозначно восстанавливается по нижнему слою при этих условиях. Группа G называется почти распознаваемой по нижнему слою при дополнительных условиях, если существует конечное число попарно неизоморфных групп, удовлетворяющих этим условиям, с одинаковым нижним слоем таким же, как у группы G . Группа G называется нераспознаваемой по нижнему слою при дополнительных условиях, если существует бесконечное число попарно неизоморфных групп, удовлетворяющих этим условиям, с одинаковым нижним слоем таким же, как у группы G . Понятие распознаваемости группы по нижнему слою введено по аналогии с активно исследуемой в последние тридцать лет распознаваемостью групп по спектру, т. е. по множеству порядков элементов группы.

Примером группы, распознаваемой по своему нижнему слою, является группа, нижний слой которой состоит из элементов порядка 2 и в группе нет неединичных элементов других порядков. В этом случае группа однозначно распознается по своему нижнему слою (это элементарная абелева 2-группа, получаемая добавлением к нижнему слою единичного элемента).

Группы в следующем примере являются почти распознаваемыми группами по нижнему слою в классе бесконечных слойно-конечных групп. В. П. Шунков доказал [1], что если нижний слой в бесконечной слойно-конечной группе состоит из одного элемента порядка 2, то группа G является либо квазициклической, либо бесконечной обобщенной группой кватернионов. Группы из результата В. П. Шункова почти распознаваемы по нижнему слою в классе бесконечных слойно-конечных групп.

Пример нераспознаваемости по нижнему слою в классе бесконечных слойно конечных групп дает следующая бесконечная серия групп: в группах $C_{p^\infty} \times C_q$, $C_{p^\infty} \times C_{q^2}$, $C_{p^\infty} \times C_{q^3}$, ... одинаковый нижний слой, состоящий из $p-1$ элемента порядка p и $q-1$ элемента порядка q . В данном примере группы нераспознаваемы по нижнему слою при этих условиях.

Здесь мы рассмотрим группы, без единичного элемента совпадающие со своим нижним слоем. Такие группы, очевидно, однозначно распознаются по своему нижнему слою.

Автором ранее получены результаты по распознаванию конечных и бесконечных групп по нижнему слою [2–11].

Результаты работы могут быть применены при кодировании информации в космической связи.

Основные результаты

Автором был доказан ряд результатов по распознаваемости групп в некоторых подклассах класса слойно конечных групп [2–10].

Периодические полные абелевы группы не обязательно должны быть слойно конечными. Следующая теорема устанавливает распознаваемость группы по нижнему слою в этом классе групп: группа G распознаваема по нижнему слою среди периодических полных абелевых групп [11].

Получен еще один результат по распознаваемости группы по нижнему слою. Группа G распознаваема по нижнему слою среди периодических радикально полных групп, удовлетворяющих нормализаторному условию [11].

Доказано также, что все простые неабелевы группы распознаются одновременно по нижнему слою и спектру [11]. В статье [12] установлено, что среди конечных простых неабелевых групп, кроме групп $S_6(2)$ и $O_8^{+(2)}$, имеется еще только одна пара нераспознаваемых по спектру групп $O_7(3)$ и $O_8^{+(3)}$. В [11] доказана теорема: все конечные простые неабелевы группы одновременно распознаваемы по спектру и нижнему слою в классе конечных простых неабелевых групп.

Рассмотрим группы, без единичного элемента совпадающие со своим нижним слоем. Это периодические группы, в которых нет элементов составных порядков.

К таким группам относятся все элементарные абелевы примарные группы, некоторые группы Фробениуса, группы Ольшанского.

Мы имеем в виду группы Ольшанского, все неединичные элементы которых имеют один и тот же простой порядок, а вся группа порождается любыми своими двумя элементами простого порядка.

Поскольку появление групп типа монстров Ольшанского вполне возможно в будущем, то список групп, совпадающих со своим нижним слоем в классе периодических групп, нельзя считать исчерпывающим. Поэтому ограничим наше рассмотрение только конечными группами, без единичного элемента совпадающими со своим нижним слоем.

Среди абелевых групп такими, очевидно, являются только элементарные абелевы примарные группы.

Рассмотрим, какие возможны конечные группы Фробениуса с таким условием:

- группа Фробениуса с ядром порядка три и неинвариантным множителем порядка два;
- группа Фробениуса, ядро которой – элементарная абелева примарная группа, не являющаяся 2-группой, неинвариантный множитель – циклическая группа порядка два, образующий которой переводит все элементы ядра сопряжением в обратные элементы;
- также можно рассмотреть в качестве ядра группы Фробениуса элементарную абелеву 2-группу, а неинвариантный множитель простого порядка, согласованный с порядком этой группы так, чтобы он индуцировал регулярный автоморфизм на ней. Например, можно рассмотреть элементарную абелеву 2-группу восьмого порядка, допускающую автоморфизм третьего порядка. Соответственно, взять в качестве неинвариантного множителя циклическую группу порядка три.

По теореме J. G. Томпсона [13], ядро конечной группы Фробениуса нильпотентно. Поскольку нильпотентная группа обладает нетривиальным центром, то ядро группы Фробениуса обладает, по крайней мере, одним элементом простого порядка p , который находится в его центре. Отсутствие элементов составного порядка в группе сразу влечет отсутствие элементов простого порядка, отличного от p , в ядре группы Фробениуса. Следовательно, ядро является конечной примарной группой, все нетривиальные элементы которой составляют ее нижний слой.

Если неинвариантный множитель группы Фробениуса содержит элемент порядка два, то ядро группы Фробениуса абелево (см., например, [14]). Отсюда вытекает, что если в конечной группе Фробениуса, все нетривиальные элементы которой составляют ее нижний слой, неинвариантный множитель содержит элемент порядка два, то, во-первых, сам неинвариантный множитель, как показано выше, является циклической группой второго порядка и, во-вторых, ядро по также замеченному ранее является примарной абелевой группой без элементов составного порядка, т. е. элементарной абелевой примарной группой.

По теореме 1.3 из [15] разрешимый неинвариантный множитель группы Фробениуса является группой одного из следующих типов:

- 1) H – циклическая группа;
- 2) $H = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, (|a|, |b|) = 1, \langle a \rangle = H'$, все элементы простых порядков из $\langle b \rangle$ лежат в центре H ;
- 3) $H = H_1 \lambda Q$, где H_1 – группа нечетного порядка одного из типов 1, 2 теоремы, Q – (обобщенная) группа кватернионов с инволюцией t , причем t лежит в центре H ;
- 4) $H = Q \lambda H_1$, где H_1 – группа нечетного порядка одного из типов 1, 2 теоремы, Q – группа кватернионов восьмого порядка;
- 5) H содержит подгруппу индекса 2 типа 4 теоремы, и силовская 2-подгруппа из H есть обобщенная группа кватернионов порядка шестнадцать.

Рассматривая возможное строение разрешимого неинвариантного множителя группы Фробениуса в группе, без единичного элемента совпадающей со своим нижним слоем, видим, что случаи 3, 4, 5 упомянутой теоремы 1.3 невозможны, так как содержат 2-элементы порядков больших двух. Во втором случае в циклических группах $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ найдутся два перестановочных элемента различных простых порядков, произведение которых является элементом составного порядка, что ведет к нарушению условия совпадения группы со своим нижним слоем. Остается единственная возможность для разрешимого множителя группы Фробениуса в нашем случае: быть циклической группой. Причем, ввиду отсутствия в группе G элементов составного порядка, эта циклическая группа является группой простого порядка.

По теореме 1.4 из [15], неразрешимый неинвариантный множитель H группы Фробениуса содержит в качестве подгруппы индекса, не превышающего двух, подгруппу $K = L \times H_1$, где $L = SL(2, 5)$, H_1 – группа одного из типов 1, 2 предыдущей теоремы 1.3, порядок которой взаимно прост с тридцатью.

Рассматривая возможное строение неразрешимого неинвариантного множителя группы Фробениуса в группе, без единичного элемента совпадающей со своим нижним слоем, видим, что неразрешимый неинвариантный множитель должен содержать некоторый элемент простого порядка из группы $L = SL(2, 5)$, а это элементы второго, третьего и пятого порядков. В то же время, группа H_1 элементов таких порядков не содержит, так как ее порядок взаимно прост с тридцатью. Ввиду отсутствия в группе G элементов составного порядка, получаем противоречие с только что установленным наличием в неразрешимом неинвариантном множителе двух перестановочных элементов различных простых порядков.

Таким образом, мы установили, что неинвариантный множитель группы Фробениуса в группе, без единичного элемента совпадающей со своим нижним слоем, является циклической группой простого порядка.

Заключение

В работе приведены результаты по распознаваемости групп по нижнему слою в различных классах групп и рассмотрены группы, без единичного элемента совпадающие со своим нижним слоем, а также установлены свойства таких групп.

Благодарности

Работа выполнена в рамках госзадания ИВМ СО РАН (базовый проект № 0287-2021-0002). Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра и финансировании Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках создания и развития региональных научно-образовательных центров математики (Соглашение № 075-02-2021-1388).

Acknowledgements

The work was performed in the framework of the state assignment of ICM SB RAS, project no. 0287-2021-0002. The work was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the creation and development of regional scientific and educational centers of mathematics (Agreement No. 075-02-2021-1388).

Библиографические ссылки

1. Шунков В. П. Об одном классе p -групп // Алгебра и логика. 1970. № 4 (9). С. 484–496.
2. Сенашов В. И., Паращук И. А. О влиянии нижнего слоя группы на строение группы в различных классах групп // Актуальные проблемы авиации и космонавтики : сб. материалов VI Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. Дню космонавтики (13–17 апреля 2020, Красноярск). 2020. Т. 2. С. 293–295.
3. Сенашов В. И., Паращук И. А. On recognition of layered finite groups by the bottom layer // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2021. Т. 2. С. 460–463.
4. Сенашов В. И., Паращук И. А. О влиянии нижнего слоя группы на строение группы в различных классах групп // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2022. Т. 2. С. 348–350.
5. Senashov V. I., Parashchuk I. A. On a bottom layer in a group // Bulletin of the Karaganda University. 2020. No. 4 (100). С. 136–142
6. Сенашов В. И., Паращук И. А. On recognizing of groups by the bottom layer // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. 2022. No. 3 (107). С. 124–131.
7. Паращук И. А., Сенашов В. И. Нижний слой и спектр в группах // Инф. технологии в математике и математическом образовании : материалы IX Всеросс. конф. с междунар. участием. Красноярск, 11–12 ноября 2021. Краснояр. гос. пед. ун-т. С. 36–39.
8. Паращук И. А., Сенашов В. И. Распознавание групп по нижнему слою // Инф. технологии в математике и математическом образовании : Материалы X Всеросс. конф. с междунар. участием. Красноярск, 10–11 ноября 2022. Краснояр. гос. пед. ун-т. С. 37–40.
9. Senashov V. I., Parashchuk I. A. On Recognizability of Groups by Bottom Layer // Advances in Modelling and Analysis A. 2020. No. 1–4 (57). P. 1–5.
10. Parashchuk I. A., Senashov V. I. Restoration of information on the group by the bottom layer // Сибирский журнал науки и технологий. 2018. Т. 19, № 2. С. 223–226.
11. Паращук И. А., Сенашов В. И. Восстановление группы по нижнему слою // Научный журнал Павлодарского госуниверситета. 2017. № 2. С. 64–72.
12. Бутурлакин А. А. Изоспектральные конечные простые группы // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. № 7. С. 111–114.
13. Thompson J. G. Finite groups with fixed-points-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Sci. USA. 1959. Vol. 263. P. 578–581.
14. Шунков В. П. О некотором обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Алгебра и логика. 1967. № 3 (6). С. 113–124.
15. Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П. Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2004. 211 с.

References

1. Shunkov V. P. [On a class of p -groups]. *Algebra and Logic*. 1970. No. 4 (9), P. 484–496 (In Russ.).
2. Senashov V. I., Parashchuk I. A. [On the influence of the lower layer of the group on the structure of the group in various classes of groups]. *Actual problems of aviation and cosmonautics: Sat. Materials VI Intern. scientific-practical. conf., dedicated Cosmonautics Day (April 13–17, 2020, Krasnoyarsk)*. 2020, Vol. 2, P. 293–295 (In Russ.).
3. Senashov V. I., Parashchuk I. A. [On recognition of layered finite groups by the bottom layer]. *Actual problems of aviation and astronautics*. 2021, Vol. 2, P. 460–463 (In Russ.).
4. Senashov V. I., Parashchuk I. A. [On the influence of the lower layer of the group on the structure of the group in various classes of groups]. *Actual problems of aviation and cosmonautics*. 2022, Vol. 2, P. 348–350 (In Russ.).
5. Senashov V. I., Parashchuk I. A. On a bottom layer in a group. *Bulletin of the Karaganda University*. 2020, No. 4 (100), P. 136–142.

6. Parashchuk I. A., Senashov V. I. [Restoring a group by bottom layer]. *Scientific journal of Pavlodar State University*. 2017, No. 2, P. 64–72
7. Parashchuk I. A., Senashov V. I. [Bottom layer and spectrum in groups]. *Proceedings of the IX All-Russian. conf. with intern. participation of "Inf. technologies in mathematics and mathematical education"*. Krasnoyarsk, November 11–12, 2021. Krasnoyar. state ped. un-t. pp. 36–39 (In Russ.).
8. Parashchuk I. A., Senashov V. I. [Recognition of groups by the lower layer]. *Proceedings of the X All-Russian. conf. with intern. participation of "Inf. technologies in mathematics and mathematical education"*. Krasnoyarsk, November 10–11, 2022, Krasnoyar. state ped. un-t., P. 37–40 (In Russ.).
9. Senashov V. I., Parashchuk I. A. On Recognizability of Groups by Bottom Layer. *Advances in Modeling and Analysis A*. 2020, No. 1–4 (57), P. 1–5.
10. Parashchuk I. A., Senashov V. I. [Restoration of information on the group by the bottom layer]. *Siberian journal of science and technology*. 2018, No. 2 (19), P. 223–226 (In Russ.).
11. Senashov V. I., Parashchuk I. A. [On recognizing of groups by the bottom layer]. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*. 2022, No. 3 (107), P. 124–131 (In Russ.).
12. Buturlakin A. A. [Isospectral finite simple groups]. *Sib. electron. mat. Izv.* 2010, No. 7, P. 111–114 (In Russ.).
13. Thompson J. G. Finite groups with fixed-points-free automorphisms of prime order. *Proc. Nat. sci. USA*. 1959, Vol. 263, P. 578–581.
14. Shunkov V. P. [On some generalization of the Frobenius theorem to infinite groups]. *Algebra and Logic*. 1967, No. 3 (6), P. 113–124 (In Russ.).
15. Popov A. M., Sozutov A. I., Shunkov V. P. *Gruppy s sistemami frobeniusovykh podgrupp* [Groups with systems of Frobenius subgroups]. Krasnoyarsk, IPTS KSTU Publ., 2004, 211 p.

© Сенашов В. И., 2023

Сенашов Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН; профессор кафедры алгебры и математической логики, Сибирский федеральный университет. E-mail: sen1112home@mail.ru.

Senashov Vladimir Ivanovich – Dr. Sc., professor, leader researcher of Institute of Computational Modelling, Siberian Branch of RAS; professor of algebra and logic department, Siberian Federal University. E-mail: sen1112home@mail.ru.
