УДК 519.248
Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-4-582-592

Для цитирования: Вайнштейн В. И., Вайнштейн И. И., Сафонов К. В. Асимптотическое поведение средней стоимости восстановлений в моделях процессов восстановления // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 4. С. 582–592. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-4-582-592.

For citation: Vainshtein V. I., Vainshtein I. I., Safonov K. V. [Asymptotic behavior of the average recovery cost in models of recovery processes]. *Siberian Aerospace Journal.* 2022, Vol. 23, No. 4, P. 582–592. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-4-582-592.

Асимптотическое поведение средней стоимости восстановлений в моделях процессов восстановления

В. И. Вайнштейн[1*], И. И. Вайнштейн[1], К. В. Сафонов[2]

[1]Сибирский федеральный университет
660041, Российская Федерация, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
[2]Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31
*E-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru

При эксплуатации ракетно-космической техники, электронно-вычислительных систем, систем электроснабжения, теплоснабжения, транспортных систем и многих других происходят отказы, возникают угрозы атак, безопасности и множество других воздействий, имеющих случайный характер и оказывающих негативную роль на их работу. Такие воздействия приводят к процессам восстановления, в которых время работы восстановленных элементов до их отказа, число отказов, время и стоимость восстановлений являются случайными величинами. В теории вероятностей и математической теории надежности при исследовании процессов восстановления особую роль имеет функция восстановления (среднее значение числа случайных отказов). Особо отметим ее значимость в оптимизационных задачах при выборе стратегии проведения процессов восстановления. Так, одними из важнейших критериев оптимальности являются среднее число отказов, средняя стоимость восстановлений, интенсивность затрат, коэфициент готовности. Также отметим задачу необходимости и времни проведения профилактических восстановлений. В работе в рамках математической теории надежности рассматриваются модели процессов восстановления с учетом стоимости восстановлений с изменяющимися функциями распределения наработок до отказа восстанавливаемых элементов и стоимостями восстановлений. Для рассматриваемых моделей получена формула функции затрат (средней стоимости восстановлений) через функции восстановления двух общих процессов восстановлени, позволяющая доказать теоремы о асимптотическом поведении функции затрат, хорошо известные для асимптотического поведения функции восстановления общего процесса восстановления, где не учитывается время восстановлений.. Полученные асимптотические теоремы для средней стоимости восстановлений обобщены на введенный альтернирующий (когда учитывается еще и случайное время проведения восстановлений) процесс восстановления с учетом стоимости восстановлений с изменяющимися функциями распределения наработок до отказа восстанавливаемых элементов и стоимостями их восстановлений.

Ключевые слова: процесс восстановления, функция восстановления, функция затрат, альтернирующий процесс восстановления.

Asymptotic behavior of the average recovery cost in models of recovery processes

V. I. Vainshtein[1*], I. I. Vainshtein[2], K. V. Safonov[2]

[1]Siberian Federal University
79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
[2]Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
*E-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru

During the operation of rocket and space technology, electronic computing systems, power supply systems, heat supply systems, transport systems and many others, failures occur, there are threats of attacks, security threats and many other impacts that are random in nature and have a negative role in their work. Such impacts lead to restoration processes in which the operating time of the restored elements before their failure, the number of failures, the time and cost of restorations are random variables. In the theory of probability and in the mathematical theory of reliability, when studying restoration processes, the restoration function (the average value of the number of random failures) plays a special role. We especially note its importance in optimization problems when choosing a strategy for carrying out recovery processes. So one of the most important criteria for optimality is the average number of failures, the average cost of restoration, cost intensity, availability factor. We also note the problem of the need and timing of preventive restorations. Within the framework of the mathematical theory of reliability, models of restoration processes are considered taking into account the cost of restorations with varying distribution functions of the time to failure of the restored elements and the costs of restorations. For the models under consideration, a formula for the cost function (average cost of restorations) through the restoration functions of two general restoration processes is obtained, which allows proving theorems on the asymptotic behavior of the cost function, well known for the asymptotic behavior of the restoration function of the general restoration process, where the restoration time is not taken into account. The obtained asymptotic theorems for the average cost of restorations are generalized to the introduced alternating (when the random time of restorations is also taken into account) restoration process, taking into account the cost of restorations with changing distribution functions of the time to failure of the restored elements and the costs of their restorations.

Ключевые слова: recovery process, recovery function, cost function, alternating recovery process.

Введение

Одним из важнейших критериев оптимальности в задачах выбора оптимальной стратегии при проведения процесса восстановления является стоимость его проведения. В соответствии с этим мы будем рассматривать процессы восстановления с учетом стоимости восстановлений.

Пусть X_i, $i = 1,2,\ldots$ случайные наработки восстановленных элементов от $i-1$-го до i-го отказа, X_1 – наработка элемента до первого отказа и $F_i(t)$ – их функции распределения.

Последовательность неотрицательных независимых случайных величин X_i с функциями распределения $F_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$ называется процессом восстановления [1–6].

Пусть c_i, $i = 1,2,\ldots$ – затраты на i-е восстановление, c_0 – стоимость элемента, установленного в начальный момент времени $t = 0$, и X_0 – случайная величина, имеющее распределение $F_0(t) < 0$ при $t < 0$ и $F_0(t) = 1$ при $t \geq 0$.

Последовательность (X_i, c_i), $i = 0,1,\ldots$ будем называть процессом восстановления с учетом стоимости восстановления [6–8]. Такое определение естественно для процессов восстановления в теории надежности технических систем. Имеются другие определения. Так, в [9] это процесс восстановления с доходами, в [10] – обобщенный процесс восстановления.

Процесс восстановления с учетом стоимости на восстановления задает случайную величину $N(t)$ – количество отказов (восстановлений) и случайную величину $C(t)$ – стоимость восстановлений за время от 0 до t:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} c_i,$$

$$P(N(t) = n) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t),$$

$F^{(n)}(t)$-n-кратная свертка функций распределения $F_i(t),\ i = 1,2,\dots,n$,

$$F^{(n)}(t) = (F^{(n-1)} * F_n)(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x)dF_n(x), F^{(1)}(t) = F_1(t).$$

Отметим, что n-кратная свертка $F^{(n)}(t)$ является функций распределения суммы рассматриваемых независимых случайных величин $X_i,\ i = 1,2,\dots n$.

В теории надежности математическое ожидание числа отказов называют функцией восстановления $H(t)$

$$H(t) = E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t).$$

Функцию $S(t) = E(C(t))$ будем называть функцией затрат, $S(t)$ – среднее значение стоимости восстановлений на промежутке $[0,t]$, и, следуя [6; 7],

$$S(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n F^{(n)}(t).$$

В реальных условиях эксплуатации функции распределения случайных величин (наработок восстановленных элементов при отказах), определяющие процесс восстановления, могут не совпадать. Естественно, могут изменяться и стоимости восстановлений. Предположения о функциях распределения приводят к различным математическим моделям процессов восстановления.

В работе рассматривается процесс восстановления порядка (k_1, k_2) с изменявшимися функциями распределения [6; 9; 11–13], обобщающий хорошо изученные в теории вероятностей и теории надежности простой и общий процесс восстановления [1–6].

У процесса восстановления порядка (k_1, k_2) функции распределения удовлетворяют условию

$$F_i(t) = F_j(t) \quad \text{при} \quad i \equiv j \ (mod\ \ k_2),\ i,j \geq k_1).$$

Числа i,j сравнимы по модулю натурального числа k ($i \equiv j(mod\ k)$, если при делении на k они дают одинаковые остатки.

В случае $(1,1)$ имеем простой процесс, в случае $(2,1)$ — обший процесс восстановления.

При $k_1 = 1$ (*порядок* $(1, k_2)$) имеем периодический процесс восстановления порядка k_2, при $k_2 = 1$ (*порядок* $(k_1, 1)$) — процесс восстановления порядка k_1.

Например, при (1,3) (периодический процесс порядка 3) последовательность функций распределения периодического процесса имеет вид

$$\underbrace{F_1, F_2, F_3}, \underbrace{F_1, F_2, F_3}, \dots,$$

а последовательность функций распределения для процесса порядка $(2,2)$ имеет вид

$$F_1, \underbrace{F_2, F_3}, \underbrace{F_2, F_3}, \underbrace{F_2, F_3}, \dots.$$

Этот случай можно интерпретировать как процесс, когда после первого восстановления система через каждые два восстановления возвращается в состояние, в котором находилась после первого восстановления.

Постановка задачи

Обозначим $\mu_i = E(X_i)$ – математическое ожидание, $\sigma_i = \sigma(X_i)$ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X_i.

Распределение случайной величины X называется решетчатым, если она может принимать только значения вида $\alpha n,\ n = 0,1,\ldots$, и $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n\alpha) = 1$.

Обозначим $HF(t)$ функцию восстановления простого процесса, образованного функцией распределения $F(t)$, $HFG(t)$ функцию восстановления общего процесса, образованного первой функцией распределения $F(t)$, второй и следующими $G(t)$.

Запишем известные теоремы об асимптотическом поведении функции восстановления для простого и общего процесса восстановления [4; 6].

Пусть распределение $F_2(t)$ не является решетчатым. Для любого начального распределения $F_1(t)$.

Теорема 1 (Элементарная теорема восстановления).

$$\lim_{t\to\infty}\frac{HF_1F_2(t)}{t} = \frac{1}{\mu_2}.$$

Теорема 2 (Основная теорема восстановления). Если $g(t)$ – интегрируемая на $[0,\infty)$ невозрастающая функция, то

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(t-x)dHF_1F_2(x) = \frac{1}{\mu_2}\int_0^{\infty} g(x)dx.$$

Теорема 3 (*Теорема Блекуэлла).* Для любого h

$$\lim_{t\to\infty}(HF_1F_2(t+h) - HF_1F_2(t)) = \frac{h}{\mu_2}, \mu_2 < \infty.$$

Теорема 4.

$$\lim_{t\to\infty}\left(HF_1F_2(t) - \frac{t}{\mu_2}\right) = \frac{\sigma_2^2}{2\mu_2^2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{1}{2}.\quad \mu_2 < \infty. \tag{1}$$

Для рассмотренных выше процесса k-го порядка, периодического процесса k-го порядка и процесса порядка (k_1, k_2) сформулированные выше теоремы доказаны в [6; 9; 11].

Цель дальнейшего в доказательстве аналога указанных выше теорем для асимптотического поведении функции затрат $S(t)$ процесса восстановления порядка (k_1, k_2) с учетом стоимости восстановлений.

Теоремы об асимптотическом поведении функции затрат $S(t)$ процесса восстановления порядка (k_1, k_2) с учетом стоимости восстановлений

В дальнейшем, если $F_i(t) = F_j(t)$, то и $c_i = c_j$, что естественно для рассматриваемых моделей процессов восстановления.

Следуя [6–8], запишем интегральное уравнение для функции затрат $S(t)$ рассматриваемого процесса восстановления:

$$S(t) = G(t) + \int_0^t S(t-x)d\Phi^{(k_2)}(x), \tag{2}$$

$$G(t) = c_0(1 - \Phi^{(k_2)}(t)) + \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n F^{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n \int_0^t F^{(n)}(t-x)d\Phi^{(k_2)}(x),\ \text{при}\ \ k_1 > 1,$$

$$G(t) = c_0(1 - \Phi^{(k_2)}(t)) + \sum_{n=1}^{k_2} c_n F^{(n)}(t),\ \text{при}\ \ k_1 = 1,$$

$\Phi^{(k_2)}(t) = (\Phi_1 * \Phi_2 * \ldots * \Phi_{k_2})(t)$ – свертка всех функций распределения случайных величин $Y_i = X_{k_1-1+i}$, задающих периодическую часть рассматриваемого процесса восстановления, $\Phi_i(t) = F_{k_1-1+i}(t), i = 1,2,\ldots,k_2$.

Функция восстановления $HFG(t)$ общего процесса и функция восстановления $HG(t)$ простого процесса связаны соотношением [4; 6]

$$HFG(t) = F(t) + \int_0^t HG(t-x)dF(x). \tag{3}$$

В уравнении (2) сделаем замену:

$$S(t) = V(t) + c_0. \tag{4}$$

Получаем

$$V(t)+c_0=c_0(1-\Phi^{(k_2)}(t))+\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}c_nF^{(n)}(t)-\sum_{n=1}^{k_1-1}c_n\int_0^t F^{(n)}(t-x)d\Phi^{(k_2)}(x)+$$

$$+\int_0^t (V(t-x)+c_0)d\Phi^{(k_2)}(x).$$

После сокращения

$$V(t)=Q(t)+\int_0^t V(t-x)d\Phi^{(k_2)}(x), \tag{5}$$

$$Q(t)=\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}c_nF^{(n)}(t)-\sum_{n=1}^{k_1-1}c_n\int_0^t F^{(n)}(t-x)d\Phi^{(k_2)}(x), \text{ при } k_1>1,$$

$$Q(t)=\sum_{n=1}^{k_2}c_nF^{(n)}(t), \text{ при } k_1=1.$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$U(t)=f(t)+\int_0^{\mathrm{t}} U(t-x)dg(x). \tag{6}$$

Если $f(t)=f_1(t)-f_2(t)$, то функция $U(t)=U_1(t)-U_2(t)$ является его решением, где функции $U_1(t),U_2(t)$ являются соответственно решениями интегральных уравнений

$$U_1(t)=f_1(t)+\int_0^t U_1(t-x)dg(x), U_2(t)=f_2(t)+\int_0^t U_2(t-x)dg(x).$$

Учитывая это, решение интегрального уравнения (6) ищем в виде

$$V(t)=(\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}c_n)V_1(t)-(\sum_{n=1}^{k_1-1}c_n)V_2(t). \tag{7}$$

Функции $V_1(t),V_2(t)$ являются соответственно решениями интегральных уравнений

$$V_1(t)=Q_1(t)+\int_0^t V_1(t-x)d\Phi^{(k_2)}(x), V_2(t)=Q_2(t)+\int_0^t V_2(t-x)d\Phi^{(k_2)}(x), \tag{8}$$

$$Q_1(t)=\frac{\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}c_nF^{(n)}(t)}{\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}c_n}, Q_2(t)=\frac{((\sum_{n=1}^{k_1-1}c_nF^{(n)})*\Phi^{(k_2)})(t)}{\sum_{n=1}^{k_1-1}c_n}.$$

Функции $Q_1(t),Q_2(t)$ по построению – функции распределения, так как они неубывающие ($F^{(n)}(t)$ – функции распределения), $Q_1(0)=Q_2(0)=0$, $\lim_{t\to\infty}Q_1(t)=\lim_{t\to\infty}Q_2(t)=1$.

Теперь, принимая еще во внимание, что и функция $\Phi^{(k_2)}(t)$ также является функцией распределения, в соответствии с (4), заключаем, что решением интегральных уравнений (8) являются функции восстановления общих процессов, задаваемых соответственно первыми функциями распределения $Q_1(t),Q_2(t)$, вторыми и последующими $\Phi^{(k_2)}(t)$.

Таким образом,

$$V_1(t)=HQ_1\Phi^{(k_2)}(t), V_2(t)=HQ_2\Phi^{(k_2)}(t) \tag{9}$$

и с учетом (4), (7), (9)

$$S(t)=V(t)+c_0=c_0+(\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}c_n)HQ_1\Phi^{(k_2)}(t)-(\sum_{n=1}^{k_1-1}c_n)HQ_2\Phi^{(k_2)}(t). \tag{10}$$

Полагая в (10) $c_0=0, c_i=1,\ i\geq 1$, получаем новую формулу функции восстановления процесса порядка (k_1,k_2)

$$H(t)=HG_1\Phi^{(k_2)}(t)-HG_2\Phi^{(k_2)}(t),$$

$$G_1(t)=\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}F^{(n)}(t), G_2(t)=\sum_{n=1}^{k_1-1}(F^{(n)}*\Phi^{(k_2)})(t),$$

дополняющую ранее полученные формулы в [6; 12].

Полученное линейное представление (10) функции затрат $S(t)$ процесса восстановления порядка (k_1,k_2) с учетом стоимости восстановлений через функции восстановления двух общих процессов восстановления дает возможность распространить выше указанные теоремы о асимптотическом поведении функции восстановления общего процесса восстановления на функцию затрат процесса восстановления порядка (k_1,k_2) с учетом стоимости восстановлений.

Обозначим

$$\mu_X = E(\sum_{i=1}^{k_1-1} X_I) = \sum_{i=1}^{k_1-1} E(X_i),\ \mu_Y = E(\sum_{i=1}^{k_2} Y_i) = \sum_{i=1}^{k_2} E(Y_i),$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sum_{i=1}^{k_1-1} \sigma^2(X_i)},\ \sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{k_2} \sigma^2(Y_i)}.$$

Теорема 1* (Элементарная теорема восстановления). Для любых начальных распределений $F_1(t), F_2(t), \dots, F_{k_1-1}(t)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{c_0}{t} + (\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n) \lim_{t\to\infty} \frac{HQ_1\Phi^{(k_2)}(t)}{t} - (\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n) \lim_{t\to\infty} \frac{HQ_2\Phi^{(k_2)}(t)}{t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n \frac{1}{\mu_Y} - \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n \frac{1}{\mu_Y} = \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n}{\mu_Y}.$$

Здесь и далее учитываются выше указанные соответствующие теоремы для функции восстановления общего процесса, и что n – кратная свертка $F^{(n)}(t)$ является функций распределения суммы рассматриваемых независимых случайных величин $X_i,\ i = 1,2, \dots n$, а также что математическое ожидание $E(Y)$ случайной величины Y с функцией распределения $\Phi^{(k_2)}(t)$ определяется по формуле

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{k_2} E(Y_i) = \mu_Y.$$

Теорема 2* (Основная теорема восстановления). Если функции распределения, задающие периодическую часть рассматриваемого процесса восстановления порядка (k_1, k_2), не являются решетчатыми, а $g(t)$ – интегрируемая на $[0,\infty)$ невозрастающая функция, то

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t g(t-x) dS(x) =$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t g(t-x) d(c_0 + (\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n) HQ_1\Phi^{(k_2)}(t) - (\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n) HQ_2\Phi^{(k_2)}(x)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n \lim_{t\to\infty} \int_0^t g(t-x) HQ_1\Phi^{(k_2)}(x) dx - \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n \lim_{t\to\infty} \int_0^t g(t-x) dHQ_2\Phi^{(k_2)}(x) d(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n \frac{\int_0^\infty g(x)dx}{\mu_Y} - \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n \frac{\int_0^\infty g(x)dx}{\mu_Y} = \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n}{\mu_Y} \int_0^\infty g(x)dx.$$

Теорема 3* (Теорема Блекуэлла). Если функции распределения, задающие периодическую часть рассматриваемого процесса восстановления порядка (k_1, k_2), не является решетчатыми распределениями, то для любого $h \geq 0$

$$\lim_{t\to\infty} (S(t+h) - S(t)) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} ((c_0 + (\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n) HQ_1\Phi^{(k_2)}(t+h) - (\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n) HQ_2\Phi^{(k_2)}(t+h)) -$$

$$-(c_0 + (\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n)(HQ_1\Phi^{(k_2)}(t) - (\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n) HQ_1\Phi^{(k_2)}(t))) =$$

$$= (\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n) \lim_{t\to\infty} (HQ_1\Phi^{(k_2)}(t+h) - HQ_1\Phi^{(k_2)}(t)) -$$

$$-(\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n) \lim_{t\to\infty} (HQ_2\Phi^{(k_2)}(t+h) - HQ_2\Phi^{(k_2)}(t)) =$$

$$= \frac{(\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n)h}{\mu_Y} - \frac{(\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n)h}{\mu_Y} = \frac{(\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n)h}{\mu_Y}$$

при любых начальных распределений $F_1(t), F_2(t), \dots F_{k-1}(t)$.

Теорема 4*. Пусть наработки Y_i имеют конечные дисперсии и функции распределения $\Phi_i(t)$, задающие периодическую часть рассматриваемого процесса восстановления порядка (k_1, k_2), не являются решетчатыми распределениями. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}(S(t) - (\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n)\frac{t}{\mu_Y}) =$$

$$= c_0 + \frac{1}{2}(\frac{\sigma_Y^2}{\mu_Y^2} + 1)\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n - \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n \sum_{j=1}^{n}\mu_j}{\mu_Y} + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n. \quad (11)$$

Доказательство. В соответствии с (1) запишем

$$\lim_{t\to\infty}\left(HQ_1\Phi^{(k_2)}(t) - \frac{t}{\mu_Y}\right) = \frac{\sigma_Y^2}{2\mu_Y^2} - \frac{\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n \sum_{j=1}^{n}\mu_j}{\left(\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n\right)\mu_Y} + \frac{1}{2},$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(HQ_2\Phi^{(k_2)}(t) - \frac{t}{\mu_Y}\right) = \frac{\sigma_Y^2}{2\mu_Y^2} - \frac{\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n(\sum_{j=1}^{n}\mu_j + \mu_Y)}{(\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n)\mu_Y} + \frac{1}{2}.$$

Здесь учли, что для $E(Z_1)$ и $E(Z_2)$ случайных величин Z_1 и Z_2 с функциями распределения соответственно $Q_1(t)$, $Q_2(t)$

$$E(Z_1) = \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n \sum_{j=1}^{n} \mu_j, \quad E(Z_2) = \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n(\sum_{j=1}^{n} \mu_j + \mu_Y).$$

Далее

$$\lim_{t\to\infty}\left((\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n)V_1 - (\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n)\frac{t}{\mu_Y}\right) =$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n\sigma_Y^2}{2\mu_Y^2} - \frac{\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n \sum_{j=1}^{n}\mu_j}{\mu_Y} + \frac{\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n}{2},$$

$$\lim_{t\to\infty}\left((\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n)V_2(t) - (\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n)\frac{t}{\mu_Y}\right) =$$

$$= \frac{(\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n)\sigma_Y^2}{2\mu_Y^2} - \frac{\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n \sum_{j=1}^{n}\mu_j}{\mu_Y} - \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n + \frac{\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n}{2} =$$

Отсюда

$$\lim_{t\to\infty}(c_0 + (\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n)V_1 - (\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n)V_2(t) - (\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n)\frac{t}{\mu_Y} + (\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n)\frac{t}{\mu_Y}) =$$

$$= c_0 + \frac{\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n\sigma_Y^2}{2\mu_Y^2} - \frac{\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n \sum_{j=1}^{n}\mu_j}{\mu_Y} + \frac{\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n}{2} -$$

$$- \frac{(\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n)\sigma_Y^2}{2\mu_Y^2} + \frac{\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n \sum_{j=1}^{n}\mu_j}{\mu_Y} + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n - \frac{\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n}{2} =$$

$$= c_0 + \sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n \frac{\sigma_Y^2}{2\mu_Y^2} - \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n \sum_{j=1}^{n}\mu_j}{\mu_Y} + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n + \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n}{2} =$$

$$= c_0 + \frac{1}{2}(\frac{\sigma_Y^2}{\mu_Y^2} + 1)\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n - \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n \sum_{j=1}^{n}\mu_j}{\mu_Y} + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n.$$

С учетом (10) получаем формулу (11) асимптотического поведении функции затрат $S(t)$ процесса восстановления порядка (k_1, k_2) с учетом стоимости восстановлений.

Если в формуле (11) положить $c_0 = 0, c_i = 1,\ i = 1,2,\ldots$, то получим асимптотическое поведении функции $H(t)$ процесса восстановления порядка (k_1, k_2) [6; 12]

$$\lim_{t\to\infty}(H(t) - \frac{k_2}{\mu_Y}t) = k_1 - \frac{k_2}{2} - 2 + \frac{k_2\sigma_Y^2}{2\mu_Y^2} - k_2\frac{\mu_X}{\mu_Y} + \frac{1}{\mu_Y}\sum_{i=1}^{k_2} iE(Y_i).$$

Рассмотрим процесс восстановления с учетом стоимости восстановления, когда в процессе восстановления происходят полные восстановления ($F_i(t) = F_1(t)$, при отказе элемента он заменяется на элемент с той же функцией распределения $F_1(t)$, что и отказавший), но изменяются стоимости заменяемых элементов при отказах, $c_i = c_j$ при $i \equiv j \ (mod\ k_2),\ i,j \geq k_1$. Отметим, что этот случай характерен при эксплуатации.

Для этого случая из (11) следует

$$\lim_{t\to\infty}(S(t) - \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n}{k_2\mu_1}t) = c_0 + \frac{1}{2}(\frac{\sigma_1^2}{\mu_1^2} + 1)\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n - \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} nc_n}{k_2} + \sum_{i=1}^{k_1-1} c_i.$$

Альтернирущий процесс восстановления порядка (k_1, k_2)

В теории надежности при определении процесса восстановления предполагается, что восстановление производится за пренебрежимое время по сравнению со временем работы элемента до очередного отказа, т. е. мгновенно. На практике это часто не выполняется. Поэтому наряду со временем безотказной работы, не менее важным может иметь время простоя, время выяснения причин отказа, время самого восстановления. Здесь также, наряду с еще другими характеристиками, важное значение при эксплуатации имеет стоимость восстановления.

Пусть последовательностиm $(X_n), (Y_n)$ образуют два простых процесса восстановления с функциями распределения $F(t),\ G(t)$ соответственно. Последовательность (X_n, Y_n) называется простым альтернатирующим процессом восстановления [3; 4; 6].

Пусть Y_n – время восстановления после n-го отказа, X_n – время наработки элемента после $(n-1)$-го восстановления. Промежутки между очередными отказами (с учетом времени восстановления) образуют общий процесс восстановления с первой функцией распределения $F(t)$, второй $(F * G)(t)$. Промежутки между очередными восстановлениями образуют простой процесс восстановления с функцией распределения $(F * G)(t)$ [4; 6].

В соответствии с рассмотренными выше моделями процессов восстановления рассмотрим альтернатирующий процесс восстановления (X_n, Y_n) порядка (k_1, k_2), в котором последовательности $(X_n), (Y_n)$ образуют процессы восстановления порядка (k_1, k_2) с функциями распределения $F_n(t)$ и $G_n(t)$ [6]. При $k_1 = k_2 = 1$ имеем простой альтернатирующий процесс восстановления.

Если рассматривать введенный альтернатирующий процесс как последовательность $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n, \dots$, то приходим к процессу восстановления порядка $(2k_1 - 1, 2k_2)$.

Промежутки между очередными отказами (с учетом времени восстановления) образуют процесс восстановления порядка $(k_1 + 1, k_2)$ с функциями распределения

$$F_1(t), (G_1 * F_2)(t), \dots, (G_{n-1} * F_n)(t), \dots,$$

а промежутки между очередными восстановлениями образуют процесс восстановления порядка (k_1, k_2) с функциями распределения [6]

$$(F_n * G_n)(t).$$

Пусть c_n – стоимость n-го восстановления. Сюда, кроме стоимости самого восстановления, могут включаться убытки, штрафы при отказе, простое. Последовательность

$$(X_0, c_0), (X_1, Y_{1,}, c_1), \dots (X_n, Y_n, c_n), \dots$$

назовем альтернирующим процессом восстановления с учетом стоимости восстановлений.

Если последовательность (X_n, Y_n) – альтернатирующий процесс восстановления порядка (k_1, k_2) и $c_i = c_j$, если $F_i(t) = F_j(t)$, то имеем альтернатирующий процесс восстановления порядка (k_1, k_2) с учетом стоимости восстановлений [6]. Далее предполагается, что стоимость каждого восстановления фиксируется в момент окончания восстановления. Можно рассматривать и другие подходы, например, когда стоимость восстановлений фиксируется в моменты отказов.

Обозначим через Z_n случайное время окончания восстановления после $n-1$-го отказа. Тогда $Z_n = X_n +$ Y_n и $\Psi_n(t) = (F_n * G_n)(t)$ – функция распределения случайной величины Z_n.

Отметим еще раз, что пледовательность Z_n определяет процесс восстановления порядка (k_1, k_2), и тем самым для вычисления функции затрат $S(t)$ (средней стоимости восстановлений) рассматриваемого альтернирующего процесса мы переходим просто к процессу восстановления (Z_n, c_n) порядка (k_1, k_2) с учетом стоимости восстановлений. После чего, в соответствие с теоремами 1*–4*, можно выписать формулы асимптотического поведения функции затрат введенного альтернирующего процесса восстановления порядка (k_1, k_2).

Выпишем эти формулы:

$$S(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi^{(n)}(t),$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n}{\mu_p},$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t g(t-x)\,dS(x) = \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n}{\mu_p} \int_0^{\infty} g(x)\,dx$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(S(t+h) - S(t)\right) = \frac{\left(\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n\right) h}{\mu_p},$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(S(t) - \left(\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n \right) \frac{t}{\mu_p} \right) =$$

$$= c_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_p^2}{\mu_p^2} + 1 \right) \sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n - \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n \sum_{j=1}^{n} \mu_j}{\mu_p} + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n,$$

где

$$\mu_n = E(X_n) + E(Y_n), \mu_p = \sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} \mu_n \ \ \sigma_p = \sqrt{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} \left(\sigma^2(X_n) + \sigma^2(Y_n) \right)}.$$

Заключение

Многие важнейшие показатели работы технических, информационно вычислительных и многих других систем имеют случайный характер. Так, наряду со случайной величиной числа отказов, важной характеристикой в таких системах при проведении процессов восстановлкения (собенно в оптимизационных задачах по выбору стратегии восстановления) является стоимость восстановлений от начала эксплуатации до произвольного момента времени *t*.

В связи с этим в работе рассматривается расширение процесса восстановления на процесс восстановления с учетом стоимости восстановлений.

Для моделей процесса восстановления с изменяющимися стоимостями восстановлений и функциями распределения наработок получена формула линейно связывающая среднюю стоимость восстановлений (функцию затрат) с функциями восстановления двух хорошо изученных в теории вероятностей и математической теории надежности общих процессов восстановления.

Это дало возможность в рамках математической теории надежности простого переноса известных теорем об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ функции восстановления (среднего числа отказов) на функцию затрат в рассматриваемых моделях (с изменяющимися стоимостями восстановлений и функциями распределения наработок) процессов восстановления с учетом стоимости восстановлений.

Полученные теоремы обобщены на альтернирующий процесс восстановления с учетом стоимости восстановлений, когда еще учитывается случайное время проведения восстановлений.

Отметим, что полученные асимптотические формулы найдут применение в математической и эксплуатационной надежности ракетно-космической техники, электронно-вычислительных систем, систем электроснабжения, теплоснабжения, транспортных систем и многих других технических систем [14].

Еще отметим, что наряду с полученными формулами асимптотического поведения средней стоимости восстановлений будут важны и предельные теоремы для стоимости восстановлений (как случайной величины), аналогичные для числа отказов, полученные в [6; 9; 13; 15], а также нахождение дисперсии стоимости восстановлений в рассматриваемых моделях [16].

Библиографические ссылки

1. Кокс Д. Р, Смит В. Л. Теория восстановления. М. : Советское радио, 1967. 292 с.

2. Вопросы математической надежности / Е. Ю. Барзилович, Ю. К. Беляев, В. А. Кащтанов и др. М. : Радио и связь, 1983. 378 с.

3. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М. : Наука, 1965. 524 с.

4. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход : пер. с англ. М. :Радио и связь, 1988. 393 с.

5. Боровков А. А. Теория вероятностей. М. : Либроком, 2009. 652 с.

6. Вайнштейн И. И. Процессы и стратегии восстановления с изменяющимися функциями распределения в теории надежности. Красноярск : СФУ, 2016. 189 с.

7. Вайнштейн И. И., Шмидт О. Процессы восстановления с учетом стоимости восстановлений // Вопросы матеметического анализа : сб. науч. тр. Красноярск : КГТУ, 2007. С. 9–13.

8. Шмидт О. О. Обобщенная модель процесса восстановления в теории надежности использования информационных тезнологий : дис. … канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2008. 125 с.

9. Булинская Е. В. Асимптотическое поведение некоторых стохастических систем хранения // Современные проблемы математики и механики. 2015. Т. 10, № 3. С. 37–62.

10.Боровков А. А. Обобщенные процессы восстановления. М. : Либроком, 2020. 455 с.

11.Вайнштейн И. И, Вайнштейн В. И, Вейсов Е. А. О моделях процессов восстановления в теории надежности // Вопросы математического анализа : сб. науч. тр. 2003. № 6. С. 78–84.

12. Вайнштейн В. И. Математическое и программное обеспечение оптимизации проведения профилактических восстановлений при эксплуатации электронно-вычислительных систем : дис. … канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2006. 149 с.

13. Bulinskaya E. V. Limit theorems for generalized renewal processe // Theory of Probability and its Applications. 2018. Vol. 62, No. 1. P. 35–54.

14. Надежность технических систем / Е. В. Сугак, Н. В. Василенко, Г. Г. Назаров и др. Красноярск : МГП «Раско», 2001. 608 с.

15. Вайнштейн И. И., Михальченко Г. Е. Асимптотика распределения числа восстановлений в процессе восстановления порядка (k_1, k_2) // Вестник СибГАУ. 2012. № 2(42). С. 16–19.

16. Вайнштейн В. И. Дисперсия стоимости восстановлений и оптимизационные задачи в процессах восстановления технических и информационных систем // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021. Т. 9, № 2(33).

References

1. Koks D. R, Smit V. L. *Teoriya vosstanovleniya* [Restoration Theory.]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1967, 292 p.

2. Barzilovich E. Yu., Belyaev Yu. K., Kashchtanov V. A. et al. *Voprosy matematicheskoy nadezhnosti* [Problems of mathematical reliability]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1983, 378 p.

3. Gnedenko B. V., Belyaev Yu. K., Solov'ev A. D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical Methods in Reliability Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 524 p.

4. Baykhel't F., Franken P. *Nadezhnost' i tekhnicheskoe obsluzhivanie. Matematicheskiy podkhod* [Reliability and maintenance. Mathematical approach]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1988, 393 p.

5. Borovkov A. A. *Teoriya veroyatnostey* [Probability Theory]. Moscow, Librokom Publ., 2009, 652 p.

6. Vainshtein I. I. *Protsessy i strategii vosstanovleniya s izmenyayushchimisya funktsiyami raspredeleniya v teorii nadezhnosti* [Restoration processes and strategies with changing distribution functions in reliability theory]. Krasnoyarsk, 2016, 189 p.

7. Vainshtein I. I., Shmidt O. [Restoration processes taking into account the cost of restorations]. *Voprosy matemeticheskogo analiza*. Krasnoyarsk, 2007, P. 9–13 (In Russ.).

8. Shmidt O. O. *Obobshchennaya model' protsessa vosstanovleniya v teorii nadezhnosti ispol'zovaniya informatsionnykh teznologiy. Kand. dis*. [Generalized model of the recovery process in the theory of reliability of the use of information technologies. Cand. dis.]. Krasnoyarsk, 2008, 125 c.

9. Bulinskaya E. V. [Asymptotic Behavior of Some Stochastic Storage Systems]. *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki*. 2015, Vol. 10, No. 3, P. 37–62 (In Russ.).

10. Borovkov A. A. *Obobshchennye protsessy vosstanovleniya* [Generalized recovery processes]. Moscow, Librokom Publ., 2020, 455 p.

11. Vainshtein I. I, Vainshtein V. I, Veysov E. A. [On models of restoration processes in reliability theory]. *Voprosy matematicheskogo analiza.* 2003, No. 6, P. 78–84 (In Russ.).

12. Vainshtein V. I. *Matematicheskoe i programmnoe obespechenie optimizatsii provedeniya profilakticheskikh vosstanovleniy pri ekspluatatsii elektronno-vychislitel'nykh sistem. Kand. Dis.* [Mathematical and software support for optimizing the implementation of preventive restorations during the operation of electronic computing systems. Cand. dis.]. 2006, 149 p.

13. Bulinskaya E.V. Limit theorems for generalized renewal processe. *Theory of Probability and its Applications*. 2018, Vol.62, No. 1, P. 35–54.

14. Sugak E. V., Vasilenko N. V., Nazarov G. G. et al. *Nadezhnost' tekhnicheskikh sistem* [Reliability of technical systems]. Krasnoyarsk, Rasko publ., 2001, 608 p.

15. Vaynshteyn I. I., Mikhal'chenko G. E. [Asymptotics of the distribution of the number of restorations in the process of order restoration (k_1, k_2)]. *Vestnik SibGAU.* 2012, No. 2(42), P. 16–19 (In Russ.).

16. Vainshtein V. I. [Dispersion of the cost of restorations and optimization problems in the processes of restoration of technical and information systems]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii*. 2021, Vol. 9, No. 2(33) (In Russ.).

Вайнштейн Виталий Исаакович – кандидат физико-математических наук, доцент, руководитель научно-учебной лаборатории информационной безопасности; Сибирский федеральный университет. E-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru.

Вайнштейн Исаак Иосифович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры ПМиКБ; Сибирский федеральный университет. E-mail: isvain@mail.ru.

Сафонов Константин Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: safonovkv@rambler.ru.

Vainshtein Vitaly Isaakovich – Cand. Sc., associate professor, head of the scientific and educational laboratory of information security; Siberian Federal University. E-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru.

Vainshtein Isaak Iosifovich – Cand. Sc., associate professor, Department of Applied Mathematics and Computer Security; Siberian Federal University. E-mail: isvain@mail.ru.

Safonov Konstantin Vladimirovich – Dr. Sc., Professor, Head of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: safonovkv@rambler.ru.