

УДК 534.11 + 539.3

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-4-708-720

**Для цитирования:** Рабецкая О. И., Кудрявцев И. В., Митяев А. Е. Аналитический расчет жесткости опор балки для обеспечения первой собственной частоты колебаний и критической силы // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 4. С. 708–720. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-4-708-720.

**For citation:** Rabetskaya O. I., Kudryavtsev I. V., Mityaev A. E. [Beam support stiffness analytic solution for the first eigenfrequency and critical force]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 4, P. 708–720. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-4-708-720.

## Аналитический расчет жесткости опор балки для обеспечения первой собственной частоты колебаний и критической силы

О. И. Рабецкая<sup>1\*</sup>, И. В. Кудрявцев<sup>2</sup>, А. Е. Митяев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет  
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79

\*E-mail: olga\_rabez@mail.ru

*В работе рассматривается проблема обеспечения требуемой первой собственной частоты изгибных колебаний балки при действии продольной силы за счет введения необходимой жесткости опор. Рассматривая и объединяя уравнения свободных колебаний балки и уравнения, описывающие потерю ее устойчивости, было получено условие работоспособности на основе обеспечения минимально заданного значения первой собственной частоты колебаний с учетом действия продольной силы. При этом достижение нулевой частоты собственных колебаний соответствует потере устойчивости, что позволяет решать обе задачи. Данная задача математически сложна и в известной научной литературе ее решение обычно приводится только в графическом или табличном виде. Проблема заключается в нелинейной зависимости коэффициентов опор от жесткости при колебаниях и потере устойчивости. Для решения этой проблемы использовалась аппроксимация нелинейных зависимостей коэффициентов опор методом наименьших квадратов и получения квадратичных аппроксимирующих функций. В результате задача определения требуемой жесткости опор свелась к разрешающему алгебраическому уравнению четвертой степени, для которого существует аналитическое решение. Полученное решение позволяет определить жесткость опор балки, которая обеспечивает требуемое значение первой собственной частоты колебаний балки и ее первой критической нагрузки в виде внешней сжимающей силы или температурных воздействий. Замена нелинейных зависимостей коэффициентов опор от жесткости опор более простыми квадратичными функциями привела к относительно простым аналитическим зависимостям, которые позволяют преобразовывать разрешающее уравнение в соответствии с конкретной решаемой задачей. Вместе с тем, квадратичные функции повлияли на погрешность расчета, для снижения которой было произведено ограничение рассматриваемого диапазона жесткостей опор и разбиение его на три зоны. Проведено сравнение результатов расчетов по предложенному аналитическому решению с численными расчетами методом конечных элементов. Сравнение результатов расчета показало погрешность не более 5 % для рассматриваемого диапазона жесткостей опор, что вполне достаточно для инженерных расчетов балочных конструкций. Для ограничения погрешности результата рекомендуется, чтобы жесткости обоих опор были равны или же одного порядка.*

*Ключевые слова:* балка, упругие опоры, колебания, устойчивость, первая собственная частота, первая критическая сила, аналитическое решение.

## Beam support stiffness analytic solution for the first eigenfrequency and critical force

O. I. Rabetskaya<sup>1\*</sup>, I. V. Kudryavtsev<sup>2</sup>, A. E. Mityaev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

<sup>2</sup>Siberian Federal University  
79, Svobodniy prospekt, Krasnoyarsk, Russian Federation, 660041

\*E-mail: olga\_rabez@mail.ru

*The work discusses the problem of providing the required first natural frequency of bending vibrations of the beam under the action of a longitudinal force by introducing the necessary stiffness of the supports. Considering and combining the equations of free vibrations of the beam and the equations describing the loss of its stability, the operability condition was obtained because of providing a minimum given value of the first natural frequency of vibrations considering the action of the axial force. In this case, the achievement of the zero frequency of natural vibration corresponds to the loss of stability, which allows solving both problems. This problem is mathematically complex, and in the known scientific literature its solution is usually given only in graphical or tabular form. The problem lies in the nonlinear dependence of the coefficients of supports on the stiffness during vibrations and loss of stability. To solve this problem, the approximation of the nonlinear coefficients of the supports by the least squares method and the obtaining of quadratic approximating functions was used. As a result, the problem of determining the required stiffness of the supports brought to a fourth-degree resolving algebraic equation, for which an analytic solution exists. The obtained solution allows the stiffness of the beam supports, which provides the required value of the first natural frequency of vibrations of the beam and its first critical load in the form of external compressive force or temperature effects. Replacing the nonlinear dependencies of the support coefficients with the stiffness of the supports with simpler quadratic functions led to relatively simple analytic dependencies that allow the resolution equation to be transformed according to the particular problem being solved. At the same time, quadratic functions influenced the calculation error, to reduce which, the range of the support stiffness under consideration was limited and divided into three zones. The results of calculations using the proposed analytical solution were compared with numerical calculations using finite element method. The comparison of the calculation results showed an error of not more than 5 % for the considered range of stiffness of the supports, which is quite enough for engineering calculations of beam structures. To limit the error of the result, it is recommended that the stiffnesses of both supports be equal or of the same order.*

*Keywords: beam, elastic supports, vibrations, stability, first eigenfrequency, first critical force, analytical solution.*

### Введение

Протяженные балочные конструкции, работающие в условиях вынужденных колебаний и подвергающиеся действию сжимающих сил, должны соответствовать определенным условиям работоспособности [1; 2]. Одними из таких условий работоспособности являются обеспечение значений первой собственной частоты колебаний и первой критической силы:

$$f_1 \geq [f], P_{cr1} \geq [P], \quad (1)$$

где  $[f]$  и  $[P]$  – допускаемые значения частоты и силы.

Постановка задачи колебаний и устойчивости балки сводится к дифференциальным уравнениям с заданными граничными условиями, которые определяются условиями закрепления балки. Для простых условий закреплений решение такой задачи тривиально и его можно найти в научной литературе и справочниках по динамике [3–34]. Однако в существующей литературе опоры имеют идеализированные модели: шарниры, жесткая заделка и др. В динамике балок принято

учитывать опорные закрепления в виде так называемых коэффициентов опор, которые получаются из решения дифференциальных уравнений динамического состояния и для простых случаев закрепления, когда жесткость равна нулю или же бесконечности, их значения приведены в научной литературе. Промежуточные значения жесткостей опор и соответствующие им значения коэффициентов опор упоминаются редко и обычно в виде графиков или таблиц [35–40]. В действительности же, опоры практически всегда будут обладать некоторой конечной жесткостью, которая будет влиять как на значение первой частоты колебаний, так и на первую критическую силу. Учет жесткости опор усложняет решение задачи динамики балки, поскольку приводит к трансцендентному уравнению, для которого уже нет явного аналитического решения.

Целью данной работы является получение аналитического решения задачи обеспечения значений первой собственной частоты колебаний и первой критической силы путем определения необходимой жесткости опорных закреплений. Для этого получены аппроксимирующие аналитические зависимости коэффициентов опор при колебаниях и потере устойчивости от жесткости опор и получено разрешающее уравнение, решение которого определяет искомую жесткость опор, которая обеспечит значения первой собственной частоты колебаний и критической силы для двухопорной балки.

## 1. Уравнения динамического поведения балки

Рассмотрим математическую постановку задачи изгибных колебаний и форм потери устойчивости для двухопорной балки с упругими шарнирами и получим основные уравнения ее динамического состояния.

### 1.1. Получение разрешающего уравнения

Пусть прямолинейная балка, закрепленная в шарнирных опорах с некоторой жесткостью  $k_1$ ,  $k_2$ , подвергается внешнему воздействию в виде продольной силы  $P$  (рис. 1). Динамическое состояние балки будем оценивать первой частотой собственных изгибных колебаний и первой критической силой.

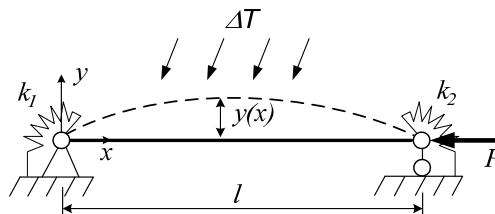


Рис. 1. Расчетная схема балки с упругими опорами

Fig. 1. Spring-hinged beam

Уравнение свободных изгибных колебаний балки с учетом действия сжимающей продольной силы  $P$  имеет вид [3–26]:

$$EJ_{\min} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $y = y(x, t)$  – функция прогиба;  $E$  – модуль Юнга материала;  $J_{\min}$  – минимальный момент инерции поперечного сечения;  $m$  – удельная масса,  $m = \rho S$ , где  $\rho$  – плотность материала;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $P$  – продольная сила.

Продольная сила  $P$ , при достижении ей некоторого критического значения, может привести к потере устойчивости [27–34]. Уравнение устойчивости балки имеет вид:

$$EJ_{\min} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения свободных колебаний (2) для первой частоты собственных колебаний при  $P = 0$  имеет вид

$$f_1 = \frac{\alpha^2}{2\pi l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ_{\min}}{m}}, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – коэффициент опор для первой собственной частоты колебаний, который учитывает влияние способа закрепления балки.

Решение задачи устойчивости (3) для первой критической силы запишется как

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\mu^2 \cdot l^2}, \quad (5)$$

где  $\mu$  – коэффициент опор (коэффициент приведения длины) для задачи устойчивости также определяется способом закрепления.

Задача устойчивости связана со свободными колебаниями продольной силой  $P$ , поскольку действие этой силы будет изменять весь спектр частот балки. Данное влияние описывается уравнением Галефа [41; 42]:

$$f_{1(P>0)} = f_{1(P=0)} \cdot \sqrt{1 - \frac{P}{P_{cr1}}}, \quad (6)$$

где  $f_1(P > 0)$  – первая частота свободных колебаний при действии продольной силы  $P$ ;  $f_1(P = 0)$  – первая частота свободных колебаний при отсутствии продольной силы  $P$ ;  $P_{cr1}$  – первая критическая сила.

Учтем возможное воздействие температуры на балку (рис. 1), для этого разложим продольную силу на две компоненты, температурную и силовую:

$$P = P_{\Delta T} + P_F = \alpha_t \cdot \Delta T \cdot ES + P_F, \quad (7)$$

где  $P_{\Delta T}$  – продольная сила от изменения температуры;  $P_F$  – внешнее силовое воздействие;  $\alpha_t$  – коэффициент температурного расширения материала балки.

Подставляя (4), (5), (7) в уравнение (6), получим уравнение для первой частоты собственных колебаний балки, учитывающее температурное и силовое воздействия и способ закрепления в виде

$$f_{1(P>0)} = \left(\frac{\alpha}{\pi l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4m} \left[ \pi^2 EJ_{\min} - \mu^2 \cdot l^2 \cdot (\alpha_t \cdot \Delta T \cdot ES + P_F) \right]}. \quad (8)$$

Если выражение (8) будет равно нулю, то это свидетельствует о динамической потере устойчивости и позволяет использовать данное выражения сразу для двух целей: обеспечение частоты собственных колебаний и критической силы. Значения коэффициентов опор  $\alpha$  и  $\mu$  для распространенных случаев закреплений и требуемой частоты собственных колебаний или критической силы можно найти в различных справочниках по динамике [35–40] или рассчитать из уравнений динамического состояния. В данной работе будем рассматривать только первую собственную частоту колебаний и первую критическую силу.

### 1.2. Учет влияния жесткости опор

В существующей научной литературе коэффициенты опор даны для небольшого числа простых случаев идеальных закреплений, при которых жесткость опор в разных направлениях равна нулю или бесконечности: шарнир, заделка и др. В общем случае закрепления балки в опорах с некоторой конечной жесткостью (рис. 1), коэффициенты опор будут их функциями:

$$\alpha = \alpha(k_1, k_2), \quad \mu = \mu(k_1, k_2). \quad (9)$$

Выразим коэффициенты опор через относительные жесткости  $C_i$ :

$$C_1 = k_1 \frac{l}{EJ_{\min}}, \quad C_2 = k_2 \frac{l}{EJ_{\min}}. \quad (10)$$

Тогда для расчета необходимо определить функции:

$$\alpha = \alpha(C_1, C_2), \quad \mu = \mu(C_1, C_2). \quad (11)$$

В справочниках функции (11) обычно приводятся в табличном или графическом виде, поскольку данные зависимости сильно нелинейные и не могут быть выражены простой аналитической зависимостью. Для решения этой проблемы в работе [43] были получены аналитические функции (11) для ограниченных диапазонов изменения жесткостей  $C_1, C_2$ . Используем эти результаты для решения задачи определения жесткости опор балки и обеспечения заданных значений ее первой собственной частоты колебаний и первой критической силы.

## 2. Определение требуемой жесткости опор

Жесткость опор, обеспечивающая первую частоту колебаний и первую критическую силу, является неявной переменной в уравнении (8), для определения которой необходимо подставить в аналитическом виде функции (11) и разработать методику решения полученного разрешающего уравнения.

### 2.1. Получение разрешающего уравнения

Преобразуем уравнение (8) таким образом, чтобы из него можно было выразить искомую жесткость опор и разработать метод ее нахождения:

$$\left( \frac{\alpha(C_1, C_2)}{\pi l} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4m} \left[ \pi^2 EJ_{\min} - \mu^2(C_1, C_2) \cdot l^2 \cdot (\alpha_t \cdot \Delta T \cdot ES + P_F) \right]} = f_1, \quad (12)$$

где  $f_1$  – требуемое значение первой собственной частоты колебаний.

Преобразуем уравнение (12) к виду

$$A - \mu^2(C_1, C_2) \cdot B = \frac{C}{\alpha^4(C_1, C_2)}, \quad (13)$$

где

$$A = \pi^2 EJ_{\min}; \quad B = l^2 \cdot (\alpha_t \cdot \Delta T \cdot ES + P_F); \quad C = 4m [f_1]^2 \pi^4 l^4. \quad (14)$$

Решение уравнения (13) относительно жесткостей  $C_i$  требует наличия не самих функций коэффициентов опор (11), а их 2-й и 4-й степеней. Данные функции получим методом наименьших квадратов [44; 45]. Для этого на основе исходных функций (11) создадим набор данных для ограниченного диапазона жесткостей  $C = 0 - 1000$ , возведем их в соответствующую степень и вновь аппроксимируем полученные результаты квадратичными функциями вида

$$\mu^2(C_1, C_2) = a_1 \cdot (C_1^2 + C_2^2) + a_2 \cdot (C_1 + C_2) + a_3, \quad (15)$$

$$\alpha^4(C_1, C_2) = b_1 \cdot (C_1^2 + C_2^2) + b_2 \cdot (C_1 + C_2) + b_3. \quad (16)$$

С целью повышения точности аппроксимации, разделим рассматриваемый диапазон жесткостей на три зоны. Полученные значения коэффициентов в уравнениях (15), (16) приведены в табл. 1.

Уравнение (13) имеет неопределенность решения в виде бесконечного сочетания жесткостей  $C_1$  и  $C_2$ , которые удовлетворяют этой задаче. Для устранения данной определенности примем  $C_2 = n \cdot C_1$ , тогда вместо (15), (16) получим

$$\mu^2(C_1) = a_1 \cdot (C_1^2 + n^2 \cdot C_1^2) + a_2 \cdot (C_1 + n \cdot C_1) + a_3, \quad (17)$$

$$\alpha^4(C_1) = b_1 \cdot (C_1^2 + n^2 \cdot C_1^2) + b_2 \cdot (C_1 + n \cdot C_1) + b_3. \quad (18)$$

Таблица 1

Значения коэффициентов аппроксимирующих функций

Зона	Коэффициенты функции $\mu^2$			Коэффициенты функции $\alpha^4$		
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
I: C = 0 – 10	0,0053	-0,0855	1	-0,725	17,29	97,4
II: C = 10 – 100	1,21E-05	-1,82E-03	0,386	-1,84E-02	2,945	243
III: C = 100 – 1000	1,3E-08	-1,93E-05	0,2664	-4,5E-05	0,0675	451,5

Для краткости записи примем обозначения:

$$a_{1n} = a_1 \cdot (1 + n^2); \quad a_{2n} = a_2 \cdot (1 + n), \quad (19)$$

$$b_{1n} = b_1 \cdot (1 + n^2); \quad b_{2n} = b_2 \cdot (1 + n). \quad (20)$$

Во избежание путаницы в обозначениях, далее обозначим искомую жесткость как  $x$ . Тогда с учетом (17)–(20) уравнение (13) примет вид

$$A - (a_{1n}x^2 + a_{2n}x + a_3) \cdot B = \frac{C}{b_{1n}x^2 + b_{2n}x + b_3}. \quad (21)$$

Введем новые обозначения коэффициентов:

$$c_1 = -Ba_1 \cdot (1 + n^2); \quad c_2 = -Ba_2 \cdot (1 + n); \quad c_3 = -Ba_3 + A; \quad (22)$$

$$d_1 = \frac{b_1 \cdot (1 + n^2)}{C}; \quad d_2 = \frac{b_2 \cdot (1 + n)}{C}; \quad d_3 = \frac{b_3}{C}.$$

В результате получим разрешающее уравнение задачи 4-й степени в виде

$$c_1x^2 + c_2x + c_3 = \frac{1}{d_1x^2 + d_2x + d_3} \quad (23)$$

или

$$c_1d_1x^4 + (c_1d_2 + c_2d_1)x^3 + (c_1d_3 + c_2d_2 + c_3d_1)x^2 + (c_2d_3 + c_3d_2)x + (c_3d_3 - 1) = 0. \quad (24)$$

Решение алгебраического уравнения 4-й степени (24) позволит определить искомое значение жесткости опор, которым будет один из его 4-х корней.

## 2.2. Аналитическое решение разрешающего уравнения

Как известно, 4-я степень уравнения является наивысшей, для которой существуют аналитические методы решения. В данной работе для решения разрешающего уравнения (24) использовался метод, разработанный Ю. А. Несмеевым в работах [46; 47]. Согласно этому методу, преобразуем уравнение (24) так, чтобы коэффициент при старшей степени стал равным единице:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (25)$$

где

$$a_3 = \frac{c_1d_2 + c_2d_1}{c_1d_1}; \quad a_2 = \frac{c_1d_3 + c_2d_2 + c_3d_1}{c_1d_1}; \quad a_1 = \frac{c_2d_3 + c_3d_2}{c_1d_1}; \quad a_0 = c_3d_3 - 1. \quad (26)$$

Находим коэффициенты вспомогательного кубического уравнения:

$$a = 1; \quad b = -a_2; \quad c = a_1a_3 - 4a_0; \quad d = -a_1^2 - a_0a_3^2 + 4a_0a_2. \quad (27)$$

Решаем это кубическое уравнение в канонической форме, для этого находим его коэффициенты:

$$p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}; \quad q = \frac{(ab)^3}{27} - \frac{bc}{6a^2} + \frac{d}{2a}; \quad k = p^3 + q^2. \quad (28)$$

Рассчитываем коэффициент  $r$  как

$$r = \text{sign}(q) \cdot \sqrt{|p|}. \quad (29)$$

Далее находим характерный угол  $\varphi$ :

$$\varphi = \arctg\left(\sqrt{\frac{r^6}{q^2} - 1}\right). \quad (30)$$

Из трех корней кубического уравнения выбираем первый:

$$u_1 = 2r \cdot \cos\left(\frac{\pi - \varphi}{3}\right) - \frac{b}{3}. \quad (31)$$

Далее решение сводится к двум квадратным уравнениям, вспомогательные коэффициенты которых равны

$$d_1 = \frac{a_3^2}{4} + u_1 - a_2; \quad d_2 = \frac{u_1^2}{4} - a_0; \quad d_3 = a_3 u_1 - 2a_1. \quad (32)$$

Первое квадратное уравнение имеет вид

$$k_1 x^2 + k_2 x + k_3 = 0, \quad (33)$$

где

$$k_1 = 1; \quad k_2 = \frac{a_3}{2} + \sqrt{d_1}; \quad k_3 = \frac{u_1}{2} - \sqrt{d_2}. \quad (34)$$

Его корни равны

$$x_1 = \frac{1}{2k_1} \left( -k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1 k_3} \right). \quad (35)$$

Аналогично решаем второе квадратное уравнение:

$$l_1 x^2 + l_2 x + l_3 = 0, \quad (36)$$

где

$$l_1 = 1; \quad l_2 = \frac{a_3}{2} - \sqrt{d_1}; \quad l_3 = \frac{u_1}{2} + \sqrt{d_2}. \quad (37)$$

Корни равны:

$$x_4 = \frac{1}{2l_1} \left( -l_2 \pm \sqrt{l_2^2 - 4l_1 l_3} \right). \quad (38)$$

Искомая жесткость опор будет наименьшей из положительных корней (35) и (38):

$$C_1 = x = \min(x_i : x_i > 0, i = 1, 2, 3, 4). \quad (39)$$

Абсолютные жесткости опор согласно (10) определяются, как

$$k_1 = C_1 \cdot \frac{EJ_{\min}}{l}; \quad k_2 = n \cdot C_1 \cdot \frac{EJ_{\min}}{l}. \quad (40)$$

Жесткости опор (40) будут обеспечивать требуемые значения коэффициентов опор (11) и, следовательно, значение первой собственной частоты балки и/или первой критической силы. Для автоматизации расчетов по приведенной выше методике была написана программа для ЭВМ.

### 3. Пример расчета

В известной научной литературе задача расчета колебаний или устойчивости балки с учетом жесткости опор имеет весьма ограниченное распространение и зачастую представлена в общем виде или в виде численных расчетов, что затрудняет сравнение. Поэтому методика была верифицирована путем сравнения результатов расчета с численным решением методом конечных элементов в программе Ansys. Использовалась балочная модель из конечных элементов типа BEAM189, жесткость опор задавалась конечными элементами COMBIN14.

Расчетная схема балки показана на рис. 1 и имеет следующие характеристики: длина  $l = 0,5$  м; круглое поперечное сечение диаметром  $D = 25$  мм; материал – сталь  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, КТР  $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5}$  1/°С. Шарнирные опоры балки имеют равную жесткость:  $k = k_1 = k_2$  или  $C = C_1 = C_2$  (10). Необходимо определить жесткость опор, которая обеспечит заданное значение первой собственной частоты колебаний  $f_1$  при вариации температуры  $\Delta T$ .

При заданных геометрических параметрах и материале балки, а также при отсутствии продольной силы такая конструкция обеспечивает первую собственную частоту  $f_1 = 200,7$  Гц для жесткости опор  $C = 0$  и  $f_1 = 455$  Гц для  $C = \infty$ . Зададим значение  $f_1 = 300$  Гц и будем поднимать температуру с шагом 50 °С, компенсируя падение значения первой собственной частоты с помощью увеличения жесткости опор.

Результаты расчетов сведены в табл. 2, а на рис. 2 показан один из вариантов расчета в программе Ansys. В табл. 2, помимо заданной температуры, приведено эквивалентное значение продольной силы в балке  $P_{\text{экв}}$ . Сравнение результатов расчета выполнено по значению первой собственной частоты колебаний балки при заданной температуре и жесткости опор.

Таблица 2

Результаты расчетов

Исходные данные расчета							
$f_1$ , Гц	300						
$\Delta T$ , °С	0	50	100	150	200	250	282
$P_{\text{экв}}$ , кН	0	58,9	117,8	176,7	235,6	294,5	332,2
Результаты по предлагаемой методике							
$C$	4,26	5,97	8,47	21,37	34,72	51,11	1000
$k$ , Н*М	33296	46638	66195	166975	271287	399301	7812500
Результаты МКЭ							
$f_1$ , Гц	295,9	289,4	284,4	311,6	304,2	286,4	296,5
$\Delta f_1$ , %	1,37	3,53	5,2	-3,87	-1,4	4,53	1,17

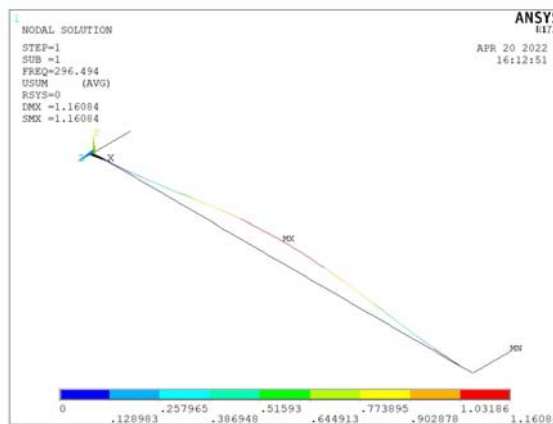


Рис. 2. Пример расчета при  $\Delta T = 282$  °С и  $C = 1000$

Fig. 2. Example of calculation at  $\Delta T = 282$  °С and  $C = 1000$



Полученные результаты показывают хорошую сходимость по всему рассмотренному диапазону жесткостей опор.

#### 4. Обсуждение

В работе получено аналитическое решение задачи определения жесткостей опор балки для обеспечения значений ее первой собственной частоты колебаний и первой критической силы. Постановка задачи свелась к алгебраическому уравнению четвертого порядка (24), решение которого можно графически представить как пересечение двух кривых, составленных из разных частей исходного уравнения (13), как показано на рис. 3. Первая положительная точка пересечения функций определяет требуемую жесткость опор  $C_1$  (39).

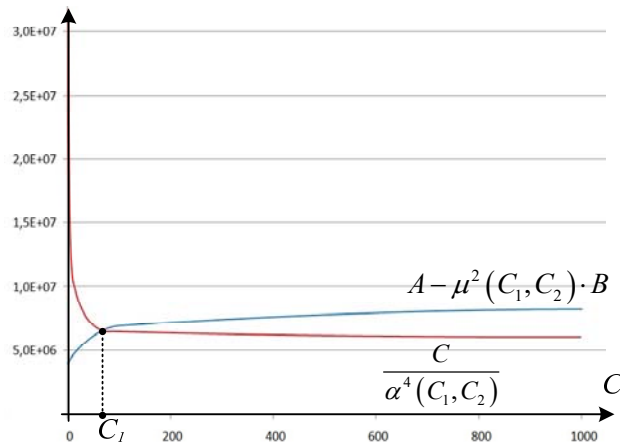


Рис. 3. Графическая интерпретация решения

Fig. 3. Graphical interpretation of the solution

Точность расчета жесткости сильно зависит от точности аппроксимирующих зависимостей, что весьма сложно обеспечить применением квадратичных функций (15), (16), поскольку исходные кривые (11) сильно нелинейные. Необходимое повышение точности достигнуто разбиением диапазона жесткостей на три зоны, аналогично тому, как это было сделано в работе [43].

Особенностью решения по предложенной методике является необходимость задания ненулевого значения осевой силы (7), поскольку в противном случае в разрешающем уравнении (23) левая часть окажется равной нулю и вместо уравнения 4-й степени мы получим квадратное уравнение, решение которого гораздо проще, но невозможно по предлагаемой методике. То же касается и частоты  $f_1$ , нулевое значение приведет к делению на ноль в правой части уравнения (23). При необходимости такой расчет может быть проведен, если задать малое значение соответствующей величины.

Оценить погрешность предложенного аналитического решения в целом весьма затруднительно, поскольку каждая из аппроксимирующих функций (15), (16) имеет свои отклонения по диапазону, которые накладываются друг на друга при решении разрешающего уравнения (23). Проведенные сравнительные расчеты с вариативностью значений продольной силы и требуемого значения первой собственной частоты колебаний показали точность расчета 5 %, что вполне приемлемо для инженерных расчетов в первом приближении. Погрешность существенно увеличивается при  $n > 10$ , т. е. жесткости опор сильно различаются между собой.

Полученные результаты могут использоваться не только для обеспечения изгибной формы колебаний и потери устойчивости балки, но и для других форм, а также второй и последующих мод колебаний и потери устойчивости.

### **Заключение**

В работе получено аналитическое решение задачи определения жесткостей опор балки для обеспечения значений первой собственной частоты колебаний и критической силы. Использование метода наименьших квадратов для аппроксимации зависимости коэффициентов опор от их жесткости позволило свести задачи с математической точки зрения к решению алгебраического уравнения четвертого порядка. Погрешность расчетов составляет не более 5 %, что вполне приемлемо для прикладных инженерных расчетов балочной конструкции.

### **Благодарности**

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта № 20-48-242922.

### **Acknowledgements**

The research was funded by RFBR, Krasnoyarsk Territory and Krasnoyarsk Regional Fund of Science, project number 20-48-242922.

### **Библиографические ссылки**

1. Некоторые аспекты моделирования динамики трансформируемых космических конструкций / Ц. Джан, В. Н. Зимин, А. В. Крылов, С. А. Чурилин // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20, № 1. С. 68–73. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-1-68-73.
2. Кудрявцев И. В. Обеспечение динамического состояния прямолинейных волноводных трактов при нагреве с помощью расстановки опор // Вестник Московского авиационного института. 2021. Т. 28, № 4. С. 92–105. DOI: 10.34759/vst-2021-4-92-105.
3. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М. : Машиностроение, 1985. 472 с.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний. М. : Дрофа, 2004. 591 с.
5. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М. : Наука, 1988. 328 с.
6. Ильин М. М., Колесников К. С., Саратов Ю. С. Теория колебаний. М. : МГТУ, 2001. 272 с.
7. Яблонский А. А., Норейко С. С. Курс теории колебаний. СПб. : Лань, 2003. 254 с.
8. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М. : Наука, 1991. 256 с.
9. Блехман И. И. Вибрационная механика. М. : Физматлит, 1994. 400 с.
10. Клаф В. К. Динамика сооружений. М. : Стройиздат, 1979. 320 с.
11. Доев В. С. Поперечные колебания балок. М. : КНОРУС, 2016. 412 с.
12. Balachandran B. Vibrations. Toronto: Cengage Learning, 2009. 737 p.
13. Benaroya H., Nagurka M., Han S. Mechanical vibration. CRC Press: London, 2017. 602 p.
14. Leissa A. W. Vibration of continuous systems, McGraw-Hill: New York, 2011. 524 p.
15. Bottega W. J. Engineering vibrations. CRC Press: New York, 2006. 750 p.
16. Meirovitch L. Fundamentals of vibrations. McGraw-Hill, Book Co: New York, 2001. 826 p.
17. Clough R. E. Dynamics of Structures. McGraw-Hill College: New York, 1995. 752 p.
18. Shabana A. S. Theory of vibration. Springer-Verlag: New York, 2019. 382 p.
19. Geradin M., Rixen D. J. Mechanical vibrations. John Wiley & Sons: London, 2015. 617 p.
20. Rao S. Mechanical vibrations. Pearson Education Limited: London, 2018. 1295 p.
21. Hagedorn P. Vibrations and waves in continuous mechanical systems. John Wiley & Sons: New Jersey, 2007. 388 p.
22. Kelly S. G. Mechanical vibrations. Theory and applications. Cengage Learning: NY, 2012. 896 p.
23. Rades M. Mechanical vibrations II. Printech Publisher: Turin, 2010. 354 p.
24. Inman D. J. Engineering vibration, Pearson Education: NJ, 2014. 720 p.
25. Jazar R. N. Advanced vibrations. A modern approach. Springer: New York, 2013. 695 p.
26. Kelly S. G. Advanced vibration analysis. CRC Press: New York, 2007. 650 p.

27. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М. : Наука, 1971. 807 с.
28. Алфутов Н. А., Колесников К. С. Устойчивость движения и равновесия. М. : МГТУ, 2003. 256 с.
29. Farshad M., Stability of Structures. Elsevier Science B. V.: Amsterdam, 1994. 434 p.
30. Jerath. S., Structural Stability Theory and Practice: Buckling of Columns, Beams, Plates, and Shells. John Wiley & Sons: Chichester, 2020. 672 p.
31. Timoshenko S. P., Gere J. M., Theory of Elastic Stability. Dover Publications: New York, 2009. 560 p.
32. Thomsen J. J. Vibrations and stability. New York, 2003. 420 p.
33. Yoo C. H. Stability of structures. Elsevier: London, 2011. 529 p.
34. Ziemian R. D., Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures. JohnWiley&Sons: NY, 2010. 1117 p.
35. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М. : Высшая школа, 1980. 408 с.
36. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3. М. : Машиностроение, 1988. 567 с.
37. Коренев Б. Г. Справочник по динамике сооружений. М. : Стройиздат, 1972. 511 с.
38. Уманский А. А. Справочник проектировщика. Т. 2. М. : Стройиздат, 1973. 415 с.
39. Blevins R. D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. John Wiley & Sons, Ltd: Chichester, 2016. 458 p.
40. Wang C. M. Exact solutions for buckling of structural members. CRC Press: New York, 2005, 212 p.
41. Galef A. E. Bending frequencies of compressed beams // Journal of the Acoustical Society of America. 1968. Vol. 44(2). P. 643. DOI: 10.1121/1.1911144.
42. Bokaian A. Natural frequencies of beams under compressive axial loads // Journal of Sound and Vibration. 1988. Vol. 126(1). P. 49–65. DOI: 10.1016/0022-460X(88)90397-5.
43. Кудрявцев И. В., Рабецкая О. И., Митяев А. Е. Аппроксимация значений коэффициентов опор балки при колебаниях и потери устойчивости // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 461–474.
44. Дрейпер Н. Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М. : Вильямс, 2016. 912 с.
45. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. М. : URSS, 2014. 352 с.
46. Несмеев Ю. А. Об одном подходе к решению алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 26–30.
47. Несмеев Ю. А. Развитие одного подхода к решению алгебраического уравнения 4-й степени // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2013. № 4(24). С. 29–38.

## References

1. Zhang Z., Zimin V. N., Krylov A. V., Churilin S. A. [The definite questions of simulation of transformable space structures dynamics]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2019, Vol. 20, No. 1, P. 68–73 (In Russ.). DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-1-68-73.
2. Kudryavtsev I. V. Ensuring dynamic state of straight waveguide paths at heating by supports arrangement. *Aerospace MAI Journal*. 2021, Vol. 28, №. 4, P. 92–105. DOI: 10.34759/vst-2021-4-92-105. (In Russ.).
3. Timoshenko S. P., Yang D. Kh., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibrations in Engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985, 472 p.
4. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow, Drofa Publ., 2004, 591 p.
5. Zhuravlev V. F., Klimov D. M. *Prikladnye metody v teorii kolebaniy* [Applied methods in vibration theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 328 p.
6. Il'in M. M., Kolesnikov K. S., Saratov Yu. S. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow, MGTU Publ., 2001, 272 p.

7. Yablonskiy A. A., Noreyko S. S. *Kurs teorii kolebaniy* [Oscillation theory course]. Sankt-Peterburg, Lan' Publ., 2003, 254 p.
8. Panovko Ya. G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy*. [Introduction to the theory of mechanical Vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 256 p.
9. Blekhman I. I. *Vibratsionnaya mekhanika* [Vibration mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994, 400 p.
10. Klaf V. K. *Dinamika sooruzheniy* [Dynamics of structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1979, 320 p.
11. Doev V. S. *Poperechnye kolebaniya balok* [Transverse vibrations of beams]. Moscow, KNORUS Publ., 2016, 412 p.
12. Balachandran B. *Vibrations*. Toronto: Cengage Learning, 2009. 737 p.
13. Benaroya H., Nagurka M., Han S. *Mechanical vibration*. CRC Press: London, 2017, 602 p.
14. Leissa A. W. *Vibration of continuous systems*, McGraw-Hill: New York, 2011, 524 p.
15. Bottega W. J. *Engineering vibrations*. CRC Press: New York, 2006, 750 p.
16. Meirovitch L. *Fundamentals of vibrations*. McGraw-Hill, Book Co: New York, 2001, 826 p.
17. Clough R. E. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill College: New York, 1995, 752 p.
18. Shabana A. S. *Theory of vibration*. Springer-Verlag: New York, 2019, 382 p.
19. Geradin M., Rixen D.J. *Mechanical vibrations*. John Wiley & Sons: London, 2015, 617 p.
20. Rao S. *Mechanical vibrations*. Pearson Education Limited: London, 2018, 1295 p.
21. Hagedorn P. *Vibrations and waves in continuous mechanical systems*. John Wiley & Sons: New Jersey, 2007, 388 p.
22. Kelly S. G. *Mechanical vibrations. Theory and applications*. Cengage Learning: NY, 2012, 896 p.
23. Rades M. *Mechanical vibrations II*. Printech Publisher: Turin, 2010, 354 p.
24. Inman D. J. *Engineering vibration*, Pearson Education: NJ, 2014, 720 p.
25. Jazar R. N. *Advanced vibrations. A modern approach*. Springer: New York, 2013, 695 p.
26. Kelly S. G. *Advanced vibration analysis*. CRC Press: New York, 2007, 650 p.
27. Timoshenko S. P. *Ustoychivost' sterzhney, plastin i obolochek* [Stability of rods, plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 807p.
28. Alfutov N. A., Kolesnikov K. S. *Ustoychivost' dvizheniya i ravnovesiya* [Stability of movement and equilibrium]. Moscow, MGTU Publ., 2003, 256 p.
29. Farshad M. *Stability of Structures*. Elsevier Science B. V.: Amsterdam, 1994, 434 p.
30. Jerath S., *Structural Stability Theory and Practice: Buckling of Columns, Beams, Plates, and Shells*. John Wiley & Sons: Chichester, 2020, 672 p.
31. Timoshenko S. P., Gere J. M. *Theory of Elastic Stability*. Dover Publications: New York, 2009, 560 p.
32. Thomsen J. J. *Vibrations and stability*. New York, 2003, 420 p.
33. Yoo C. H. *Stability of structures*. Elsevier: London, 2011, 529p.
34. Ziemian R. D., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*. JohnWiley&Sons: NY, 2010, 1117 p.
35. Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical vibrations]. Moscow, Vysshaya shkola, 1980. 408 p.
36. Birger I. A., Panovko Ya. G. *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya* [Strength, stability, vibrations]. Vol. 3. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 567 p.
37. Korenev B. G. *Spravochnik po dinamike sooruzheniy* [Structure dynamics guide]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1972, 511 p.
38. Umanskiy A. A. *Spravochnik proektirovshchika* [Designer's Handbook]. Vol. 2. Moscow, Stroyizdat Publ., 1973, 415 p.
39. Blevins R. D. *Formulas for dynamics, acoustics and vibration*. John Wiley & Sons, Ltd: Chichester, 2016, 458 p.
40. Wang C. M. *Exact solutions for buckling of structural members*. CRC Press: New York, 2005, 212 p.

41. Galef A. E. Bending frequencies of compressed beams. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1968, Vol. 44(2), P. 643. DOI: 10.1121/1.1911144.
42. Bokaian A. Natural frequencies of beams under compressive axial loads. *Journal of Sound and Vibration*. 1988, Vol. 126(1), P. 49–65. DOI: 10.1016/0022-460X(88)90397-5.
43. Kudryavtsev I. V., Rabetskaya O. I., Mityaev A. E. [Approximation of beam support coefficient values at vibrations and buckling]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol 23, No. 3, P. 461–474 (In Russ.).
44. Dreyper N. Smit G. *Prikladnoy regressionnyy analiz* [Applied regression analysis]. Moscow: Vil'yams Publ., 2016, 912 p.
45. Ivchenko G. I., Medvedev Yu. I. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Moscow, URSS, 2014, 352 p.
46. Nesmeev Yu. A. An approach to solution of algebraic equations of the third and fourth degrees. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2011, No. 1(13), P. 26–30. (In Russ.).
47. Nesmeev Yu. A. The development of an approach for the solution of the fourth degree algebraic equation. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2013, No. 4(24), P. 29–38 (In Russ.).

© Рабецкая О. И., Кудрявцев И. В., Митяев А. Е., 2022

---

**Рабецкая Ольга Ивановна** – кандидат технических наук, доцент кафедры технической механики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: olga\_rabez@mail.ru.

**Кудрявцев Илья Владимирович** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики; Сибирский федеральный университет. E-mail: ikudryavtsev@sfu-kras.ru.

**Митяев Александр Евгеньевич** – кандидат технических наук, заведующий кафедрой прикладной механики; Сибирский федеральный университет. E-mail: pi-prm@mail.ru.

**Rabetskaya Olga Ivanovna** – Cand. Sc., assistant professor, department of technical mechanics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: olga\_rabez@mail.ru.

**Kudryavtsev Ilya Vladimirovich** – Cand. Sc., assistant professor, department of applied mechanics; Siberian Federal University. E-mail: ikudryavtsev@sfu-kras.ru.

**Mityaev Alexander Evgenievich** – Cand. Sc., head of the department of applied mechanics; Siberian Federal University. E-mail: pi-prm@mail.ru.

---