

УДК 539.374

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-364-371

**Для цитирования:** Евтихов Д. О., Яхно А. Н., Савостьянова И. Л. О построении линий разрыва напряжений для двумерной пластической области // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 364–371. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-364-371.

**For citation:** Evtikhov D. O., Yakhno A. N., Savostyanova I. L. [On the construction of stress discontinuity lines for a two-dimensional plastic region]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 364–371. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-364-371.

## О построении линий разрыва напряжений для двумерной пластической области

Д. О. Евтихов<sup>1\*</sup>, А. Н. Яхно<sup>2</sup>, И. Л. Савостьянова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

<sup>2</sup>Университетский центр CUCEI Университета Гвадалахары  
Мексика, 44000, Халиско, Гвадалахара, просп. Хуарес, 976

\*E-mail: devtikhov@yandex.ru

*В статье рассматриваются уравнения пластичности в двумерном случае и строятся линии разрыва напряжений. Построение линий разрыва напряжений основывается на факте: они находятся в точке пересечения линий одного семейства (характеристик) и направлены по биссектрисе угла образованными этими характеристиками. Поэтому для нахождения этих линий построены характеристики. Подобная задача проще решается в случае пластического кручения, тогда характеристика только одна и она направлена по нормали к внешнему контуру, и найти линии скольжения и их точки пересечения достаточно просто. Поэтому большинство работ, посвященных построению линий разрыва напряжений, решает задачу именно пластического кручения для изотропных и анизотропных сред. Для задач плоской деформации пластического материала этот метод не достаточно развит. Это объясняется сложностью построения линий скольжения для таких задач и наличием двух семейств линий скольжения.*

*В данной работе построена гомотопия двух известных точных решений: Прандтля и Надаи, т. е. непрерывная трансформация одного решения в другое. При этом можно наблюдать эволюцию характеристик, которые зависят от группового параметра  $a$ : при  $a = 1$  получают характеристики решения Прандтля; при  $a = 0$  – характеристики решения Надаи, при  $a = 0,5$  характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений. Эти линии построены в данной работе.*

*Ключевые слова:* линия разрыва напряжений, уравнения пластичности, гомотопия решений.

## On the construction of stress discontinuity lines for a two-dimensional plastic region

D. O. Evtikhov<sup>1\*</sup>, A. N. Yakhno<sup>2</sup>, I. L. Savostyanova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

<sup>2</sup>Department of Mathematics, CUCEI, University of Guadalajara  
976, Juárez Av., Colonia Centro, C. P. 44100, Guadalajara, Jalisco, 44000, Mexico

\*E-mail: devtikhov@yandex.ru

*We consider the plasticity equations in the two-dimensional case and construct stress discontinuity lines in this paper. The construction of stress rupture lines has a fact: the rupture lines are located at the intersection point of lines of the same family (characteristics) and are directed along the angle bisector formed by these characteristics. To find these lines, we have constructed characteristics. Such a task is easier to solve in the case of plastic torsion, at that moment there is only one characteristic, and it is directed along the normal to the outer contour, and it is quite simple to find the sliding lines and their intersection points. Most of the works devoted to the construction of stress rupture lines solve the problem of plastic torsion for isotropic and anisotropic media. For problems of plane deformation of plastic material, this method is not sufficiently developed. This is the complexity of constructing sliding lines for such tasks and the presence of two families of sliding lines.*

*A homotopy of two known exact solutions is constructed: Prandtl and Nadai, that is, a continuous transformation of one solution into another in this article. We obtain the characteristics of the Prandtl solution at  $a=1$ . We obtain the characteristics of Nadai's solution at  $a=0$ . The characteristics of one family begin to intersect and stress discontinuity lines appear at  $a = 0,5$ . These lines are constructed in this work.*

*Keywords: stress discontinuity line, plasticity equations, homotopy of solutions.*

### **Введение**

Линия разрыва напряжений – это некоторая линия (поверхность) в теле, на которой напряжения терпят разрыв. Причина появления разрывов при плоской деформации – переопределённость граничной задачи в окрестности особой точки с какой-либо одной стороны от контактной границы. Как правило, линии разрыва расположены в более прочной части соединения [1–2]. При исследовании критического состояния и прочности конструкций необходимо учитывать это явление. То же относится и к стержневым конструкциям [1–5], и тонкостенным цилиндрическим оболочкам, где также имеет место переопределённость граничной задачи. Задача усложняется, если материал полосы неоднороден в менее прочной или (и) в более прочной части соединения [6].

Для построения линий разрыва напряжений, в случае плоской деформации, необходимо учитывать, что они находятся в точке пересечения линий характеристик одного семейства и направлены по биссектрисе угла образованными этими характеристиками. Поэтому для нахождения этих линий необходимо построить характеристики. Проще всего это сделать для задачи кручения, поскольку в этом случае характеристика направлена по нормали к внешнему контуру и найти линии скольжения и их точки пересечения достаточно просто. Этому посвящено достаточное количество работ о пластическом кручении изотропных цилиндрических и призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от касательных нагрузок, а также в случае, когда боковая поверхность стержня находится под действием внешнего переменного давления [7; 8]. Кручение анизотропных цилиндрических и призматических стержней исследовано в [9–11]. В [12] определено предельное состояние сектора анизотропного кругового кольца при кручении. В [13] показано построение полей характеристик для цилиндрического стержня по произвольной поверхности текучести. В [14–17] рассматривались поверхности разрывов деформаций в упругопластических средах.

Для задач плоской деформации пластичного материала разрывные решения построить не просто. Это объясняется необходимостью рассматривать два семейства характеристик и сложностью построения этих линий скольжения. Для решения этой задачи построим непрерывную деформацию двух точных решений: гомотопию решений Прандтля и Надаи. Найдем точки пересечения линий скольжения одного семейства и построим линии разрыва.

### **Гомотопия решений Прандтля и Надаи**

Рассмотрим систему плоской идеальной пластичности Треска – Сен-Венана – Мизеса, состоящую из двух уравнений равновесия и условия пластичности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты тензора напряжений;  $k$  – предел текучести при чистом сдвиге.

Заменой, продолженной М. Леви,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma + k \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta, \end{aligned}$$

система (1) сводится к квазилинейной системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) = 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

в которой  $\sigma$  – гидростатическое давление;  $\theta - \frac{\pi}{4}$  – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью  $OX$ .

Решение Прандтля часто используется для описания сжатия жесткопластического материала шероховатыми плитами. Предполагается, что слой имеет значительно большую длину по сравнению с его толщиной. Это решение приближено описывает реальную ситуацию в некотором отдалении от центра слоя, если начало координат расположено в центре слоя.

В терминах переменных  $\sigma, \theta$  для системы (2) это решение имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma = -p_1 - k \left( \frac{x}{h} - \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} \right), \\ y = h \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $h = \text{const}$ ;  $y = \pm h$  – границы плит;  $p_1 = \text{const}$ .

Граничные решения примут вид

$$\begin{aligned} \theta|_{y=h} &= \pi n, n \in Z, \\ \sigma|_{y=h} &= -p_1 - k \frac{x}{h}. \end{aligned} \quad (4)$$

Характеристики решения имеют следующий вид:

$$x = h(2\theta - \sin 2\theta) - h \left( 2c_i + \frac{p_1}{k} \right), \quad y = \pm h \cos 2\theta, i=1,2, \quad (5)$$

где  $c_i = \text{const}$ .

Решение Надаи описывает пластическое положение вокруг круглого отверстия радиуса  $R$ , нагруженного равномерно распределённым нормальным давлением  $p_1 = \text{const}$  и нулевым касательным напряжением на контуре отверстия. Данное решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma &= -p_2 + k + k \ln \frac{x^2 + y^2}{R^2} = -p_2 + k + k \ln \frac{r^2}{R^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $r, \varphi$  – полярные координаты.

Граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \theta|_{r=R} &= \varphi + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma|_{r=R} &= p_2 + k. \end{aligned} \quad (7)$$

Получившиеся линии скольжения имеют следующей вид:

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{4}, \quad r = R \exp\left(\pm\theta + \frac{p_2 - k}{2k} + c_i\right), \quad (8)$$

где  $c_i - \text{const}; i = 3, 4$ .

Выразим решение Надаи и Прандтля как решение линеаризованной системы:

$$x = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}}, \quad (9)$$

$$y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}},$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{h\sigma}{k} - \frac{p_1 h}{k} - h \sin 2\theta, \\ y &= h \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Выполняем гомотопическую линейную комбинацию решений Прандтля и Надаи:

$$\begin{aligned} x &= a\left(-\frac{h\sigma}{k} - \frac{p_1 h}{k} - h \sin 2\theta\right) + (1-a) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}}, \\ y &= h \cos 2\theta - (1-a) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $a$  – групповой параметр.

Получаем граничную кривую для решения (10):

$$\sigma = -p_1 + k; \quad \theta = \varphi + \frac{\pi}{4}.$$

Подставляя  $\sigma = 2k(a + \theta)$  в систему (3), получаем параметрические уравнения семейства линий скольжения:

$$\begin{aligned} x &= ah\left(2(c_1 + \theta) + \frac{p_1}{k} + \sin 2\theta\right) + (1-a) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{a+\theta}, \\ y &= ah \cos 2\theta + (1-a) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{a+\theta}. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом мы можем наблюдать эволюцию характеристик, которые зависят от группового параметра  $a$ , при  $a = 1$  получаются характеристики решения Прандтля (рис. 1).

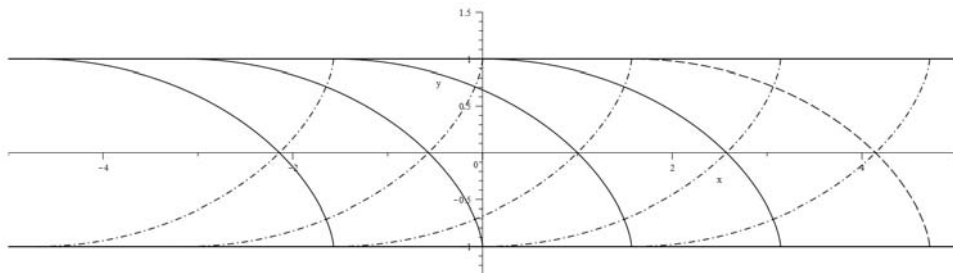


Рис. 1. Преобразованные линии скольжения:  $h = 1; p_1 = p_2; a = 1$

Fig. 1. Transformed sliding lines:  $h = 1; p_1 = p_2; a = 1$

При  $a = 0$  характеристики решения Надаи представлены на рис. 2.

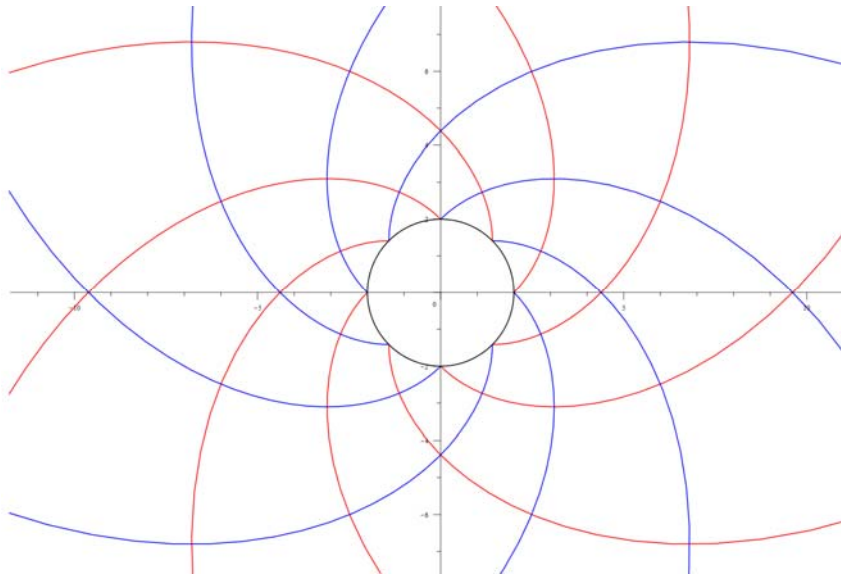


Рис. 2. Преобразованные линии скольжения:  $a = 0$   
 Fig. 2. Transformed sliding lines:  $a = 0$

При  $a = 0,5$  характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений, как на рис. 3.

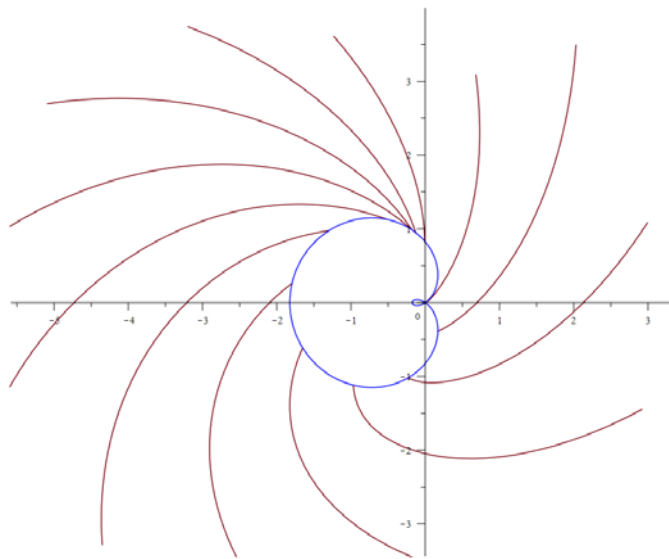


Рис. 3. Пересечение линий скольжения для отверстия в виде улитки Паскаля  $a = 0,5$

Fig. 3. The intersection of the sliding lines for the hole in the form of a Pascal snail  $a = 0,5$

Так как характеристики одного семейства пересекаются, то значения вдоль них различны, и решение задачи Коши после точки пересечения не может быть продолжено непрерывно, возникает линия разрыва напряжений. Эта линия разрыва проходит по биссектрисе угла, образованного пересекающимися характеристиками, и выходит из точки их пересечения в координатах  $[-0,183; 0,991]$  (рис. 4).

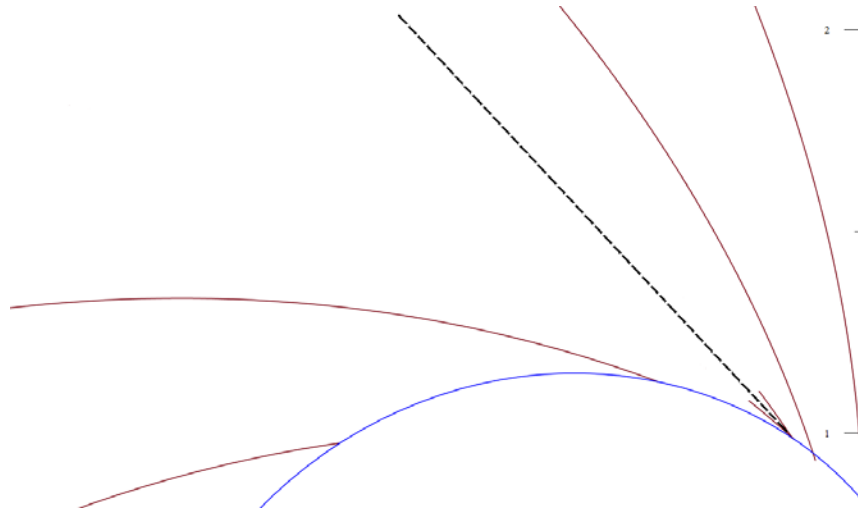


Рис. 4. Линия разрыва напряжений

Fig. 4. Stress discontinuity line

### Заключение

В данной работе построена гомотопия двух известных точных решений: Прандтля и Надаи, т. е. непрерывная трансформация одного решения в другое. При этом можно наблюдать эволюцию характеристик, которые зависят от группового параметра  $a$ : при  $a=1$  получаются характеристики решения Прандтля; при  $a=0$  – характеристики решения Надаи; при  $a=0,5$  характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений, которые проходят по биссектрисе угла пересечения характеристик и выходят из точки их пересечения. Если продолжить увеличение параметра  $a$  пересекающихся характеристик становится больше что усложняет построение линии разрыва напряжений. Решение этой проблемы будет рассмотрено в дальнейших работах.

### Библиографические ссылки

1. Дильман В. Л., Ерошкина Т. В. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях : монография. Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2011. 276 с.
2. Ерошкина Т. В., Дильман В. Л. Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне // Известия ВУЗов. Математика. 2011. № 11. С. 1–11.
3. Дильман В. Л., Ерошкина Т. В. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2009. Вып. 4, № 37 (170). С. 65–77.
4. Eroshkina T. V., Dilman V. L. Mathematical modeling of the state stress of a transverse plastic layer in a round rod // Russian Mathematics. 2011. Vol. 55, Is. 11, P. 9–17.
5. Ерошкина Т. В. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородных цилиндрических стержней : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск, 2010. 103 с.
6. Носачева А. И. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородной полосы с наружным макродефектом // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2013. Т. 6, № 3. С. 79–84.
7. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 231 с.
8. Миронов Б. Г. О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2006. № 1 (48). С. 98–100.

9. Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия «Механика предельного состояния». 2010. № 2 (8). С. 576–579.
10. Козлова Л. С. Предельное состояние призматических стержней при кручении / Чуваш. гос. пед. ун-т им. И. Я. Яковлева. М., 2010. 7 с.
11. Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. Деформированное состояние трансляционно-анизотропных тел при кручении // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2011. № 4 (72). С. 57–60.
12. Козлова Л. С., Миронов Б. Г. Кручение сектора анизотропного кругового кольца при действии переменного давления // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2010. № 4 (68). С. 132–136.
13. Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2012. № 4 (76). С. 108–112.
14. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Рычков В. А. Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред // Проблемы механики сплошных сред : сб. науч. работ. Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 1996. С. 116–128.
15. Быковцев, Г. И., Кретова Л. Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // ППМ. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 106–116.
16. Лимарев, А. Е., Чернышев А. Д. О распространении ударных волн в упругопластической среде с упрочнением // ПММ. 1971. Т. 35, вып. 6. С. 1083–1088.
17. Садовский В. М. К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах // ЖПМТФ. 1994. № 5. С. 166–172.

## References

1. Dilman V. L., Eroshkina T. V. *Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyanij myagkih prosloek v neodnorodnykh soedineniyah* [Mathematical modeling of critical states of soft interlayers in inhomogeneous compounds: monograph]. Chelyabinsk, YUUrGU Publ. 2011, 276 p.
2. Eroshkina T. V., Dilman V. L. [Mathematical modeling of the stress state of a transverse plastic layer in a round rod]. *Izvestiya VUZov. Mathematics*. 2011, No. 11, P. 1–11 (In Russ.).
3. Dilman V. L., Eroshkina T. V. [Investigation of mathematical models of the stress state of an inhomogeneous transverse layer in a round rod]. *Bulletin of YUUrGU. Mathematical modeling and programming*. 2009, Is. 4, No. 37 (170), P. 65–77 (In Russ.).
4. Eroshkina T. V., Dilman V. L. [Mathematical modeling of the state stress of a transverse plastic layer in a round rod]. *Russian Mathematics*. 2011, Vol. 55, Is. 11, P. 9–17.
5. Eroshkina T. V. *Matematicheskoe modelirovanie napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnykh cilindricheskikh sterzhney. Kand. Dis.* [Mathematical modeling of the stress state of inhomogeneous cylindrical rods.]. Chelyabinsk, 2010, 103 p.
6. Nosacheva A. I. [Mathematical modeling of the stress state of an inhomogeneous strip with an external macrodefect]. *Bulletin of YUUrGU. Mathematical modeling and programming*. 2013, Vol. 6, No. 3, P. 79–84 (In Russ.).
7. Ivlev D. D. *Teoriya ideal'noj plastichnosti* [Theory of ideal plasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 231 p.
8. Mironov B. G. [On torsion of prismatic rods under the influence of pressure linearly varying along the generatrix]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva*. 2006, No. 1 (48), P. 98–10 (In Russ.).
9. Ivlev, D. D. [On the relations of translational ideal-plastic anisotropy in torsion] *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva*. Series : Mechanics of the limit state. 2010, No. 2 (8), P. 576–579 (In Russ.).

10. Kozlova L. S. *Predel'noe sostoyanie prizmaticheskikh sterzhnej pri kruchenii* [The limiting state of prismatic rods during torsion]. Chuvash State Pedagogical University, 2010, 7 p. Bibliogr.: 3 titles. Rus. Dept. in VINITI 29.04.10, No. 232-V2010.
11. Mironov B. G., Mitrofanova T. V. [Deformed state of translationally anisotropic bodies under torsion]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universitetaim. I. Ya. Yakovleva*. 2011, No. 4 (72), P. 57–60 (In Russ.).
12. Kozlova L. S., Mironov B. G. [Torsion of the sector of an anisotropic circular ring under the action of variable pressure]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universitetaim. I. Ya. Yakovleva*. 2010, No. 4 (68), P. 132–136 (In Russ.).
13. Mironov B. G. [On general relations of the theory of torsion of anisotropic rods]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universitetaim. I. YA. Yakovleva*. 2012, No. 4 (76), P. 108–112 (In Russ.).
14. Burenin A. A., Bykovtsev G. I., Rychkov V. A. [Surfaces of velocity discontinuities in the dynamics of irreversibly compressible media]. *Problemy mekhaniki sploshnyh sred: Sbornik nauchnyh rabot*. Vladivostok, IAPU DVO RAN Publ., 1996, P. 116–128.
15. Bykovtsev G. I., Kretova L. D. [On the propagation of shock waves in elastic-plastic media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1972, Vol. 36, Is. 1, P. 106–116 (In Russ.).
16. Limarev A. E., Chernyshev A. D. [On propagation of shock waves in an elastic-plastic medium with hardening]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1971, Vol. 35, Is. 6, P. 1083–1088 (In Russ.).
17. Sadovsky V. M. [On the theory of propagation of elastic-plastic waves in hardening media]. *Zhurnal Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 1994, No. 5, P. 166–172 (In Russ.).

© Евтихов Д. О., Яхно А. Н., Савостьянова И. Л., 2022

---

**Евтихов Денис Олегович** – ассистент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: devtikhov@yandex.ru.

**Яхно Александр Николаевич** – кандидат физико-математических наук, профессор математического факультета университетского центра CUCEI Университета Гвадалахары, Мексика. E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx.

**Савостьянова Ирина Леонидовна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

**Devtikhov Denis Olegovich** – assistant at the Department of IES; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: devtikhov@yandex.ru.

Yakhno Alexander Nikolaevich – Cand. Sc., Department of Mathematics, CUCEI, University of Guadalajara, Mexico. E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx.

Savostyanova Irina Leonidovna – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of IES, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

---