

УДК 539.3

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-372-390

Для цитирования: Матвеев А. Д. Построение высокоточных многосеточных конечных элементов малой размерности с применением локальных аппроксимаций и образующих конечных элементов // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 372–390. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-372-390.

For citation: Matveev A. D. [Construction of high-precision low-dimensional MgFE using local approximations and generating FE]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 372–390. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-372-390.

Построение высокоточных многосеточных конечных элементов малой размерности с применением локальных аппроксимаций и образующих конечных элементов

А. Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
E-mail: mtv241@mail.ru

Композитные конструкции (тела) широко применяются в авиационной и ракетно-космической технике. Для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих композитных тел (КТ) эффективно применяется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ), который реализуется на основе функционала Лагранжа (в перемещениях). При построении по известным процедурам многосеточного конечного элемента (МнКЭ), кратко – стандартного МнКЭ, используются мелкая (базовая) сетка, которая может быть сколь угодно мелкой, и крупные сетки, вложенные в мелкую. Мелкая сетка порождена базовым разбиением МнКЭ, которое учитывает в рамках микроподхода его неоднородную, микронеоднородную структуру. Крупные сетки используются для понижения размерности МнКЭ. Для стандартного МнКЭ характерно следующее. Всякая крупная сетка стандартного МнКЭ и отвечающие ей аппроксимации перемещений определяются на всей его области. Это приводит к увеличению размерности стандартного МнКЭ при повышении его порядка точности, так как в этом случае на крупных сетках определяются аппроксимации перемещений высокого порядка. Для уменьшения погрешности решений применяются высокоточные МнКЭ, т. е. высокого порядка точности, которые имеют большую размерность. Однако, применение высокоточных МнКЭ затруднительно, так как они образуют дискретные модели тел высокой размерности.

В данной работе предлагается метод локальных аппроксимаций (МЛА) для построения высокоточных МнКЭ малой размерности (кратко – малоразмерных МнКЭ), которые используются для расчета НДС по ММКЭ упругих однородных и КТ. Рассмотрены два типа малоразмерных МнКЭ. Малоразмерные МнКЭ 1-го типа проектируются на базе стандартных с применением локальных аппроксимаций перемещений, которые определяются на подобластях стандартных МнКЭ, 2-го типа – с применением образующих конечных элементов (КЭ). Краткая суть построения малоразмерных МнКЭ 1-го типа состоит в следующем. Согласно МЛА на области V_0 стандартного МнКЭ определяем более мелкую сетку H , чем его базовая. Область V_0 представляем граничными и внутренними областями. Граничные (внутренние) области имеют общую границу (не имеют общей границы) с областью V_0 , общие границы с областью V_0 не вырождаются в точку. На граничных (внутренних) областях определяем крупные сетки, которые вложены в мелкую сетку H и порождают локальные аппроксимации перемещений малого (высокого) порядка. На области V_0 , используя локальные аппроксимации перемещений граничных и внутренних областей, строим МнКЭ. Затем с помощью метода конденсации выражаем перемещения внутренних узлов МнКЭ через

перемещения узлов, лежащих на его границе, т. е. на границе области V_0 . В результате получаем высокоточный МнКЭ V_p малой размерности, т. е. малоразмерный МнКЭ 1-го типа, размерность которого равна размерности стандартного. Важно отметить, что при увеличении порядка точности МнКЭ V_p размерность его не меняется, т. е. не увеличивается, и поэтому он называется высокоточным МнКЭ малой размерности. Подробно изложена процедура построения малоразмерных МнКЭ 1-го типа. Как известно, расчет на статическую прочность упругих конструкций сводится к определению для них максимальных эквивалентных напряжений, определение которых с малой погрешностью для КТ в настоящее время является актуальной проблемой.

Расчеты показывают, что малоразмерные МнКЭ 1-го типа порождают в КТ максимальные эквивалентные напряжения, погрешности которых в 25–50 раз меньше погрешностей аналогичных напряжений, полученных с помощью стандартных, на базе которых построены малоразмерные, т. е. малоразмерные МнКЭ 1-го типа более эффективны, чем стандартные. Применение в расчетах по ММКЭ малоразмерных МнКЭ 1-го типа позволяет для крупных дискретных моделей КТ определять максимальные эквивалентные напряжения с малой погрешностью.

Показано построение малоразмерных МнКЭ 2-го типа, которые проектируются на базе стандартных высокоточных МнКЭ с применением образующих КЭ. Малоразмерный МнКЭ 2-го типа имеет такой же порядок точности, как стандартный, но размерность его меньше размерности стандартного. Достоинство малоразмерных МнКЭ 2-го типа состоит в том, что они порождают дискретные модели КТ меньшей размерности, чем стандартные.

Ключевые слова: упругость, композиты, стандартные и малоразмерные МнКЭ, локальные аппроксимации, образующие КЭ.

Construction of high-precision low-dimensional MgFE using local approximations and generating FE

A. D. Matveev

Institute of Computational Modeling SB RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: mtv241@mail.ru

Composite structures (bodies), in particular, plates, beams, shells, are widely used in aviation and rocket and space technology. To analyze the stress state of elastic composite bodies (CB), the method of multigrid finite elements (MMFE) is effectively used, which is implemented on the basis of the Lagrange functional (in displacements). When constructing a multigrid finite element (MgFE), briefly a standard MgFE, using known procedures, a small base grid is used, which can be arbitrarily small, and large ones nested in a small one. The fine grid is generated by the partition of the MgFE, which takes into account its inhomogeneous, micro-inhomogeneous structure within the framework of the micro-passage. Large grids are used to reduce the dimension of the MgFE. The following is typical for a standard MgFE. Any large grid of a standard MgFE and corresponding approximations of displacements are determined on its entire area. This leads to an increase in the dimension of the standard MgFE with an increase in its order of accuracy, since in this case approximations of high-order displacements are determined on large grids. To reduce the error of solutions, high-precision MgFE are used, i. e., of a high order of accuracy, which have a large dimension. However, the use of high-precision MgFE is difficult, since they form discrete models of high-dimensional bodies.

In this paper, we propose a method of local approximations (MLA) for constructing high-current MgFE of small dimension (short - small-sized MgFE), which are used to calculate elastic homogeneous and CB by MgFE. Two types of small-sized MgFE are considered. Small-sized MgFE of the 1st type are designed on the basis of standard ones with the use of local approximations of displacements, which are determined

on the subdomains of standard MgFE, of the 2nd type - with the use of finite element generators (FE). The brief essence of the construction of small-sized MgFE of the 1st type is as follows. According to the MLA, we define a smaller H grid on the V_0 area of the standard MgFE than its base one. The V_0 region is represented by the boundary and inner regions. The boundary (inner) regions have a common boundary, which does not degenerate into a point (do not have a common boundary), with the V_0 region. On the boundary (inner) regions, we define large grids that are embedded in a small H grid and generate local approximations of small (high) order displacements. On the V_0 region, using local approximations of the displacements of the boundary and inner regions, we construct the MgFE. Then, using the condensation method, we express the movements of the internal nodes of the MgFE through the movements of the nodes lying on its boundary, i.e. on the boundary of the V_0 region. As a result, we obtain a high-precision V_p MgFE of small dimension, i.e. a small-sized MgFE of the 1st type, the dimension of which is equal to the dimension of the standard one. It is important to note that with an increase in the order of accuracy of the V_p MgFE, its dimension does not change, i.e. it does not increase, and therefore it is called a high-precision MgFE of small dimension, i.e. small-sized. The procedure for constructing small-sized MgFE of the 1st type is described in detail. As is known, the calculation of the static strength of structures is reduced to determining the maximum equivalent stresses for them, the determination of which with a small error for CB is an urgent problem.

Calculations show that small-sized MgFE of the 1st type generate maximum equivalent stresses in CB, the errors of which are 25 ÷ 50 smaller than the errors of analogous stresses obtained using standard ones, on the basis of which small-sized, i.e. small-sized MgFE of the 1st type are more effective than standard ones. The use of small-sized MgFE of the 1st type in MMFE calculations makes it possible to determine the maximum equivalent stresses with a small error for large CB partitions.

The construction of small-sized MgFE of the 2nd type is shown, which are designed on the basis of standard high-precision MgFE with the use of generating FE. A small-sized MgFE of the 2nd type has the same order of accuracy as the standard one, but its dimension is smaller than the dimension of the standard one. The advantage of small-sized MgFE of the 2nd type is that they give rise to discrete CB models of smaller dimension than standard ones.

Keywords: elasticity, composites, standard and small-sized MgFE, local approximations, generating FE.

Введение

В современной авиационной и ракетно-космической технике широко применяются упругие конструкции, пластины, балки, оболочки, имеющие неоднородную (волоконистую) структуру. При анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих конструкций (тел) активно используется метод конечных элементов (МКЭ) [1–7]. Базовые дискретные модели (БМ) тел, которые учитывают их неоднородную, микрон неоднородную структуру в рамках микроподхода [8] с помощью конечных элементов (КЭ) 1-го порядка, имеют очень высокую размерность.

Для понижения размерностей дискретных моделей очень результативно используется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [9–11]. Особенно эффективно ММКЭ используется при решении задач теории упругости [12–16] для композитных тел (КТ). ММКЭ реализуется на основе функционала Лагранжа (т. е. в перемещениях) [17] с применением многосеточных конечных элементов (МнКЭ) [18–21]. Поскольку при построении n -сеточного КЭ используется не одна, а n вложенных сеток ($n \geq 2$), то ММКЭ можно считать обобщением МКЭ, т. е. МКЭ – частный случай ММКЭ. Отсюда следует, что если в расчетах тел по МКЭ применяются МнКЭ, то в этом случае, по сути, реализуется ММКЭ. Неоднородные, микрон неоднородные структуры КТ учитываются в рамках микроподхода с помощью МнКЭ. Существующие подходы и численные методы решения задач упругости для КТ имеют сложные формулировки и труднореализуемы [22–30]. Для тел с неоднородной регулярной структурой с различными коэффициентами заполнения, которые с позиций макроподхода рассматриваются как изотропные однородные тела, НДС определяется с помощью фиктивных модулей упругости. Процедуры

нахождения фиктивных модулей упругости показаны в работе [31] для двумерных композитов, в [32] – для трехмерных. Основные достоинства ММКЭ состоят в том, что он порождает для КТ дискретные модели малой размерности и реализуется на базе процедур МКЭ.

При построении по известным процедурам многосеточного конечного элемента (кратко – стандартного МнКЭ) используются мелкая сетка и крупные, вложенные в мелкую. Мелкая (базовая) сетка порождена базовым разбиением, которое учитывает неоднородную, микронеоднородную структуру стандартного МнКЭ, крупные сетки применяются для понижения его размерности. Для стандартных МнКЭ характерно следующее. Всякая крупная сетка стандартного МнКЭ и отвечающие ей аппроксимации перемещений определяются на всей его области. Это приводит к увеличению размерности стандартного МнКЭ при повышении его порядка точности, так как в этом случае на крупных сетках используются аппроксимации перемещений высокого порядка. Для уменьшения погрешности приближенных решений используются (стандартные) высокоточные МнКЭ, т. е. МнКЭ высокого порядка точности, которые имеют большую размерность. Однако применение высокоточных МнКЭ затруднительно, так как они порождают дискретные модели тел высокой размерности.

Основной недостаток МКЭ и ММКЭ состоит в том, что при построении по МКЭ, ММКЭ решений с малой погрешностью для КТ с помощью известных односеточных КЭ, МнКЭ необходимо применять дискретные модели тел высокой размерности. Для решения данной проблемы здесь предлагается использовать высокоточные МнКЭ малой размерности, которые позволяют для крупных дискретных моделей КТ определять напряжения с малой погрешностью.

В данной работе предлагается метод локальных аппроксимаций (МЛА) для построения высокоточных МнКЭ малой размерности (кратко – малоразмерных МнКЭ), которые применяются при расчете НДС по ММКЭ упругих однородных и КТ. МЛА применяется для КТ, которые удовлетворяют следующим основным положениям.

Положение 1. КТ состоят из разномодульных изотропных однородных тел, связи между которыми идеальны, т. е. на общих границах разномодульных изотропных однородных тел функции перемещений и напряжений являются непрерывными.

Положение 2. Перемещения, деформации и напряжения разномодульных изотропных однородных тел отвечают соотношениям Коши и закону Гука трехмерной задачи линейной теории упругости [16].

Следует отметить, что МЛА, по сути, порождает новые подходы построения МнКЭ. Рассмотрены два подхода, т. е. два типа малоразмерных МнКЭ. Малоразмерные МнКЭ 1-го типа проектируются на базе стандартных с применением локальных аппроксимаций перемещений, которые определяются на подобластях стандартных МнКЭ, 2-го типа – с применением образующих КЭ. Краткая суть построения малоразмерных МнКЭ 1-го типа состоит в следующем. Согласно МЛА в центральной части области V_0 стандартного МнКЭ применяются локальные аппроксимации перемещений высокого порядка (построенные на крупных сетках), в окрестности границы области V_0 – малого порядка, что позволяет проектировать высокоточный МнКЭ V_p малой размерности, т. е. малоразмерный МнКЭ 1-го типа, размерность которого равна размерности стандартного. Следует отметить следующее. При увеличении порядка точности МнКЭ V_p размерность его не меняется, т. е. не увеличивается, и поэтому он называется высокоточным МнКЭ малой размерности. Подробно изложена процедура построения малоразмерных МнКЭ 1-го типа. Как известно, расчет на статическую прочность упругих конструкций сводится к нахождению для них максимальных эквивалентных напряжений, определение которых с малой погрешностью для КТ является в настоящее время актуальной проблемой.

Расчеты показывают, что малоразмерные МнКЭ 1-го типа порождают в КТ максимальные эквивалентные напряжения, погрешности которых в 25–50 раз меньше погрешностей аналогичных напряжений, полученных с применением стандартных МнКЭ, которые имеют такие же формы, характерные размеры, размерности, неоднородную структуру и образуют такие же

дискретные модели, как малоразмерные МКЭ. Приведенный пример расчета КТ по МКЭ с применением малоразмерных МКЭ 1-го типа показывает их высокую эффективность.

Основные достоинства малоразмерных МКЭ 1-го типа состоят в следующем. Во-первых, малоразмерные МКЭ 1-го типа порождают в КТ максимальные эквивалентные напряжения с меньшей погрешностью, чем стандартные, и образуют дискретные модели КТ малой размерности. Во-вторых, применение в расчетах по МКЭ малоразмерных МКЭ 1-го типа позволяет для крупных дискретных моделей КТ определять максимальные эквивалентные напряжения с малой погрешностью. Отсюда следует, что малоразмерные МКЭ 1-го типа более эффективны, чем стандартные (на базе которых построены малоразмерные).

Кратко показана процедура построения малоразмерных МКЭ 2-го типа на базе стандартных высокоточных МКЭ с применением образующих КЭ. Малоразмерные МКЭ 2-го типа имеют такой же порядок точности, как стандартные, но размерность их меньше размерности стандартных. Поэтому малоразмерные МКЭ 2-го типа порождают дискретные модели КТ меньшей размерности, чем стандартные.

1. Процедура построения стандартных многосеточных конечных элементов

Основные положения построения стандартных МКЭ на основе функционала Лагранжа, не теряя общности суждений, покажем на примере лагранжевого двухсеточного конечного элемента (2сКЭ) $V_d^{(2)}$ размерами $8h \times 8h \times 8h$ (рис. 1), h – задано. Здесь и далее МКЭ на рисунках показаны в локальной декартовой системе координат $Oxyz$. Рассматриваемый 2сКЭ $V_d^{(2)}$ армирован непрерывными волокнами сечением $h \times h$, которые параллельны оси Oy , расстояние между которыми равно h . На рис. 2 показано сечение 2сКЭ в плоскости Oxz , сечения волокон закрашены. Считаем, что между компонентами неоднородной структуры 2сКЭ связи идеальны, а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающие трехмерной задаче линейной теории упругости [12–16], т. е. во всей области 2сКЭ $V_d^{(2)}$ реализуется трехмерное НДС [16]. Область 2сКЭ $V_d^{(2)}$ представляем БМ R_d , состоящей из однородных односеточных КЭ (1сКЭ) V_j^h первого порядка формы куба со стороной h [6; 7], $j = 1, \dots, M$; M – общее число 1сКЭ V_j^h , для рис. 1 имеем $M = 512$. На рис. 1 показана БМ R_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$, которая учитывает неоднородную структуру 2сКЭ $V_d^{(2)}$ и порождает мелкую (базовую) узловую равномерную сетку h_d размерности $9 \times 9 \times 9$ с шагом h .

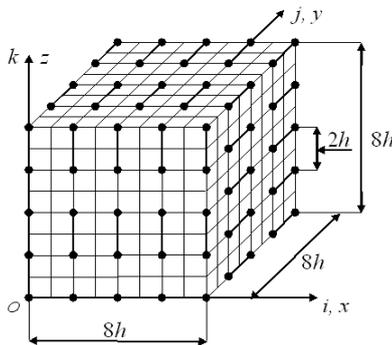


Рис. 1. Сетки 2сКЭ $V_d^{(2)}$
Fig. 1. Grids 2gFE $V_d^{(2)}$

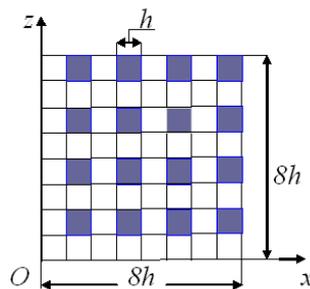


Рис. 2. Сечение 2сКЭ $V_d^{(2)}$
Fig. 2. Section 2gFE $V_d^{(2)}$

На мелкой сетке h_d определяем крупную равномерную сетку $H_d^{(2)}$ размерности $5 \times 5 \times 5$ с шагом $2h$. На рис. 1 узлы крупной сетки $H_d^{(2)}$ отмечены точками – 125 узлов. Полную потен-

циальную энергию Π_d базового разбиения R_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$ (т. е. функционал Лагранжа [17]) представим в матричной форме [6; 7]:

$$\Pi_d = \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_j^T [K_j^h] \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T \mathbf{P}_j \right), \quad (1)$$

где $[K_j^h]$ – матрица жесткости; $\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j$ – векторы узловых сил и неизвестных 1сКЭ V_j^h ; T – транспонирование; M – общее число 1сКЭ V_j^h .

С помощью полиномов Лагранжа [6] на сетке $H_d^{(2)}$ определяем аппроксимирующие функции u_2, v_2, w_2 для перемещений u, v, w 2сКЭ $V_d^{(2)}$, которые запишем в форме

$$u_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} w_{ijk}, \quad (2)$$

где $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$ – искомые значения функций u_2, v_2, w_2 в узле i, j, k сетки $H_d^{(2)}$; i, j, k – координаты целочисленной системы координат ijk , которая введена для узлов крупной сетки $H_d^{(2)}$ (рис. 1); $N_{ijk} = N_{ijk}(x, y, z)$ – базисная функция узла i, j, k сетки $H_d^{(2)}$, $i, j, k = 1, \dots, 5$, где

$$N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z), \quad (3)$$

где $L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^5 \frac{x-x_\alpha}{x_i-x_\alpha}$; $L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^5 \frac{y-y_\alpha}{y_j-y_\alpha}$; $L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^5 \frac{z-z_\alpha}{z_k-z_\alpha}$, x_i, y_j, z_k – координаты

узла i, j, k сетки $H_d^{(2)}$ в системе координат $Oxyz$.

Обозначим: $N_\beta = N_{ijk}$, $u_\beta = u_{ijk}$, $v_\beta = v_{ijk}$, $w_\beta = w_{ijk}$, где $i, j, k = 1, \dots, 5$, т. е. $\beta = 1, \dots, 125$. Тогда выражения (2) принимают вид

$$u_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta u_\beta, \quad v_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta v_\beta, \quad w_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta w_\beta. \quad (4)$$

Обозначим: $\mathbf{q}_d = \{u_1, \dots, u_{125}, v_1, \dots, v_{125}, w_1, \dots, w_{125}\}^T$ – вектор узловых перемещений крупной сетки $H_d^{(2)}$, т. е. вектор неизвестных 2сКЭ $V_d^{(2)}$. Используя (4), компоненты вектора \mathbf{q}_j узловых неизвестных 1сКЭ V_j^h выражаем через компоненты вектора \mathbf{q}_d , в результате получим

$$\mathbf{q}_j = [A_j^d] \mathbf{q}_d, \quad (5)$$

где $[A_j^d]$ – прямоугольная матрица; $j = 1, \dots, M$.

Подставляя (5) в выражение (1), из условия $\partial \Pi_d / \partial \mathbf{q}_d = 0$ получаем матричное соотношение вида $[K_d] \mathbf{q}_d = \mathbf{F}_d$, где

$$[K_d] = \sum_{j=1}^M [A_j^d]^T [K_j^h] [A_j^d], \quad \mathbf{F}_d = \sum_{j=1}^M [A_j^d]^T \mathbf{P}_j, \quad (6)$$

где $[K_d]$, \mathbf{F}_d – матрица жесткости (размерности 375×375) и вектор узловых сил (размерности 375) стандартного 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

Особенность стандартных МНКЭ заключается в том, что всякая крупная сетка стандартного МНКЭ и отвечающие ей аппроксимации перемещений определяются на всей его области.

Стандартный 2сКЭ формы куба, имеющий равномерную крупную сетку размерности $(n+1) \times (n+1) \times (n+1)$, называется 2сКЭ n -го порядка. Поскольку равномерная крупная сетка $H_d^{(2)}$ 2сКЭ $V_d^{(2)}$ имеет размерность $5 \times 5 \times 5$, то 2сКЭ $V_d^{(2)}$ называется 2сКЭ 4-го порядка. Отметим, что размерность лагранжевого 2сКЭ n -го порядка формы куба при использовании крупной равномерной сетки равна $3(n+1)^3$, т. е. с увеличением порядка n размерность 2сКЭ резко возрастает.

Замечание 1. Решение, построенное для крупной сетки $H_d^{(2)}$ 2сКЭ $V_d^{(2)}$, с помощью формулы (5) проецируется на мелкую сетку h_d базового разбиения R_d 2сКЭ, что дает возможность вычислять напряжения в любом 1сКЭ V_j^h разбиения R_d , следовательно, можно определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

Замечание 2. В силу (5) размерность вектора \mathbf{q}_d (размерность 2сКЭ $V_d^{(2)}$) не зависит от числа M , т. е. от размерности разбиения R_d . Следовательно, для учета в 2сКЭ $V_d^{(2)}$ сложной неоднородной (микронеоднородной) структуры, можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения R_d , состоящие из 1сКЭ V_j^h . В этом случае в 1сКЭ V_j^h сколь угодно точно описывается трехмерное напряженное состояние (без упрощающих гипотез).

Замечание 3. Отметим случай, когда 2сКЭ $V_d^{(2)}$ имеет сложную форму и его крупная сетка имеет внешние узлы, которые совпадают с узлами крупных сеток соседних с ним 2сКЭ. В этом случае при построении 2сКЭ $V_d^{(2)}$ во всех узлах его мелкой сетки искомые перемещения u, v, w выражаются через узловые перемещения крупной сетки $H_d^{(2)}$ 2сКЭ $V_d^{(2)}$, кроме тех узлов мелкой сетки, которые совпадают с узлами (со стыковочными узлами) крупных сеток соседних 2сКЭ и сетки $H_d^{(2)}$, что обеспечивает стыковку 2сКЭ $V_d^{(2)}$ с соседними с ним 2сКЭ.

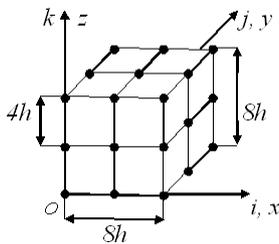


Рис. 3. Крупная сетка $H_d^{(3)}$

Fig. 3. Large grid $H_d^{(3)}$

При построении (трехсеточного) 3сКЭ используем конечное число 2сКЭ, их крупные сетки образуют мелкую сетку 3сКЭ, на которой определяем крупную сетку для 3сКЭ. Процедура построения 3сКЭ изложена в работах [9; 19]. Рассмотрим частный случай, когда построение 3сКЭ $V_d^{(3)}$ проводится на базе одного 2сКЭ $V_d^{(2)}$. Крупную сетку $H_d^{(2)}$ 2сКЭ $V_d^{(2)}$ считаем мелкой сеткой 3сКЭ. На сетке $H_d^{(2)}$ для 3сКЭ $V_d^{(3)}$ определяем крупную сетку $H_d^{(3)}$. На рис. 3 узлы равномерной сетки $H_d^{(3)}$ с шагом $4h$ отмечены точками – 27 узлов.

Затем по выше описанной процедуре определяем матрицу жесткости и вектор узловых сил стандартного 3сКЭ $V_d^{(3)}$. Построение стандартного 3сКЭ (МнКЭ) на базе одного стандартного 2сКЭ целесообразно применять в случае, когда стандартный 2сКЭ имеет большие геометрические характерные размеры.

2. Построение малоразмерных МнКЭ с применением локальных аппроксимаций

Малоразмерные МнКЭ 1-го типа проектируются на базе стандартных с применением локальных аппроксимаций перемещений, которые определяются на подобластях стандартных МнКЭ. Рассмотрим процедуру построения малоразмерных МнКЭ 1-го типа.

Предлагаемая процедура реализуется на базе более мелкой сетки, чем мелкая базовая сетка стандартного МнКЭ. Основные положения рассматриваемой процедуры кратко заключаются в следующем. Согласно МЛА на области V_0 стандартного МнКЭ определяем более мелкую сетку H , чем базовая сетка H_0 , $H_0 \subset H$. Область V_0 представляем n тонкостенными гранич-

ными и m внутренними областями. Граничные (внутренние) области имеют общую границу (не имеют общей границы) с областью V_0 (общие границы областей не вырождаются в точку). На граничных (внутренних) областях определяем $n(m)$ крупных сеток, которые вложены в мелкую сетку H и порождают аппроксимации перемещений малого (высокого) порядка. На границе области V_0 число узлов крупных сеток мало. На граничных и внутренних областях, используя их мелкие и крупные сетки, строим n граничных и m внутренних 2сКЭ, которые образуют высокоточный p -сеточный КЭ (рскЭ), где $p = 1 + n + m$. Отметим, что при построении рскЭ используются одна мелкая сетка H и $n + m$ (в общем случае различных) крупных сеток. Выражая в рскЭ перемещения внутренних узлов крупных сеток (с помощью метода конденсации [6]) через перемещения граничных узлов, получаем высокоточный рскЭ малой размерности, т. е. малоразмерный МнКЭ 1-го типа. Следует отметить, что математические операции метода конденсации являются математическими тождественными преобразованиями, т. е. они не влияют на погрешность решения.

Для простоты изложения, рассмотрим стандартный МнКЭ, мелкая базовая сетка H которого имеет большую размерность. На мелкой сетке H определяем крупную сетку на всей области МнКЭ, которая также имеет высокую размерность. Тогда в центральной части области МнКЭ на крупной сетке определяем аппроксимации перемещений высокого порядка, в окрестности границы области – малого порядка, что позволяет с помощью различных локальных аппроксимаций варьировать размерность и порядок точности малоразмерного МнКЭ. Основные положения процедуры построения малоразмерных МнКЭ 1-го типа показаны в примере 1.

Пример 1. Рассмотрим модельную задачу определения НДС по ММКЭ для тела V_0^1 с неоднородной (волоконистой) структурой размерами $16h \times 64h \times 16h$, которое лежит в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 4), где h – задано. В расчетах тела V_0^1 используем его БМ R_0 и дискретные модели R_1 и R_2 , состоящие соответственно из стандартных и малоразмерных МнКЭ 1-го типа. Тело V_0^1 армировано непрерывными волокнами сечением $h \times h$, параллельными оси Oy , расстояние между волокнами равно h при $y = 0: u, v, w = 0$, т. е. при $y = 0$ тело жестко закреплено. Для модельной задачи имеем следующие исходные данные:

$$h = 0,5; E_c = 1, E_v = 10, \nu_c = \nu_v = 0,3, \quad (7)$$

где E_c, E_v (ν_c, ν_v) – модули Юнга (коэффициенты Пуассона) соответственно связующего материала и волокна; в точках тела V_0^1 с координатами x_i, y_j, z , где $z = 16h, x_i = 8h(i-1), i = 1, 2, 3, y_j = 8hj, j = 1, \dots, 8$, действует нагрузка $F_z = 0,35$ (рис. 4). Сечение тела V_0^1 в плоскости Oxz показано на рис. 5, сечения волокон закрашены.

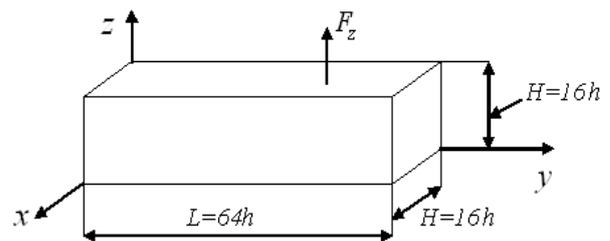


Рис. 4. Размеры КТ V_0^1

Fig. 4. Sizes CB V_0^1

БМ R_0 КТ V_0^1 состоит из односеточных конечных элементов (1сКЭ) V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС [16]). БМ R_0 учитывает в рамках микроподхода неоднородную структуру КТ V_0^1 и порождает равномерную (базовую) сетку с шагом h размерности $17 \times 65 \times 17$.

Дискретную модель R_1 КТ V_0^1 образуют четыре одинаковых стандартных 2сКЭ $V_q^{(2)}$ 4-го порядка формы куба, построенных на области V_q размерами $16h \times 16h \times 16h$ (рис. 6). На рис. 5, 6

показаны сечение 2сКЭ $V_q^{(2)}$ и его крупная равномерная сетка с шагом $4h$, узлы крупной сетки отмечены точками – 125 узлов. Матрицу жесткости (размерности 375×375) и вектор узловых сил (размерности 375) 2сКЭ $V_q^{(2)}$ определяем по процедуре п. 1.

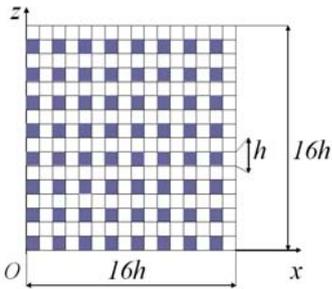


Рис. 5. Сечение КТ V_0^1 (МнКЭ V_p^1)
 Fig. 5. Section CB V_0^1 (MgFE V_p^1)

Дискретная модель R_2 КТ V_0^1 состоит из 4-х одинаковых малоразмерных МнКЭ V_p^1 (1-го типа) размерами $16h \times 16h \times 16h$, сечения которых показаны на рис. 5. Согласно МЛА, построение МнКЭ V_p^1 1-го типа (рис. 6) на базе стандартного 2сКЭ $V_q^{(2)}$, т. е. на области V_q размерами $16h \times 16h \times 16h$, сводится к следующему. В центральной части области V_q выделяем внутреннюю область V_1 размерами $12h \times 12h \times 12h$ (рис. 7), которая состоит из восьми одинаковых внутренних 2сКЭ $V_1^{(2)}$ 3-го порядка размерами $6h \times 6h \times 6h$ (рис. 8).

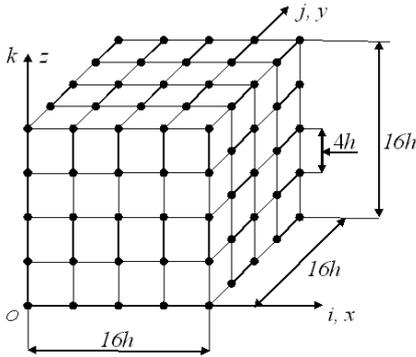


Рис. 6. Область V_q , 2сКЭ $V_q^{(2)}$, МнКЭ V_p^1
 Fig. 6. Region V_q , 2сКЭ $V_q^{(2)}$, MgFE V_p^1

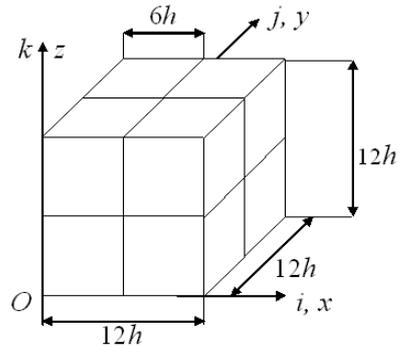


Рис. 7. Внутренняя область V_1
 Fig. 7. Inner region V_1

Крупная и мелкая сетки и сечение 2сКЭ $V_1^{(2)}$ показаны на рис. 8, 9, сечения волокон (параллельных оси Oy) размерами $h \times h$ закрашены, узлы крупной сетки отмечены точками, 64 узла. Матрицу жесткости (размерности 192×192) и вектор узловых сил (размерности 192) 2сКЭ $V_1^{(2)}$ находим по процедуре п. 1. Внутреннюю область V_1 окружают восемь одинаковых по форме и характерным размерам $8h \times 8h \times 8h$ граничных тонкостенных областей V_2 сложной формы, толщиной $2h$ (рис. 10). На области V_2 строим граничный 2сКЭ $V_2^{(2)}$, используя крупную (равномерную) сетку $H_2^{(2)}$ размерами $8h \times 8h \times 8h$ с шагом $4h$, т. е. малой размерности $3 \times 3 \times 3$ (рис. 11), узлы крупной сетки $H_2^{(2)}$ отмечены точками – 27 узлов. На рис. 10 представлена мелкая равномерная сетка 2сКЭ $V_2^{(2)}$ с шагом h . Отметим, что 8 узлов крупной сетки $H_2^{(2)}$ лежат вне области V_2 , но совпадают с узлами крупной сетки 2сКЭ $V_1^{(2)}$.

При построении 2сКЭ $V_2^{(2)}$ во всех узлах его мелкой сетки искомые перемещения u, v, w выражаем через узловые перемещения крупной сетки $H_2^{(2)}$, кроме тех узлов мелкой сетки, которые совпадают с узлами сетки $H_2^{(2)}$ (27 узлов) и с граничными узлами крупной сетки 2сКЭ

$V_1^{(2)}$ (37 узлов), которые обеспечивают стыковку 2сКЭ $V_1^{(2)}$ и $V_2^{(2)}$. На рис. 10 эти стыковочные узлы 2сКЭ $V_1^{(2)}$ отмечены точками (см. замечание 3 п. 1). Итак, 2сКЭ $V_2^{(2)}$ имеет 64 узла, в которых определяются перемещения, т. е. 2сКЭ $V_2^{(2)}$ имеет матрицу жесткости размерности 192×192 и вектор узловых сил размерности 192. В области V_q восемь одинаковых внутренних 2сКЭ $V_1^{(2)}$ и восемь граничных 2сКЭ типа $V_2^{(2)}$ образуют высокоточный МНКЭ R_p^1 .

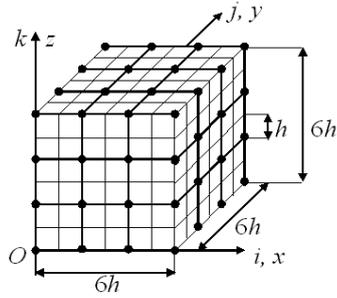


Рис. 8. Сетки внутреннего 2сКЭ $V_1^{(2)}$

Fig. 8. Grids of the inner 2gFE $V_1^{(2)}$

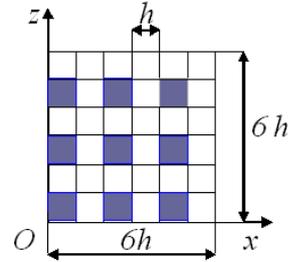


Рис. 9. Сечение 2сКЭ $V_1^{(2)}$

Fig. 9. Section 2gFE $V_1^{(2)}$

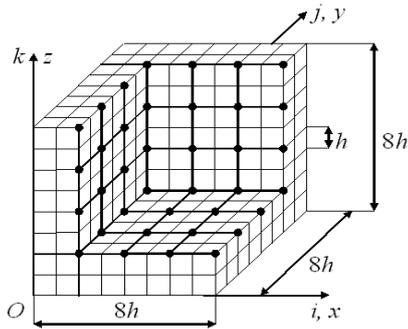


Рис. 10. Граничная область V_2 (2сКЭ $V_2^{(2)}$)

Fig. 10. Boundary region V_2 (2gFE $V_2^{(2)}$)

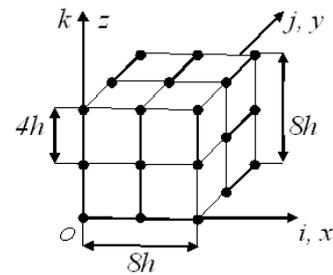


Рис. 11. Сетка $H_2^{(2)}$ 2сКЭ $V_2^{(2)}$

Fig. 11. Grid $H_2^{(2)}$ of the 2gFE $V_2^{(2)}$

Выражая в МНКЭ R_p^1 перемещения внутренних узлов (с помощью метода конденсации [6]) через перемещения граничных узлов МНКЭ R_p^1 , получаем малоразмерный МНКЭ V_p^1 1-го типа. Отметим, что МНКЭ V_p^1 1-го типа имеет такую же размерность, как стандартный МНКЭ $V_q^{(2)}$ (рис. 6), в котором с помощью метода конденсации исключены перемещения внутренних узлов.

Результаты расчетов КТ V_0^1 по ММКЭ с применением дискретных моделей R_0 , R_1 и R_2 даны в таблице, где σ_n – максимальное эквивалентное напряжение модели R_n (напряжение σ_n определяется по 4-й теории прочности [33]), N_n^o и b_n^o – размерность и ширина ленты системы уравнений ММКЭ модели R_n , $n = 0, 1, 2$. Считаем, что БМ R_0 КТ V_0^1 порождает точное решение, т. е. напряжение σ_0 отвечает точному решению. Тогда относительная погрешность $\delta_n(\%)$ для напряжения σ_n , отвечающего модели R_n , где $n = 1, 2$, определяется по формуле

$$\delta_n(\%) = 100\% \times |\sigma_0 - \sigma_n| / \sigma_0. \quad (8)$$

Анализ результатов таблицы показывает, что погрешность напряжения σ_2 , которое отвечает модели R_2 , состоящей из малоразмерных МКЭ V_p^1 1-го типа, в $k_1 = \delta_1(\%) / \delta_2(\%) = 25,122$ раз меньше погрешности напряжения σ_1 , отвечающего модели R_1 , состоящей из стандартных 2сКЭ $V_q^{(2)}$. Для приближенных решений используются скорректированные условия прочности, которые учитывают погрешность напряжений и представлены в следующей теореме.

Результаты расчетов моделей R_0, R_1, R_2

n	R_n	σ_n	$\delta_n(\%)$	N_n^o	b_n^o
0	R_0	4,999	–	55488	924
1	R_1	4,374	12,511	1200	375
2	R_2	5,0246	0,498	1200	375

Теорема. Пусть для коэффициента запаса n_0 упругого тела V_0 заданы условия прочности

$$n_1 \leq n_0 \leq n_2, \quad (9)$$

где n_1, n_2 – заданы, $n_1 > 1$, $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$, σ_T – предельное напряжение тела V_0 , σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение тела V_0 , которое отвечает точному решению задачи теории упругости, построенному для тела V_0 .

Пусть коэффициент запаса n_b тела V_0 , отвечающий приближенному решению задачи теории упругости, удовлетворяет скорректированным условиям прочности вида

$$\frac{n_1}{1 - \delta_\alpha} \leq n_b \leq \frac{n_2}{1 + \delta_\alpha}. \quad (10)$$

Тогда коэффициент запаса n_0 тела V_0 , отвечающий точному решению задачи теории упругости, удовлетворяет заданным условиям прочности (9), где $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, σ_b – максимальное эквивалентное напряжение тела V_0 , отвечающее приближенному решению задачи теории упругости, построенному для тела V_0 , и найденное с такой погрешностью δ_b , что

$$|\delta_b| \leq \delta_\alpha < C_\alpha = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} < 1, \quad (11)$$

где δ_α – верхняя оценка относительной погрешности δ_b , δ_α – задано, погрешность δ_b для напряжения σ_b определяется по формуле $\delta_b = (\sigma_0 - \sigma_b) / \sigma_0$, $0 < \delta_\alpha < 1$.

Теорема доказана в работе [34].

Следует отметить, что с увеличением погрешности δ_b , т. е. с увеличением оценки δ_α , диапазон для коэффициента запаса n_b в скорректированных условиях прочности (10) уменьшается, становится меньше диапазона заданных условий прочности (9). Например, согласно (11), при $\delta_\alpha = C_\alpha$ диапазон для скорректированных условий прочности вырождается в точку, что трудно выполнить на практике. Поэтому для практики важно применять приближенные решения с малой погрешностью. Напряжение σ_2 , отвечающее модели R_2 , отличается от напряжения σ_0 базовой модели R_0 (которое считаем точным) на 0,498 % (см. таблицу). Для малых значений погрешности максимальных эквивалентных напряжений, меньше одного процента, оценку δ_α можно принять $\delta_\alpha(\%) = 1\%$, т. е. $\delta_\alpha = 0,01$. При $\delta_\alpha = 0,01$ диапазон Δ_1 скорректированных условий прочности (10) мало отличается от диапазона Δ_2 заданных условий прочности (9), т. е.

$$\Delta_1 \approx \Delta_2, \text{ где } \Delta_1 = n_2 / (1 + \delta_\alpha) - n_1 / (1 - \delta_\alpha), \Delta_2 = n_2 - n_1.$$

Дискретная модель R_2 (и модель R_1) требует в $k_2 = (N_0 \times b_0) / (N_1^o \times b_1^o) = 113,94$ раз меньше объема памяти ЭВМ, т. е. почти в 114 раз меньше, чем БМ R_0 КТ V_0^1 (см. таблицу). Анализ результатов расчетов показывает, что предлагаемые малоразмерные МнКЭ V_p^1 (1-го типа) более эффективны, чем стандартные 2сКЭ $V_q^{(2)}$, которые имеют такие же форму, характерные размеры, размерность и такую же неоднородную структуру, как малоразмерные.

Важно отметить следующее. Согласно замечанию 2 (см. п. 1), при построении МнКЭ можно использовать сколь угодно мелкую базовую сетку. Тогда крупные сетки малоразмерного МнКЭ (1-го типа) могут иметь сколь угодно высокую размерность и, следовательно, породить на внутренних областях МнКЭ локальные аппроксимации перемещений сколь угодно высокого порядка и число внутренних областей в МнКЭ возрастает. При этом порядок локальных аппроксимаций перемещений на граничных областях и их число не меняется. Это приводит к увеличению порядка точности малоразмерных МнКЭ при постоянстве их размерности. Однако порядок точности малоразмерных МнКЭ не может быть сколь угодно большим, так как реализация метода конденсации, связанная с матрицами высокого порядка, в этом случае требует большого объема памяти ЭВМ, который ограничен.

3. Построение малоразмерных МнКЭ с применением образующих КЭ

Основные положения процедуры построения малоразмерных МнКЭ 2-го типа с применением образующих КЭ показаны в следующем примере.

Пример 2. Основные положения построения малоразмерных МнКЭ 2-го типа с применением образующих КЭ покажем на примере высокоточного лагранжевого 2сКЭ $V_3^{(2)}$ размерами $9h \times 10h \times 9h$ (рис. 12), где h – задано, который расположен в декартовой системе координат $Oxyz$. Рассматриваемый 2сКЭ $V_3^{(2)}$ армирован непрерывными волокнами сечением $h \times h$, которые параллельны оси Oy . На рис. 13 показано сечение 2сКЭ $V_3^{(2)}$, сечения волокон закрашены, расстояние между волокнами равно h . Считаем, что между компонентами неоднородной структуры 2сКЭ связи идеальны, а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающие трехмерной задаче линейной теории упругости [16], т. е. в области 2сКЭ $V_3^{(2)}$ реализуется трехмерное НДС.

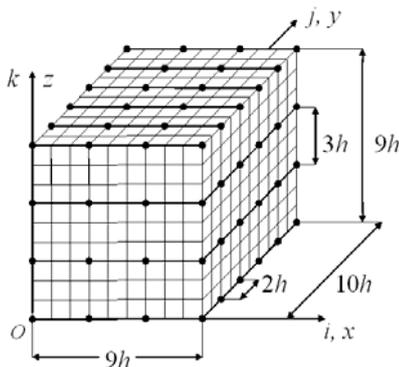


Рис. 12. Сетки 2сКЭ $V_3^{(2)}$

Fig. 12. Grids of the 2gFE $V_3^{(2)}$

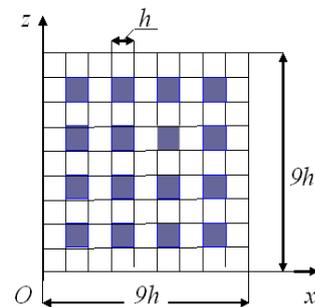


Рис. 13. Сечение 2сКЭ $V_3^{(2)}$

Fig. 13. Section of the 2gFE $V_3^{(2)}$

Область 2сКЭ $V_3^{(2)}$ представляем БМ R_d^3 , состоящей из однородных 1сКЭ V_j^h первого порядка формы куба со стороной h [6; 7], в которых реализуется трехмерное НДС [16]. На рис. 12

показано базовое разбиение R_d^3 2сКЭ $V_3^{(2)}$, которое учитывает неоднородную структуру 2сКЭ $V_3^{(2)}$ и порождает мелкую (базовую) узловую равномерную сетку h_d^3 размерности $10 \times 11 \times 10$ с шагом h . На мелкой сетке h_d^3 определяем крупную равномерную сетку H_d^3 размерности $4 \times 6 \times 4$ с шагом $3h$ по осям Ox , Oz и с шагом $2h$ по оси Oy . На рис. 12 узлы крупной сетки H_d^3 отмечены точками – 96 узлов. В данном случае с помощью полиномов Лагранжа [6] на крупной сетке H_d^3 аппроксимирующие функции u_2, v_2, w_2 для перемещений u, v, w 2сКЭ $V_3^{(2)}$ представим в форме

$$u_2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^4 N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^4 N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^4 N_{ijk} w_{ijk}, \quad (12)$$

где $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$ – искомые значения функций u_2, v_2, w_2 в узле i, j, k крупной сетки H_d^3 ; i, j, k – координаты целочисленной системы координат ijk , которая введена для узлов крупной сетки H_d^3 (рис. 12); N_{ijk} – базисная функция узла i, j, k сетки H_d^3 , $i, k = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 6$, где

$$N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z), \quad (13)$$

где $L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^4 \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}$, $L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^6 \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}$, $L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^4 \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}$; x_i, y_j, z_k – координаты

узла i, j, k крупной сетки H_d^3 в системе координат $Oxyz$.

Введем обозначения: $N_\beta = N_{ijk}$, $u_\beta = u_{ijk}$, $v_\beta = v_{ijk}$, $w_\beta = w_{ijk}$, где $i, k = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 6$, т. е. имеем $\beta = 1, \dots, 96$. Тогда выражения (12) принимают вид

$$u_2 = \sum_{\beta=1}^{96} N_\beta u_\beta, \quad v_2 = \sum_{\beta=1}^{96} N_\beta v_\beta, \quad w_2 = \sum_{\beta=1}^{96} N_\beta w_\beta. \quad (14)$$

Используя (12)–(14), по процедуре п. 1 для 2сКЭ $V_3^{(2)}$ определяем матрицу жесткости (размерности 288×288) и вектор узловых сил (размерности 288), т. е. размерность 2сКЭ $V_3^{(2)}$ равна 288. Для понижения размерности 2сКЭ $V_3^{(2)}$ применяем метод конденсации [6]. Выражаем перемещения внутренних узлов крупной сетки H_d^3 через перемещения узлов сетки h_d^3 , которые лежат на границе 2сКЭ $V_3^{(2)}$. В результате получаем 2сКЭ $V_3^{(2)}$, который имеет 240 узловых неизвестных. Итак, размерность 2сКЭ $V_3^{(2)}$ равна 240. Отметим, что 2сКЭ $V_3^{(2)}$ является высокоточным, так как он имеет 3-й порядок аппроксимации перемещений по осям Ox, Oz и 5-й порядок – по оси Oy .

Кратко рассмотрим процедуру построения малоразмерного 2сКЭ $V_4^{(2)}$ 2-го типа на основе высокоточного стандартного лагранжевого 2сКЭ $V_3^{(2)}$ (рис. 12), т. е. высокого порядка точности, с применением образующего КЭ V_L размерами $9h \times 9h$. На рис. 14 показаны мелкая сетка, отвечающая 2сКЭ $V_3^{(2)}$, и сетка КЭ V_L , узлы которой отмечены точками – 12 узлов.

Согласно методу образующих КЭ [21], область 2сКЭ $V_4^{(2)}$ получается путем параллельного перемещения образующего КЭ V_L квадратной формы вдоль оси Oy на заданное расстояние $d = 10h$ (рис. 15). Сетка образующего КЭ V_L образует крупную сетку H_d^4 2сКЭ $V_4^{(2)}$. Отметим, что неоднородные структуры 2сКЭ $V_3^{(2)}$ и $V_4^{(2)}$ одинаковы. Поэтому БМ R_d^4 2сКЭ $V_4^{(2)}$, как и

БМ 2сКЭ $V_3^{(2)}$, состоит из однородных 1сКЭ V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h , где $j=1, \dots, M$, где M – общее число 1сКЭ V_j^h , $M=810$. БМ R_d^4 учитывает неоднородную структуру и сложную форму 2сКЭ $V_4^{(2)}$ и порождает мелкую сетку h_d^4 .

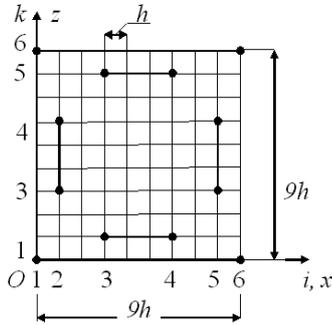


Рис. 14. Сетки образующего КЭ V_L
 Fig. 14. Grids of the generating FE V_L

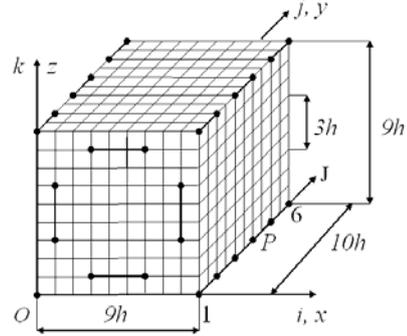


Рис. 15. Сетки 2сКЭ $V_4^{(2)}$
 Fig. 15. Grids of the 2gFE $V_4^{(2)}$

Согласно методу образующих КЭ, общее число узлов N_d крупной сетки H_d^4 2сКЭ $V_4^{(2)}$, которая вложена в мелкую сетку h_d^4 , определяется по формуле $N_d = n_{xz}n_y$, где n_{xz} – число узлов образующего КЭ V_L , для которого $n_{xz}=12$, n_y – число узлов крупной сетки H_d^4 , лежащих на оси Oy (на оси j), 2сКЭ $V_4^{(2)}$ имеет 6 узлов на оси Oy , т. е. $n_y=6$, тогда $N_d=12 \times 6=72$. Узлы крупной сетки H_d^4 равномерно расположены по оси Oy с шагом $2h$. На рис. 15 узлы сетки H_d^4 отмечены точками – 72 узла. Для 2сКЭ $V_4^{(2)}$ введены две локальные системы координат: декартова $Oxyz$ и для узлов крупной сетки H_d^4 – целочисленная ijk , где $i, j, k=1, \dots, 6$ (рис. 14, 15). В области 1сКЭ V_j^h НДС описывается уравнениями трехмерной задачи линейной теории упругости [16]. Следовательно, в области 2сКЭ $V_4^{(2)}$ реализуется трехмерное НДС.

Поскольку сетка образующего КЭ V_L имеет 12 узлов (построенная на мелкой сетке 2сКЭ $V_3^{(2)}$, т. е. на мелкой сетке образующего КЭ V_L), которые на рис. 14 отмечены точками, то для описания перемещений в образующем КЭ V_L используем полином $P(x, z)$ 3-го порядка, который в локальной декартовой системе координат Oxz (рис. 14) имеет вид [6]:

$$P(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2 + a_9xz^3 + a_{10}x^3z + a_{11}x^3 + a_{12}z^3, \quad (15)$$

где a_i – постоянные, $i=1, \dots, 12$.

Базисную функцию N_{ijk} для узла i, j, k крупной сетки H_d^4 согласно методу образующих КЭ [20; 21] определяем в виде

$$N_{ijk}(x, y, z) = N_{ik}(x, z)L_j(y), \quad (16)$$

где N_{ik} – базисная функция узла i, k образующего КЭ V_L , отвечающая полиному $P(x, z)$ вида (15), $i, k=1, \dots, 6$, $L_j(y)$ – полином Лагранжа 5-го порядка:

$$L_j(y) = \prod_{p=1, p \neq j}^6 \frac{y - y_p}{y_j - y_p}, \quad (17)$$

где y_p – координата p -го узла сетки H_d^4 , лежащего на оси J , $j // J$; $p, j = 1, \dots, 6$, $J = \overline{1, 6}$ (рис. 15).

Используя (15) – (17), на крупной сетке H_d^4 аппроксимирующие функции u_2, v_2, w_2 для перемещений u, v, w 2сКЭ $V_4^{(2)}$ формально представим

$$u_2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 N_{ijk} w_{ijk}, \quad (18)$$

где $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$ – искомые значения функций u_2, v_2, w_2 в узле i, j, k крупной сетки H_d^4 ; i, j, k – координаты целочисленной системы координат ijk , которая введена для узлов крупной сетки H_d^4 (рис. 15); N_{ijk} – базисная функция узла i, j, k сетки H_d^4 , $i, k, j = 1, \dots, 6$.

Обозначим $N_\beta = N_{ijk}$, $u_\beta = u_{ijk}$, $v_\beta = v_{ijk}$, $w_\beta = w_{ijk}$, где $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$ – искомые перемещения в узле i, j, k сетки H_d^4 ; $i, k = 1, 6$; $i = 3, 4$, $k = 2, 5$; $i = 2, 5$, $k = 3, 4$; $j = 1, \dots, 6$, рис. 14, 15, т. е. $\beta = 1, \dots, 72$. Тогда функции перемещений (18) для сетки H_d^4 принимают вид

$$u_2 = \sum_{\beta=1}^{72} N_\beta u_\beta, \quad v_2 = \sum_{\beta=1}^{72} N_\beta v_\beta, \quad w_2 = \sum_{\beta=1}^{72} N_\beta w_\beta, \quad (19)$$

где $N_\beta, u_\beta, v_\beta, w_\beta$ – базисная функция и перемещения β -го узла сетки H_d^4 , $\beta = \overline{1, 72}$.

Используя (15)–(19), по процедуре п. 1 для 2сКЭ $V_4^{(2)}$ определяем матрицу жесткости (размерности 216×216) и вектор узловых сил (размерности 216). Для понижения размерности 2сКЭ $V_4^{(2)}$ применяем метод конденсации [6], т. е. выражаем перемещения внутренних узлов крупной сетки H_d^4 через перемещения узлов сетки H_d^4 , которые лежат на границе 2сКЭ $V_4^{(2)}$. В результате получаем 2сКЭ $V_4^{(2)}$ (2-го типа), имеющий 120 узловых неизвестных. Итак, размерность 2сКЭ $V_4^{(2)}$ равна 120. В силу (15)–(17) 2сКЭ $V_4^{(2)}$ имеет 3-й порядок аппроксимации перемещений по осям Ox, Oz и 5-й порядок – по оси Oy , т. е. является высокоточным. Отметим, что 2сКЭ $V_4^{(2)}$ имеет такой же порядок аппроксимаций перемещений по осям Ox, Oy, Oz , такие же размеры $9h \times 10h \times 9h$ и неоднородную структуру, как стандартный 2сКЭ $V_3^{(2)}$, но размерность 2сКЭ $V_4^{(2)}$, равная 120, в 2 раза меньше размерности 2сКЭ $V_3^{(2)}$, размерность которого равна 240. Итак, малоразмерные 2сКЭ $V_4^{(2)}$ 2-го типа порождают дискретные модели КТ меньшей размерности, чем стандартные 2сКЭ $V_3^{(2)}$. Следует отметить следующее. Если крупная и мелкая сетки стандартного высокоточного лагранжевого МнКЭ имеют большую размерность, то при построении аппроксимирующих функций перемещений для образующего КЭ целесообразно использовать локальные аппроксимации перемещений, построенные на его мелкой сетке. Особенности малоразмерных МнКЭ 1-го и 2-го типов состоят в следующем. Малоразмерные МнКЭ 1-го типа имеют более высокий порядок точности, чем стандартные, что позволяет проектировать дискретные модели КТ малой размерности, которые порождают напряжения с малой погрешностью. Малоразмерные МнКЭ 2-го типа имеют такой же порядок точности, как стандартные высокоточные МнКЭ, но образуют дискретные модели меньшей размерности, чем стандартные.

Заключение

В данной работе предлагается метод локальных аппроксимаций (МЛА) для построения высокоточных МнКЭ малой размерности, кратко – малоразмерных МнКЭ, которые проектируются на

базе известных (стандартных) МКЭ. Рассмотрены малоразмерные МКЭ двух типов. Построение малоразмерные МКЭ 1-го типа проводится с применением локальных аппроксимаций перемещений, определяемых на подобластях МКЭ, 2-го типа – с применением образующих конечных элементов. Расчеты композитных тел (КТ) показывают, что малоразмерные МКЭ 1-го типа порождают максимальные эквивалентные напряжения, погрешности которых в 25–50 раз меньше погрешностей аналогичных напряжений, полученных с помощью стандартных МКЭ, которые имеют такие же размерности, формы, размеры и неоднородные структуры, как малоразмерные. Малоразмерные МКЭ 1-го типа для крупных дискретных моделей КТ порождают максимальные эквивалентные напряжения с малой погрешностью. Малоразмерные МКЭ 2-го типа образуют дискретные модели КТ меньшей размерности, чем стандартные.

Библиографические ссылки

1. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. 715 p.
2. Голованов А. И., Тюленева О. И., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М. : Физматлит, 2006. 392 с.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М. : Стройиздат, 1982. 448 с.
4. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М. : Высшая школа, 1985. 392 с.
5. Секулович М. Метод конечных элементов. М. : Стройиздат, 1993. 664 с.
6. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов: М. : Мир, 1981. 304 с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975. 542 с.
8. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М. : Мир, 1982. 232 с.
9. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия: Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, кн. 4. С. 530–543.
10. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. Vol. 158, No. 1. Art. 012067. P. 1–9.
11. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2018. № 2. С. 90–103.
12. Работнов Ю. Н. Механика деформированного твердого тела. М. : Наука, 1988. 711 с.
13. Демидов С. П. Теория упругости. М. : Высшая школа, 1979. 432 с.
14. Тимошенко С. П., Дж. Гудьер. Теория упругости. М. : Наука, 1979. 560 с.
15. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М. : Высшая школа, 1968. 512 с.
16. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высш. школа, 1982. 264 с.
17. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 224 с.
18. Матвеев А. Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // Прикладная механика и техническая физика. 2004. № 3. С. 161–171.
19. Матвеев А. Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Известия АлтГУ. Сер.: Математика и механика. 2014. № 1/1. С. 80–83. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.
20. Матвеев А. Д. Метод образующих конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2018. № 6. С. 141–154.

21. Матвеев А. Д. Построение многосеточных конечных элементов для расчета оболочек, пластин и балок на основе образующих конечных элементов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 3. С. 48–57. DOI: 10/15593/pern.mech/2019.3.05.
22. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М. : Физматлит, 2008. 432 с.
23. Немировский Ю. В., Резников Б. С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1984. 164 с.
24. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. М. : Наука, 1985. 201 с.
25. Алфутов Н. А., Зиновьев А. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.
26. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М. : МГУ, 1984. 336 с.
27. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск : Наука, 2001. 288 с.
28. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Киев : Наукова думка, 1985. 302 с.
29. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988. 269 с.
30. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Т. 3. Прикладные исследования / А.Н. Гузь, И.В. Игнатов, А.Г. Гирченко и др. Киев : Наукова думка, 1983. 262 с.
31. Матвеев А. Д. Определение фиктивных модулей упругости композитов сложной структуры с отверстиями // Вестник КрасГАУ. 2006. № 12. С. 212–222.
32. Матвеев А. Д. Определение фиктивных модулей упругости для трехмерных композитов на основе жесткостных соотношений однородных конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2008. № 5. С. 34–47.
33. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев, Наук. думка, 1975.
34. Матвеев А. Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности // Известия АлтГУ. Математика и механика. 2017. № 4. С. 116–119. DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-21.

References

1. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013, 715 p.
2. Golovanov A. I., Tiuleneva O. I., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksii* [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 392 p.
3. Bate K., Vilson E. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov* [Numerical analysis methods and finite element method]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1982, 448 p.
4. Obratsov I. F., Savel'ev L. M., Khazanov Kh. S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov* [Finite element method in problems of aircraft structural mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1985, 392 p.
5. Sekulovich M. *Metod konechnykh elementov* [Finite element method]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1993, 664 p.
6. Norri D., de Friz Zh. *Vvedenie v metod konechnykh elementov* [Introduction to the finite element method]. Moscow, Mir Publ., 1981, 304 p.
7. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 544 p.
8. Fudzii T., Dzako M. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1982, 232 p.

9. Matveev A. D. [The method of multigrid finite elements in the calculations of three-dimensional homogeneous and composite bodies]. Uchen. zap. Kazan. un-ta. Seriya: Fiz.-matem. Nauki. 2016, Vol. 158, No. 4, P. 530–543 (In Russ.).
10. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. IOP Conf, Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016, Vol. 158, No. 1, Art. 012067, P. 1–9.
11. Matveev A. D. [Multigrid finite element Method]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 2, P. 90–103 (In Russ.).
12. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformirovannogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformed solid]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 711 p.
13. Demidov S. P. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979, 432 p.
14. Timoshenko S. P., Dzh. Gud'er. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 560 p.
15. Bezuhov N. I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti* [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1968, 512 p.
16. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1982, 264 p.
17. Rozin L. A. *Variacionnye postanovki zadach dlya uprugih sistem* [Variational problem statements for elastic systems]. Leningrad, 1978, 224 p.
18. Matveev A. D. [Multigrid modeling of composites of irregular structure with a small filling ratio]. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2004, No. 3, P. 161–171 (In Russ.).
19. Matveev A. D. Postroenie slozhnyh mnogosetochnyh konechnykh elementov s neodnorodnoj i mikroneodnorodnoj strukturoy [The construction of complex multigrid finite element heterogeneous and micro-inhomogeneities in structure]. *Izvestiya AltGU. Seriya: Matematika i mekhanika*. 2014, No. 1/1, P. 80–83 (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.
20. Matveev A. D. [Method of generating finite elements]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 6, P. 141–154 (In Russ.).
21. Matveev A. D. [Construction of multigrid finite elements to calculate shells, plates and beams based on generating finite elements]. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019, No. 3, P. 48–57 (In Russ.). DOI: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.
22. Golushko S. K., Nemirovskij Yu. V. Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugih kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniya [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of rotation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 432 p.
23. Nemirovskij Yu. V., Reznikov B. S. Prochnost' elementov konstrukcij iz kompozitnykh materialov [Strength of structural elements made of composite materials]. Novosibirsk, Nauka Publ., Sibirskoe otdelenie, 1984, 164 p.
24. Kravchuk A. S., Majboroda V. P., Urzhumcev Yu. S. *Mekhanika polimernykh i kompozicionnykh materialov* [Mechanics of polymer and composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 201 p.
25. Alfutov N. A., Zinov'ev A. A., Popov B. G. Raschet mnogoslojnykh plastin i obolochek iz kompozicionnykh materialov [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 264 p.
26. Pobedrya B. E. *Mekhanika kompozicionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MGU Publ., 1984, 336 p.
27. Andreev A. N., Nemirovskij Yu. V. *Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustojchivost', kolebaniya* [Multilayer anisotropic shells and plates. Bending, stability, vibration]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2001, 288 p.
28. Vanin G. A. *Mikromekhanika kompozicionnykh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985, 302 p.
29. Vasil'ev V. V. *Mekhanika konstrukcij iz kompozicionnykh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 269 p.

30. Guz' A. N., Ignatov I. V., Girchenko A. G. et al. *Mekhanika kompozitnyh materialov i elementov konstrukciy*[Mechanics of composite materials and structural elements]. Vol. 3. Prikladnye issledovaniya. Kiev, Naukova dumka Publ., 1983, 262 p.

31. Matveev A. D. [Determination of fictitious elastic modulus of composites of complex structure with holes]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2006, No. 12, P. 212–222 (In Russ.).

32. Matveev A. D. [Determination of fictitious elastic modulus for three-dimensional composites based on the stiffness ratios of homogeneous finite elements]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2008, No. 5, P. 34–47(In Russ.).

33. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Hand book of resistance materials']. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1975, 704 p.

34. Matveev A. D. [Calculation of elastic structures using the adjusted terms of strength]. *Izvestiya AltGU*. 2017, No. 4, P. 116–119. DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-21.

© Матвеев А. Д., 2022

Матвеев Александр Данилович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник; Институт вычислительного моделирования СО РАН. E-mail: mtv241@mail.ru.

Matveev Alexander Danilovich – Cand. Sc., associate Professor, senior researcher; Institute of computational modeling SB RAS. E-mail: mtv241@mail.ru.
