УДК 539.374
Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-417-422

Для цитирования: Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Законы сохранения и решения первой краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 417–422. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-417-422.

For citation: Senashov S. I., Savostyanova I. L. [Conservation laws and solutions of the first boundary value problem for equations of two-dimensional elasticity theory]. *Siberian Aerospace Journal.* 2022, Vol. 23, No. 3, P. 417–422. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-417-422.

Законы сохранения и решения первой краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости

С. И. Сенашов*, И. Л. Савостьянова

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31
*E-mail: sen@sibsau.ru

Известно, что если система дифференциальных уравнений допускает группу непрерывных преобразований, то система может быть представлена в виде совокупности двух систем дифференциальных уравнений. Как правило, эти системы имеют меньший порядок, чем исходная система. Первая система – автоморфная, характеризуется тем, что все ее решения получаются из одного решения с помощью преобразований этой группы. Вторая система – разрешающая, ее решения под действием группы переходят сами в себя. Разрешающая система несет основную информацию об исходной системе. В данной работе изучаются автоморфная и разрешающая системы, двумерные стационарные уравнения упругости, которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Впервые построены бесконечные серии законов сохранения для разрешающей и автоморфной систем уравнений. Поскольку двумерная система уравнений упругости линейна, то таких законов имеется бесконечно много. В данной работе построена бесконечная серия законов сохранения линейных по первым производным. Именно эти законы позволили решить первую краевую задачи для уравнений теории упругости в двумерном случае. Эти решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по контуру исследуемой области.

Ключевые слова: двумерная упругость, законы сохранения, решение краевых задач.

Conservation laws and solutions of the first boundary value problem for equations of two-dimensional elasticity theory

S. I. Senashov*, I. L. Savostyanova

[1]Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
* E-mail: sen@sibsau.ru

If a system of differential equations admits a group of continuous transformations, then the system can be represented as a set of two systems of differential equations, it is known. As a rule, these systems have a smaller order than the original system. The first system is automorphic, characterized by the fact that all its solutions are obtained from a single solution using transformations of this group. The second system is permissive, its solutions, under the action of the group, pass into themselves. The resolving system carries basic information about the source system. Automorphic and resolving systems, two-dimensional stationary elasticity equations are studied in this work. They are systems of first-order differential equations. Infinite *series of conservation laws for a resolving system of equations and an automorphic system are constructed for the first time in this work. Since the two-dimensional system of elasticity equations is linear, there are infinitely many such laws. In this paper, an infinite series of linear conservation laws with respect to the first derivatives is constructed. It was these laws that made it possible to solve the first boundary value problem for the equations of elasticity theory in the two-dimensional case. These solutions are constructed in the form of quadratures, these quadratures are calculated along the contour of the studied area.*

Keywords: two-dimensional elasticity, conservation laws, solution of boundary value problems.

Введение

Линейные уравнения теории упругости с групповой точки зрения изучаются уже достаточно давно [1; 2]. Сначала была найдена группа точечных преобразований и перечислены все инвариантные решения [2]. Далее было выполнено групповое расслоение уравнений Ламе [3]. Хотя техника выполнения группового расслоения известна уже давно [1], не для многих систем уравнений оно выполнено. В этом смысле уравнения теории упругости составляют приятное исключение. Групповое расслоение позволило лучше понять, почему методы комплексного переменного так широко используются в двумерной теории упругости. Это происходит потому, что разрешающая система для двумерных уравнений теории упругости есть система уравнений Коши – Римана. В [4; 5] законы сохранения впервые использованы для решения краевых задач, в частности, уравнений пластичности. В [6] построены законы сохранения для плоской теории упругости, но они не были использованы для решения краевых задач. В предлагаемой работе построены новые законы сохранения для разрешающей и автоморфной систем. На их основе решена первая краевая задача для двумерных уравнений упругости.

Постановка задачи

Пусть предлагается следующая связь тензоров напряжений и тензора деформаций:

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22}, \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{11},\end{gathered} \tag{1}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; $\lambda > 0, \mu > 0$ – постоянные Ламе, т. е. (1) есть классический закон Гука для изотропного однородного случая.

Подставляя (1) в уравнения равновесия, в случае отсутствия массовых сил получаем

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \lambda v_{xy} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) = 0, \\ \mu(u_{xy} + v_{xy}) + (\lambda + 2\mu)v_{yy} + \lambda u_{xy} = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где u, v – компоненты вектора деформаций, индексы внизу, если не указано иное, означают производные по соответствующим переменным.

Известно, что система уравнений (2) эллиптического типа. Это определяет вид законов сохранения и решение краевых задач. Групповые свойства дифференциальных уравнений описаны в работе [1]. Групповые свойства уравнений упругости изучены в работе [2]. В работах [7; 8] изучались групповые свойства трехмерных уравнений линейной теории упругости и асимметричных уравнений упругости в динамическом случае. Там, в частности, показано, что система (2) допускает бесконечную группу точечных преобразований, порождаемую операторами:

$$X = h^1\partial_u + h^2\partial_v, \tag{3}$$

где h^1, h^2 – произвольное решение уравнений Коши – Римана:

$$h^1_x + h^2_y = 0, \;\; h^1_y - h^2_x = 0. \tag{4}$$

Сделаем групповое расслоение системы уравнений (2) по методу [1] на подалгебре, порождаемой (3). Для этого продолжим операторы (3) на первые производные. Имеем

$$\underset{1}{X} = X + h^1_x\partial_{u_x} + h^2_y\partial_{v_y} + h^1_y\partial_{u_y} + h^2_x\partial_{v_x}, \tag{5}$$

Дифференциальные инварианты для (5), с учетом (4), имеют вид

$$I_1 = x, \;\; I_2 = y, I_3 = u_x + v_y, I_4 = u_y - v_x. \tag{6}$$

Тогда автоморфная система уравнений имеет вид

$$u_x + v_y = \theta(x,y),\ \ u_y - v_x = \omega(x,y). \tag{7}$$

Напомним некоторые свойства автоморфных систем. Любое решение автоморфной системы может быть получено из одного решения этой системы с помощью преобразований, порождаемых оператором (3).

Подставляя (7) в (2) получаем разрешающую систему

$$F_1 = (\lambda + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y = 0,\ \ F_2 = (\lambda + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x = 0, \tag{8}$$

Повторяя почти дословно рассуждения из [7], можно утверждать, что система (8) равносильна системе уравнений (2).

Поэтому построив решение системы (8) мы получим решение системы (2).

Пусть для системы (8) поставлена следующая краевая задача:

$$\theta|_L = \theta_0(x,y),\ \ \omega|_L = \omega_0(x,y), \tag{9}$$

где L – некоторая гладкая замкнутая кривая, $\theta_0(x,y)$, $\omega_0(x,y)$ – известные гладкие функции.

Для решения этой задачи построим законы сохранения для системы уравнений (8).

Законы сохранения

В силу линейности системы (8) она будет иметь бесконечное число законов сохранения. В работе будут найдены только те законы сохранения, которые позволят решить краевую задачу (9).

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (8) назовем выражение вида

$$A_x(x,y,\theta,\omega) + B_y(x,y,\theta,\omega) = \alpha F_1 + \beta F_2 = 0, \tag{10}$$

где α,β – некоторые функции, которые не равны тождественно нулю одновременно. A,B называются компонентами сохраняющегося тока.

Более подробная информация по построению законов сохранения для произвольных систем дифференциальных уравнений может быть найдена в [8–10]. Заметим, что впервые законы сохранения для уравнений линейной теории упругости были найдены в работах [11; 12], но их невозможно было использовать для решения конкретных краевых задач.

Предположим, что компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = a^1\theta + a^2\omega,\ \ B = b^1\theta + b^2\omega, \tag{11}$$

где a^1, a^2, b^1, b^2 – некоторые функции от *x,y*.

Подставляя (11) в (10), после несложных преобразований получаем

$$\begin{gathered} a^1 = \alpha(\lambda + 2\mu),\ \ a^2 = \beta\mu,\ \ b^1 = \beta(\lambda + 2\mu),\ \ a^2 = -\alpha\mu, \\ a^1_x + b^1_y = 0,\ a^2_x + b^2_y = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Отсюда имеем

$$\alpha_x + \beta_y = 0,\ \ \alpha_y - \beta_x = 0. \tag{13}$$

Из (10) следует

$$\iint\limits_S (A_x + B_y)dxdy = \oint\limits_L -Ady + Bdx. \tag{14}$$

Решение первой краевой задачи

Пусть $(x_0, y_0) \in S$, такая точка, в которой компоненты сохраняющегося тока имеют особенности, тогда из (14) следует

$$\oint\limits_L -Ady + Bdx = -\oint\limits_\varepsilon -Ady + Bdx., \tag{15}$$

где $\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ – окружность радиуса ε вокруг точки $(x_0, y_0) \in S$. Вычислим интеграл в правой части (15) для разных решений уравнений Коши – Римана. В качестве решений выберем такие, которые имеют особенность в точке $(x_0, y_0) \in S$. Пусть

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},\ \ \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \tag{16}$$

тогда из правой части (15) имеем

$$\oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx = \oint_{\varepsilon} -(\alpha(\lambda+2\mu)\theta + \beta\mu\omega)dy + (\alpha\mu\omega + \beta(\lambda+2\mu)\theta)dx. \tag{17}$$

Подставим (16) в (17) и сделаем замену переменных по формулам $x - x_0 = \varepsilon\cos\varphi$, $y - y_0 = \varepsilon\sin\varphi$, получаем

$$\oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx = \int_0^{2\pi} [-((\lambda+2\mu)\theta + \mu\omega) + 2\sin\varphi\cos\varphi\mu\omega)]d\varphi = \\ = -2\pi[(\lambda+2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0)]. \tag{18}$$

В формуле (18) устремили $\varepsilon \to 0$ и использовали теорему о среднем.

Теперь сделаем аналогичные вычисления, положив

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},\ \beta = \frac{x - x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

В результате получим

$$\oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx = -2\pi\mu\omega(x_0, y_0). \tag{19}$$

Формулы (18) и (19) позволяют, с учетом граничных условий (9) и равенства (15), определить значения функций θ и ω в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$. Они имеют следующий вид:

$$2\pi[(\lambda+2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0)] = \oint_L -\frac{(\lambda+2\mu)(x-x_0)\theta_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}dy + \frac{\mu(y-y_0)\omega_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}dx,$$

$$2\pi\mu\omega(x_0, y_0)] = \oint_L \frac{(\lambda+2\mu)(y-y_0)\theta_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}dy + \frac{\mu(x-x_0)\omega_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}dx.$$

Теперь, после восстановления решений разрешающей системы, найдем решения автоморфной системы, т. е. решения исходной системы уравнений (2). Имеем

$$F_3 = u_x + v_y - \theta(x, y) = 0,\ F_4 = u_y - v_x - \omega(x, y) = 0. \tag{20}$$

Здесь в правой части стоят известные функции, которые найдены в предыдущем пункте. Найдем законы сохранения уравнений (20) в следующем виде:

$$A = a^3\theta + a^4\omega + c^1,\ B = b^3\theta + b^4\omega + c^2, \tag{21}$$

где $a^3, a^4, b^3, b^4, c^1, c^2$ – некоторые функции от x, y.

Имеем

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \alpha F_3 + \beta F_4 = 0,. \tag{22}$$

Расщепляя систему уравнений (22), получаем

$$a^3 = \alpha,\ a^4 = -\beta,\ b^3 = \beta,\ b^4 = \alpha, \\ a^3_x + b^3_y = 0,\ a^4_x + b^4_y = 0,\ c^1_x + c^2_y = -\alpha\theta - \beta\omega. \tag{23}$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0,\ \alpha_y - \beta_x = 0. \tag{24}$$

Пусть для системы (2) поставлена следующая краевая задача:

$$u|_L = u_0(x, y),\ v|_L = v_0(x, y),. \tag{25}$$

Рассмотрим закон сохранения в виде

$$\oint_L -Ady + Bdx = -\oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx. \tag{26}$$

Пусть решение уравнений (24) имеет вид

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},\ \beta = \frac{y - y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},. \tag{27}$$

Подставляем (27) в правую часть (26), получаем

$$\oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx = \oint_{\varepsilon} -(\alpha u - \beta v + c^1)dy + (\beta u + \alpha v + c^2)dx =$$
$$= \oint_{\varepsilon} -(\alpha\cos\phi - \beta\sin\phi + c^1)dy - (\beta\sin\phi + \alpha\cos\phi + c^2)dx = -2\pi u(x_0, y_0)\,. \tag{28}$$

Пусть решение уравнений (24) имеет вид

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},\ \ \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},\,. \tag{29}$$

Подставляем (29) в правую часть (26), получаем

$$\oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx = \oint_{\varepsilon} -(\alpha u - \beta v + c^1)dy + (\beta u + \alpha v + c^2)dx =$$
$$= \oint_{\varepsilon} -(-u\sin\phi - v\cos\phi + c^1)dy - (u\cos\phi - v\sin\phi + c^2)dx = -2\pi v(x_0, y_0)\,. \tag{30}$$

В результате получаем формулы для вычисления компонент вектора деформации

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_{L} -Ady + Bdx, \qquad 2\pi v(x_0, y_0) = \oint_{L} -Ady + Bdx, \tag{31}$$

где $c^1 = \int \alpha\theta dx$, $c^2 = \int \beta\omega dx$.

Заключение

В статье получены новые бесконечные серии законов сохранения для разрешающей системы уравнений, а также для автоморфной системы, построенные для двумерных уравнений упругости. Эти законы позволили построить аналитическое решение краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости в стационарном случае. В статье продолжено решение краевых задач с помощью законов сохранения, начатое в работах [13–15].

Библиографические ссылки

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 399 с.
2. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск : Наука, 1983. 239 с.
3. Прудников В. Ю., Чиркунов Ю. А. Групповое расслоение уравнений Ламе // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52, № 3. С. 471–477.
4. Сенашов С. И. О законах сохранения уравнений пластичности // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320, № 3. С. 606–608.
5. Сенашов С. И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений пластичности // Доклады РАН. 1995. Т. 345, № 5. С. 619–620.
6. Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Законы сохранения уравнений плоской теории упругости // Вестник СибГАУ. 2014. № 1(53). С. 79–81.
7. Бельмецов Н. Ф., Чиркунов Ю. А. Точные решения уравнений динамической асимметричной модели теории упругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 4. С. 38–50.
8. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : СО РАН, 201 с.
9. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math.Soc. 1988. P. 415–439.
10. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Симметрии и законы сохранения. М. : Фактор, 1996. 461 с.
11. Olver P. Conservation laws in elasticity 1. General result // Arch. Rat. Mech. Anal. 1984. Vol. 85. P. 111–129.
12. Olver P. Conservation laws in elasticity 11.Linear homogeneous isotropic elastostatic // Arch. Rat. Mech. Anal. 1984. Vol. 85. P. 131–160.
13. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Об упругом кручении вокруг трех осей // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 1. С. 120–125.

14. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Intern. J. Non. Lin. Mech. 2019. Vol. 108. P. 7–10.

15. Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol. 62, No. 1. P. 179–186.

References

1. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij* [Group analysis of differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 399 p.

2. Annin B. D., Bytev V. O., Senashov S. I. *Gruppovye svojstva uravnenij uprugosti i plastichnosti* [Group properties of elasticity and plasticity equations]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 239 p.

3. Prudnikov V. Yu. Chirkunov Yu. A. [Group bundle of Lame equations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1988, Vol. 52, No. 3, P. 471–477 (In Russ.).

4. Senashov S. I. [On the laws of conservation of plasticity equations]. *Doklady AN SSSR*. 1991, Vol. 320, No. 3, P. 606–608 (In Russ.).

5. Senashov S. I. [Conservation laws and the exact solution of the Cauchy problem for plasticity equations]. *Doklady RAN*. 1995, Vol. 345, No. 5, P. 619–620 (In Russ.).

6. Senashov S. I., Filyushina E. V. [Conservation laws of the equations of the plane theory of elasticity]. *Vestnik SibGAU*. 2014, No. 1(53), P. 79–81 (In Russ.).

7. Belmetsov N. F.,Chirkunov Yu. A. [Exact solutions of the equations of the dynamic asymmetric model of elasticity theory]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2012, Vol. 15, No. 4, P. 38–50 (In Russ.).

8. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. *Prilozhenie simmetriy i zakonov sohraneniya k resheniyu differencial'nyh uravneniy* [Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations]. Novosibirsk, SO RAN Publ., 201 p.

9. Senashov S. I., Vinogradov A. M. [Symmetries and conservation laws of two-dimensional ideal plasticity]. *Proc. Edinburg Math. Soc*. 1988, P. 415–439.

10. Vinogradov A. M., Dyer I. S., Lychagin V. V. *Simmetrii i zakony sohraneniya* [Symmetries and conservation laws]. Moscow, Factor Publ., 1996, 461 p.

11. Olver P. Laws of conservation in elasticity 1. General result. *Arch. Rat. Fur. Anal*. 1984, Vol. 85, P. 111–129.

12. Olver P. Laws of conservation in elasticity 11. Linear homogeneous isotropic elastostatic. *Arch. rat. Fur. Anal.* 1984, Vol. 85, P. 131–160.

13. Senashov S. I., Savostyanova I. L. [On elastic torsion around three axes]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2021, Vol. 24, No. 1, P. 120–125 (In Russ.).

14. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of an elastic-plastic boundary in the problem of stretching a plate weakened by holes. *Journal. Lin. Mech*. 2019, Vol. 108, P. 7–10.

15. Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial stretching of a plate weakened by holes. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2021, Vol. 62, No. 1, P. 179–186.

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: Sen@sibsau.ru.

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

Senashov Sergey Ivanovich – Dr. Sc., Professor, Head of the Department IES; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: Sen@sibsau.ru.

Savostyanova Irina Leonidovna – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of IES, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.