

УДК 539.374

Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-1-8-17

Для цитирования: Буренин А. А., Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Кручение призматических ортотропных упругопластических стержней // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 1. С. 8–17. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-1-8-17.

For citation: Burenin A. A., Senashov S. I., Savostyanova I. L. Torsion of prismatic orthotropic elastoplastic rods // Siberian Aerospace Journal. 2021, Vol. 22, No. 1, P. 8–17. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-1-8-17.

Кручение призматических ортотропных упругопластических стержней

А. А. Буренин¹, С. И. Сенашов^{2*}, И. Л. Савостьянова²

¹Хабаровский федеральный исследовательский центр ДВО РАН
Российская Федерация, 680000, г. Хабаровск, ул. Тургенева, 51

²Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

*E-mail: sen@sibsau.ru

Законы сохранения введены в теорию дифференциальных уравнений Э. Нетер более 100 лет назад и постепенно становятся важным инструментом исследования систем дифференциальных уравнений. Они не только позволяют качественно исследовать уравнение, но и, как показано авторами этой статьи, позволяют найти точные решения краевых задач. Для уравнений изотропной теории упругости законы сохранения впервые вычислены П. Олвером. Для уравнений теории пластичности в двумерном случае законы сохранения найдены одним из авторов этой статьи и использованы для решения основных краевых задач уравнений пластичности. Позднее оказалось, что законы сохранения можно использовать и для нахождения границ между упругими и пластическими зонами в скручиваемых стержнях, изгибаемых балках и деформируемых пластинах. В предлагаемой работе найдены законы сохранения для уравнений описывающих ортотропное упругопластическое состояние скручиваемого прямолинейного стержня. Предполагается, что сохраняющийся ток зависит линейно от компонент тензора напряжений. В работе найдена бесконечная серия законов сохранения, которая позволяет найти упругопластическую границу, возникающую при кручении ортотропного стержня.

Ключевые слова: кручение стержней, краевые задачи, законы сохранения.

Torsion of prismatic orthotropic elastoplastic rods

A. A. Burenin¹, S. I. Senashov^{2*}, I. L. Savostyanova²

¹Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences
51, Turgenev St., Khabarovsk, 680000, Russian Federation

²Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii Rabochi Prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

*E-mail: sen@sibsau.ru

Conservation laws were introduced into the theory of differential equations by E. Noether more than 100 years ago and are gradually becoming an important tool for the study of systems of differential equations. They not only allow us to qualitatively investigate the equation, but, as shown by the authors of this

article, they allow us to find exact solutions to boundary value problems. For the equations of the isotropic theory of elasticity, the conservation laws were first calculated by P. Olver. For the equations of the theory of plasticity in the two-dimensional case, the conservation laws were found by one of the authors of this article and used to solve the main boundary value problems of the plasticity equations. Later it turned out that the conservation laws can also be used to find the boundaries between elastic and plastic zones in twisted rods, bent beams, and deformable plates. In this paper, we find conservation laws for equations describing the orthotropic elastic-plastic state of a twisted rectilinear rod. It is assumed that the conserved current depends linearly on the components of the voltage tensor. In this paper, we find an infinite series of conservation laws, which allows us to find the elastic-plastic boundary that occurs when an orthotropic rod is twisted.

Keyword: torsion of rods, boundary value problems, conservation laws.

Введение. Законы сохранения введены в теорию дифференциальных уравнений Э. Нетер более 100 лет назад и постепенно становятся важным инструментом исследования систем дифференциальных уравнений [1–6]. Они не только позволяют качественно исследовать уравнения, но и, как показано авторами этой статьи, позволяют найти точные решение краевых задач. Для уравнений изотропной теории упругости законы сохранения впервые вычислены П. Олвером [7; 8]. Для уравнений теории пластичности в двумерном случае законы сохранения найдены одним из авторов этой статьи и использованы для решения основных краевых задач [1; 5]. Позднее оказалось, что законы сохранения можно использовать и для нахождения границ между упругими и пластическими зонами в скручиваемых стержнях, пластинах и изгибаемых балках [9–15]. В работе найдены законы сохранения для уравнений описывающих ортотропное упругопластическое состояние скручиваемого прямолинейного стержня. Предполагается, что сохраняющийся ток зависит линейно от компонент тензора напряжений. В результате найдена бесконечная серия законов сохранения, которая позволяет найти упругопластическую границу, возникающую при кручении ортотропного стержня.

Постановка задачи. Рассмотрим упругий ортотропный призматический стержень с поперечным сечением произвольной формы. Боковая поверхность свободна от напряжений, к торцам приложены силы, эквивалентны крутящему моменту M .

Пусть начало координат находится в центре тяжести торцевого сечения, а ось z параллельна образующей стержня. Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_x l + \tau_{xy} m &= 0, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m &= 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

а на торцах стержня ($z = 0, z = l$)

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \tau_{xz} dx dy &= 0, \iint_{\Omega} \tau_{yz} dx dy = 0, \\ \iint_{\Omega} \sigma_z dx dy &= 0, \iint_{\Omega} x \sigma_z dx dy = 0, \\ \iint_{\Omega} y \sigma_z dx dy &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

$$\iint_{\Omega} (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy = M,\tag{3}$$

где Ω – поперечное сечение.

Как обычно в теории кручения считаем, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \quad (4)$$

Остальные компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия, которые запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Обобщенный закон Гука для ортотропной среды запишется следующим образом [16]:

$$a_{55}\tau_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad a_{44}\tau_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad a_{33}\sigma_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Здесь a_{ii} – упругие постоянные.

Из уравнений совместности деформаций получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0, \\ a_{13} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \sigma_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(-a_{44} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yz} + a_{55} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xz} \right), \\ a_{23} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \sigma_z = \frac{\partial}{\partial y} \left(-a_{55} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xz} + a_{44} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yz} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) и граничных условий (1) получаем, что $\sigma_z = 0$ во всех поперечных сечениях.

Из последних двух уравнений (6) следует

$$-a_{44} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yz} + a_{55} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xz} = \text{const}. \quad (7)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} a_{55}\tau_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_{44}\tau_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned}$$

то имеем

$$a_{55} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xz} - a_{44} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -2 \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = -2\theta,$$

где ω_z – третья компонента вектора $rot(u, v, w)$. Поэтому θ – есть угол закручивания на единицу длины. Он называется круткой.

Задача об упругом кручении призматического стержня свелась к интегрированию уравнений

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad a_{55} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2\theta \quad (8)$$

и граничному условию

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0. \quad (9)$$

Нетрудно увидеть, что система уравнений (8) сводится к линейному уравнению второго порядка эллиптического типа.

В пластической области к уравнениям (8) следует добавить условие пластичности, которое имеет вид

$$2\alpha_{13}\tau_{xz}^2 + 2\alpha_{23}\tau_{yz}^2 = 1.$$

Здесь α_{13}, α_{23} – постоянные, характеризующие текущее состояние пластической анизотропии.

В результате получаем следующую задачу: найти для уравнений (8) законы сохранения, которые позволяют решить задачу (9). С помощью этих законов будет найдена граница между упругой и пластической областями.

Законы сохранения для уравнений ортотропной упругости. В этой части будут приведены законы сохранения для уравнений (8), для того чтобы их использовать далее для решения упругопластических задач.

Для простоты дальнейших выкладок запишем систему (8) в виде

$$\begin{aligned} F_1 &= u_x + v_y - f^1 = 0, \\ F_2 &= \alpha u_y - \beta v_x - f^2 = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $u = \tau_{xz}$, $v = \tau_{yz}$, $\alpha = a_{55}$, $\beta = a_{44}$, индекс внизу обозначает производную по соответствующей переменной.

Назовем вектор (A, B) сохраняющимся током для уравнений (10), если

$$A_x + B_y = \Pi_1(F_1) + \Pi_2(F_2) = 0, \quad (11)$$

выполнено на всех гладких решениях системы (11). Здесь Π_i – некоторые не тождественно равные нулю линейные дифференциальные операторы.

В этом случае (11) является законом сохранения для системы (10).

Поставим задачу найти законы сохранения для (10), если сохраняющийся ток зависит только от x, y, u, v .

Замечание. Ничто не мешает нам найти законы сохранения и с сохраняющимся током зависящим от любого числа производных, но мы ограничимся только указанными, поскольку иные законы сохранения еще не нашли своего применения для решения краевых задач.

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \quad B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (12)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ функции только от x, y .

Из (11) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 u + \alpha^1 u_x + \beta_x^1 v + \beta^1 v_x + \gamma_x^1 + \alpha_y^2 u + \alpha^2 u_y + \beta_y^2 v + \beta^2 v_y + \gamma_y^2 = \\ = \delta^1(u_x + v_y - f^1) + \delta^2(\alpha u_y - \beta v_x - f^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) получаем

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \alpha^1 = \beta^2 = \delta^1, \beta^1 = -\delta^2 \beta, \\ \alpha^2 = \delta^2 \alpha, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\delta^1 f^1 - \delta^2 f^2, \beta^1 / \beta = -\alpha^2 / \alpha. \end{aligned} \quad (14)$$

Окончательно имеем

$$\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \frac{\beta}{\alpha} \alpha_x^2 - \alpha_y^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^1 f^1 - \frac{\alpha^2}{\alpha} f^2.$$

Для простоты считаем, что $\gamma^2 = 0$. Тогда получаем:

$$\alpha^1 = \beta^2, \beta^1 = -\frac{\beta}{\alpha} \alpha^2, \gamma^1 = -\int \left(\alpha^1 f^1 - \frac{\alpha^2}{\alpha} f^2 \right) dx, \quad (15)$$

а коэффициенты α^1 и α^2 связаны уравнениями:

$$\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta \alpha_x^2 - \alpha \alpha_y^1 = 0. \quad (16)$$

Найдем два особых решения этой системы.

Они имеют следующий вид.

Первое решение:

$$\alpha_1^1 = \frac{x}{x^2 + \beta/\alpha y^2}, \alpha_1^2 = \frac{y}{x^2 + \beta/\alpha y^2}.$$

Второе решение:

$$\alpha_2^1 = -\frac{\beta/\alpha y}{x^2 + \beta/\alpha y^2}, \alpha_2^2 = \frac{x}{x^2 + \beta/\alpha y^2}.$$

Для простоты дальнейших вычислений положим $\beta/\alpha = a_{44}/a_{55} = q$.

Далее заметим, что уравнение (16) допускают симметрии вида:

$$x' = x + x_0, y' = y + y_0,$$

где x_0, y_0 – произвольные постоянные.

Поэтому полученные решения можно записать в виде:

$$\alpha_1^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2}, \alpha_1^2 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2}, \quad (17)$$

$$\alpha_2^1 = -\frac{q(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2}, \alpha_2^2 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2}. \quad (18)$$

Нами получено два сохраняющихся тока.

$$A_i = \alpha_i^1 u - q \alpha_i^2 v + \gamma_i^1, B_i = \alpha_i^2 u + \alpha_i^1 v,$$

следовательно, получено два закона сохранения

$$\partial_x A_i + \partial_y B_i = 0. \quad (19)$$

Из (19) получаем:

$$\oint_{\Gamma} A_i dy - B_i dx = 0, \quad (20)$$

где Γ_1 – контур, не охватывающий точку (x_0, y_0) .

Пусть теперь точка (x_0, y_0) лежит внутри области D , границей которой является контур Γ . В этом случае формула (20) непосредственно применена быть не может, потому что внутри контура есть особая точка. Следовательно, используем стандартный прием: описываем вокруг точки (x_0, y_0) эллипс следующего вида: $(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ (рис. 1).

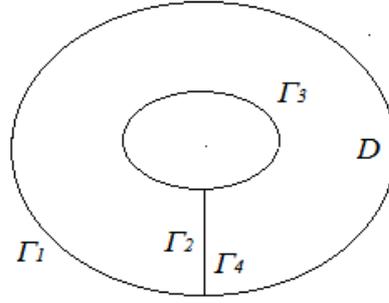


Рис. 1. Вычисление контурного интеграла вокруг особой точки

Fig. 1. Calculation of the contour integral around a singular point

Обозначим этот эллипс Γ_1 . Тогда без труда получаем

$$\oint_{\Gamma} A_i dy - B_i dx = -\oint_{\Gamma} (A_i dy - B_i dx), \quad (21)$$

Вычисляем интеграл, стоящий в правой части формулы (21) для $i = 1, 2$.

Пусть $i = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} &= \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} u - \frac{q(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} v + \gamma_1^1 \right) dy - \\ &\quad - \left(\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} u + \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} v \right) dx = \\ &= \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{(x-x_0)}{\varepsilon^2} u - \frac{q(y-y_0)}{\varepsilon^2} v + \gamma_1^1 \right) dy - \left(\frac{(y-y_0)}{\varepsilon^2} u + \frac{(x-x_0)}{\varepsilon^2} v \right) dx. \end{aligned}$$

Введем обозначения $x - x_0 = \varepsilon \cos \theta$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \theta$.

Имеем

$$\oint_{\Gamma_1} = \oint_{\Gamma_1} \left(qu - (1-q) \frac{\sin 2\theta}{2} v + \gamma_1^1 \right) d\theta = q \int_0^{2\pi} u(x_0 + \varepsilon \cos \theta, y_0 + \varepsilon \sin \theta) d\theta.$$

В полученном выражении устремляем ε к нулю и, используя теорему о среднем, получаем

$$\oint_{\Gamma_1} = 2\pi qu(x_0, y_0).$$

Теперь из формулы (21) имеем

$$2\pi qu(x_0, y_0) = -\int_{\Gamma} A_1 dy - B_1 dx. \quad (22)$$

Рассмотрим случай $i = 2$. Аналогично получаем:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} &= \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{-q(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} u - \frac{q(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} v + \gamma_2^1 \right) dy - \\ &\quad - \left(\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} u + \frac{q(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} v \right) dx = \\ &= \oint_{\Gamma_1} \left(-\frac{q(y-y_0)}{\varepsilon^2} u - \frac{q(x-x_0)}{\varepsilon^2} v + \gamma_2^1 \right) dy - \left(\frac{(x-x_0)u - q(y-y_0)v}{\varepsilon^2} \right) dx \end{aligned}$$

Введем координаты $x - x_0 = \varepsilon \cos \theta$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \theta$.

Имеем

$$\oint_{\Gamma_1} = \oint_{\Gamma_1} \left[\frac{(-q+1)\sin 2\theta}{2} u - qv \right] d\theta =$$

$$= -q \int_0^{2\pi} v(x_0 + \varepsilon \cos \theta, y_0 + \varepsilon \sin \theta) d\theta = -2\pi v(x_0, y_0) q. \quad (23)$$

Теперь конкретизируем эти законы сохранения для кручения призматического стержня.

Имеем

$$2\pi q \tau_{xz}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma} (\alpha_1^1 \tau_{xz} - q \alpha_1^2 \tau_{yz} + 2\theta \int \alpha_1^1 dx) dx - (\alpha_1^2 \tau_{xz} + \alpha_1^1 \tau_{yz}) dy,$$

$$2\pi q \tau_{yz}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma} (\alpha_2^1 \tau_{xz} - q \alpha_2^2 \tau_{yz} + 2\theta \int \alpha_2^1 dx) dx - (\alpha_2^2 \tau_{xz} + \alpha_2^1 \tau_{yz}) dy. \quad (24)$$

Упругопластическая граница в скручиваемом прямолинейном ортотропном стержне.

Рассмотрим упругопластическое кручение ортотропного прямого стержня, поперечное сечение которого ограничено выпуклым контуром Γ .

При достаточно большом значении крутящего момента в стержне образуется упругая зона F и пластическая зона P (рис. 2).

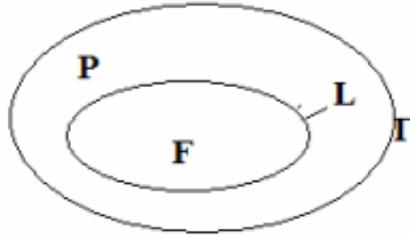


Рис. 2. Поперечное сечение скручиваемого стержня

Fig. 2. Cross-section of the twisted rod

Известно, что пластическая зона, начинает образовываться на внешнем контуре Γ . Предположим, что пластическая зона полностью охватывает внешний контур. Пусть L – граница раздела упругой и пластической зон.

Цель этого параграфа – с помощью законов сохранения построенных в предыдущих параграфах, в явном виде построить границу L .

Постановка задачи. В упругой зоне компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям (8)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad a_{55} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2\theta, \quad (25)$$

а на внешнем контуре Γ граничному условию

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0 \quad (26)$$

и условию пластичности

$$2\alpha_{13} \tau_{xz}^2 + 2\alpha_{23} \tau_{yz}^2 = 1. \quad (27)$$

Из соотношений (27)–(28) можно определить компоненты тензора τ_{xz}, τ_{yz} на контуре Γ .

Имеем

$$\begin{aligned}\tau_{xz}|_{\Gamma} &= \frac{m}{\sqrt{2\alpha_{13}m^2 + 2\alpha_{23}l^2}}, \\ \tau_{yz}|_{\Gamma} &= -\frac{l}{\sqrt{2\alpha_{13}m^2 + 2\alpha_{23}l^2}}.\end{aligned}\quad (28)$$

Здесь знаки выбраны в соответствии с крутящим моментом (3).

В (24) нами получены следующие законы сохранения:

$$2\pi q\tau_{xz}(x_0, y_0) = -\oint_{\Gamma} A_1 dy - B_1 dx \quad (29)$$

и

$$2\pi q\tau_{yz}(x_0, y_0) = -\oint_{\Gamma} A_2 dy - B_2 dx. \quad (30)$$

Для вычисления $\tau_{xz}(x_0, y_0)$ и $\tau_{yz}(x_0, y_0)$ воспользуемся формулами (29)–(30). Из этих формул получаем τ_{xz} и τ_{yz} во всех точках внутри стержня. Теперь проверим условие (27). Те точки, в которых выражение в первой части (27) меньше единицы, попадут в упругую зону, а остальные точки в пластическую.

Заключение. Эти вычисления позволяют с любой точностью восстановить искомую границу L . Для изотропного случая эта задача решена впервые в [12; 14]. Примеры построения упруго-пластических границ для различного вида прокатных профилей рассмотрены в [10].

Библиографические ссылки

1. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Наука, 2001. 192 с.
2. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. P. 415–439.
3. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Симметрии и законы сохранения. М. : Факториал, 1996. 380 с.
4. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск : Наука, 1983. 239 с.
5. Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2012. 139 с.
6. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. P. 415–439.
7. Olver P. Conservation laws in elasticity 1. General result // Arch. Rat. Mech. Anal. 1984. Vol. 85. P. 111–129.
8. Olver P. Conservation laws in elasticity 1. Linear homogeneous isotropic elastostatic // Arch. Rat. Mech. Anal. 1984. Vol. 85. P. 131–160.
9. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Упругое состояние пластины с отверстиями произвольной формы // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 128–134.
10. Сенашов С. И., Кондрин А. В. Разработка информационной системы для нахождения упруго-пластической границы стержней прокатного профиля // Вестник СибГАУ. 2014. № 4(56). С. 119–125.

11. Сенашов С. И., Филлюшина Е. В., Гомонова О. В. Построение упруго-пластических границ с помощью законов сохранения. // Вестник СибГАУ. 2015. Т. 16, № 2. С. 343–359.
12. Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В. Об упругопластическом кручении стержня // Вестник СибГАУ. 2013, № 3(49). С. 100–103.
13. Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В. Elastoplastic Bending of Beam // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2014, No. 7(2). P. 203–208.
14. Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2015. No. 7(1). P. 343–351.
15. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of elastoplastic boundary in problem of tension of a plate weakened by holes // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2019. Vol. 108. P. 7–10.
16. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М. : Наука, 1977. 416 с.

References

1. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. *Prilozhenie simmetrij i zakonov sohraneniya k resheniyu differencial'nyh uravneniy* [Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations]. Novosibirsk; Nauka Publ., 2001, 192 p.
2. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 1988, P. 415–439.
3. Vinogradov A. M., Krasilshchik I. S., Lychagin V. V. *Simmetrii i zakony sohraneniya* [Symmetries and conservation laws]. Moscow, Factorial Publ., 1996, 380 p.
4. Annin B. D., Bytev V. O., Senashov S. I. *Gruppovye svoystva uravnenij uprugosti i plastichnosti* [Group properties of equations of elasticity and plasticity]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 239 p.
5. Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. *Matematicheskie voprosy dvumernyh uravnenij ideal'noj plastichnosti* [Mathematical problems of two-dimensional equations of ideal plasticity]. Krasnoyarsk, 2012, 139 p.
6. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 1988, P. 415–439.
7. Olver P. Conservation laws in elasticity 1. General result. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1984, No. 85, P. 111–129.
8. Olver P. Conservation laws in elasticity 11. Linear homogeneous isotropic elastostatic. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1984, No. 85, P. 131–160.
9. Senashov S. I., Savostyanova I. L. Elastic state of a plate with holes of arbitrary shape *Vestnik CHuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya.* 2016. No. 3 (29), P. 128–134. (In Russ.)
10. Senashov S. I., Kondrin A. V. Development of an information system for finding the elastic-plastic boundary of rolling profile rods. *Vestnik SibGAU.* 2014, No. 4(56), P. 119–125. (In Russ.)
11. Senashov S. I., Filyushina E. V., Gomonova O. V. Construction of elastic-plastic boundaries with the help of conservation laws. *Vestnik SibGAU.* 2015, Vol. 16, No. 2, P. 343–359. (In Russ.)
12. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A.V. On elastic-plastic torsion of the rod *Vestnik SibGAU.* 2013, Vol. 3(49), P. 100–103. (In Russ.)
13. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A.V. Elastoplastic Bending of Beam. *J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics.* 2014, No. 7(2), P. 203–208.
14. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A.V. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section *J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics.* 2015, No. 7(1), P. 343–351.

15. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of elastoplastic boundary in problem of tension of a plate weakened by holes *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2019, Vol. 108, P. 7–10.

16. Lekhnitsky S. G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 416 p.

© Буренин А. А., Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., 2021

Буренин Анатолий Александрович – член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник; Хабаровский федеральный исследовательский центр ДВО РАН. Тел.: +7 (4212) 32-79-27.

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных экономических систем; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: sen@sibsau.ru.

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

Burenin Anatoly Aleksandrovich – Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sc., Professor; Chief Researcher of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences. Tel.: +7 (4212) 32-79-27.

Senashov Sergei Ivanovich – Dr. Sc., Professor, Head of the Department of IES; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: sen@sibsau.ru.

Savostyanova Irina Leonidovna – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of IES, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.
