

УДК 621.454.2

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-437-450

Для цитирования: Локальные параметры теплоотдачи на участках развивающегося температурного пограничного слоя в полостях газовых турбин / А. А. Зуев, А. А. Арнольд, Е. В. Фалькова и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 437–450. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-437-450.

For citation: Zuev A. A., Arngold A. A., Falkova E. V., Tolstopyatov M. I., Dubynin P. A. [Local heat transfer parameters in the areas of the developing temperature boundary layer in the cavities of gas turbines local heat transfer parameters in the areas of the developing temperature boundary layer in the cavities of gas turbines]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 437–450. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-437-450.

Локальные параметры теплоотдачи на участках развивающегося температурного пограничного слоя в полостях газовых турбин

А. А. Зуев¹, А. А. Арнольд², Е. В. Фалькова¹, М. И. Толстопятов¹, П. А. Дубынин^{1*}

¹Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

²АО «Красноярский машиностроительный завод»

Российская Федерация, 660123, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 29

*E-mail: pavel.dubynin@mail.ru

В данной работе проведено аналитическое определение локального коэффициента теплоотдачи в плоскостях вращения газовых турбин с использованием аффинноподобной модели распределения температурного и динамического пространственных пограничных слоев с конвективной составляющей (при $Pr < 1$). Метод аналитического исследования, используемый в работе, привел к результатам близким к экспериментальным значениям.

Решена задача определения толщины потери энергии с помощью интегрального соотношения уравнения энергии температурного пространственного пограничного слоя, предоставляющего возможность для интегрирования по поверхности необходимой кривизны. Выражен закон теплообмена турбулентного пограничного слоя для вращательного движения потока и движения по закону «твердого тела».

Получены уравнения для определения локального коэффициента теплоотдачи по критерию Стантона при различных законах течения внешнего потока для степенного распределения скорости в пограничном слое по аффинноподобной модели температурного пограничного слоя.

Коэффициенты теплоотдачи с достаточной точностью коррелируют с экспериментальными данными и зависимостями, опубликованными другими авторами: J. M. Owen, L. A. Dorfman, И. В. Шевчук. Отклонение результатов, полученных по зависимости модели с конвективной составляющей и аффинноподобными профилями, не имеют статистически значимых различий. Полученные результаты исследования и сравнение их с результатами других авторов показали, что они пригодны для инженерных расчетов и анализа воздействия локальных коэффициентов теплоотдачи на высокотемпературные узлы турбонасосного агрегата (ТНА).

Ключевые слова: вращательное движение потока, газовые полости ТНА, аффинноподобная модель, уравнения толщины потери энергии, коэффициент теплоотдачи.

Local heat transfer parameters in the areas of the developing temperature boundary layer in the cavities of gas turbines local heat transfer parameters in the areas of the developing temperature boundary layer in the cavities of gas turbines

A. A. Zuev¹, A. A. Arngold², E. V. Falkova¹, M. I. Tolstopyatov¹, P. A. Dubynin^{1*}

¹Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
²JSC “Krasnoyarsk Machine-Building Plant”
29, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
*E-mail: pavel.dubynin@mail.ru

In this work, an analytical determination of the local heat transfer coefficient in the planes of rotation of gas turbines is carried out using an affine-like model for the distribution of temperature and dynamic spatial boundary layers with a convective component (at $Pr < 1$). The method of analytical study used in the work led to results close to the experimental values.

The problem of determining the thickness of the energy loss is solved using the integral relation of the energy equation of the temperature spatial boundary layer, which makes it possible to integrate the necessary curvature over the surface. The law of heat transfer of the turbulent boundary layer for the rotational motion of the flow and motion according to the law of “solid body” is expressed.

Equations are obtained for determining the local heat transfer coefficient by the Stanton criterion for various external flow laws for a power-law velocity distribution in the boundary layer according to the affine-like model of the temperature boundary layer.

Heat transfer coefficients correlate with sufficient accuracy with experimental data and dependencies published by other authors: J. M. Owen, L. A. Dorfman, I. V. Shevchuk. The deviation of the results obtained from the dependence of the model with a convective component and with affinity-like profiles do not have statistically significant differences. The obtained results of the study and their comparison with the results of other authors showed that they are suitable for engineering calculations and analysis of the impact of local heat transfer coefficients on high-temperature units of a turbopump unit.

Keywords: rotational motion of the flow, gas cavities of turbopump unit, affine-like model, energy loss thickness equations, heat transfer coefficient.

Введение

Повышение термических характеристик, проектируемых узлов и агрегатов ТНА напрямую зависит от проведения исследований на предмет локализации температурного воздействия газовых потоков. С целью повышения точности и совершенствования расчетных методик необходимо более точно определять численные значения характерных величин газового потока, влияющих как на потери в элементах проточного тракта, так и на энергетические и рабочие параметры турбин [1].

Одним из методологических подходов к решению задачи проектирования элементов газодов и моделирования энергетических параметров является аналитический вывод зависимостей путем преобразований уравнений динамики [2].

Рассмотрим вывод уравнений законов теплообмена и локальных коэффициентов теплоотдачи с использованием аффинноподобной модели температурного пограничного слоя для случая $Pr < 1$ [3].

1. Взаимосвязь интегральных уравнений энергии турбулентного потока для прямолинейного равномерного и вращательного движений

Пусть температурный пограничный слой имеет конечную толщину δ_t . Распределение профиля скорости аппроксимируем степенной функцией:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}. \quad (1)$$

При $Pr = 1$ профиль распределения скорости в динамическом пограничном слое должен иметь производную на стенке, т. е. удовлетворять условию, требуемому дифференциальными уравнениями движения пограничного слоя. Поэтому будем использовать двухслойную модель распространения профиля скорости с ламинарным подслоем и турбулентным профилем в основной части.

Условия, требуемые дифференциальными уравнениями движения пограничного слоя, должны выполняться и для дифференциального уравнения энергии [4–7]. В работе аппроксимируется профиль скорости в пограничном слое кубической параболой:

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3. \quad (2)$$

Кубическую параболу используют также для аппроксимации температурного пограничного слоя:

$$\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \quad (3)$$

Отношение толщины температурного и динамического пограничных слоев в произвольном сечении обозначим как у В. М. Кейса:

$$r = \frac{\delta_t}{\delta} \quad \text{или} \quad \delta_t = r \cdot \delta. \quad (4)$$

Отметим, что использование уравнения кубической параболы возможно только для ламинарного пограничного слоя. Принимается, что распространение профиля скорости и распределение профиля температур в пограничном слое аппроксимируется следующими полиномами:

$$\frac{u}{U} = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4), \quad \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = (1 - 2\eta_t + 2\eta_t^3 - \eta_t^4). \quad (5)$$

В соответствии с работой В. М. Кейса, используем отношение температурного пограничного слоя к динамическому:

$$\Delta = \frac{\delta_t}{\delta}. \quad (6)$$

В соответствии с работой Ю. А. Кошмарова, профили скорости и температуры в турбулентном пограничном слое аппроксимируем степенными функциями:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Рассмотрим толщину потери энергии:

$$\delta_{\text{эф}}^{**} = \int_0^{\delta_t} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0}\right) dy.$$

Профили распределения пограничных слоев показаны на рис. 1.

Разобъём границы уравнения (8) на два самостоятельных участка интегрирования:

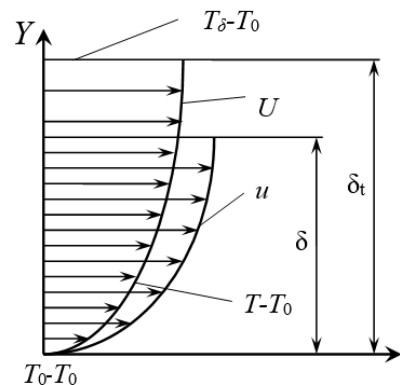


Рис. 1. Профили распределения температурного и динамического пограничных слоев при $Pr < 1$

Fig. 1. Distribution profiles of temperature and dynamic boundary layers for $Pr < 1$

– от соприкосновения потока с поверхностью тока до толщины динамического пограничного слоя δ ;

– от окончания толщины динамического пограничного слоя δ до окончания толщины температурного пограничного слоя δ_t .

Отсюда уравнение (8) преобразуется к виду

$$\delta_{\text{тф}}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{T - T_0}{T_{\delta} - T_0} \right) dy + \int_{\delta}^{\delta_t} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{T - T_0}{T_{\delta} - T_0} \right) dy. \quad (9)$$

Выражение для толщины потери энергии при известных профилях аппроксимации пограничных слоев принимает следующий вид:

$$\delta_{\text{тф}}^{**} = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy + \int_{\delta}^{\delta_t} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy. \quad (10)$$

Произведём замену переменных:

$$A = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy, \quad B = \int_{\delta}^{\delta_t} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy.$$

В первом члене введем замену через отношение толщины температурного и динамического пограничных слоев в произвольных сечениях $r = \frac{\delta_t}{\delta}$, тогда

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{r \cdot \delta} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy = \int_0^{\delta} \frac{y^{\frac{1}{m}}}{\delta^{\frac{1}{m}}} \cdot \left(1 - \frac{y^{\frac{1}{m}}}{r^{\frac{1}{m}} \cdot \delta^{\frac{1}{m}}} \right) dy = \\ &= \int_0^{\delta} \left(\frac{y^{\frac{1}{m}}}{\delta^{\frac{1}{m}}} - \frac{y^{\frac{1}{m}}}{\delta^{\frac{1}{m}} \cdot r^{\frac{1}{m}}} \right) dy = \frac{m \cdot y \cdot y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{\delta^{\frac{1}{m}}} (m+1)} - \frac{m \cdot y \cdot y^{\frac{1}{m}}}{\delta^{\frac{1}{m}} \cdot r^{\frac{1}{m}} \cdot (m+2)} \Bigg|_0^{\delta} = \\ &= \frac{\delta \cdot m}{(m+1)} - \frac{\delta \cdot m}{r^{\frac{1}{m}} \cdot (m+2)} = \frac{m \cdot \delta \cdot \left(m \cdot r^{\frac{1}{m}} + 2 \cdot r^{\frac{1}{m}} - m - 1 \right)}{\frac{1}{r^{\frac{1}{m}}} \cdot (m+1) \cdot (m+2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где r – отношение толщины температурного и динамического пограничных слоев.

Границы интегрирования второго члена уравнения (10) находятся от толщины динамического пограничного слоя δ до толщины температурного пограничного слоя δ_t . При этом изменения эпюры скорости вдоль оси Y не происходит, а скорость равна скорости потока в ядре течения. В этом случае

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Тогда

$$B = \int_{\delta}^{\delta_t} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy = y - \frac{m \cdot y \cdot y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{\delta_t^{\frac{1}{m}}} (m+1)} \Bigg|_{\delta}^{\delta_t} = - \left(\delta - \frac{\delta \cdot \delta^{\frac{1}{m}} \cdot m}{m \cdot \delta_t^{\frac{1}{m}} + \delta_t^{\frac{1}{m}}} \right) +$$

$$+ \left(\delta_t - \frac{m \cdot \delta_t}{m+1} \right) = - \frac{\delta \cdot \delta_t^{\frac{1}{m}} - \delta_t \cdot \delta_t^{\frac{1}{m}} - \delta \cdot \delta^{\frac{1}{m}} \cdot m + \delta m \delta_t^{\frac{1}{m}}}{\delta_t^{\frac{1}{m}} (m+1)}. \quad (12)$$

С учетом выражения (12), толщина потерь энергии температурного пограничного слоя определится как

$$\delta_{t\varphi}^{**} = A + B = \frac{m \cdot \delta \cdot \left(m \cdot r^{\frac{1}{m}} + 2 \cdot r^{\frac{1}{m}} - m - 1 \right)}{r^{\frac{1}{m}} \cdot (m+1)(m+2)} - \frac{\delta \cdot \delta_t^{\frac{1}{m}} - \delta_t \cdot \delta_t^{\frac{1}{m}} - \delta \cdot \delta^{\frac{1}{m}} \cdot m + \delta m \delta_t^{\frac{1}{m}}}{\delta_t^{\frac{1}{m}} (m+1)}. \quad (13)$$

Учитывая отношение толщины температурного и динамического пограничных слоев в произвольном сечении, второй член уравнения толщины потери энергии (12) преобразуется к виду

$$B = - \frac{\delta (\delta r)^{\frac{1}{m}} + \delta m (\delta r)^{\frac{1}{m}} - \delta r (\delta r)^{\frac{1}{m}} - \delta \cdot \delta^{\frac{1}{m}} m}{(m+1) (\delta r)^{\frac{1}{m}}}. \quad (14)$$

Отметим, что при $r = 0$, что характерно для $Pr = 1$, первый член уравнения (13) запишется как $A = \delta_{t\varphi}^{**}$, а второй член уравнения обнуляется, т. е. $B = 0$.

Учитывая выражение (14), перепишем выражение для толщины потери энергии (13):

$$\begin{aligned} \delta_{t\varphi}^{**} &= \frac{m\delta \left(mr^{\frac{1}{m}} + 2r^{\frac{1}{m}} - m - 1 \right)}{r^{\frac{1}{m}} (m+1) \cdot (m+2)} - \frac{\delta (\delta r)^{\frac{1}{m}} + \delta m (\delta r)^{\frac{1}{m}} - \delta \delta_m}{(m+1) (\delta r)^{\frac{1}{m}}} = \\ &= \frac{m\delta \left(mr^{\frac{1}{m}} + 2r^{\frac{1}{m}} - m - 1 \right)}{r^{\frac{1}{m}} (m+1) \cdot (m+2)} + \left(\frac{\delta \left(m - mr^{\frac{1}{m}} + rr^{\frac{1}{m}} - r^{\frac{1}{m}} \right)}{r^{\frac{1}{m}} (m+1)} \right) = \frac{\delta \left(2r - m + \frac{m}{r^{\frac{1}{m}}} + mr - 2 \right)}{(m+1)(m+2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Запишем уравнение закона теплоотдачи в виде критерия Стантона:

$$St = \frac{q_0}{\rho \cdot C_p \cdot U \cdot (T_\delta - T_0)} = \frac{\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{\rho \cdot C_p \cdot U \cdot (T_\delta - T_0)} = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p \cdot U} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right) \right]_{y=0}. \quad (16)$$

Для дальнейших вычислений найдем производную температурного пограничного слоя на стенке. Используем двухслойную модель турбулентности с ламинарным подслоем при коэффициенте Прандтля $Pr = 1$. Тогда толщина температурного пограничного слоя и динамического пограничного слоя будут равны, т. е. $\delta = \delta_t$ [8; 9].

В данном случае при $Pr < 1$ приняли $\delta_t = r\delta$. Проведя аналогию между температурным и динамическим пограничными слоями с учетом коэффициента отношения толщины и выполнив соответствующие преобразования, получим производную температурного пограничного слоя на стенке:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right)_{y=0} = \frac{U}{\alpha_n^2 \cdot v} \cdot \left(\frac{\alpha_n \cdot v}{\delta_t \cdot U} \right)^{\frac{2}{m+1}} = \frac{U}{\alpha_n^2 \cdot v} \cdot \left(\frac{\alpha_n \cdot v}{r \cdot \delta \cdot U} \right)^{\frac{2}{m+1}}. \quad (17)$$

Из уравнения (15) выразим толщину динамического пограничного слоя:

$$\delta = \frac{\delta_{i\varphi}^{**}(m+1)(m+2)}{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2} \quad (18)$$

Полученное выражение для толщины динамического пограничного слоя (18) подставим в выражение производной температурного пограничного слоя на стенке (поверхности теплообмена) (17):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right)_{y=0} = \frac{U}{\alpha_{\text{л}}^2 \cdot \nu} \cdot \left(\frac{\alpha_{\text{л}} \cdot \nu}{U \cdot \delta_{i\varphi}^{**} r} \cdot \left(\frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}} \right) \quad (19)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right)_{y=0} = U^{\frac{m-1}{m+1}} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \cdot \nu^{\frac{m-1}{2}} r} \cdot \left(\frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}} \right) \times \frac{1}{(\delta_{i\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} \quad (20)$$

Определив производную температурного пограничного слоя на стенке (поверхности теплообмена) (20), а также закон теплообмена в виде критерия Стантона (16), получим

$$St = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p \cdot U^{\frac{2}{m+1}}} \cdot \left(\frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \right) \cdot \frac{1}{(\delta_{i\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} \cdot \frac{1}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \cdot \nu^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \quad (21)$$

Для использования уравнения (21) в проектных расчетах требуется определить коэффициент ламинарного подслоя $\alpha_{\text{л}}$, который, исходя из двухслойной модели турбулентности, определяем из условия смыкания ламинарного подслоя и турбулентного профиля [10–11]. Определяем коэффициент ламинарного подслоя $\alpha_{\text{л}}$ аналогично, как и при $Pr = 1$, с использованием закона трения и производной на поверхности теплообмена для функции распределения температурного пограничного слоя [12]. Исходя из выражения для толщины потери энергии температурного пограничного слоя (15), запишем

$$\alpha_{\text{л}} = \sqrt[{\frac{2(m-1)}{m+1}}]{\left(\frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)r} \right)^{0,25} \cdot (\delta_{i\varphi}^{**})^{0,25}} \cdot \frac{1}{0,01256 (\delta_{i\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \left(\frac{m\delta}{(m+1)(m+2)} \right)^{0,25}}{0,01256 \left(\frac{\delta \left(\frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)}{(m+1)(m+2)} \right)^{\frac{2}{m+1}}}. \quad (22)$$

При $m = 7$ выражение (22) преобразуется к виду

$$\alpha_{\text{л}} = \frac{12,5496}{r^{0,167}}.$$

Учитывая, что при $\text{Pr} < 1$ $r = \frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{\text{Pr}^{\frac{1}{3}}}$, получим $\alpha_{\text{л}} = 12,5496 \text{Pr}^{\frac{1}{18}}$.

С использованием выражения (21) запишем интегральное соотношение уравнения энергии температурного пространственного пограничного слоя:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{J}{H_\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (\varepsilon \delta_{t\varphi}^{**}) + \frac{1}{H_\varphi \cdot H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} \cdot \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{J}{H_\varphi \cdot H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \cdot \varepsilon \delta_{t\varphi}^{**} = \\ & = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p \cdot U^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right) \times \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho \cdot C_p (T_\delta - T_0)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим случай реализации вращательного течения, когда направление потока определяется кольцевой линией [13]. Выразим уравнение энергии (23) в цилиндрических координатах, учитывая, что для осесимметричного течения при $\varepsilon = \text{const}$ выполняются соотношения:

$$\varphi = \alpha, \quad \psi = R, \quad \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} = \frac{\partial R}{\partial R} = 1, \quad H_\psi = 1, \quad \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0:$$

$$J \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial R} \cdot \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{J \cdot \varepsilon}{R} \cdot \delta_{t\varphi}^{**} = \left(\frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right) \times \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho \cdot C_p \cdot (T_\delta - T_0)}. \quad (24)$$

С использованием аффинноподобной модели температурного пограничного слоя, определение вида закона теплообмена становится тривиальной задачей. Использование уравнения (24) происходит после интегрирования с учетом принятых законов распределения.

2. Локальная теплоотдача турбулентного потока при вращательном течении

Представим течение в турбине ТНА и соответствующее ему вращательное движение по закону твердого тела. Пренебрегаем диссипативным членом в интегральном соотношении уравнения энергии (24) при реализации вращательного течения:

$$J \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial R} \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{J \cdot \varepsilon}{R} \delta_{t\varphi}^{**} =$$

$$= \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p \cdot U^{\frac{2}{m+1}}} \left[\frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{\pi}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right] \cdot \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} \quad (25)$$

Для вращательного течения по закону «твердого тела» распределение окружной составляющей скорости по радиусу $\frac{U}{R} = \omega = \text{const}$ [14], уравнение (25) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial R} \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{\delta_{t\varphi}^{**}}{R} - \frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot \omega^{\frac{2}{m+1}}} \times \left[\frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{\pi}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right] \cdot \frac{1}{R^{\frac{2}{m+1}} (\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} \quad (26)$$

Введем промежуточные обозначения:

$$\delta_{t\varphi}^{**} = y,$$

$$A = \frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot \omega^{\frac{2}{m+1}}} \left[\frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{\pi}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right],$$

тогда

$$\frac{dy}{dR} + \frac{y}{R} - \frac{A}{R^{\frac{2}{m+1}} \cdot y^{\frac{2}{m+1}}} = 0. \quad (27)$$

Уравнение решается методом подстановки $y = u \cdot v$:

$$\frac{du}{dR} \cdot v + \frac{dv}{dR} \cdot u + u \frac{v}{R} = \frac{A}{u^{m+1} \cdot v^{m+1} \cdot R^{m+1}},$$

$$u \cdot \left(\frac{dv}{dR} + \frac{v}{R} \right) + v \cdot \frac{du}{dR} = \frac{A}{u^{m+1} \cdot v^{m+1} \cdot R^{m+1}}.$$

Функция v должна удовлетворять условию $\frac{dv}{dR} + \frac{v}{R} = 0$, тогда $v = \frac{1}{R}$, откуда находим

$$u = \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{A \cdot R^2 \cdot (m+3)}{2 \cdot (m+1)}}, \quad (28)$$

$$y = \delta_{t\varphi}^{**} = \frac{1}{R} \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{A \cdot R^2 \cdot (m+3)}{2 \cdot (m+1)}} = \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{A \cdot R^2 \cdot (m+3)}{2 \cdot (m+1)}} \cdot R^{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)}, \quad (29)$$

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot \omega^{m+1}} \times \frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot (m+3)} \cdot R^{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)} \cdot \alpha_{л}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r. \quad (30)$$

Выведем критерий Стантона для вращательного течения по закону твердого тела для турбулентного режима с учетом выражений (21) и (30).

Задав $\left(Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \right)$ и $\left(Re = \frac{\rho U \varphi}{\mu} \right)$, выразим критерия Стантона для вращательного течения по закону твердого тела для случая $Pr < 1$:

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left(\frac{2J\varepsilon \left(\frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+3}}}{\alpha_{л}^{m-1} r(m+2)(m+3) Re_{\omega}} \right). \quad (31)$$

Рассмотрим течение газового потока в магистралях подвода ТНА, которое осуществляется по закону свободного вихря ($U \cdot R = C = const$) [15], тогда уравнение энергии (25) запишется как

$$\frac{d\delta_{t\varphi}^{**}}{dR} + \frac{\delta_{t\varphi}^{**}}{R} - \frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot C^{m+1}} \times$$

$$\times \left(\frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{R^{\frac{2}{m+1}}}{\left(\delta_{i\varphi}^{**} \right)^{\frac{2}{m+1}}} = 0. \quad (32)$$

Проведем замену:

$$\delta_{i\varphi}^{**} = y,$$

$$B = \frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot C^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{R^{\frac{2}{m+1}}}{\alpha_{\pi}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right). \quad (33)$$

Решение уравнения (27) ведем аналогично случаю вращательного течения по закону твердого тела при $Pr < 1$ методом подстановки $y = u \cdot v$, причем

$$v = \frac{1}{R}, \quad U = \frac{B^{\frac{m+1}{m+3}} \cdot R^2}{2^{\frac{m+1}{m+3}}}.$$

Тогда толщина потери энергии определится в виде

$$\delta_{i\varphi}^{**} = \left(\frac{B}{2} \right)^{\frac{m+1}{m+3}} \cdot R. \quad (34)$$

С учетом полученного ранее выражения B запишем:

$$\delta_{i\varphi}^{**} = \left[\frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot C^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\left(\frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{R^{\frac{2}{m+1}}}{\alpha_{\pi}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right)^{\frac{m+1}{m+3}} \right] / 2 \cdot R. \quad (35)$$

Тогда критерий Стантона для вращательного течения по закону свободного вихря для случая $Pr < 1$ определится, как

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left(\frac{2J\varepsilon \left(2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r^m}} + mr - 2 \right)}{\alpha_{л}^{m-1} r(m+1)(m+2) Re_{\omega}} \right)^{\frac{2}{m+3}} \quad (36)$$

Таким образом, выражены все переменные для определения локальных коэффициентов теплоотдачи в виде критерия Стантона при различных законах течения по аффинноподобной модели температурного пограничного слоя [16].

На рис. 2 представлены значения безразмерного коэффициента теплоотдачи в виде критерия Нуссельта для турбулентного вращательного течения по закону «твердого тела» [17; 18].

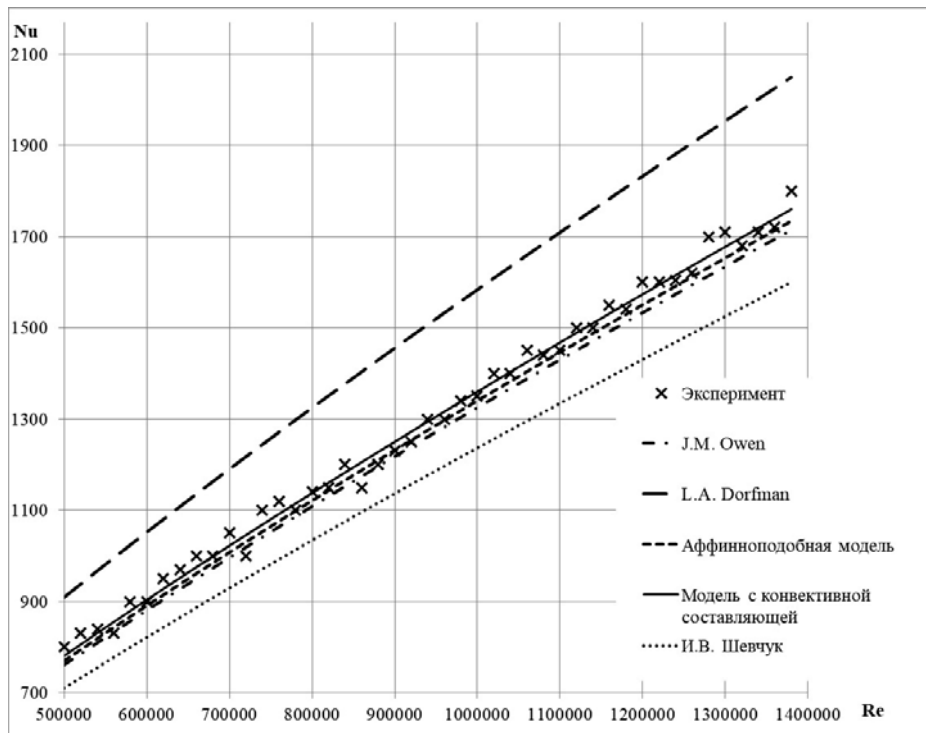


Рис. 2. Коэффициента теплоотдачи при $Pr = 0,7$

Fig. 2. Heat transfer coefficient at $Pr = 0.7$

Заклучение

Для сопоставления полученных в исследовании результатов с работами других авторов, используем данные эксперимента для случая турбулентного вращательного движения воздуха по закону «твердого тела» с диапазоном изменения критерия Рейнольдса $Re = 5 \cdot 10^5 - 1,4 \cdot 10^6$, критерия Прандтля $Pr = 0,7$ [17]. При сравнении со значениями модели с конвективной составляющей аффинноподобная модель показывает схождение результатов на уровне 1,5 %.

Теоретические зависимости, полученные по моделям распределения температурного и динамического пограничных слоев с конвективной составляющей и аффинноподобными профилями при $Pr = 0,7$, дают достаточно близкие результаты в связи с близким подобием распределения температурного и динамического слоев и близки к случаю $Pr = 1$.

Полученные результаты исследования и их соотношение с результатами других авторов показали, что они пригодны для инженерных расчетов и анализа воздействия локальных коэффици-

циентов теплоотдачи на высокотемпературные узлы ТНА. Необходимо отметить, что на безразмерный коэффициент теплоотдачи в виде критерия Нуссельта существенно влияют граничные условия течения и теплообмена, такие как скорость, вязкость, плотность и градиент температур рабочего тела и поверхности теплообмена.

Библиографические ссылки

1. Киселев Ф. Д. Диагностика разрушений и оценка эксплуатационной работоспособности рабочих турбинных лопаток авиационных двигателей // Вестник Московского авиац. ин-та. 2019. Т. 26, № 4. С. 108–122.
2. Григорьев В. А., Загребельный А. О., Калабухов Д. С. Совершенствование параметрической модели массы газотурбинного двигателя со свободной турбиной для вертолетов // Вестник Московского авиац. ин-та. 2019. Т. 26, № 3. С. 137–143.
3. Милешин В. И., Семёнкин В. Г. Расчетное исследование влияния числа Рейнольдса на характеристики первой типовой ступени компрессора высокого давления // Вестник Московского авиац. ин-та. 2018. Т. 25, № 2. С. 86–98.
4. Влияние центробежных массовых сил на теплоотдачу при обтекании потоком воздуха вогнутой поверхности с поперечными выступами / А. В. Ильинков, Р. Р. Габдрахманов, В. В. Такмовцев, А. В. Шукин // Вестник Московского авиац. ин-та. 2018. Т. 25, № 1. С. 39–48.
5. Горелов Ю.Г., Строкач Е.А. Анализ закономерностей расчета коэффициента теплоотдачи от газа на входных кромках сопловых лопаток турбин высокого давления // Вестник Московского авиац. ин-та. 2016. Т. 23, № 1. С. 80–85.
6. Определение коэффициента теплоотдачи на пере лопатки турбины на нерасчётных режимах работы / М. А. Щербаков, Д. А. Воробьев, С. А. Маслаков, Ю. А. Равикович // Вестник Московского авиац. ин-та. 2013. Т. 20, № 3. С. 95–103.
7. Краева Е. М. Энергетические параметры высокооборотных насосов малого расхода // Вестник Московского авиац. ин-та. 2011. Т. 18, № 3. С. 104–109.
8. Дисковое трение при определении баланса мощностей турбонасосных агрегатов жидкостных ракетных двигателей / А. А. Зуев, В. П. Назаров, А. А. Арнольд, И. М. Петров // Вестник Пермского нац. исслед. политех. ун-та. Аэрокосмическая техника. 2019. № 57. С. 17–31.
9. Методика определения дискового трения малорасходных центробежных насосов / А. А. Зуев, В. П. Назаров, А. А. Арнольд, И. М. Петров // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20, № 2. С. 219–227. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-2-219-227.
10. Numerical Research on the Energy Loss of a Single-Stage Centrifugal Pump with Different Vaned Diffuser Outlet Diameters./ F. Lai, X. Zhu, G. Li, L. Zhu, F. Wang // Energy Procedia. 2019. Vol. 158. P. 5523–5528. DOI: 10.1016/j.egypro.2019.01.592.
11. Numerical investigation of influence of the clocking effect on the unsteady pressure fluctuations and radial forces in the centrifugal pump with vaned diffuser / W. Jiang, G. Li, P. Liu, L. Fu // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 71. P. 164–171. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2015.12.025.
12. Efficient CFD evaluation of the NPSH for centrifugal pumps / M. Lorusso, T. Capurso, M. Torresi et al. // Energy Procedia. 2017. Vol. 126. P. 778–785. DOI: 10.1016/j.egypro.2017.08.262.
13. Optimal design of multistage centrifugal pump based on the combined energy loss model and computational fluid dynamics / C. Wang, W. Shi, X. Wang, X. Jiang et al. // Applied Energy. 2017. Vol. 187. P. 10–26. DOI: 10.1016/j.apenergy.2016.11.046.
14. Bakhshan, Y., Omidvar A. Calculation of friction coefficient and analysis of fluid flow in a stepped micro-channel for wide range of Knudsen number using Lattice Boltzmann (MRT) method // Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications. 2015. Vol. 440. P. 161–175. DOI: 10.1016/j.physa.2015.08.012.

15. Numerical study of laminar flow and friction characteristics in narrow channels under rolling conditions using MPS method / M. A. Basit, W. Tian, R. Chen et al. // *Nuclear Engineering and Technology*. 2019. DOI: 10.1016/j.net.2019.06.001.

16. Галактионов А. Ю., Хлупнов А. И. Численный расчет нестационарных аэродинамических характеристик цилиндрических моделей в условиях сверхзвукового ламинарного обтекания // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2015. № 5. С. 4–13. DOI: 10.18698/0236-3941-2015-5-4-13.

17. Афанасьев В. Н., Егоров К. С., Кон Д. Верификация моделей турбулентности при анализе структуры турбулентного пограничного слоя около прямоугольного выступа на пластине // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2018. № 6. С. 72–89. Doi: 10.18698/0236-3941-2018-6-72-89.

18. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя М. : Наука, 1974. 712 с.

References

1. Kiselev F. D. [Fracture diagnostics and operational workability evaluation of working turbine blades of aircraft engine]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2019, Vol. 26, No. 4, P. 108–122 (In Russ.).

2. Grigor'ev V. A., Zagrebel'nyi A. O., Kalabuhov D. S. [Updating parametric gas turbine engine model with free turbine for helicopters]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2019, Vol. 26, No. 3, P. 137–143 (In Russ.).

3. Mileshekin V. I., Semenkina V. G. [Computational study of reynolds number effect on the typical first stage of a high-pressure compressor]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2018, Vol. 25, No. 2, P. 86–98 (In Russ.).

4. Ilinkov A. V., Gabdrakhmanov R. R., Takmovtsev V. V., Shchukin A. V. [Influence of centrifugal mass forces on heat transfer during air flow around a concave surface with transverse protrusions]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2018, Vol. 25, No. 1, P. 39–48 (In Russ.).

5. Gorelov Yu. G., Stokach E. A. [Analysis of regularities of calculation of the heat transfer coefficient from gas at the inlet edges of the nozzle blades of high-pressure turbines]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2016, Vol. 23, No. 1, P. 80–85 (In Russ.).

6. Shcherbakov M. A., Vorobyev D. A., Maslakov S. A., Ravikovich Yu. A. [Determination of the heat transfer coefficient on the turbine blade at off-design operating conditions]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2013, Vol. 20, No. 3, P. 95–103 (In Russ.).

7. Kraeva E. M. [Energy parameters of high-speed pumps of low flow]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2011, Vol. 18, No. 3, P. 104–109 (In Russ.).

8. Zuev A. A., Nazarov V. P., Arngold A. A., Petrov I. M. [Disk friction in determining the balance of power turbopump rocket engine]. *PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*. 2019, No. 57, P. 17–31 (In Russ.).

9. Zuev A. A., Nazarov V. P., Arngold A. A., Petrov I. M. [The method of the disk friction determining of low mass flow centrifugal pumps]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2019, Vol. 20, No. 2, P. 219–227 (In Russ.). DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-2-219-227.

10. Lai F., Zhu X., Li G., Zhu L., Wang F. Numerical Research on the Energy Loss of a Single-Stage Centrifugal Pump with Different Vaned Diffuser Outlet Diameters. *Energy Procedia*. 2019, Vol. 158, P. 5523–5528. DOI: 10.1016/j.egypro.2019.01.592.

11. Jiang W., Li G., Liu P., Fu L. Numerical investigation of influence of the clocking effect on the unsteady pressure fluctuations and radial forces in the centrifugal pump with vaned diffuser. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2016, Vol. 71, P. 164–171. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2015.12.025.

12. Lorusso M., Capurso T., Torresi M., Fortunato B., Fornarelli F., Camporeale S. M., Monteriso R. Efficient CFD evaluation of the NPSH for centrifugal pumps. *Energy Procedia*. 2017, Vol. 126, P. 778–785. DOI: 10.1016/j.egypro.2017.08.262.

13. Wang C., Shi W., Wang X., Jiang X., Yang Y., Li W., Zhou L. Optimal design of multistage centrifugal pump based on the combined energy loss model and computational fluid dynamics. *Applied Energy*. 2017, Vol. 187, P. 10–26. DOI: 10.1016/j.apenergy.2016.11.046.
14. Bakhshan Y., Omidvar A. Calculation of friction coefficient and analysis of fluid flow in a stepped micro-channel for wide range of Knudsen number using Lattice Boltzmann (MRT) method. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. 2015, Vol. 440, P. 161–175. DOI: 10.1016/j.physa.2015.08.012.
15. Basit M. A., Tian W., Chen R., Qiu S., Su G. Numerical study of laminar flow and friction characteristics in narrow channels under rolling conditions using MPS method. *Nuclear Engineering and Technology*. 2019. DOI: 10.1016/j.net.2019.06.001.
16. Galaktionov A. Yu., Khlupnov A. I. [Numerical calculation of unsteady aerodynamic characteristics of cylinder models for supersonic laminar flow]. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana*. 2015, No. 5, P. 4–13 (In Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2015-5-4-13.
17. Afanas'ev V. N., Egorov K. S., Kong Dehai [Turbulence Model Validation During Analysis of the Turbulent Boundary Layer Structure near a Rectangular Ridge on a Plate]. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana, Mashinostr.* 2018, No. 6, P. 72–89 (In Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2018-6-72-89.
18. Shlikhting G. *Teoriya pogrannichnogo sloya* [The theory of the boundary layer]. Moscow, Science Publ., 1974, 712 p.

© Зуев А. А., Арногльд А. А., Фалькова Е. В., Толстопятов М. И., Дубынин П. А.

Зуев Александр Александрович – доктор технических наук, доцент; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: dla2011@inbox.ru.

Арногльд Анна Анатольевна – начальник бюро спецсоединителей, приборов и пультов аппаратуры; АО «Красноярский машиностроительный завод». E-mail: arngoldanna@mail.ru.

Фалькова Екатерина Владимировна – старший преподаватель кафедры технической механики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: dankaty@mail.ru.

Толстопятов Михаил Игоревич – кандидат технических наук, доцент; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: 89130399999@mail.ru.

Дубынин Павел Алексеевич – аспирант кафедры двигателей летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: pavel.dubynin@mail.ru.

Zuev Aleksandr Aleksandrovich – Dr. Sc., associate professor; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: dla2011@inbox.ru.

Arngol'd Anna Anatol'evna – Head of the bureau of special connectors, devices and equipment consoles; JSC “Krasnoyarsk Machine Building Plant”. E-mail: arngoldanna@mail.ru.

Falkova Ekaterina Vladimirovna – Senior Reverend of the Department of Technical Mechanics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: dankaty@mail.ru.

Tolstoy Mikhail Igorevich – Cand. Sc., Associate Professor; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: 89130399999@mail.ru.

Dubynin Pavel Alekseevich – post-graduate student of the Department Aircraft Engines; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: pavel.dubynin@mail.ru.
