

УДК 534.11 + 539.3

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474

Для цитирования: Кудрявцев И. В., Рабецкая О. И., Митяев А. Е. Аппроксимация значений коэффициентов опор балки при колебаниях и потери устойчивости // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 461–474. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474.

For citation: Kudryavtsev I. V., Rabetskaya O. I., Mityaev A. E. [Approximation of beam support coefficient values at vibrations and buckling]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 461–474. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474.

Аппроксимация значений коэффициентов опор балки при колебаниях и потери устойчивости*

И. В. Кудрявцев¹, О. И. Рабецкая², А. Е. Митяев¹

¹Сибирский федеральный университет

Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, Свободный, 79

²Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева

Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

E-mail: ikudryavtsev@sfu-kras.ru

Рассмотрена проблема расчета первой собственной частоты колебаний и первой критической силы для балки с упругими опорами. Аналитический обзор литературы по решению таких задач показал, что в теории колебаний и теории устойчивости стержней учет условий закрепления основан на использовании коэффициентов опор, значения которых были получены после решения соответствующего дифференциального уравнения. В рассмотренной литературе содержится только ограниченный набор значений этих коэффициентов, в основном для идеальных опор простых типов: шарниры, заделка и др. Учет жесткости опор можно найти только в отдельных изданиях и только для ограниченного числа вариантов значений. В данной работе выполнен расчет коэффициентов опор в зависимости от жесткости закрепления балки для первой собственной частоты колебаний и первой критической силы. Полученные значения были разделены на три зоны жесткостей и аппроксимированы внутри каждой зоны квадратичными функциями. Использование квадратичной аппроксимации позволило получить простые аналитические зависимости, пригодные для инженерных прикладных расчетов, а разбиение жесткости на зоны обеспечило приемлемую погрешность получаемых значений. Также квадратичные зависимости позволили решать обратные задачи по определению жесткостей опор для заданного значения первой собственной частоты колебаний или первой критической силы. Проведено подробное исследование погрешности полученных аппроксимирующих функций по всему рассмотренному диапазону жесткостей, которое показало, что погрешность определения коэффициента опор при колебаниях составляет не более 2 %, а при потере устойчивости – 6 %. Погрешность зависит от сочетания жесткостей опор и может увеличиться, если жесткости различаются более чем на порядок. Также была установлена высокая чувствительность решения обратной задачи к входным данным, что является следствием высокой нелинейности зависимости коэффициентов опор от жесткости. Полученные результаты можно использовать при инженерных расчетах первой собственной частоты колебаний и первой критической силы балки с упругими опорами.

Ключевые слова: балка, колебания, устойчивость, коэффициент опор, жесткость опор, аппроксимация.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта № 20-48-242922.

The research was funded by RFBR, Krasnoyarsk Territory and Krasnoyarsk Regional Fund of Science, project number 20-48-242922.

Approximation of beam support coefficient values at vibrations and buckling

I. V. Kudryavtsev^{1*}, O. I. Rabetskaya², A. E. Mityaev¹

¹Siberian Federal University

79, Svobodniy prospekt, Krasnoyarsk, Russian Federation, 660041

²Reshetnev Siberian State University of Science and Technology

31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

*E-mail: ikudryavtsev@sfu-kras.ru

The problem of calculating the first natural frequency of vibration and the first critical force for a beam with elastic supports is considered. An analytical review of the literature on solving such problems showed that in the theory of vibrations and the theory of stability of beams, consideration of the support conditions is based on the use of support coefficients, the values of which were obtained after solving the corresponding differential equation. The reviewed literature contains only a limited set of values of these coefficients, mainly for ideal supports of simple types: hinges, fixed, etc. Consideration of the stiffness of supports can only be found in individual editions and only for a limited number of values. In this work, the calculation of the support coefficients depending on the stiffness of the beam supports for the first natural frequency of vibrations and the first critical force is made. The obtained values were divided into three zones and approximated within each zone by quadratic functions. The use of quadratic approximation made it possible to obtain simple analytical dependencies suitable for engineering applied calculations, and the division of stiffness into zones provided an acceptable error of the obtained values. Also, quadratic dependencies made it possible to solve inverse problems for determining the stiffness of supports for a given value of the first natural frequency of vibrations or the first critical force. A detailed study of the error of the obtained approximating functions over the entire considered range of stiffness was carried out, which showed that the error in determining the coefficient of supports during fluctuations is not more than 2%, and in case of loss of stability - 6%. The error depends on the combination of stiffness of the supports, and can increase if the stiffnesses differ by more than an order of magnitude. The high sensitivity of the solution of the inverse problem to the input data was also established, which is the result of the high nonlinearity of the dependence of the coefficients of the supports on the stiffness. The obtained results can be used in engineering calculations of the first natural frequency of vibrations and the first critical force of a beam with elastic supports.

Keywords: beam, vibrations, stability, support coefficient, support stiffness, approximation.

Введение

С целью обеспечения требуемого динамического поведения заданной действительной конструкции на этапах ее проектирования или исследования широко используется балочная модель [1; 2]. С математической стороны расчет свободных колебаний или критической нагрузки для балок связан с решением дифференциальных уравнений, которое во многом определяется способом закрепления конструкции. В обоих случаях решение связано с определением собственных значений системы, полученной после подстановки функции формы в граничные условия задачи. Для задач колебаний квадраты собственных значений определяют величину частот свободных колебаний, а при исследовании устойчивости – величину критических нагрузок.

Корректная постановка математической задачи и ее решение требуют определенных специальных навыков и времени, что затруднительно при проведении инженерных расчетов. С целью упрощения таких расчетов существует большое число книг и справочников по динамике балок, в которых предложены готовые решения по свободным колебаниям [3–27] и потери устойчивости [28–35] для простых случаев закрепления, которые полностью ограничивают или разрешают движение по какой-либо координате: шарнир, заделка, скользящая опора и др., а также их комбинации. Для данных закреплений представлены готовые решения и величины корней из собственных значений, которые в теории устойчивости называют по-разному:

коэффициент приведения длины, коэффициент приведенной длины или коэффициент приведения. В теории колебаний отдельного названия для корней из собственных значений нами не обнаружено. Для общности данные коэффициенты при решении задач колебаний и устойчивости будем здесь называть коэффициентами опор.

Однако реализовать на практике упомянутые выше идеальные опоры затруднительно, поскольку действительные опоры имеют некоторое промежуточное значение жесткости, которое влияет на динамическое поведение балки и вызывает расхождение между теоретическим расчетом и практическим результатом. В имеющейся литературе по динамике балок решения для промежуточных значений жесткостей представлены в очень ограниченном виде [36–41] или полученные решения не пригодны для прикладных инженерных расчетов [42–45]. Также справочные таблицы иногда содержат ошибочные значения, которые не всегда очевидны для неопытных расчетчиков. Например, в справочнике по динамике [41] в таблице коэффициентов опор на с. 168 указаны некорректные значения, из-за чего таблица даже потеряла симметричность относительно главной диагонали. Подобные неточности есть и в других изданиях [40; 46].

Целью данной работы является аппроксимация промежуточных значений коэффициентов опор балок при свободных колебаниях и потере устойчивости для широкого диапазона жесткости опор. С целью ограничения данной большой задачи рассматривается только изгибная форма балки при колебаниях на первой собственной частоте и при первой критической нагрузке, которые обычно являются наиболее опасными для протяженных конструкций. Многообразие закреплений балок для изгибной формы ограничим случаем шарнирных опор с некоторой жесткостью. Полученные результаты аппроксимируем с помощью аналитических функций, что позволит определять значения коэффициентов опор для любых заданных значений жесткости опор. В качестве аппроксимирующих функций примем квадратичные зависимости, что при необходимости позволяет решать и обратную задачу – определить требуемую жесткость опор для заданного значения коэффициента опор.

Полученные результаты позволят инженерам рассчитывать первую собственную частоту колебаний и первую критическую силу для балочных конструкций с заданной жесткостью опор, а также решать обратную задачу по определению жесткости опор, обеспечивающей заданный динамический параметр. Аналитический вид предлагаемого решения позволяет легко оценить взаимовлияние различных параметров на решение и при необходимости преобразовать его в требуемом направлении.

1. Математическая постановка задачи

Будем рассматривать однородную балку, закрепленную по краям в шарнирных опорах, жесткость которых k_1 и k_2 может изменяться от нуля (шарнир) до бесконечности (заделка). В дальнейших расчетах в качестве жесткости опор также будем использовать не ее абсолютные значения k_1 и k_2 [Н*м], а относительные безразмерные величины

$$C_1 = k_1 \frac{l}{EJ_{\min}}; \quad C_2 = k_2 \frac{l}{EJ_{\min}}, \quad (1)$$

где l – длина; E – модуль Юнга материала; J_{\min} – минимальный момент инерции поперечного сечения.

Рассмотрим далее математическую постановку задачи свободных колебаний балки и потери устойчивости с учетом жесткости опор.

1.1. Свободные колебания балки в упругих опорах

На рис. 1 показана расчетная схема свободных колебаний балки в упругих опорах с жесткостью C_1 и C_2 .

Уравнение свободных колебаний имеет вид

$$EJ_{\min} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где $y=y(x)$ – функция изгибной формы балки; m – удельная масса.

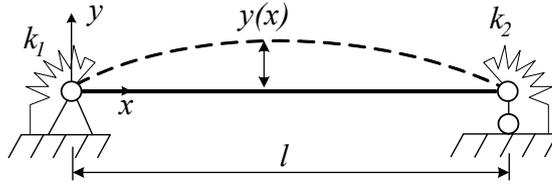


Рис. 1. Балка с упругими опорами

Fig. 1. Spring-hinged beam.

Граничные условия закрепления балки имеют вид

$$y(0,t) = y(l,t) = 0; \quad EJ_{\min} \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = k_1 \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}; \quad EJ_{\min} \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = -k_2 \frac{\partial y(l,t)}{\partial x}. \quad (3)$$

Общее решение представим в виде

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) \sin \omega_i t, \quad (4)$$

где $Y_i(x)$ – i -я мода колебаний, общее решение для которой имеет вид

$$Y_i(x) = A_i \sin p_i x + B_i \cos p_i x + C_i \sinh p_i x + D_i \cosh p_i x. \quad (5)$$

Подставляя общее решение в граничные условия, получим частотное уравнение в виде [27]

$$2\alpha_i^4 \tan \alpha_i^2 \cdot \tanh \alpha_i^2 + \alpha_i^2 l \frac{k_1 + k_2}{EJ_{\min}} \cdot (\tan \alpha_i^2 - \tanh \alpha_i^2) - \frac{k_1 k_2 l^2}{E^2 J_{\min}^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha_i^2 \cdot \cosh \alpha_i^2} \right) = 0, \quad (6)$$

где $\alpha_i = \sqrt{p_i l}$ – коэффициент опор на i -й собственной моде колебаний.

Ограничиваясь рассмотрением первой собственной частоты колебаний ($i=1$) получаем искомую зависимость с учетом (1) в виде

$$\alpha_1 = \alpha_1(C_1, C_2). \quad (7)$$

Величина первой собственной частоты колебаний определится, как

$$f_1(C_1, C_2) = \alpha_1^2(C_1, C_2) \cdot \frac{1}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ_{\min}}{m}}. \quad (8)$$

Решение разрешающего уравнения колебаний (6) с помощью простых аналитических функций практически невозможно, поэтому используем численные методы.

1.2. Потеря устойчивости балки в упругих опорах

Постановка и решение задачи потери устойчивости балки при сжатии во многом аналогична задаче свободных колебаний. На рис. 2 показана расчетная схема балки в упругих опорах при потере устойчивости от сжатия силой P .

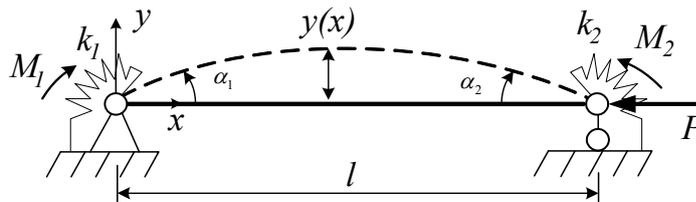


Рис. 2. Изгибная потеря устойчивости балки с упругими опорами

Fig. 2. Flexural buckling of the beam with spring-hinged supports

При потере устойчивости в упругих опорах будут возникать реактивные моменты, которые прямо пропорциональны соответствующим углам их поворота,

$$M_1 = k_1 \cdot \alpha_1; \quad M_2 = k_2 \cdot \alpha_2. \quad (9)$$

Тогда уравнение устойчивости примет вид

$$EJ_{\min} \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \cdot y - M_1 \cdot \frac{l-x}{l} - M_2 \cdot \frac{x}{l}. \quad (10)$$

Граничные условия определяются способом закрепления в виде ограничений на прогибы и углы поворота:

$$y(x=0) = 0; \quad y'(x=0) = -\alpha_1 = -\frac{M_1}{k_1}; \quad y(x=l) = 0; \quad y'(x=l) = -\alpha_2 = -\frac{M_2}{k_2}. \quad (11)$$

Общее решение примем в виде функции

$$y = A \cdot \sin(\theta \cdot x) + B \cdot \cos(\theta \cdot x) - \frac{M_1}{P \cdot l}(l-x) - \frac{M_2}{P \cdot l}x, \quad (12)$$

где

$$\theta = \sqrt{\frac{P}{EJ_{\min}}}. \quad (13)$$

Тогда уравнение упругой линии будет иметь вид

$$y = \left(\frac{M_2}{P \cdot \sin(\theta \cdot l)} - \frac{M_1}{P \cdot \operatorname{tg}(\theta \cdot l)} \right) \cdot \sin(\theta \cdot x) + \frac{M_1}{P} \cdot \cos(\theta \cdot x) - \frac{M_1}{P \cdot l}(l-x) - \frac{M_2}{P \cdot l}x, \quad (14)$$

в котором моменты в упругих шарнирах можно найти из системы двух уравнений:

$$\begin{cases} M_1 \left(1 + \frac{k_1}{P \cdot l} - \frac{k_1 \cdot \theta}{P \cdot \operatorname{tg}(\theta \cdot l)} \right) + M_2 \left(\frac{k_1 \cdot \theta}{P \cdot \sin(\theta \cdot l)} - \frac{k_1}{P \cdot l} \right) = 0; \\ M_1 \left(\frac{k_2}{P \cdot l} - \frac{k_2 \cdot \theta \cdot \sin(\theta \cdot l)}{P} - \frac{k_2 \cdot \theta \cdot \cos(\theta \cdot l)}{P \cdot \operatorname{tg}(\theta \cdot l)} \right) + M_2 \left(\frac{k_2 \cdot \theta}{P \cdot \operatorname{tg}(\theta \cdot l)} - \frac{k_2}{P \cdot l} - 1 \right) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Ненулевое решение системы (15) найдем, приравняв к нулю ее определитель и решая трансцендентное уравнение [29],

$$\left(\frac{P_i}{k_1} + \frac{1}{l} - \frac{\theta_i}{\operatorname{tg}(\theta_i \cdot l)} \right) \cdot \left(\frac{\theta_i}{\operatorname{tg}(\theta_i \cdot l)} - \frac{1}{l} - \frac{P_i}{k_2} \right) - \left(\frac{1}{l} - \frac{\theta_i}{\sin(\theta_i \cdot l)} \right) \cdot \left(\frac{\theta_i}{\sin(\theta_i \cdot l)} - \frac{1}{l} \right) = 0, \quad (16)$$

где i – номер критической силы.

Ограничиваясь рассмотрением первой критической силы ($i = 1$), получим искомую зависимость с учетом (1) в виде

$$\mu_1 = \mu_1(C_1, C_2) = \frac{\pi}{\theta_1(C_1, C_2) \cdot l}, \quad (17)$$

где μ_1 – коэффициент приведения длины или коэффициент опор при устойчивости.

Первая критическая сила тогда определится по уравнению

$$P_{cr}(C_1, C_2) = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu_1(C_1, C_2) \cdot l)^2}. \quad (18)$$

Решение разрешающего уравнения задачи устойчивости (16) аналитическими способами затруднительно, поэтому воспользуемся численными методами.

2. Аппроксимация коэффициентов опор

Решение разрешающих уравнений (6) и (16) выполним численным итеративным методом последовательных приближений в специально созданных программах. Решение было выполнено для 500 вариантов сочетаний значений жесткостей опор балки в диапазоне от $C = 0$ до $C = 1000$. Ограничение значений диапазона жесткостей было вызвано тем, что с одной стороны расширение диапазона требует использование более сложных аналитических зависимостей для аппроксимации, а с другой стороны жесткость $C = 1000$ фактически соответствует жесткой заделке и дальнейшее увеличение значений жесткости практически не влияет на изменение величины коэффициентов опор.

2.1. Аппроксимация коэффициентов опор при свободных колебаниях

В табл. 1 приведен ограниченный набор результатов для коэффициентов опор α при свободных колебаниях балки для выбранного диапазона жесткостей, включая значение $C = \infty$.

Таблица 1

Значения коэффициентов опор $\alpha_1(C_1, C_2)$

C_2	C_1													
	0	0,1	1	5	10	20	30	40	50	100	200	500	1000	∞
0	3,142	3,157	3,273	3,534	3,665	3,769	3,814	3,839	3,855	3,889	3,907	3,919	3,923	3,926
0,1		3,173	3,288	3,548	3,678	3,783	3,825	3,852	3,868	3,902	3,921	3,932	3,936	3,940
1			3,399	3,652	3,781	3,884	3,929	3,954	3,970	4,004	4,023	4,034	4,038	4,041
5				3,897	4,026	4,131	4,177	4,202	4,219	4,254	4,273	4,285	4,289	4,292
10					4,156	4,263	4,310	4,337	4,354	4,390	4,410	4,422	4,426	4,430
20						4,374	4,422	4,449	4,467	4,504	4,525	4,538	4,542	4,546
30							4,471	4,499	4,517	4,555	4,576	4,589	4,593	4,597
40								4,527	4,545	4,583	4,604	4,617	4,622	4,626
50		Symmetric							4,563	4,602	4,623	4,636	4,640	4,644
100										4,641	4,663	4,676	4,681	4,685
200											4,684	4,698	4,702	4,707
500												4,711	4,716	4,720
1000													4,721	4,725
∞														4,730

Полученные численные данные графически показаны на рис. 3 в виде плоскости $\alpha_1(C_1, C_2)$ и графика $\alpha_1(C)$ для случая опор с одинаковой жесткостью: $C = C_1 = C_2$.

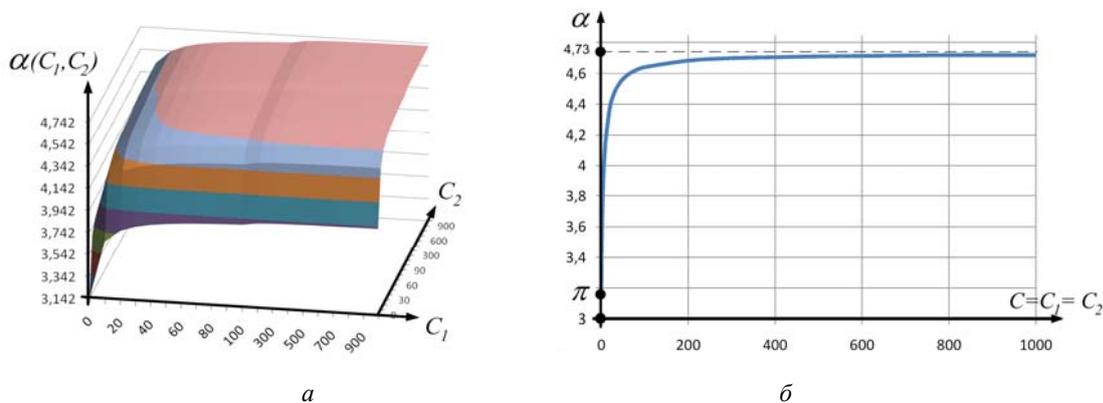


Рис. 3. Графическое представление коэффициентов опор при свободных колебаниях:
 а – график функции $\alpha_1(C_1, C_2)$; б – график функции $\alpha_1(C)$

Fig. 3. Graphs of support coefficients at free vibration:
 a – graph of the function $\alpha_1(C_1, C_2)$; b – graph of the function $\alpha_1(C)$

Результаты показали, что зависимость $\alpha_1(C_1, C_2)$ является сильно нелинейной, что не позволяет аппроксимировать ее одной простой аналитической функцией даже для принятого диапазона $C = 0 \dots 1000$. Исследования установили, что высокая точность аппроксимации может быть получена только при использовании полиномов высокой степени, однако это создает большие вычислительные трудности и не позволяет решать обратную задачу по определению требуемой жесткости опор для заданного значения коэффициента опор α_1 .

Учитывая симметрию данных в табл. 1, необходимость сохранения простых аналитических зависимостей и возможность проведения обратного расчета, примем в качестве аппроксимирующих зависимостей квадратичные функции. Неизбежное при этом снижение точности аппроксимации компенсируем путем разбиения выбранного диапазона жесткостей на три зоны: I – $C = 0 \dots 10$, II – $C = 10 \dots 100$, III – $C = 100 \dots 1000$. Внутри каждой зоны аппроксимируем полученные числовые значения коэффициентов опор α отдельной квадратичной функцией, коэффициенты которых определим методом наименьших квадратов [47; 48]. В результате получаем решение для каждой зоны в виде:

$$\alpha_{1i}(C_1, C_2) = a_{0i} + a_{1i} \cdot (C_1 + C_2) + a_{2i} \cdot (C_1^2 + C_2^2), \quad (19)$$

где i – номер зоны, $i = I, II, III$.

Коэффициенты квадратичных функций для каждой зоны приведены в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты функций $\alpha_{1i}(C_1, C_2)$

Коэффициент	Зона i		
	I	II	III
	$C = 0 \dots 10$	$C = 10 \dots 100$	$C = 100 \dots 1000$
a_{0i}	3,1415	4,03	4,62
a_{1i}	0,107	0,0075	1,250E-04
a_{2i}	-0,00563	-4,35E-05	-7,400E-08

Полученные коэффициенты квадратичных аппроксимирующих функций (19) позволяют рассчитывать значения коэффициента опор α для уравнения (8) практически с любым сочетанием жесткостей опор. Однако погрешность определения коэффициента существенно увеличивается при большой разнице в жесткостях опор. Если же значения жесткостей опор одного порядка, то погрешность расчета коэффициента опор составляет не более 2 % для всего рассматриваемого диапазона жесткостей.

2.2. Аппроксимация коэффициентов опор при потере устойчивости

Используя аналогичный подход, выполним аппроксимацию коэффициентов опор μ при потере устойчивости балки. В табл. 3 приведен ограниченный набор результатов для коэффициентов опор $\mu_1(C_1, C_2)$ для выбранного диапазона жесткостей, включая значение $C = \infty$.

Полученные численные данные графически показаны на рис. 4 в виде плоскости $\mu_1(C_1, C_2)$ и графика $\mu_1(C)$ для случая опор с одинаковой жесткостью: $C_1 = C_2$.

Зависимость $\mu(C_1, C_2)$ также является сильно нелинейной, что требует разбиения рассматриваемого диапазона жесткости на зоны. Внутри каждой зоны аппроксимируем значения квадратичными функциями

$$\alpha_{1i}(C_1, C_2) = b_{0i} + b_{1i} \cdot (C_1 + C_2) + b_{2i} \cdot (C_1^2 + C_2^2), \quad (20)$$

где i – номер зоны, $i = I, II, III$.

Используя метод наименьших квадратов, определим коэффициенты аппроксимирующих квадратичных функций и результаты сведем в табл. 4.

Таблица 3

Значения коэффициентов опор $\mu_1(C_1, C_2)$

C_2	C_1													
	0	0,1	1	5	10	20	30	40	50	100	200	500	1000	∞
0	1,000	0,987	0,920	0,803	0,760	0,732	0,722	0,716	0,713	0,706	0,703	0,701	0,700	0,699
0,1		0,979	0,913	0,797	0,754	0,727	0,717	0,711	0,708	0,702	0,698	0,696	0,695	0,695
1			0,854	0,750	0,711	0,686	0,676	0,672	0,669	0,663	0,660	0,658	0,657	0,657
5				0,661	0,627	0,605	0,596	0,592	0,590	0,585	0,582	0,581	0,580	0,580
10					0,594	0,572	0,564	0,560	0,558	0,553	0,550	0,549	0,548	0,548
20						0,551	0,543	0,539	0,537	0,532	0,529	0,528	0,527	0,527
30							0,535	0,531	0,529	0,524	0,521	0,520	0,520	0,519
40								0,527	0,525	0,520	0,518	0,516	0,516	0,515
50		Symmetric							0,522	0,517	0,515	0,514	0,513	0,513
100										0,513	0,510	0,509	0,508	0,508
200											0,508	0,506	0,506	0,505
500												0,505	0,504	0,504
1000													0,503	0,503
∞														0,500

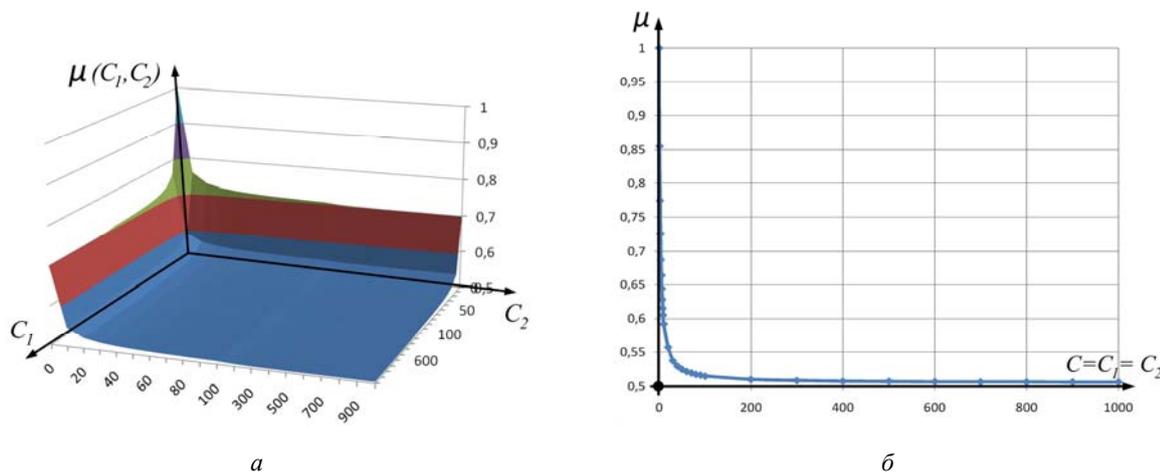


Рис. 4. Графическое представление коэффициентов опор при потере устойчивости:
 а – график функции $\mu_1(C_1, C_2)$; б – график функции $\mu_1(C)$

Fig. 4. Graphs of support coefficients at buckling:
 a – graph of the function $\mu_1(C_1, C_2)$; b – graph of the function $\mu_1(C)$

Таблица 4

Коэффициенты функций $\mu_{1i}(C_1, C_2)$

Коэффициент	Зона i		
	I	II	III
	$C = 0 \dots 10$	$C = 10 \dots 100$	$C = 100 \dots 1000$
b_{0i}	1	0,623	0,516
b_{1i}	-0,0505	-0,0016	-1,81E-05
b_{2i}	0,003	1,05E-05	1,2E-08

Полученные коэффициенты квадратичных аппроксимирующих функций (19) позволяют рассчитывать значения коэффициента опор μ_1 с погрешностью расчета не более 6,5 % для жесткостей одного порядка.

2.3. Решение обратной задачи

Использование аппроксимирующих квадратичных функций позволяет решать и обратную задачу по определению жесткости опор, обеспечивающих требуемые коэффициенты опор α или μ . Рассмотрим определение жесткости опор для известного значения коэффициента опор α_1 при свободных колебаниях, которое можно найти согласно (8) при заданном значении первой собственной частоты колебаний f_1 как

$$\alpha_1(C_1, C_2) = l \cdot \sqrt[4]{f_1^2 \cdot \frac{4\pi^2 m}{EJ_{\min}}} . \quad (21)$$

Равенство (21) возможно при различном сочетании значений жесткостей опор C_1 и C_2 , что делает задачу нахождения жесткости опор неоднозначной. Для определенности свяжем эти жесткости через заданный коэффициент n , определяющий отношение жесткостей опор:

$$C = C_1 = \frac{C_2}{n} . \quad (22)$$

Подставив эти данные в уравнение (19), получим разрешающее уравнение относительно общей жесткости опор C :

$$a_{i2} \cdot (1+n^2)C^2 + a_{i1} \cdot (1+n)C + (a_{i0} - \alpha_1) = 0 . \quad (23)$$

Значения коэффициентов a_{ij} принимаются из табл. 2 для требуемой зоны i и решение с учетом знаков имеет вид

$$C = \frac{-a_{i1} \cdot (1+n) + \sqrt{a_{i1}^2 \cdot (1+n)^2 - 4a_{i2}(1+n^2)(a_{i0} - \alpha_1)}}{2 \cdot a_{i2} \cdot (1+n^2)} . \quad (24)$$

В случае решения обратной задачи для задачи устойчивости, требуемое значение коэффициента опор μ при заданном значении критической силы определится по (18) как

$$\mu_1(C_1, C_2) = \sqrt{\frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2 \cdot P_{cr}}} . \quad (25)$$

Аналогично свободным колебаниям, общая жесткость опор в задаче устойчивости определится из уравнения

$$C = \frac{-b_{i1} \cdot (1+n) - \sqrt{b_{i1}^2 \cdot (1+n)^2 - 4b_{i2}(1+n^2)(b_{i0} - \mu_1)}}{2 \cdot b_{i2} \cdot (1+n^2)} , \quad (26)$$

где коэффициенты b_{ij} определяются для i -й зоны, согласно табл. 4.

В обоих случаях решение будет корректным при определении жесткости опор внутри одной i -й зоны. После определения неизвестной C , требуемые значения жесткости опор определяются как:

$$C_1 = C; \quad C_2 = C \cdot n \quad (27)$$

и

$$k_1 = C \cdot \frac{EJ_{\min}}{l}, \quad k_2 = C \cdot \frac{EJ_{\min}}{l} \cdot n . \quad (28)$$

Найденные жесткости опор (25) будут обеспечивать заданное значение коэффициента опор и, следовательно, первую частоту собственных колебаний балки или первую критическую силу в зависимости от решаемой задачи.

Обсуждение

В работе получены наборы коэффициентов опор при свободных колебаниях балки на первой собственной частоте и потери устойчивости при первой критической нагрузке для большого

диапазона сочетаний жесткостей опор. Данные значения аппроксимированы квадратичными функциями, что позволило получить простые аналитические выражения, а также решение обратной задачи, но неизбежно внесло некоторую погрешность в определение их значений. Рассмотрим далее точность полученных аппроксимаций.

Значения рассчитанных коэффициентов опор в табл. 1 и 3 сравнивались со значениями в известной литературе [36–41]. Сравнение показало, что найденные значения полностью совпадают по первым двум значащим цифрам и иногда различаются в третьей, что, по-видимому, вызвано способом округления. Прямое сравнение всех найденных в литературе значений показало, что отклонения не превышают 0,36 % для коэффициента опор α и 0,27 % для коэффициента μ .

Погрешность аппроксимирующих квадратичных функций определяется используемыми значениями коэффициентов (табл. 2 и 4). В данной работе коэффициенты выбирались с учетом обеспечения минимальной погрешности на краях каждой зоны и равномерного отклонения внутри диапазона. Для наглядности, на рис. 5 приведено исследование погрешности определения коэффициентов опор по всему диапазону жесткостей при равной жесткости опор $C = C_1 = C_2$.

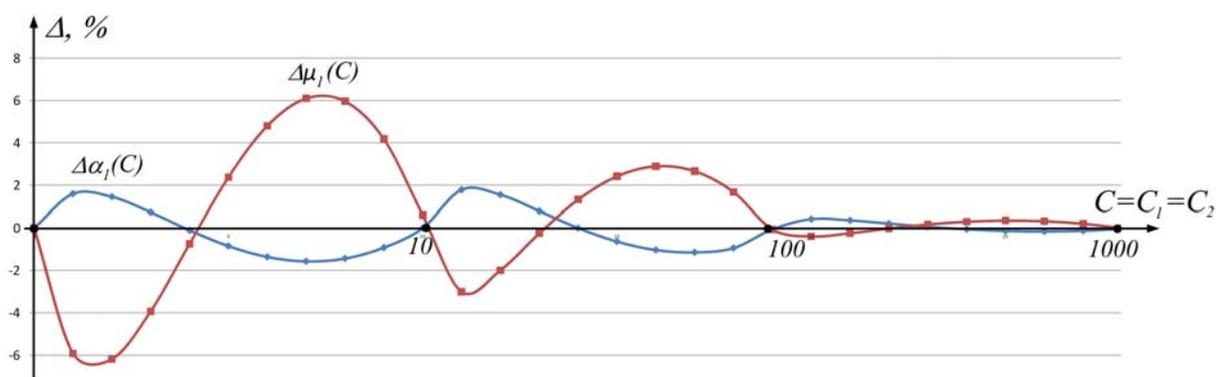


Рис. 5. Погрешности аппроксимации квадратичными функциями

Fig. 5. Approximation errors by quadratic functions

Согласно графикам, погрешность аппроксимации коэффициента внутри каждой зоны распределяется по синусоиде и отклонения коэффициента α не превышают 2 %, а коэффициента μ — менее 6,2 % во всем рассмотренном диапазоне жесткостей. Этого вполне достаточно для инженерных расчетов балочных конструкций в первом приближении, поскольку используемые в теории балок допущения могут приводить к таким же отклонениям в решении.

Исследование погрешности аппроксимации при различных сочетаниях жесткостей C_1 и C_2 показало, что если жесткости опор одного порядка, то отклонения значений коэффициентов опор α и μ не превышают значения, представленные на рис. 5.

При разнице в жесткостях опор более чем в 10 раз погрешность увеличивается до 15 %, что может потребовать несколько итераций при определении требуемого значения коэффициента опор. Также следует отметить, что из-за высокой нелинейности функций $\alpha_1(C_1, C_2)$ и $\mu_1(C_1, C_2)$ результат решения обратной задачи (24), (26) напрямую зависит от точности входных данных.

Предложенный подход можно применять для расчета коэффициентов опор при других типах закреплений с учетом их упругости, а также для определения второй и последующих собственных частот колебаний, критических сил потери устойчивости не только изгибаемой, но и других форм колебаний и потери устойчивости.

Заключение

В работе выполнен расчет значений коэффициентов опор балки для большого числа различных сочетаний жесткостей опор для изгибаемой формы свободных колебаний на первой собственной частоте и первой формы потери устойчивости. По полученным данным методом

наименьших квадратов выполнена аппроксимация значений квадратичными функциями. Данные аналитические функции позволяют определять коэффициент опор балки при любых сочетаниях жесткостей опор и решать обратную задачу по нахождению необходимой жесткости опор при известном требуемом значении коэффициента опор. Исследование погрешности аппроксимации показало, что типичные отклонения составляют около 3 %, что можно считать достаточным для инженерных прикладных расчетов.

Библиографические ссылки

1. Некоторые аспекты моделирования динамики трансформируемых космических конструкций / Ц. Джан, В. Н. Зимин, А. В. Крылов, С. А. Чурилин // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20, № 1. С. 68–73. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-1-68-73.
2. Кудрявцев И. В. Обеспечение динамического состояния прямолинейных волноводных трактов при нагреве с помощью расстановки опор // Вестник Московского авиационного института. 2021. Т. 28, № 4. С. 92–105. DOI: 10.34759/vst-2021-4-92-105.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. М. : Дрофа, 2004. 591 с.
4. Ильин М. М., Колесников К. С., Саратов Ю. С. Теория колебаний. М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 272 с.
5. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М. : Наука, 1988. 328 с.
6. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М. : Машиностроение, 1985. 472 с.
7. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М. : Наука, 1991. 256 с.
8. Яблонский А. А., Норейко С. С. Курс теории колебаний. СПб. : Лань, 2003. 254 с.
9. Доев В. С. Поперечные колебания балок. М. : КНОРУС, 2016. 412 с.
10. Блехман И. И. Вибрационная механика. М. : Физматлит, 1994. 400 с.
11. Клаф В. К. Динамика сооружений. М. : Стройиздат, 1979. 320 с.
12. Balachandran B. Vibrations. Toronto : Cengage Learning, 2009. 737 p.
13. Benaroya H., Nagurka M., Han S. Mechanical vibration. London : CRC Press, 2017. 602 p.
14. Bottega W. J. Engineering vibrations. New York : CRC Press, 2006. 750 p.
15. Clough R. E. Dynamics of Structures. New York : McGraw-Hill College, 1995. 752 p.
16. Geradin M., Rixen D. J. Mechanical vibrations. London : John Wiley & Sons, 2015. 617 p.
17. Hagedorn P. Vibrations and waves in continuous mechanical systems. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007. 388 p.
18. Inman D. J. Engineering vibration, Pearson Education : NJ, 2014. 720 p.
19. Kelly S. G. Advanced vibration analysis. New York : CRC Press, 2007. 650 p.
20. Jazar R. N. Advanced vibrations. A modern approach. Springer : NY, 2013. 695 p.
21. Kelly S. G. Mechanical vibrations. Theory and applications. Cengage Learning: NY, 2012. 896 p.
22. Leissa A. W. Vibration of continuous systems, McGraw-Hill : New York, 2011. 524 p.
23. Meirovitch L. Fundamentals of vibrations. McGraw-Hill, Book Co : New York, 2001. 826 p.
24. Rades M. Mechanical vibrations II. Structural dynamic modeling. Printech Publisher: Turin, 2010. 354 p.
25. Rao S. Mechanical vibrations. Pearson Education Limited: London, 2018. 1295 p.
26. Shabana A. S. Theory of vibration. Springer-Verlag : New York, 2019. 382 p.
27. Hibbeler R. C. Free vibration of a beam supported by unsymmetrical spring-hinges. *J. Appl. Mech*, 1975. Vol. 42(2), P. 501–502. DOI: 10.1115/1.3423612.
28. Алфутов Н. А., Колесников К. С. Устойчивость движения и равновесия. М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 256 с.
29. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М. : Наука, 1971. 807 с.
30. Farshad M., Stability of Structures. Elsevier Science B.V. Amsterdam, 1994. 434 p.

31. Ziemian R. D., Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures. John Wiley & Sons: NY, 2010. 1117 p.
32. Timoshenko S. P., Gere J. M., Theory of Elastic Stability. Dover Publications: New York, 2009. 560 p.
33. Jerath. S., Structural Stability Theory and Practice: Buckling of Columns, Beams, Plates, and Shells. John Wiley & Sons: Chichester, 2020. 672 p.
34. Thomsen J. J. Vibrations and stability. New York, 2003. 420 p. 404 p.
35. Yoo C. H. Stability of structures. Elsevier : London, 2011. 529p.
36. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3. М. : Машиностроение, 1988. 567 с.
37. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М. : Высшая школа, 1980. 408 с.
38. Коренев Б. Г. Справочник по динамике сооружений. М. : Стройиздат, 1972. 511 с.
39. Уманский А. А. Справочник проектировщика. Т. 2. М. : Стройиздат, 1973. 415 с.
40. Wang C. M. Exact solutions for buckling of structural members. CRC Press: New York, 2005. 212 p.
41. Blevins R. D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. John Wiley & Sons, Ltd: Chichester, 2016. 458 p.
42. Lin Y. K. Free vibration of a continuous beam on elastic supports. International Journal of Mechanical Sciences. 1962. Vol. 4. P. 409–423.
43. Lin H., Chang S. C. Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints. Journal of Sound and Vibration. 2005. Vol. 281(1–2). P. 155–169. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.01.010.
44. Luo J., Zhu S., Zhai W. Exact closed-form solution for free vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with intermediate elastic supports. International Journal of Mechanical Sciences. 2022. Vol. 213. P. 106842. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106842.
45. Free vibrations of Bernoulli-Euler beams with intermediate elastic support / M. J. Maurizi, D. V. Bambill, P. M. Bellés et al. // Journal of Sound and Vibration. 2005. Vol. 281(3–5). P. 1238–1239. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.06.014.
46. Hibbeler R. C. Erratum: “Free Vibration of a Beam Supported by Unsymmetrical Spring Hinges” (Journal of Applied Mechanics, 1975, 42, pp. 501–502)”. ASME // J. Appl. Mech. 1981. Vol. 48(2). P. 449. DOI: 10.1115/1.3157647.
47. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. М. : URSS, 2014. 352 с.
48. Дрейпер Н.? Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М. : Вильямс, 2016. 912 с.

References

1. Zhang Z., Zimin V. N., Krylov A. V., Churilin S. A. [The definite questions of simulation of transformable space structures dynamics]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2019, Vol. 20, No. 1, P. 68–73. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-1-68-73.
2. Kudryavtsev I. V. Ensuring dynamic state of straight waveguide paths at heating by supports arrangement. *Aerospace MAI Journal*. 2021, Vol. 28, No. 4, P. 92–105. DOI: 10.34759/vst-2021-4-92-105. (In Russ.).
3. Babakov I.M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow, Drofa Publ., 2004, 591 p.
4. Il'in M. M., Kolesnikov K. S., Saratov Yu. S. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow, MGTU Publ., 2001, 272 p.
5. Zhuravlev V. F., Klimov D. M. *Prikladnye metody v teorii kolebaniy* [Applied methods in vibration theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 328 p.
6. Timoshenko S. P., Yang D. Kh., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibrations in Engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985, 472 p.
7. Panovko Ya. G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* [Introduction to the theory of mechanical Vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 256 p.

8. Yablonskiy A. A., Noreyko S. S. *Kurs teorii kolebaniy* [Oscillation theory course]. Sankt-Peterburg, Lan' Publ., 2003, 254 p.
9. Doev V. S. *Poperechnye kolebaniya balok* [Transverse vibrations of beams]. Moscow, KNORUS Publ., 2016, 412 p.
10. Blekhman I. I. *Vibratsionnaya mekhanika* [Vibration mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994, 400 p.
11. Klaf V. K. *Dinamika sooruzheniy* [Dynamics of structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1979, 320 p.
12. Balachandran B. *Vibrations*. Toronto: Cengage Learning, 2009. 737 p.
13. Benaroya H., Nagurka M., Han S. *Mechanical vibration*. CRC Press: London, 2017. 602 p.
14. Bottega W. J. *Engineering vibrations*. CRC Press: New York, 2006. 750 p.
15. Clough R. E. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill College: New York, 1995. 752 p.
16. Geradin M., Rixen D. J. *Mechanical vibrations*. John Wiley & Sons: London, 2015. 617 p.
17. Hagedorn P. *Vibrations and waves in continuous mechanical systems*. John Wiley & Sons: New Jersey, 2007. 388 p.
18. Inman D. J. *Engineering vibration*, Pearson Education: NJ, 2014. 720 p.
19. Kelly S. G. *Advanced vibration analysis*. CRC Press: New York, 2007. 650 p.
20. Jazar R. N. *Advanced vibrations. A modern approach*. Springer: NY, 2013. 695 p.
21. Kelly S. G. *Mechanical vibrations. Theory and applications*. Cengage Learning: NY, 2012. 896 p.
22. Leissa A. W. *Vibration of continuous systems*, McGraw-Hill: New York, 2011. 524 p.
23. Meirovitch L. *Fundamentals of vibrations*. McGraw-Hill, Book Co: New York, 2001. 826 p.
24. Rades M. *Mechanical vibrations II. Structural dynamic modeling*. Printech Publisher: Turin, 2010. 354 p.
25. Rao S. *Mechanical vibrations*. Pearson Education Limited: London, 2018. 1295 p.
26. Shabana A. S. *Theory of vibration*. Springer-Verlag: New York, 2019. 382 p.
27. Hibbeler R. C. Free vibration of a beam supported by unsymmetrical spring-hinges. *J. Appl. Mech*, 1975, Vol. 42(2), P. 501–502.
28. Alfutov N. A., Kolesnikov K. S. *Ustoychivost' dvizheniya i ravnovesiya* [Stability of movement and equilibrium]. Moscow, MGTU Publ., 2003, 256 p.
29. Timoshenko S. P. *Ustoychivost' sterzhney, plastin i obolochek* [Stability of rods, plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 807 p.
30. Farshad M., *Stability of Structures*. Elsevier Science B. V.: Amsterdam, 1994. 434 p.
31. Ziemian R. D., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*. John Wiley & Sons: NY, 2010. 1117 p.
32. Timoshenko S. P., Gere J. M., *Theory of Elastic Stability*. Dover Publications: New York, 2009. 560 p.
33. Jerath. S., *Structural Stability Theory and Practice: Buckling of Columns, Beams, Plates, and Shells*. John Wiley & Sons: Chichester, 2020. 672 p.
34. Thomsen J. J. *Vibrations and stability*. New York, 2003. 420 p. 404 p.
35. Yoo C. H. *Stability of structures*. Elsevier : London, 2011. 529p.
36. Birger I. A., Panovko Ya. G. *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya* [Strength, stability, vibrations]. Vol. 3. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 567 p.
37. Biderman V. L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical vibrations]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1980, 408 p.
38. Korenev B. G. *Spravochnik po dinamike sooruzheniy* [Structure dynamics guide]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1972, 511 p.
39. Umanskiy A. A. *Spravochnik proektirovshchika* [Designer's Handbook]. Vol. 2. Moscow, Stroyizdat Publ., 1973, 415 p.
40. Wang C. M. *Exact solutions for buckling of structural members*. CRC Press: New York, 2005. 212 p.

41. Blevins R. D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. John Wiley & Sons, Ltd: Chichester, 2016. 458 p.
42. Lin Y. K. Free vibration of a continuous beam on elastic supports. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1962, Vol. 4, P. 409–423.
43. Lin, H., Chang, S.C. Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints. *Journal of Sound and Vibration*. 2005, Vol. 281(1-2), P. 155–169. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.01.010.
44. Luo J., Zhu S., Zhai W. Exact closed-form solution for free vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with intermediate elastic supports. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2022, Vol. 213, P. 106842. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2021.106842.
45. Maurizi M. J., Bambill D. V., Bellés P. M. et al. Free vibrations of Bernoulli-Euler beams with intermediate elastic support. *Journal of Sound and Vibration*. 2005, Vol. 281(3-5). P. 1238–1239. DOI:10.1016/j.jsv.2004.06.014.
46. Hibbeler R. C. Erratum: “Free Vibration of a Beam Supported by Unsymmetrical Spring Hinges” (Journal of Applied Mechanics, 1975, 42, pp. 501–502). ASME. *J. Appl. Mech*, 1981, Vol. 48(2), P. 449. DOI: 10.1115/1.3157647.
47. Ivchenko G. I., Medvedev Yu. I. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Moscow, URSS Publ., 2014, 352 p.
48. Dreyper N. Smit G. *Prikladnoy regressionnyy analiz* [Applied regression analysis]. Moscow, Vil'yams Publ., 2016, 912 p.

© Кудрявцев И. В., Рабецкая О. И., Митяев А. Е., 2022

Кудрявцев Илья Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики; Сибирский федеральный университет. E-mail: ikudryavtsev@sfu-kras.ru.

Рабецкая Ольга Ивановна – кандидат технических наук, доцент кафедры технической механики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: olga_rabez@mail.ru.

Митяев Александр Евгеньевич – кандидат технических наук, заведующий кафедрой прикладной механики; Сибирский федеральный университет. E-mail: pi-prm@mail.ru.

Kudryavtsev Ilya Vladimirovich – Cand. Sc., assistant professor, department of applied mechanics; Siberian Federal University. E-mail: ikudryavtsev@sfu-kras.ru.

Rabetskaya Olga Ivanovna – Cand. Sc., assistant professor, department of technical mechanics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: olga_rabez@mail.ru.

Mityaev Alexander Evgenievich – Cand. Sc., head of the department of applied mechanics; Siberian Federal University. E-mail: pi-prm@mail.ru.
