

УДК 53.083.8, 681.753.083.8, 681.7

Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-1-151-165

Для цитирования: Математическая модель зеркальной системы обсерватории «Миллиметрон» и описание метода предварительного обмера телескопа в рамках данной модели / С. Н. Макаров, А. Г. Верхогляд, М. Ф. Ступак и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 1. С. 151–165. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-1-151-165.

For citation: Makarov S. N., Verhoglyad A. G., Stupak M. F., Ovchinnikov D. A., Oberemok J. A. Mathematical model of the mirror system of the Millimetron observatory and a description of the method of pre-measurement of the telescope within this model // Siberian Aerospace Journal. 2021, Vol. 22, No. 1, P. 151–165. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-1-151-165.

Математическая модель зеркальной системы обсерватории «Миллиметрон» и описание метода предварительного обмера телескопа в рамках данной модели*

С. Н. Макаров¹, А. Г. Верхогляд¹, М. Ф. Ступак^{1**}, Д. А. Овчинников², Ю. А. Оберемок²

¹Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН
Российская Федерация, 630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41

²АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева»
Российская Федерация, 662972, г. Железногорск Красноярского края, ул. Ленина, 52

**E-mail: stupak@tdisie.nsc.ru

Создается система контроля геометрии зеркал обсерватории «Миллиметрон» для работы в составе бортового комплекса научной аппаратуры. Система предназначена для контроля качества зеркальной системы космического телескопа и использования получаемых данных в качестве сигналов «обратной связи» для предварительных настройки и юстировки оптической системы телескопа в космическом пространстве. Задачей системы является определение многомерного вектора неизвестных параметров зеркальной системы телескопа по косвенным измерениям, получаемым в результате обмера телескопа 3D-сканированием. Создана математическая модель, численно описывающая процесс предварительного обмера зеркальной системы обсерватории «Миллиметрон» с использованием оптических контрольных меток на поверхности зеркальной системы. Линейная математическая модель позволяет связать фактические косвенные измерения зеркальной системы с неизвестными смещениями ее параметров, определяющими форму телескопа. Выведена формула для оптимального решателя обратной задачи в процессе предварительного обмера зеркальной системы. Описана методика обмера составляющих элементов телескопа в рамках его предварительной настройки. Обмер контрольных меток выполняется бортовым 3D-сканером, применяемым в конструкции системы контроля зеркальной системы. Проведен анализ ошибок при использовании оптимального решателя, получена ковариационная матрица для вектора ошибки оцениваемых параметров.

Ключевые слова: математическая модель, зеркальная система обсерватории «Миллиметрон», система контроля, форма телескопа, контрольные метки, 3D-сканер.

* Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № АААА-А20-120102190007-5.

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation № АААА-А20-120102190007-5.

Mathematical model of the mirror system of the Millimetron observatory and a description of the method of pre-measurement of the telescope within this model

S. N. Makarov¹, A. G. Verhoglyad¹, M. F. Stupak^{1**}, D. A. Ovchinnikov², J. A. Oberemok²

¹Technological Design Institute of Scientific Instrument Engineering SB RAS
41, Russian St., Novosibirsk, 630058, Russian Federation
²JSC Academician M. F. Reshetnev "Information Satellite Systems"
52, Lenin St., Zheleznogorsk, Krasnoyarsk region, 662972, Russian Federation
**E-mail: stupak@tdisie.nsc.ru

A mirror geometry control system for the Millimetron Observatory is being created to work as part of the on-board complex of scientific equipment. The system is designed to monitor the quality of the space telescope's mirror system and use the data received as feedback signals for pre-setting and tuning the telescope's optical system in outer space. The goal of the system is estimation of the multidimensional vector of unknown parameters of the telescope's mirror system by indirect measurements obtained as a result of the measurement of the telescope by 3D scanning. A mathematical model has been created, numerically describing the process of pre-measurement of the mirror system of the Millimetron Observatory using optical control marks on the surface of the mirror system. The linear mathematical model allows to link the actual indirect measurements of the mirror system with the unknown biases of its parameters, determining the shape of the telescope. A formula has been developed for the optimal reverse problem solver in the process of pre-measurement of the mirror system. The method of measuring the components of the telescope as part of its pre-setting is described. The measurement of control marks is based on a onboard 3D scanner embedded in the design of the mirror system control system. The error analysis was carried out using the optimal solver, and a covariance matrix was obtained for the error vector of estimated parameter.

Keywords: mathematical model, mirror system of the Millimeteron Observatory, control system, telescope shape, control marks, 3D scanner.

Введение. Одним из основных направлений развития бортовых космических технологий является создание многозональных высокоапертурных зеркальных телескопов, обеспечивающих сбор и обработку информации в диапазонах спектра излучения от рентгеновского до миллиметрового. Примером этого служит проект космической обсерватории «Миллиметрон» (Спектр-М), рассчитанный для работы в миллиметровом и дальнем ИК диапазонах (70 мкм – 10 мм) с 10-метровым охлаждаемым (~4,5 К) криогенным телескопом [1–3]. Главной проблемой создания крупных телескопов является обеспечение качества изображения, что в свою очередь, требует разработки высококачественных и высокоточных методов контроля формы составных элементов их зеркальной системы [4–6]. В [7] представлен обзор состояния и тенденций развития космического телескопостроения за рубежом. Изложены результаты проводимых в ряде ведущих стран работ по проектированию и строительству оптических систем наблюдения за космосом. Рассмотрены находящиеся на орбите и строящиеся большие оптические телескопы с составными и гибкими зеркалами, управляемыми активными системами с целью устранения деформаций на всех этапах изготовления и эксплуатации.

Создание различных систем контроля формы составных элементов таких телескопов требует разработки математических моделей и алгоритмов работы данных контрольных систем [8–16]. В частности, в [8] изложена модель процесса юстировки составных зеркал высокоапертурных

телескопов. На основе введенного понятия разностной поверхности с использованием разработанных алгоритмов геометрического и оптотехнического позиционирования зеркальных сегментов получены соотношения для оценки точности юстировки составных зеркал. В [16] кратко представлены методы юстировки и калибровки информационно-измерительных систем на борту космических аппаратов оптико-электронного и радиоэлектронного наблюдения.

Описываемая в настоящем сообщении система контроля зеркальной системы обсерватории «Миллиметрон» (СК ЗС) и не имеющие аналогов математическая модель и алгоритмы ее работы создаются для работы в составе бортового комплекса научной аппаратуры обсерватории «Миллиметрон» и рассчитывается на работу в условиях космического пространства. СК ЗС предназначена для контроля качества зеркальной системы (ЗС) космического телескопа и использования данных, получаемых СК ЗС в качестве сигналов «обратной связи» для предварительной настройки и юстировки оптической системы телескопа в космическом пространстве. В [17] на базе созданной математической модели описано моделирование работы бортового 3D-сканера при предварительном обмере зеркал обсерватории «Миллиметрон» с использованием оптических контрольных меток на поверхности зеркал. Настоящее сообщение посвящено описанию и анализу возможностей самой математической модели, применяемой в СК ЗС.

Основные положения и требования. Оптическая схема зеркальной системы обсерватории (телескопа) «Миллиметрон» приведена на рисунке.

Телескоп может быть представлен в виде физической модели, состоящей из множества оптических отражающих поверхностей (ОП) со стабильной формой. Совокупность всех ОП телескопа назовем зеркальной системой телескопа (ЗС). Примерами таких ОП являются (см. рис.): вторичное зеркало (ВЗ); переключающее зеркало (ПЗ); любая из панелей (фрагментов) многоэлементного параболоида главного зеркала (ГЗ).

Глобальная система координат (ГСК) телескопа определяется положением начала координат и координатными осями. Вершина параболоида главного зеркала (ГЗ) принимается за начало ГСК, в предположении идеальной формы параболоида ГЗ. Вектор оси X ГСК направлен вдоль оси параболоида ГЗ от его вершины в направлении вторичного зеркала (ВЗ). Вектор оси Y от центра переключающего зеркала (ПЗ) в сторону фокуса приемника, обозначенного как F_2 на рисунке. Ось Z однозначным образом дополняет оси X , Y , образуя полный ортогональный базис из векторов X , Y , Z ГСК, при котором ГСК является правой системой координат.

Однозначное положение каждой ОП как поверхности твердого объекта в пространстве определяется:

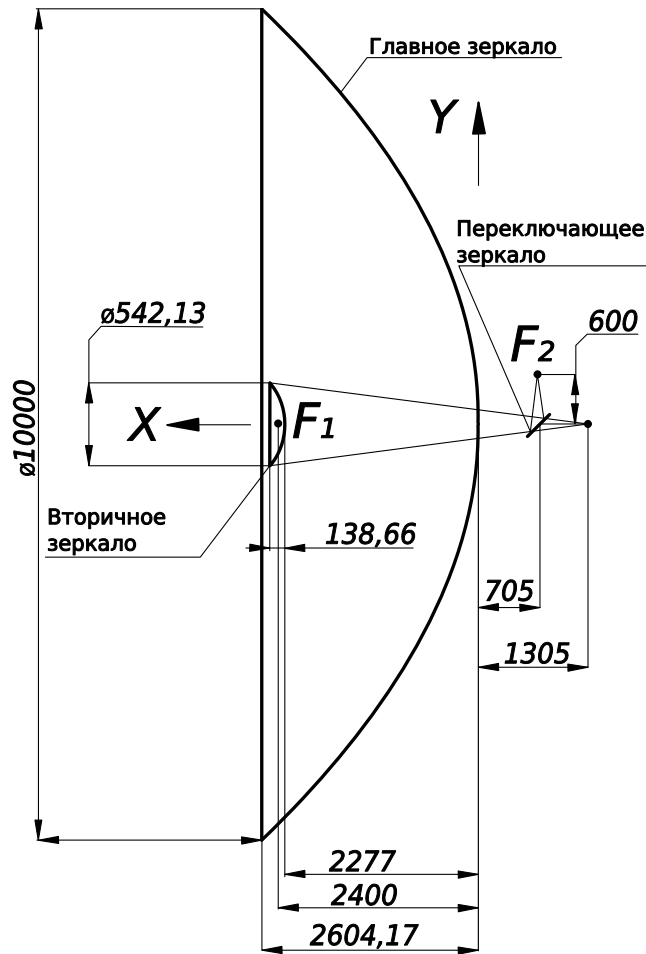
- выбранной **базовой точкой на твердом объекте, содержащем ОП**. Положение этой базовой точки объекта определено ее координатами в ГСК;

- **тремя углами поворота объекта с ОП** относительно его базовых осей в ГСК (углы Эйлера).

В итоге, положение каждой ОП в модели телескопа задается 6-ю параметрами – тремя углами поворота объекта, а затем радиус-вектором смещения базовой точки объекта в ГСК.

Знание положения каждой ОП телескопа по ее (6-и или иному достаточному количеству) собственных параметров (степеней свободы) означает, что геометрия (или конфигурация) всей ЗС телескопа точно и однозначно определена в рамках данной модели. В таком случае возможна оценка его оптического качества телескопа и его последующая настройка.

Обозначим полный набор параметров, описывающий положение всех ОП телескопа, как вектор (набор параметров) \mathbf{X} . Компоненты вектора содержат все параметры каждой ОП телескопа в его заданном состоянии. Так, например, если бы мы использовали в конструкции только 3 ОП, каждая описываемая 6-ю параметрами, то вектор \mathbf{X} состоял бы из 18 значений.



Оптическая схема зеркальной системы обсерватории «Миллиметрон». Расчетные характеристики: главное зеркало (ГЗ) – параболическое: радиус кривизны при вершине $R_{ГЗ} = 4800$ мм; диаметр главного зеркала $D_{ГЗ} = 10000$ мм. Вторичное зеркало (ВЗ) – гиперболическое: $R_{ВЗ} = -254,7337$ мм; $D_{ВЗ} = 542,13$ мм. Расстояние между ГЗ и ВЗ – 2277 мм. Эквивалентное фокусное расстояние – 70000 мм. Расстояние от ВЗ до фокальной плоскости – 3582 мм. Квадрат эксцентриситета ВЗ $e^2 = 1,147452$

Optical diagram of the mirror system of the Millimetron Observatory. Estimated characteristics: main mirror (MM) – parabolic: curvature radius at the top of the R_{MM} is 4800 mm; The diameter of the main mirror of the D_{MM} is 10,000 mm. Secondary mirror (SM) – hyperbolic: $R_{SM} = 254.7337$ mm; Distance between MM and SM – 2277 mm. Equivalent focal length – 70,000 mm. Distance from SM to focal plane – 3582 mm. Square of the eccentricity of the SM $e^2 = 1,147452$

Обмер поверхности телескопа 3D-сканером, являющимся штатным элементом СК ЗС, является косвенным, так как не измеряет напрямую параметры вектора X , но измеряет доступные для измерения геометрические величины, связанные с вектором X . Поэтому задачей СК ЗС является определение вектора неизвестных параметров X по косвенным измерениям, получаемым в результате обмера телескопа 3D-сканером. Для получения косвенной информации о геометрии телескопа в СК ЗС заложен 3D-сканер. 3D-сканер – это прибор, расположенный в «теплом отсеке» космического аппарата (КА), который может запускать тонкий измерительный (оптический) луч в ЗС телескопа через временное оптическое окно между «теплым отсеком» и «холодной зоной» и «наблюдать» за всеми ОП из точки F_2 .

На поверхностях обмеряемых ОП расположены оптические контрольные метки (КМ), которые могут быть обмерены лучом 3D-сканера. КМ представляет собой металлический шарик (или сферическое зеркало, с характерным диаметром не менее 10 мм).

3D-сканер состоит:

- из дальномерного канала (ДК), позволяющего измерять длину оптического пути между входным зрачком приемно-передающего объектива ДК и некоторой КМ ОП. Для этого к КМ, через последовательность ОП посылается измерительный луч, регистрируется его отражение назад и вычисляется оптическое расстояние между объективом 3D сканера и КМ;

- сканирующего зеркала (СЗ) 3D-сканера, задающего направление измерительного луча ДК для прицеливания на центр выбранной КМ.

Работа СК ЗС осуществляется следующим образом:

- выполняется обмер всех или подмножества КМ с использованием 3D-сканера. По каждой обмеренной КМ на выходе 3D-сканера формируются 3 канала измерения (с индексами $m = 0, 1, 2$): $m = 0$ – длина оптического пути ДК до КМ; $m = 1, 2$ – два угла СЗ при точном прицеливании на КМ;

- в результате обмера множества КМ по ЗС телескопа получается набор измерений (по три измерения на каждую КМ), который обозначим как вектор \mathbf{Y} ;

- известный (после обмера множества КМ) вектор \mathbf{Y} будет использоваться для оценки и восстановления вектора неизвестных параметров телескопа \mathbf{X} .

Математическая модель, описанная ниже, дает представление, как связать неявные измерения КМ (оптических КМ) \mathbf{Y} с неизвестными параметрами ОП телескопа \mathbf{X} .

Математическая модель. Положения всех ОП определяются вектором неизвестных параметров \mathbf{X} .

Пусть полное число неизвестных параметров телескопа по всем ОП (длина вектора \mathbf{X}) равно P . Индекс индивидуального параметра: $p = 0, \dots, P - 1$. В таком случае конкретное значение параметра из набора $\mathbf{X} = \{x_p\}$ с выбранным индексом p обозначим как x_p .

Поскольку положения КМ связаны с положением ОП, то мы можем ввести функцию измерения 3D-сканером положения КМ с индексом k , по каналу измерения m от вектора состояния телескопа \mathbf{X} как

$$f_{m,k}(\mathbf{X}) = f_{m,k}(x_0, x_1, \dots, x_{P-1}).$$

Измерение 3D-сканером всех меток формирует известный вектор $\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \{f_{m,k}(\mathbf{X})\}$.

Вектор \mathbf{Y} (совокупность всех измерений КМ по всем каналам 3D-сканера) зависит от вектора \mathbf{X} (всех неизвестных параметров ОП). Функции измерений $f_{m,k} = f_{m,k}(\mathbf{X}) = f_{m,k}(x_0, x_1, \dots, x_{P-1})$ в зависимости от \mathbf{X} являются существенно нелинейными и определяются чертежами и текущей геометрией телескопа.

Поскольку при выводе космической обсерватории на орбиту и после раскрытия телескопа в рабочее положение, его геометрия искажается незначительно по отношению к его линейным и иным размерам, то нелинейные функции $f_{m,k}(\)$ можно считать постоянными по отношению к МАЛОМУ изменению аргумента \mathbf{X} , описывающего состояние ЗС телескопа, что и было подтверждено в результате численных экспериментов.

В таком случае, функции $f_{m,k}(\)$ можно считать известными и вычисляемыми по начальной конструкции телескопа в настроенном состоянии (на основе геометрических данных из конструкторской документации (КД) телескопа).

Подытожив, имеем следующее:

- положение телескопа однозначно определяется неизвестным вектором \mathbf{X} ;

– 3D-сканер СК ЗС может обмерять положения КМ (оптические контрольные метки), значения которых описываются функциями $f_{m,k}(\mathbf{X})$;

– функции $f_{m,k}(\)$ известны (вычислением по чертежам КД) и предполагаются постоянными (независимыми от малого изменения аргумента \mathbf{X}).

На основе этих предположений будем решать обратную задачу, т. е. определим расстройку параметров ОП (\mathbf{X}) от их исходного (идеального) положения по результатам неявного обмера множества КМ (\mathbf{Y}) 3D-сканером.

Постановка задачи. Пусть телескоп настроен, это соответствует настроенному положению всех его ОП, которые мы обозначим как вектор $\tilde{\mathbf{X}} = \{\tilde{x}_p\}$, состоящий из параметров \tilde{x}_p . Сами параметры \tilde{x}_p настроенного телескопа потенциально могут быть обмерены в заводских условиях, однако в этой информации нет необходимости, как это будет показано ниже.

При настроенном состоянии телескопа СК ЗС выполняет обмер всех ее КМ $k = 0, \dots, K - 1$ при помощи 3D-сканера по всем каналам измерения 3D-сканера $m = 0, 1, 2$. Создается массив начальных измерений $\tilde{\mathbf{Y}} = \{\tilde{f}_{m,k}\}$ (для настроенного телескопа на Земле), который соответствует настроенному вектору параметров $\tilde{\mathbf{X}}$ ЗС:

$$\tilde{f}_{m,k} = f_{m,k}(\tilde{\mathbf{X}}) = f_{m,k}(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{p-1}), \quad (1)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \{f_{m,k}(\tilde{\mathbf{X}})\}. \quad (2)$$

Массив измерений настроенного телескопа $\tilde{\mathbf{Y}}$ запоминается. После вывода телескопа на орбиту и его раскрытия в рабочее положение, ЗС телескопа расстроена, поэтому в новом положении телескопа на орбите его параметры ОП $\hat{\mathbf{X}} = \{\hat{x}_p\}$ случайно смещены по отношению к исходному (настроенному состоянию) состоянию $\tilde{\mathbf{X}} = \{\tilde{x}_p\}$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \tilde{x}_0 + \Delta x_0, \\ \hat{x}_1 &= \tilde{x}_1 + \Delta x_1, \\ &\dots \\ \hat{x}_{p-1} &= \tilde{x}_{p-1} + \Delta x_{p-1} \end{aligned} \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{x}, \quad (3)$$

где $\mathbf{x} = \{\Delta x_p\} = \{\hat{x}_p - \tilde{x}_p\}$ – разностный вектор смещения параметров ОП. Полагается малость смещений $\mathbf{x} = \{\Delta x_p\} = \{\hat{x}_p - \tilde{x}_p\}$.

Проведя обмер 3D-сканером СК ЗС всех КМ на орбите, получаем новый набор измерений положения КМ $\hat{\mathbf{Y}} = \{\hat{f}_{m,k}\}$:

$$\hat{f}_{m,k} = f_{m,k}(\hat{\mathbf{X}}) = f_{m,k}(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{p-1}). \quad (4)$$

Разница между полученными наборами измерений на орбите $\hat{\mathbf{Y}} = \{\hat{f}_{m,k}\}$ и настроенного в заводских условиях $\tilde{\mathbf{Y}} = \{\tilde{f}_{m,k}\}$ может быть линейно аппроксимирована (через дифференциал многомерной функции или многомерный ряд Тейлора) [18] как

$$\Delta f_{m,k} \cong \hat{f}_{m,k} - \tilde{f}_{m,k} = \frac{\partial f_{m,k}(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})}{\partial x_0} \cdot \Delta x_0 + \dots + \frac{\partial f_{m,k}(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})}{\partial x_{p-1}} \cdot \Delta x_{p-1}, \quad (5)$$

где $d_{m,k,p} = \frac{\partial f_{m,k}(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})}{\partial x_p}$ – частная производная функции измерения 3D-сканера;

$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}} = \{\Delta x_p\} = \{\hat{x}_p - \tilde{x}_p\}$ – вектор изменения всех неизвестных параметров ОП (ЗС) от настроенного; $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}} = \{\Delta f_{m,k}\} = \{\hat{f}_{m,k} - \tilde{f}_{m,k}\}$ – вектор изменения всех положений КМ обмеряемых 3D-сканером.

В матричной записи выражение взаимосвязи измерений и изменения параметров будет выглядеть как

$$\begin{pmatrix} \Delta f_{0,0} \\ \Delta f_{0,1} \\ \Delta f_{0,\dots} \\ \Delta f_{0,K-1} \\ \Delta f_{1,0} \\ \Delta f_{1,1} \\ \Delta f_{1,\dots} \\ \Delta f_{1,K-1} \\ \Delta f_{2,0} \\ \Delta f_{2,1} \\ \dots \\ \Delta f_{2,K-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{0,0,0} & d_{0,0,1} & \dots & d_{0,0,P-1} \\ d_{0,1,0} & d_{0,1,1} & \dots & d_{0,1,P-1} \\ d_{0,\dots,0} & d_{0,\dots,1} & \dots & d_{0,\dots,P-1} \\ d_{0,K-1,0} & d_{0,K-1,1} & \dots & d_{0,K-1,P-1} \\ d_{1,0,0} & d_{1,0,1} & \dots & d_{1,0,P-1} \\ d_{1,1,0} & d_{1,1,1} & \dots & d_{1,1,P-1} \\ d_{1,\dots,0} & d_{1,\dots,1} & \dots & d_{1,\dots,P-1} \\ d_{1,K-1,0} & d_{1,K-1,1} & \dots & d_{1,K-1,P-1} \\ d_{2,0,0} & d_{2,0,1} & \dots & d_{2,0,P-1} \\ d_{2,1,0} & d_{2,1,1} & \dots & d_{2,1,P-1} \\ d_{2,\dots,0} & d_{2,\dots,1} & \dots & d_{2,\dots,P-1} \\ d_{2,K-1,0} & d_{2,K-1,1} & \dots & d_{2,K-1,P-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x_1 \\ \dots \\ \Delta x_{P-1} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}, \quad (6)$$

где $\mathbf{x} = \{\Delta x_p\} = \hat{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}$ – неизвестный вектор смещения параметров всех ОП, который надо восстановить; $\mathbf{y} = \{\Delta f_{m,k}\} = \hat{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}$ – вектор разницы измерений КМ (на орбите по отношению к измерениям в настроенном телескопе в земных условиях); $\mathbf{H} = \{d_{(m,k),p}\}$ – расчетная матрица частных производных, связывающая измерения КМ и неизвестные параметры модели ЗС телескопа (далее – дизайн-матрица).

Переформулируем задачу следующим образом: Определить изменения положения ОП от идеального настроенного $\mathbf{x} = \{\Delta x_p\} = \hat{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}$ по изменению положения КМ на орбите от их идеально настроенного $\mathbf{y} = \{\Delta f_{m,k}\} = \hat{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}$.

При этом известна матричная зависимость (прямая задача) $\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$, где \mathbf{H} – вычисляемая по чертежам постоянная дизайн-матрица (6). Необходимо решить обратную задачу: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{H}, \mathbf{y})$.

Решение задачи. Определим вектор **первичных параметров (смещений) ЗС телескопа.**

Первичные параметры смещения – это параметры телескопа, которые показывают, насколько тот или иной компонент ЗС смещен относительно своего исходного состояния (когда телескоп настроен в заводских условиях): \mathbf{x}_1 . Длина вектора здесь определена по количеству

описываемых им параметров/ компонент. Так p_1 – количество параметров вектор \mathbf{x}_1 описывает. Здесь и далее примем обозначение под матричной переменной \mathbf{x}_1 – означающее, что над

скобкой – матричный элемент, имеющий k строк и m столбцов. Тем самым $\underset{p1,1}{\underline{x}_1}$ – это вектор-столбец длиной $p1$, или матрица размерности $p1 \times 1$ элемент.

Для полностью настроенной ЗС телескопа все параметры не смещены, т. е. равны нулю и, тем самым, все компоненты вектора $\underset{p1,1}{\underline{x}_1}$ равны нулю.

Определим **вектор измерений (смещений)** $\underset{n,1}{\underline{y}}$ телескопа, который создается при обмере (выполняемом СК ЗС) всех или подмножества КМ ЗС телескопа: $\underset{n,1}{\underline{y}}$.

Определим **вектор шума измерений** $\underset{n,1}{\underline{\varepsilon}}$ телескопа, который создается при обмере (выполняемом СК ЗС) КМ ЗС телескопа: $\underset{n,1}{\underline{\varepsilon}}$.

Определим **первичную дизайн-матрицу** $\underset{n,p1}{\underline{H}_1}$, как матрицу, характеризующую модель ЗС телескопа и связывающую первичные параметры смещений $\underset{p1,1}{\underline{x}_1}$, вектор измерений $\underset{n,1}{\underline{y}}$ и шум измерений $\underset{n,1}{\underline{\varepsilon}}$ в одном уравнении:

$$\underset{n,1}{\underline{y}} = \underset{n,p1}{\underline{H}_1} \cdot \underset{p1,1}{\underline{x}_1} + \underset{n,1}{\underline{\varepsilon}}. \quad (7)$$

Матрица преобразования системных параметров в первичные параметры. Первичные параметры смещений $\underset{p1,1}{\underline{x}_1}$ непосредственно соотносятся положениям ОП, таким как панели ГЗ, ВЗ и т. п. Системные параметры – это параметры, которые имеют обобщающую природу и могут влиять на группы первичных параметров. По сути это многомерная замена переменных. Обозначим системные параметры как вектор $\underset{p,1}{\underline{x}}$. Число системных параметров или компонентов вектора есть p . Чтобы математически формализовать преобразование обобщения параметров, введем матрицу преобразования системных параметров в первичные параметры $\underset{p1,p}{\underline{N}}$, та-

кую что $\underset{p1,1}{\underline{x}_1} = \underset{p1,p}{\underline{N}} \cdot \underset{p,1}{\underline{x}}$. Имеем:

$$\underset{n,1}{\underline{y}} = \underset{n,p1}{\underline{H}_1} \cdot \underset{p1,1}{\underline{x}_1} + \underset{n,1}{\underline{\varepsilon}} = \underset{n,p1}{\underline{H}_1} \cdot \underbrace{\underset{p1,p}{\underline{N}} \cdot \underset{p,1}{\underline{x}}}_{\underset{p1}{\underline{x}_1}} + \underset{n,1}{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\underset{n,p}{\underline{H}_1} \cdot \underset{p1,p}{\underline{N}}}_{\underset{n,p1}{\underline{H}_1} \cdot \underset{p1,p}{\underline{N}}} \cdot \underset{p,1}{\underline{x}} + \underset{n,1}{\underline{\varepsilon}}. \quad (8)$$

Поэтому дизайн-матрица $\underset{n,p}{\underline{H}}$ (с применением системных параметров) может быть выражена как $\underset{n,p}{\underline{H}} = \underset{n,p1}{\underline{H}_1} \cdot \underset{p1,p}{\underline{N}}$. В таком случае связь измерений и системных параметров может быть выражена формулой

$$\underset{n,1}{\underline{y}} = \underset{n,p}{\underline{H}} \cdot \underset{p,1}{\underline{x}} + \underset{n,1}{\underline{\varepsilon}}. \quad (9)$$

Случайный вектор изменения положения ОП $\underline{\mathbf{x}}_{p,1}$ можно характеризовать его ковариационной матрицей [19] $\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}^T = \langle x_k \cdot x_m \rangle$. Если мы полагаем, что параметры, составляющие вектор $\underline{\mathbf{x}}_{p,1}$, взаимно независимы, имеют нулевое среднее, тогда ковариационная матрица упрощается и становится диагональной:

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}^T = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{p-1}^2 \end{pmatrix}}_{p,p}, \quad (10)$$

где стандартное отклонение индивидуального параметра с нулевым средним определяется как

$$\sigma_k \cong \sqrt{\langle x_k \cdot x_k \rangle} \quad k = 0, \dots, p-1. \quad (11)$$

Поскольку измерения разных КМ всегда независимы друг от друга, то сам вектор шума измерений 3D-сканером $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n,1}$ имеет диагональную ковариационную матрицу

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Y}}^T = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{n-1}^2 \end{pmatrix}}_{n,n}, \quad (12)$$

состоящую из векторов стандартных отклонений измерений $\underline{\boldsymbol{\gamma}}_{n,1}$, где $\gamma_k \cong \sqrt{\langle \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \rangle}$.

Так, если имеются две КМ, пространственно близко расположенные в ЗС, то они имеют близкие по значению (практически одинаковые) систематические ошибки в каналах 3D-сканера, при их обмере. В таком случае применение дифференциальных измерений КМ, т. е. попарная разница расстояний или углов каналов 3D-сканера до этих КМ, существенно снижает систематическую ошибку измерения расстояний или углов 3D-сканера.

Чтобы формализовать такое преобразование общим способом (в виде линейной комбинации измерений), вводим матрицу преобразования первичных измерений $\underline{\mathbf{D}}_{m,n}$. Получаем новую заме-

ну переменных, переводя первичные измерения $\underline{\mathbf{y}}_{n,1}$ в дифференциальные $\underline{\mathbf{u}}_{m,1}$, как $\underline{\mathbf{u}}_{m,1} = \underline{\mathbf{D}}_{m,n} \cdot \underline{\mathbf{y}}_{n,1}$.

Вводим эквивалентную дизайн-матрицу $\underline{\mathbf{G}}_{m,p}$ связи системных параметров с дифференциальными измерениями: $\underline{\mathbf{G}}_{m,p} = \underline{\mathbf{D}}_{m,n} \cdot \underline{\mathbf{H}}_{n,p}$. Тогда $\underline{\mathbf{u}}_{m,1} = \underline{\mathbf{G}}_{m,p} \cdot \underline{\mathbf{x}}_{p,1} + \underline{\boldsymbol{\lambda}}_{m,1}$, где эквивалентный шум дифференциального измерения $\underline{\boldsymbol{\lambda}}_{m,1}$ при этом будет выражен через исходный шум первичного измерения $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n,1}$

$$\text{как } \underline{\boldsymbol{\lambda}}_{m,1} = \underbrace{\underline{\mathbf{D}}_{m,n}}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}_{m,1}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n,1}.$$

Ковариационную матрицу дифференциального шума измерений можно выразить как

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}^T = \text{cov} \left(\begin{matrix} \underline{\lambda} \\ m,1 \end{matrix} \right) = \text{cov} \left(\begin{matrix} \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\varepsilon} \\ m,n \quad n,1 \end{matrix} \right) = \underline{\mathbf{D}} \cdot \text{cov} \left(\begin{matrix} \underline{\varepsilon} \\ n,1 \end{matrix} \right) \cdot \underline{\mathbf{D}}^T = \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^T. \quad (13)$$

Решение обратной задачи. Имеется выражение $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\lambda}$, связывающее **неизвестные**

системные смещения параметров ЗС $\underline{\mathbf{x}}$ с вычисляемыми (**известными**) **дифференциаль-**

ными измерениями КМ $\underline{\mathbf{u}}$. При этом эквивалентная дизайн-матрица $\underline{\mathbf{G}}$ – вычисляема (**из-**

вестна) по известным $\underline{\mathbf{D}}$ и $\underline{\mathbf{H}}$, где $\underline{\lambda}$ – модифицированный вектор шума дифференциальных

измерений. Он имеет известные статистические свойства, такие как нулевое среднее и вычис-

ляемую (**известную**) ковариационную матрицу $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}^T = \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^T$. Напомним, что $\underline{\mathbf{S}}$ – из-

вестная ковариационная матрица разброса неизвестных параметров ОП $\underline{\mathbf{x}}$, характеризующая

их первоначальный разброс/ расстройку ЗС.

По известным $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{G}}$, $\underline{\mathbf{U}}$, $\underline{\mathbf{S}}$ необходимо найти наиболее точное решение уравнения

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\lambda}, \text{ т. е. найти вектор неизвестных системных параметров } \underline{\mathbf{x}}.$$

Для решения задачи ищем матричный решатель (матрица) $\underline{\mathbf{F}}$ такой, что оценка $\hat{\underline{\mathbf{x}}}$ неиз-

вестного вектора системных параметров $\underline{\mathbf{x}}$ по дифференциальным измерениям $\underline{\mathbf{u}}$ есть

$$\hat{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{u}}. \quad (14)$$

При поиске матрицы $\underline{\mathbf{F}}$, необходимо подобрать ее таким образом, чтобы отклонение

$\delta \underline{\mathbf{x}} = \hat{\underline{\mathbf{x}}} - \underline{\mathbf{x}}$ истинного смещения $\underline{\mathbf{x}}$ и его найденной оценки $\hat{\underline{\mathbf{x}}}$ было минимально в статисти-

ческом смысле. Определим это как

$$J = \left\langle \left\| \delta \underline{\mathbf{x}} \right\|_{p,1}^2 \right\rangle = \left\langle \left\| \hat{\underline{\mathbf{x}}} - \underline{\mathbf{x}} \right\|_{p,1}^2 \right\rangle \rightarrow \min, \quad (15)$$

где $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_k a_k^2}$ – норма вектора; $\langle \rangle$ – среднее значение от случайной величины.

Опуская длинные промежуточные выкладки, приводим окончательную формулу для опти-

мального решателя:

$$\underline{\mathbf{F}} = \left(\begin{matrix} \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \\ m,p \quad p,p \end{matrix} \right)^T \cdot \left(\begin{matrix} \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{G}}^T + \underline{\mathbf{U}} \\ m,p \quad p,p \quad p,m \quad m,m \end{matrix} \right)^+, \quad (16)$$

где $(\dots)^+$ – псевдообратная матрица [20].

Анализ ошибок восстановления параметров. Случайный вектор ошибки восстановления неизвестных параметров $\underline{\delta x}_{p,1}$ – это разница между истинным неизвестным вектором системных параметров состояния ЗС после вывода на орбиту $\underline{x}_{p,1}$ и оценкой $\hat{\underline{x}}_{p,1}$ этого вектора, полученной по дифференциальным измерениям с использованием формулы (16):

$$\underline{\delta x}_{p,1} = \hat{\underline{x}}_{p,1} - \underline{x}_{p,1}. \quad (17)$$

Ковариационная матрица для вектора ошибки $\underline{\delta x}_{p,1}$ восстановления параметров по результатам вычислений имеет следующий вид:

$$\underline{\Delta}_{p,p} = \text{cov} \left(\underline{\delta x}_{p,1} \right) = \underline{Q}_{p,p} \cdot \underline{S}_{p,p} \cdot \underline{Q}_{p,p}^T + \underline{F}_{p,m} \cdot \underline{U}_{m,m} \cdot \underline{F}_{p,m}^T, \quad (18)$$

где $\underline{Q}_{p,p} = \underline{F}_{p,m} \cdot \underline{G}_{m,p} - \underline{I}_{p,p}$; $\underline{I}_{p,p}$ – единичная диагональная матрица размерности (рхр).

Если необходимо установить погрешность (стандартное отклонение) восстановления решателем $\underline{F}_{p,m}$ конкретного системного параметра (с индексом $k=0, \dots, p-1$) $\underline{x}_{p,1}[k]$ с использованием формулы (16), то формула для этого будет следующей:

$$\sigma_{x[k]} = \sqrt{\underline{\Delta}_{p,p}[k,k]}, \quad (19)$$

где $\underline{\Delta}_{p,p}[k,k]$ – k -й диагональный элемент матрицы $\underline{\Delta}_{p,p}$.

Заключение. Таким образом, решив систему уравнений $\hat{\underline{x}} = \underline{F} \cdot \underline{u}$ и получив оценку $\hat{\underline{x}}$ вектора смещений параметров \underline{x} , нам становится известно – как и какие ОП необходимо «довернуть» или сместить на орбите, чтобы вернуть их в исходное заводское положение, которое соответствует настроенному телескопу.

Если степени свободы неизвестных абсолютных параметров \underline{X} (определен заглавной буквой ранее) при определении ОП выбрать удобным образом, соответствующим имеющимся актюаторам ОП (например: положение ВЗ задается 6-ю приводами гексапода, которые могут быть определены как неизвестные компоненты вектора \underline{X}), то это дает определенные удобства. В таком случае расчетный вектор смещения $\hat{\underline{x}}$ является вектором, сообщающим «**насколько каждый из приводов ОП смещен от идеального (исходного) положения**», и по сути, сколько необходимо сделать шагов привода, чтобы рассматриваемая ОП «встала» на исходное место. Таким образом, вычисленный вектор $\hat{\underline{x}}$ может быть непосредственным входом для механизмов коррекции ЗС телескопа.

Применение описанного алгоритма настройки телескопа имеет существенные положительные практические качества:

- малость изменений положения ОП позволяет свести задачу к системе линейных уравнений. Это позволяет использовать методы линейной алгебры и дает точное и единственное решение обратной задачи с прогнозируемой точностью работы алгоритма;
- нет необходимости знать абсолютные значения параметров x_p для ОП;

– нет необходимости точно знать абсолютное положение КМ в системе координат спутника и места установки их на ОП. Не требуется высокой точности установки КМ на панели ГЗ и другие ОП.

Библиографические ссылки

1. Обзор научных задач для обсерватории «Миллиметрон» / Н. С. Кардашев, И. Д. Новиков, В. Н. Лукаш и др. // УФН. 2014. Т. 184, № 12. С. 1319–1352. Doi: 10.3367/UFN.0184.201412c.1319.
2. Space mission Millimetron for terahertz astronomy / A. V. Smirnov, A. M. Baryshev, S. V. Pilipenko et al. // Proc. of SPIE. 2012. Vol. 8442. P. 84424C. Doi: 10.1117/12.927184.
3. Астрокосмический центр ФИАН, г. Москва [Электронный ресурс] : офиц. сайт. URL: <http://millimetron.web2.ru/ru/> (дата обращения: 02.02.2021).
4. Лукин А. В., Мельников А. Н., Скочилов А. Ф. Контроль зеркала контррефлектора телескопа «Миллиметрон» на основе использования синтезированной голограммы // Фотоника. 2016. № 5. С. 44–48.
5. Разработка интерференционно-голографической ИК системы контроля формы центрального параболического зеркала космического телескопа обсерватории «Миллиметрон» / А. Г. Полещук, Р. К. Насыров, А. Е. Маточкин и др. // Труды «Интерэкспо Гео-Сибирь». 2015. Т. 1. С. 51–58.
6. Система контроля геометрических параметров центрального зеркала космического телескопа «Миллиметрон» / А. Г. Верхогляд, В. М. Михалкин, В. А. Куклин и др. // Решетневские чтения : материалы конф. ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2014. Т. 1(18). С. 61–63.
7. Кириченко Д. В., Клеймёнов В. В., Новикова Е. В. Крупногабаритные оптические космические телескопы // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 7. С. 589–602. Doi: 10.17586/0021-3454-2017-60-7-589-602.
8. Демин А. В., Денисов А. В., Летуновский А. В. Оптико-цифровые системы и комплексы космического назначения // Изв. вузов. Приборостроение. 2010. Т. 53, № 3. С. 51–59.
9. Демин А. В. Математическая модель процесса юстировки составных зеркал // Известия вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 11. С. 901–907. Doi: 10.17586/0021-3454-2015-58-11-901-907.
10. Демин А. В., Ростокин П. В. Алгоритм юстировки составных зеркал // Компьютерная оптика. 2017. Т. 41, № 2. С. 291–294. Doi: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-291-294.
11. Wavefront calibration testing of the James Webb Space Telescope primary mirror center of curvature optical assembly / G. Olczak, C. Wells, D. J. Fischer, M. T. Connolly // Proceedings of SPIE. 2012. Vol. 8450. 84500R. Doi: 10.1117/12.927003.
12. Algorithm and mathematical model for geometric positioning of segments on aspherical composite mirror / B. Conquet, L. F. Zambrano, N. K. Artyukhina et al. // Приборы и методы измерений. 2018. Т. 9, № 3. С. 234–242. Doi: 10.21122/2220-9506-2018-9-3-234-242.
13. Батшев В. И., Пуряев Д. Т. Оптическая система и методика контроля позиционирования сегментов составного параболического зеркала радиотелескопа космической обсерватории «Миллиметрон» // Измерительная техника. 2009. № 5. С. 29–31.
14. Пуряев Д. Т., Батшев В. И., Польщикова О. В. Метод контроля качества выпуклого гиперболического зеркала радиотелескопа космической обсерватории «Миллиметрон» [Электронный ресурс] // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/pribor/optica/833.html> (дата обращения: 02.02.2021).

15. Сычев В. В., Клем А. И. Алгоритм управления многоэлементным зеркалом на примере космического телескопа обсерватории «Миллиметрон» // Оптика атмосферы и океана. 2018. № 7. С. 578–586. Doi: 10.15372/AOO20180712.
16. Сомов С. Е. Юстировка и калибровка информационно-измерительной системы для определения ориентации спутника землеобзора и его наблюдательного оборудования // Известия Самарского научного центра РАН. 2018. Т. 20, № 1-1. С. 87–96. Doi: 10.24411/1990-5378-2018-00127.
17. Математическое моделирование работы 3D-сканера системы контроля зеркальной системы обсерватории «Миллиметрон» [Электронный ресурс] / С. Н. Макаров, А. Г. Верхогляд, М. Ф. Ступак и др. // Решетневские чтения : XXIV Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева (Красноярск, 10–13 нояб. 2020 г.). Красноярск, 2020. Ч. 1. С. 101–102.
18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. 8-е изд. М. : Физматлит, 2003. Т. I. 680 с. ISBN 5-9221-0156-0.
19. Ширяев А. Н. Глава 2, § 6. Случайные величины II // Вероятность. 3-е изд. Cambridge, New York : МЦНМО, 2004. Т. 1. С. 301.
20. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. М. : Наука, 1983.

References

1. Kardashev N. S., Novikov I. D., Lukash V. N. et al. Review of scientific topics for Millimetron space observatory. *Phys. Usp.* 2014, Vol. 57, P. 1199–1228. Doi: 10.3367/UFNe.0184.201412c.1319.
2. Smirnov A. V., Baryshev A. M., Pilipenko S. V. et al. Space mission Millimetron for terahertz astronomy. *Proc. of SPIE.* 2012, Vol. 8442, P. 84424C. DOI: 10.1117/12.927184.
3. The website of the AStrospace Center of FIAN, Moscow. Available at: <http://millimetron.web2.ru/ru/> (accessed: 02.02.2021).
4. Lukin A. V., Melnikov A. N., Skolyarov A. F. [Control of the mirror counter-reflector of the telescope Millimetron based on the use of a synthesized hologram]. *Photonics.* 2016, No. 5, P. 44–48. (In Russ.)
5. Poleschuk A. G., Nasyrov R. K., Matochkin A. E. et al. [Development of the interfering-holographic IR system to control the shape of the central parabolic mirror of the Millimetron Observatory space telescope]. *Works of Interexpo Geo-Siberia.* 2015, Vol. 1, P. 51–58. (In Russ.)
6. Verhoglyad A. G., Michalkin V. M., Kuklin V. A., Halimanovitch V. I., Chugui Y. V. [System of control of geometric parameters of the central mirror of the Millimetron Space Telescope]. *Collection of works "Reshetnev Readings"*. 2014, Vol. 1 (18), P. 61–63. (In Russ.)
7. Kirichenko D. V., Kleimyonov V. V., Novikova E. V. [Large Optical Space Telescopes]. *Izv. Universities. Instrumentation.* 2017, Vol. 60, No. 7, P. 589–602. Doi: 10.17586/0021-3454-2017-60-7-589-602. (In Russ.)
8. Demin A. V., Denisov A. V., Letunovsky A. V. [Optical-digital systems and space systems]. *Izv. Universities. Instrumentation.* 2010, Vol. 53, No. 3, P. 51–59. (In Russ.)
9. Demin A. V. [A mathematical model of the process of justation of composite mirrors]. *I'm a Universities. Instrumentation.* 2015, Vol. 58, No. 11, P. 901–907. Doi: 10.17586/0021-3454-2015-58-11-901-907. (In Russ.)
10. Demin A. V., Rostokin P. V. Algorithm of Composite Mirrors. *Computer optics.* 2017, Vol. 41, No. 2. P. 291–294. Doi: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-291-294.

11. Olczak G., Wells C., Fischer D. J., Connolly M. T. Wavefront calibration testing of the James Webb Space Telescope primary mirror center of curvature optical assembly. *Proceedings of SPIE*. 2012, Vol. 8450, P. 84500R. Doi: 10.1117/12.927003.
12. Conquet B., Zambrano L. F., Artyukhina N. K., Fiodortsev R. V., Sitie A. R. Algorithm and mathematical model for geometric positioning of segments on aspherical composite mirror. *Devices and measurement methods*. 2018, Vol. 9, No. 3, P. 234–242. Doi: 10.21122/2220-9506-2018-9-3-234-242.
13. Batshev V. I., Puryaev D. T. [Optical System and Positioning Control Techniques of the Composite Parabolic Mirror segments of the Millimetron Space Observatory radio telescope]. *Measuring Technology*. 2009, No. 5, P. 29–31. (In Russ.)
14. Puryaev D. T., Batshev V. I., Pashevova O. V. [Method of quality control of the convex hyperbolic mirror of the space observatory Millimetron radio telescope]. *Journal of Engineering: Science and Innovation*. 2013, No. 7. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/pribor/optica/833.html> (accessed: 02.02.2021).
15. Sychev V. V., Klem A. I. [The multi-cell mirror control algorithm is based on the Millimetron Space Telescope]. *Atmosphere and Ocean Optics*. 2018, No. 7, P. 578–586. Doi: 10.15372/AOO20180712. (In Russ.)
16. Somov S. E. The orientation and calibration of the information and measurement system to determine the orientation of the survey satellite and its observation equipment. *News of the Samara Research Center of the Russian Academy of Sciences*. 2018, Vol. 20, No. 1-1, P. 87–96. Doi: 10.24411/1990-5378-2018-00127.
17. Makarov S. N., Verhoglyad A. G., Stupak M. F., Ovchinnikov D. A., Oberemok J. A. Mathematical modeling of the work of the 3D scanner of the mirror system control system of the Observatory “Millimetron”. *Reshetnev readings*. 2020, Part. 1, P. 101–102.
18. Fichtenholz G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Moscow, Fismatlit Publ., 2003, 680 p.
19. Shiryaev N. Chapter 2, § 6. Random magnitude II. *Probability*. Cambridge, New York, ICNMO, 2004. Vol. 1. P. 301–520.
20. Beklemishev D. V. *Dopolnitel'nye glavy lineynoy algebrы* [Additional chapters of linear algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1983.

© Макаров С. Н., Верхогляд А. Г., Ступак М. Ф.,
Овчинников Д. А., Оберемок Ю. А., 2021

Макаров Сергей Николаевич – старший научный сотрудник; Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН. E-mail: makarovsn@tdisie.nsc.ru.

Верхогляд Александр Григорьевич – и. о. заместителя директора; Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН. E-mail: verhog@tdisie.nsc.ru.

Ступак Михаил Федорович – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник; Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН. E-mail: stupak@tdisie.nsc.ru.

Овчинников Дмитрий Аркадьевич – заместитель начальника отдела 355; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева». E-mail: dao@iss-reshetnev.ru.

Оберемок Юрий Алексеевич – начальник отдела; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева». E-mail: oberemok@iss-reshetnev.ru

Makarov Sergey Nikolaevich – Senior Researcher; Technological Design Institute of Scientific Instrument Engineering SB RAS. E-mail: makarovsn@tdisie.nsc.ru.

Verhoglyad Alexander Grigoryevich – Acting Deputy Director; Technological Design Institute of Scientific Instrument Engineering SB RAS. E-mail: verhog@tdisie.nsc.ru.

Stupak Mikhail Fedorovich – Cand. Sc., Associate Professor, Leading research Associate; Technological Design Institute of Scientific Instrument Engineering SB RAS. E-mail: stupak@tdisie.nsc.ru.

Ovchinnikov Dmitry Arkadyevich – Deputy Head of Department 355; JSC Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”. E-mail: dao@iss-reshetnev.ru.

Oberemok Yuri Alekseevich – Head of the department; JSC Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”. E-mail: oberemok@iss-reshetnev.ru.
