

УДК 539.3

Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-3-432-451

Для цитирования: Матвеев А. Д. Обобщенные эквивалентные условия прочности в расчетах композитных тел // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 3. С. 432–451. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-3-432-451.

For citation: Matveev A. D. Generalized equivalent strength conditions in the calculations of composite bodies. *Siberian Aerospace Journal*. 2021, Vol. 22, No. 3, P. 432–451. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-3-432-451.

Обобщенные эквивалентные условия прочности в расчетах композитных тел

А. Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 630036, г. Красноярск, Академгородок, стр. 50/44
E-mail: mtv241@mail.ru

Конструкции с неоднородной регулярной структурой (пластины, балки, оболочки) широко применяются в технике, особенно, в авиационной и ракетно-космической. В расчетах на прочность упругих композитных конструкций с помощью метода конечных элементов (МКЭ) важно знать погрешность решения. Для анализа погрешности решения необходимо использовать последовательность приближенных решений, построенных по МКЭ с применением процедуры измельчения для базовых дискретных моделей, которые учитывают в рамках микроподхода неоднородную, микрон неоднородную структуру конструкций (тел). Реализация процедуры измельчения для базовых моделей требует больших ресурсов ЭВМ.

В данной работе кратко изложен метод эквивалентных условий прочности (МЭУП) для расчета на статическую прочность упругих тел с неоднородной регулярной структурой, для которых заданы множества различных нагружений. Согласно МЭУП, расчет на прочность композитного тела, для которого задано нагружение, сводится к расчету на прочность изотропного однородного тела (имеющего такое же нагружение, как композитное тело) с применением эквивалентных условий прочности. При численной реализации МЭУП используются скорректированные эквивалентные условия прочности, которые учитывают погрешность приближенных решений. Здесь МЭУП реализуется на основе МКЭ. Если для композитного тела задано множество различных нагружений, то в этом случае применяются обобщенные эквивалентные условия прочности. Показана процедура построения обобщенных эквивалентных условий прочности. Расчет на прочность композитных тел по МЭУП с использованием многосеточных конечных элементов требует в $10^3 \div 10^6$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет с применением измельченных базовых моделей композитных тел. Приведенный пример расчета на прочность композитной балки, для которой задано множество нагружений, с помощью МЭУП с применением обобщенных эквивалентных условий прочности показывает его высокую эффективность.

Ключевые слова: упругость, композиты, многосеточные конечные элементы, скорректированные и обобщенные эквивалентные условия прочности.

Generalized equivalent strength conditions in the calculations of composite bodies

A. D. Matveev

Institute of Computational Modeling SB RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 630036, Russian Federation
E-mail: mtv241@mail.ru

Structures with an inhomogeneous regular structure (plates, beams, shells) are widely used in engineering, especially in aviation and rocket and space. In calculations for the strength of elastic composite structures using the finite element method (FEM), it is important to know the error of the solution. To analyze the error of the solution, it is necessary to use a sequence of approximate solutions constructed according to the FEM using the grinding procedure for basic discrete models that take into account the non-homogeneous, micro-homogeneous structure of structures (bodies) within the micro-approach. The implementation of the grinding procedure for basic models requires large computer resources.

In this paper, the method of equivalent strength conditions (MESC) for testing the static strength of elastic bodies with an inhomogeneous regular structure, for which sets of different loads are given, is briefly described. According to the MESC, the calculation of the strength of a composite body for which the loading is set is reduced to the calculation of the strength of an isotropic homogeneous body (having the same loading as a composite body) using equivalent strength conditions. In the numerical implementation of the MESC, adjusted equivalent strength conditions are used, which take into account the error of approximate solutions. Here, the MESC is implemented on the basis of the FEM. If a set of different loads is specified for a composite body, then generalized equivalent strength conditions are applied in this case. The procedure for constructing generalized equivalent strength conditions is shown. The calculation of the strength of composite bodies according to the MESC using multigrid finite elements requires $10^3 \div 10^6$ times less computer memory than a similar calculation using crushed basic models of composite bodies. The given example of calculating the strength of a composite beam, for which a set of loads is set, using the MESC using generalized equivalent strength conditions shows its high efficiency.

Keywords: elasticity, composites, multigrid finite elements, corrected and generalized equivalent strength conditions.

Введение

Как правило, расчет на прочность упругой конструкции проводится по запасам прочности и сводится к определению максимального эквивалентного напряжения конструкции (тела) [1–3]. Для упругого тела V_0 заданные условия прочности имеют вид $n_1 \leq n_0 \leq n_2$, где n_1 , n_2 – заданы, коэффициент запаса n_0 тела V_0 отвечает точному решению задачи теории упругости, построенному для тела V_0 . Считают, что тело не разрушается при эксплуатации, если его коэффициент запаса удовлетворяет заданным условиям прочности. Определение коэффициента запаса n_0 для композитного тела (КТ), где $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$, σ_T – предельное напряжение [1], т. е. определение максимального эквивалентного напряжения σ_0 [1] КТ, отвечающего точному решению задачи упругости, затруднительно. Если напряжения в телах определяются приближенно, то в этом случае используют скорректированные условия прочности [4], которые учитывают погрешность решений. При анализе напряженного деформированного состояния (НДС) упругих тел широко используется метод конечных элементов (МКЭ) [5; 6]. Конечноэлементные

(дискретные) базовые модели (БМ), которые учитывают неоднородную структуру тел в рамках микроподхода [7], имеют высокую размерность. Кроме того, для анализа сходимости и погрешности решения необходимо использовать последовательность решений, построенных с помощью процедуры измельчения конечных элементов (КЭ) БМ КТ, которая приводит к резкому увеличению размерностей дискретных моделей. Для анализа НДС КТ эффективно используется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [8–14], в котором применяются многосеточные конечные элементы (МнКЭ) и который является обобщением МКЭ, так как, если в МКЭ используются МнКЭ, то в этом случае, по сути, реализуется ММКЭ. В областях МнКЭ [8–19] учитывается неоднородная структура и описывается трехмерное НДС. Важно отметить, что МнКЭ порождают дискретные модели, размерности которых меньше размерностей БМ КТ. Для ряда КТ (как, например, для тел с микронеоднородной структурой) БМ имеют такую высокую размерность, что реализация МКЭ с применением МнКЭ также затруднительна. Существующие методы расчета КТ [20–27] базируются на гипотезах, имеют сложные постановки и труднореализуемы.

В данной работе для расчета на прочность упругих тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой предлагается метод эквивалентных условий прочности (МЭУП), который сводится к расчету на прочность по МКЭ упругих изотропных однородных тел с применением эквивалентных условий прочности. В отличие от работ [28; 29] здесь подробно представлена теорема, которая лежит в основе МЭУП. При численной реализации МЭУП используют скорректированные эквивалентные условия прочности, которые учитывают погрешность решений. Для КТ, для которого задано множество различных нагружений, в расчетах используются обобщенные эквивалентные условия прочности. Реализация МЭУП на основе МКЭ с применением МнКЭ требует $10^3 \div 10^6$ раз меньше ресурсов ЭВМ, чем расчет по МКЭ на основе измельчения БМ КТ. Пример расчета КТ по МЭУП показывает его высокую эффективность.

1. Основные положения метода эквивалентных условий прочности

МЭУП применяется для КТ, которые удовлетворяют следующим положениям.

Положение 1. КТ состоят из разномодульных изотропных однородных тел, связи между которыми идеальны, т. е. на общих границах изотропных однородных тел функции перемещений и напряжений являются непрерывными.

Положение 2. Перемещения, деформации и напряжения разномодульных изотропных однородных тел отвечают соотношениям линейной теории упругости [30].

Положение 3. Приближенные решения БМ КТ, построенные по МКЭ, мало отличаются от точных решений. Такие приближенные решения будем считать точными.

2. Эквивалентные условия прочности

Пусть упругие тела V_1, V_2 имеют одинаковые характерные размеры, форму, крепления и статические нагружения, но отличаются модулями упругости. Пусть для коэффициентов запаса n_1, n_2 соответственно тел V_1, V_2 заданы условия прочности

$$n_a^1 \leq n_1 \leq n_b^1, \quad (1)$$

$$n_a^2 \leq n_2 \leq n_b^2, \quad (2)$$

где $n_a^1, n_a^2 > 1$; $n_a^1, n_a^2, n_b^1, n_b^2$ – заданы; коэффициент запаса n_1 (n_2) отвечает точному решению задачи теории упругости, построенному для тела V_1 (тела V_2).

Для тел V_1, V_2 введем следующее определение.

Определение. Если из выполнения условий (2) для коэффициента n_2 следует выполнение условий (1) для коэффициента n_1 и наоборот, если из выполнения условий (1) для коэффициента n_1 следует выполнение условий (2) для коэффициента n_2 , тогда условия прочности (1), (2) будем называть эквивалентными условиями прочности соответственно для тел V_2, V_1 .

3. Основная теорема метода эквивалентных условий прочности

Не теряя общности суждений, рассматриваем тела с волокнистой структурой, которые широко применяются на практике и в которых максимальные эквивалентные напряжения возникают в волокнах. В основе МЭУП лежит следующая теорема.

Теорема 1. Пусть для коэффициента запаса n_0 упругого КТ V_0 (волокнистой структуры) заданы нагружение F и условия прочности вида

$$n_1 \leq n_0 \leq n_2, \quad (3)$$

где величины n_1, n_2 заданы, $n_1 > 1$, $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$, σ_T – предельное напряжение КТ (предел текучести волокна), σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение КТ V_0 , напряжение σ_0 соответствует точному решению задачи теории упругости, построенному для нагружения F КТ V_0 , волокна тела V_0 имеют одинаковые модули упругости.

Пусть однородное изотропное тело V^b и КТ V_0 имеют одинаковую форму, характерные размеры, крепления и нагружение F . Пусть модули упругости тела V^b и волокна КТ одинаковы. Тогда существует такое число $p > 0$ (коэффициент эквивалентности), что если коэффициент запаса n_b тела V^b удовлетворяет скорректированным эквивалентным условиям прочности

$$\frac{pn_1}{1 - \delta_\alpha} \leq n_b \leq \frac{pn_2}{1 + \delta_\alpha}, \quad (4)$$

то коэффициент запаса n_0 КТ V_0 отвечает заданным условиям прочности (3), где $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, σ_b – максимальное эквивалентное напряжение тела V^b , отвечающее численному решению, построенному для нагружения F тела V^b с погрешностью δ_b , $|\delta_b| \leq \delta_\alpha$, где δ_α – верхняя оценка погрешности δ_b , удовлетворяющая условию

$$\delta_\alpha < C_\alpha = (n_2 - n_1) / (n_2 + n_1). \quad (5)$$

Доказательство.

Коэффициенты запаса n_0, n_b^0 соответственно тел V_0, V^b находим по формулам

$$n_0 = \sigma_T / \sigma_0, \quad (6)$$

$$n_b^0 = \sigma_T / \sigma_b^0, \quad (7)$$

где σ_b^0 – максимальное эквивалентное напряжение тела V^b , отвечающее точному решению задачи теории упругости, построенному для нагружения F тела V^b .

Пусть коэффициент n_0 удовлетворяет условиям (3). Используя (6) в (3), имеем

$$n_1 \leq \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \leq n_2. \quad (8)$$

Существует такое число $p > 0$ (коэффициент эквивалентности), что

$$p = \frac{\sigma_0}{\sigma_b}. \quad (9)$$

Учитывая (9) в (8), получаем

$$pn_1 \leq \frac{\sigma_T}{\sigma_b} \leq pn_2. \quad (10)$$

Используя (7) в (10), имеем

$$pn_1 \leq n_b^0 \leq pn_2. \quad (11)$$

Пусть коэффициент запаса n_b^0 тела V^b удовлетворяет условиям прочности (11). Тогда, подставляя (7) в (11) с учетом (9), имеем $pn_1 \leq \frac{p\sigma_T}{\sigma_0} \leq pn_2$. Откуда с учетом (6) следует выполнение для коэффициента запаса n_0 КТ V_0 условий прочности (3). Рассмотрим предельные случаи.

Пусть $n_b^0 = pn_1$. Используя соотношения (7), (9) в последнем равенстве, получаем $p \frac{\sigma_T}{\sigma_0} = pn_1$.

Откуда с учетом (6) следует $n_0 = n_1$. Аналогично показываем, что если $n_b^0 = pn_2$, то $n_0 = n_2$.

Пусть $n_0 = n_1$. Используя (6), (9) в последнем равенстве, получаем $\frac{\sigma_T}{\sigma_b} = pn_1$. Откуда с учетом

(7) вытекает $n_b^0 = pn_1$. Аналогично показываем, что если $n_0 = n_2$, то $n_b^0 = pn_2$. Итак показано, что (11) есть эквивалентные условия прочности для КТ V_0 (см. определение п. 2). Пусть для тела V^b найдено максимальное эквивалентное напряжение σ_b такое, что

$$|\delta_b| \leq \delta_\alpha < C_\alpha = (n_2 - n_1) / (n_1 + n_2), \quad (12)$$

где δ_b – относительная погрешность для σ_b , т. е.

$$\delta_b = (\sigma_b - \sigma_b^0) / \sigma_b^0. \quad (13)$$

Из (13) следует $\sigma_b = (1 + \delta_b) \sigma_b^0$. Отсюда, учитывая (7) и что $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, получаем

$$n_b^0 = (1 + \delta_b) n_b. \quad (14)$$

Отметим, что в (12) $C_\alpha < 1$. Пусть $\delta_0 = |\delta_b|$. Тогда в силу (12)

$$0 \leq \delta_0 = |\delta_b| \leq \delta_\alpha < 1. \quad (15)$$

Принимая в (14) последовательно $\delta_b = -\delta_0$, $\delta_b = \delta_0$, введем коэффициенты

$$n_1^r = (1 - \delta_0) n_b, \quad n_2^r = (1 + \delta_0) n_b. \quad (16)$$

Тогда в силу (14), (16) получаем

$$n_b^0 = n_1^r \quad \text{или} \quad n_b^0 = n_2^r. \quad (17)$$

Введем коэффициенты n_1^d , n_2^d по формулам

$$n_1^d = (1 - \delta_\alpha) n_b, \quad n_2^d = (1 + \delta_\alpha) n_b. \quad (18)$$

В силу, что $0 \leq \delta_\alpha < 1$, $n_b > 0$, из (18) следует

$$n_1^d \leq n_2^d. \quad (19)$$

Скорректированные эквивалентные условия прочности имеют вид (4) или

$$pn_1(1 + \delta_\alpha) \leq n_b(1 - \delta_\alpha^2) \leq pn_2(1 - \delta_\alpha), \quad (20)$$

где $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, σ_T – предельное напряжение КТ (предел текучести волокна).

Пусть для n_b выполняются условия прочности (20), т. е. пусть $pn_1 \leq (1 - \delta_\alpha)n_b$ и $(1 + \delta_\alpha)n_b \leq pn_2$. Тогда отсюда следует, что для коэффициентов n_1^d , n_2^d с учетом (18), (19) выполняются неравенства

$$pn_1 \leq n_1^d \leq n_2^d \leq pn_2. \quad (21)$$

Сравнивая (16), (18) с учетом (15), следуют неравенства $n_1^d \leq n_1^r$, $n_2^d \leq n_2^r$.

Отсюда, учитывая, что согласно (16) $n_1^r \leq n_2^r$, получаем

$$n_1^d \leq n_1^r \leq n_2^r \leq n_2^d. \quad (22)$$

Тогда в силу (21), (22) выполняются неравенства

$$pn_1 \leq n_1^r \leq n_2^r \leq pn_2. \quad (23)$$

Из выполнения (23) с учетом (17) следует выполнение условий прочности (11) для коэффициента запаса n_b^0 , следовательно, и выполнение заданных условий прочности (3). Ограничения на параметр δ_α находим из условия существования условий прочности (4), т. е. пусть $pn_1(1 + \delta_\alpha) \leq pn_2(1 - \delta_\alpha)$. Откуда следует

$$\delta_\alpha < C_\alpha = (n_2 - n_1) / (n_1 + n_2). \quad (24)$$

Поскольку $n_2 > n_1 > 1$, то из (24) следует $0 < C_\alpha < 1$. Если $\delta_\alpha = C_\alpha$, то из (4) следует $n_b = p(n_1 + n_2) / 2$, что трудно выполнить на практике. Поэтому следует δ_α задать такое, что $\delta_\alpha < C_\alpha$. В этом случае условия (11) для коэффициента запаса n_b^0 тела V^b можно выполнить с помощью скорректированных эквивалентных условий прочности (4) и численных решений, порождающих для напряжений σ_b тела V^b такие погрешности δ_b , что $|\delta_b| \leq \delta_\alpha$. Было показано, что из выполнения условий (11) следует выполнение условий прочности (3). Теорема доказана.

Согласно теореме 1 реализация МЭУП сводится к определению коэффициента p и коэффициента запаса n_b тела V^b , т. е. к определению максимального эквивалентного напряжения σ_b тела V^b с погрешностью $|\delta_b| < \delta_\alpha$, $n_b = \sigma_T / \sigma_b$.

4. Реализация метода эквивалентных условий прочности

Не теряя общности суждений, для простоты изложения, процедуру реализации МЭУП рассмотрим на примере тела V_0 с неоднородной регулярной структурой размерами $H \times H \times H$, где $H = 6Nh$, N – целое, $N \gg 1$, h мало. КТ V_0 , расположенное в декартовой системе координат $Oxyz$, при $y = 0$ жестко закреплено, т. е. при $y = 0$: $u, v, w = 0$. Регулярная ячейка G_0 КТ V_0 , имеющая форму куба со стороной $6h$, расположена в локальной декартовой системе координат $Oxyz$, $i, j, k = 1, \dots, 7$ (рис. 1), волокна сечением $h \times h$ направлены вдоль оси Oy , сечения волокон закрашены. Итак, тело V_0 армировано параллельными оси Oy непрерывными волокнами. Для КТ V_0 заданы условия прочности (3). БМ R_0 КТ V_0 , состоящая из конечных элементов

(КЭ) V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС), учитывает неоднородную структуру тела V_0 и порождает равномерную сетку с шагом h . Считаем, что полож. 3 МЭУП для КТ V_0 выполняется.

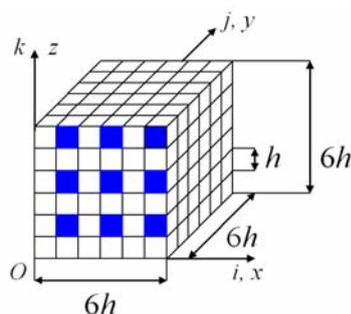


Рис. 1. Регулярная ячейка G_0

Fig. 1. Regular cell G_0

Отметим, что реализация МЭУП сводится к определению коэффициента эквивалентности p , коэффициента запаса n_b тела V^b и к построению скорректированных эквивалентных условий прочности (4).

Нахождение коэффициента эквивалентности p

Согласно МЭУП введем изотропное однородное тело V^b и КТ R^0 такие, что тела V^b , R^0 и V_0 имеют одинаковые форму, характерные размеры, заданные крепления и нагружения, но отличаются модулями упругости. Модули упругости тела V^b равны модулям упругости волокна КТ V_0 . Для тела V^b (для КТ R^0) определяем дискретные модели V_n^b (модели R_n^0), которые образуют последовательности $\{V_n^b\}_{n=1}^N$, $\{R_n^0\}_{n=1}^N$. Модель V_N^b является БМ тела V^b . Модель V_n^b (модель R_n^0) состоит из КЭ $V_j^{(n)}$ 1-го порядка формы куба со стороной h_n , в которых реализуется трехмерное напряженное состояние и которые порождают равномерную сетку с шагом h_n размерности $n_1^{(n)} \times n_2^{(n)} \times n_3^{(n)}$, где

$$n_1^{(n)} = 6n + 1, \quad n_2^{(n)} = 6n + 1, \quad n_3^{(n)} = 6n + 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (25)$$

Согласно (25) модель V_n^b (модель R_n^0) состоит из конечного числа одинаковых по форме и размерам изотропных однородных тел G_n^b (КТ G_n^0) размерами $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$, где

$$h_n = H / (6n) = \beta_n h, \quad (26)$$

где $H = 6Nh$, $\beta_n = N / n$, $n = \overline{1, N}$, при $n < N$: $\beta_n > 1$, $h_n > h$, при $n \rightarrow N$ имеем $h_n \rightarrow h$, $h_N = h$.

КТ G_n^0 имеет такое же число узлов сетки (343 узла), число волокон (сечением $h_n \times h_n$) и такое же их взаимное расположение, как регулярная ячейка G_0 (рис. 1). Волокна и матрицы КТ G_n^0 и G_0 имеют одинаковые модули упругости, $n = \overline{1, N}$ (рис. 2), где $h_n > h$ при $n < N$, $i, j, k = 1, \dots, 7$.

КТ G_n^0 , G_0 (их неоднородные структуры) геометрически отличаются только масштабностью. Для удобства рассуждений, формально для КТ G_n^0 , G_0 запишем соотношение

$$G_n^0 = \beta_n G_0, \quad (27)$$

где β_n – коэффициент масштабности, $\beta_n = N/n$, $n = \overline{1, N}$, при $n \rightarrow N$: $\beta_n \rightarrow 1$, $\beta_N = 1$, $G_N^0 = G_0$.

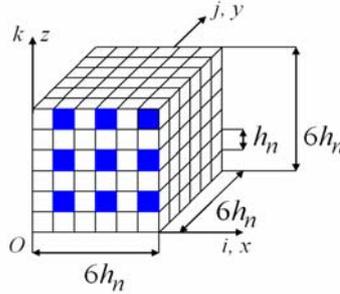


Рис. 2. КТ G_n^0 (регулярная ячейка модели R_n^0)

Fig. 2. CB G_n^0 (regular cell body R_n^0)

Отметим, что поскольку в регулярной ячейке G_0 учитывается неоднородная структура, то в силу (27) и в КТ G_n^0 ($n = \overline{1, N}$) также учитывается неоднородная структура с помощью КЭ $V_j^{(n)}$ 1-го порядка формы куба со стороной h_n , т. е. в модели R_n^0 учитывается неоднородная структура. Отметим, что КТ G_n^0 , по сути, является регулярной ячейкой модели R_n^0 . Итак, модели V_n^b , R_n^0 имеют одинаковую форму, размерность, одинаковые характерные размеры, равномерные сетки с шагом h_n , крепления и нагружения, как КТ V_0 , т. е. модели V_n^b , R_n^0 отличаются друг от друга только модулями упругости. Отметим следующие достоинства моделей V_n^b , R_n^0 .

1. Размерности моделей V_n^b , R_n^0 при $n < N$ в силу (25), (26) меньше размерности БМ R_0 .
2. При построении моделей $\{R_n^0\}_{n=1}^N$ не применяется измельчение БМ R_0 .

Для уменьшения размерностей моделей V_n^b , R_n^0 используются многосеточные КЭ.

В силу (26), (27) при $n = N$ ($h_N = h$, $\beta_N = 1$, т. е. $G_N^0 = G_0$) модели V_N^b , R_N^0 и БМ R_0 КТ V_0 имеют одинаковую размерность, а модели R_N^0 и R_0 в силу (27) совпадают, т. е. $R_N^0 = R_0$. Так как, согласно (27), при $n \rightarrow N$ имеем $G_n^0 \rightarrow G_0$, тогда получаем

$$R_n^0 \rightarrow R_N^0 = R_0 \text{ при } n \rightarrow N. \quad (28)$$

Поскольку модели R_N^0 , V_N^b имеют такую же размерность как БМ R_0 , для которой выполняется полож. 3 МЭУП, то считаем, что максимальное эквивалентное напряжение σ_N^0 (напряжение σ_N^b) модели R_N^0 (модели V_N^b) мало отличается от точного σ_0 (σ_b^0). Поэтому полагаем

$$\sigma_0 = \sigma_N^0, \quad \sigma_b^0 = \sigma_N^b, \quad (29)$$

где σ_b^0 – максимальное эквивалентное напряжение тела V^b отвечает точному решению трехмерной задачи теории упругости, построенному для тела V^b .

Коэффициент эквивалентности p находим по формуле (9), т. е. $p = \sigma_0 / \sigma_b^0$ или с учетом (29)

$$p = \sigma_N^0 / \sigma_N^b. \quad (30)$$

Приближенное значение коэффициента эквивалентности p_n находим по формуле

$$p_n = \sigma_n^0 / \sigma_n^b, \quad (31)$$

где σ_n^0 (σ_n^b) – максимальное эквивалентное напряжение модели R_n^0 (модели V_n^b).

В силу (26) при $n \rightarrow N$ следует $V_n^b \rightarrow V_N^b$. Отсюда, учитывая (28), имеем

$$\sigma_n^0 \rightarrow \sigma_N^0, \quad \sigma_n^b \rightarrow \sigma_N^b \quad \text{при } n \rightarrow N. \quad (32)$$

Учитывая (32), (29), (30) в (31), получаем

$$p_n \rightarrow p \quad \text{при } n \rightarrow N. \quad (33)$$

Пусть $\delta_n = |p_n - p_{n-1}| / p_n$ мало, где $n = 2, 3, \dots$. Тогда принимаем

$$p = p_n. \quad (34)$$

Расчеты показывают равномерную (монотонную) сходимость напряжений σ_n^0 , σ_n^b и параметра p_n соответственно к напряжениям σ_N^0 , σ_N^b и параметру p .

Построение скорректированных эквивалентных условий прочности

Подставляя найденный коэффициент эквивалентности p и заданные значения δ_α , n_1 , n_2 в (4), определяем скорректированные эквивалентные условия прочности для КТ V_0 .

Нахождение коэффициента запаса прочности n_b для однородного изотропного тела V^b

Пусть $\delta_n^\sigma = |\sigma_n^b - \sigma_{n-1}^b| / \sigma_n^b$ мало и $|\delta_n^\sigma| \leq \delta_\alpha$, где $\delta_\alpha < C_\alpha$, $n = 2, 3, \dots$. Тогда полагаем

$$\sigma_b = \sigma_n^b. \quad (35)$$

Используя (35) в формуле $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, определяем коэффициент запаса n_b для тела V^b

$$n_b = \sigma_T / \sigma_n^b. \quad (36)$$

Проверка заданных условий прочности

Пусть коэффициент запаса n_b изотропного однородного тела V^b , найденный по формуле (36), т. е. отвечающий численному решению задачи упругости, удовлетворяет скорректированным эквивалентным условиям прочности (4), построенным для КТ V_0 . Тогда, согласно теореме 1 (см. п. 3), коэффициент запаса n_0 КТ V_0 , отвечающий точному решению задачи упругости, удовлетворяет заданным условиям прочности (3).

5. Процедура построения обобщенных эквивалентных условий прочности

Процедуру построения обобщенных эквивалентных условий прочности для КТ, для которого задано множество различных нагружений, не теряя общности суждений, рассмотрим на примере КТ V_0 . Пусть на поверхности S КТ V_0 действует нагружение вида q_x , q_y , q_z , где q_x , q_y , q_z – поверхностные нагружения, действующие соответственно в направлении коорди-

натных осей Ox , Oy , Oz ; $q_x, q_y, q_z \in Q_{xyz}$, Q_{xyz} – множество различных нагружений, заданное для КТ V_0 ,

$$Q_{xyz} = \{q_x, q_y, q_z : q_x, q_y, q_z \text{ – гладкие функции, заданные на } S\}. \quad (37)$$

Для нахождения (верхней, нижней) границ для множества \mathbf{P} коэффициентов эквивалентности, отвечающих множеству нагружения (37), проводим расчеты для ряда характерных нагружений КТ V_0 : $q_x = q_x^{(n)}$, $q_y = q_y^{(n)}$, $q_z = q_z^{(n)}$ ($q_x^{(n)}$, $q_y^{(n)}$, $q_z^{(n)}$ – гладкие функции), $n = \overline{1, N_0}$, N_0 – задано. Введем коэффициенты

$$p_1 = \min(p^{(n)}), \quad p_2 = \max(p^{(n)}), \quad n = \overline{1, N_0}, \text{ т. е. } \forall p \in \mathbf{P} : p_1 \leq p \leq p_2. \quad (38)$$

Пусть для КТ V_0 выполняется условие

$$p_2 C_1 \leq p_1 C_2, \quad (39)$$

где $C_1 = n_1 / (1 - \delta_\alpha)$, $C_2 = n_2 / (1 + \delta_\alpha)$.

Для коэффициента эквивалентности $p_q \in [p_1, p_2]$, который найден по МКЭ для нагружения $q_x, q_y, q_z \in Q_{xyz}$ тела V^b , условия прочности (4) принимают вид

$$p_q C_1 \leq n_b \leq p_q C_2, \quad (40)$$

где n_b – коэффициент запаса изотропного однородного тела V^b .

Согласно (38) имеем $p_q C_1 \leq p_2 C_1$, $p_1 C_2 \leq p_q C_2$. Используя эти неравенства и (39), получаем $p_q C_1 \leq p_2 C_1 \leq p_1 C_2 \leq p_q C_2$. Пусть нагружение $q_x, q_y, q_z \in Q_{xyz}$ тела V^b такое, что

$$p_q C_1 \leq p_2 C_1 \leq n_b \leq p_1 C_2 \leq p_q C_2, \quad (41)$$

т. е. для коэффициента запаса n_b тела V^b выполняются следующие условия прочности

$$p_2 C_1 \leq n_b \leq p_1 C_2. \quad (42)$$

Пусть для нагружения $q_x, q_y, q_z \in Q_{xyz}$ тела V^b коэффициент n_b удовлетворяет условиям прочности (42). Тогда для коэффициента n_b выполняются условия (41), т. е. условия прочности (40). Согласно теореме 1 (см. п. 3), из выполнения условий прочности (41) следует выполнение заданных условий прочности (3) для нагружения $q_x, q_y, q_z \in Q_{xyz}$ КТ V_0 . Отметим, что согласно МЭУП тело V^b и КТ V_0 имеют одинаковые нагружения (см. п. 4). Итак, показано, что из выполнения условий прочности (42) для тела V^b , имеющего нагружение $q_x, q_y, q_z \in Q_{xyz}$, следует выполнение условий прочности (3) для нагружения $q_x, q_y, q_z \in Q_{xyz}$ КТ V_0 . Условия (42) будем называть обобщенными эквивалентными условиями прочности. По сути, выше доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть для множества Q различных нагружений, заданных для КТ V_0 , согласно МЭУП, построены обобщенные эквивалентные условия прочности (42). Пусть для коэффициента запаса n_b изотропного однородного тела V^b , имеющего нагружение $F \in Q$, условия прочности (42) выполняются. Тогда выполняются заданные условия прочности (3) для нагружения F КТ V_0 .

6. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим модельную задачу расчета на прочность консольной композитной балки V_0 , размерами $H \times L \times H$, где $H = 96h$, $L = 1152h$, h – задано (рис. 3). Регулярная ячейка G_0 КТ V_0 имеет форму куба со стороной $6h$, волокна сечением $h \times h$ параллельны оси Oy (рис. 4), сечения волокон в плоскости Oxz закрашены. Итак, тело V_0 армировано параллельными оси Oy непрерывными волокнами, расстояние между волокнами равно $2h$. При $y = 0$ КТ V_0 жестко закреплено и при $z = H$ имеет нагружение вида q_x, q_z , где q_x (q_z) – усилие, действующее на балку в направлении оси Ox (оси Oz).

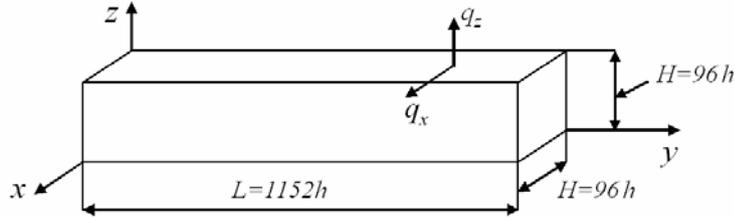


Рис. 3. Размеры тела V_0 (тела V^b , моделей V_n^b, R_n^0)

Fig. 3. Dimensions of the body V_0 (body V^b , models V_n^b, R_n^0)

Базовая дискретная модель R_0 КТ V_0 , состоящая из односеточных конечных элементов (1 сКЭ) V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h [5; 6] (в которых реализуется трехмерное НДС [30]), учитывает неоднородную структуру тела V_0 и порождает равномерную (базовую) сетку с шагом h размерности $97 \times 1153 \times 97$. На рис. 4 показана базовая сетка регулярной ячейки G_0 . Так как БМ R_0 имеет 32517504 (свыше 32 млн) неизвестных МКЭ и поскольку $h/H \ll 1$ ($h/H = h/(96h) = 0,0104$), то будем считать, что максимальное эквивалентное напряжение БМ R_0 мало отличается от точного решения, т. е. полож. 3 МЭУП для КТ V_0 выполняется (см. п. 1).

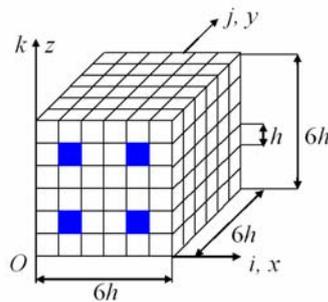


Рис. 4. Регулярная ячейка G_0

Fig. 4. Regular cell G_0

Для коэффициента запаса n_0 КТ V_0 заданы условия прочности вида

$$1,3 \leq n_0 \leq 3,5. \quad (43)$$

Исходные данные для КТ V_0 : $h = 0,2083$; $\sigma_T = 5$; $\nu_c = \nu_v = 0,3$ $E_c = 1$, $E_v = 10$, где E_c, E_v (ν_c, ν_v) – модули Юнга (коэффициенты Пуассона) соответственно связующего материала и

волокна, на поверхности $S = \{0,5L \leq y \leq L, z = H\}$ КТ V_0 действует равномерное нагружение $q_z = q_x = 0,000285$, σ_T – предел текучести волокна.

Согласно МЭУП введем изотропное однородное тело V^b и КТ R^0 такие, что тела V^b , R^0 и V_0 имеют одинаковые форму, характерные размеры, заданные крепления и нагружения, но отличаются модулями упругости. Модули упругости тела V^b равны модулям упругости волокна КТ V_0 . Для тела V^b (для КТ R^0) определяем дискретные модели V_n^b (модели R_n^0), которые образуют последовательности $\{V_n^b\}_{n=1}^{16}$, $\{R_n^0\}_{n=1}^{16}$. Модель V_n^b (модель R_n^0) состоит из 1сКЭ $V_j^{(n)}$ 1-го порядка формы куба со стороной h_n , в которых реализуется трехмерное НДС и которые порождают равномерную сетку с шагом h_n размерности $n_1^{(n)} \times n_2^{(n)} \times n_3^{(n)}$, где

$$n_1^{(n)} = 6n + 1, n_2^{(n)} = 12 \times 6n + 1, n_3^{(n)} = 6n + 1, n = 1, 2, 3, \dots \quad (44)$$

Шаги $h_x^{(n)}$, $h_y^{(n)}$, $h_z^{(n)}$ сетки модели V_n^b (модели R_n^0) соответственно по осям Ox , Oy , Oz равны $h_x^{(n)} = H / (6n)$, $h_y^{(n)} = L / (72n)$, $h_z^{(n)} = H / (6n)$. Так как $L = 12H$, то $h_n = h_x^{(n)} = h_y^{(n)} = h_z^{(n)}$. Отсюда, учитывая, что $H = 96h$, получаем

$$h_n = \beta_n h, \quad (45)$$

где $\beta_n = 16 / n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ при $n \leq 15$ $\beta_n > 1$, $h_n > h$.

Согласно (44), модель V_n^b (модель R_n^0) (рис. 3) состоит из конечного числа одинаковых по форме и размерам изотропных однородных тел G_n^b (КТ G_n^0) размерами $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$ (рис. 5).

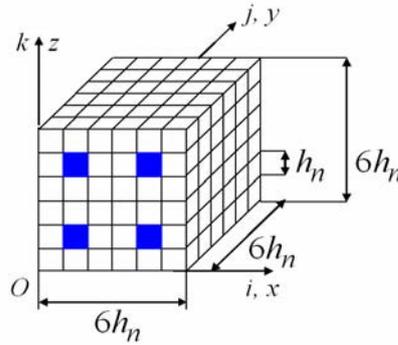


Рис. 5. Регулярная ячейка G_n^0

Fig. 5. Regular cell G_n^0

КТ G_n^0 имеет такое же число волокон (сечением $h_n \times h_n$) и такое же их взаимное расположение, как регулярная ячейка G_0 (рис. 4), волокна и связующий материал КТ G_n^0 и G_0 имеют одинаковые модули упругости, $n = \overline{1,16}$. Итак, КТ G_n^0 , G_0 (их неоднородные структуры) геометрически отличаются только масштабностью. Тогда, учитывая (45), для удобства рассуждений, формально для КТ G_n^0 , G_0 запишем соотношение

$$G_n^0 = \beta_n G_0, \quad (46)$$

где β_n – коэффициент масштабности, при $n \rightarrow 16$ имеем $\beta_n \rightarrow 1$, $\beta_{16} = 1$, т. е. $G_{16}^0 = G_0$.

Отметим, что поскольку в регулярной ячейке G_0 учитывается неоднородная структура, то в силу (46) и в КТ G_n^0 ($n=1,2,3,\dots$) также учитывается неоднородная структура с помощью 1сКЭ $V_j^{(n)}$ 1-го порядка формы куба со стороной h_n , т. е. в модели R_n^0 учитывается неоднородная структура. Отметим, что КТ G_n^0 , по сути, является регулярной ячейкой модели R_n^0 , $n=1,2,3,\dots$. Итак, модели V_n^b , R_n^0 имеют одинаковую форму и размерность, одинаковые характерные размеры, равномерные сетки с шагом h_n , крепления и нагрузки как КТ V_0 .

В расчетах используем двухсеточные КЭ (2сКЭ). При построении 2сКЭ $V_d^{(2)}$ размерами $6h \times 6h \times 6h$ [15–19] используем две вложенные сетки: мелкую равномерную сетку h_d с шагом h размерности $7 \times 7 \times 7$ и крупную сетку H_d размерности $2 \times 3 \times 2$, $H_d \subset h_d$. По осям Ox , Oz сетка H_d имеет шаг $6h$, по оси Oy – шаг $3h$. На рис. 6 узлы сетки H_d отмечены точками, 12 узлов. Сетка h_d порождена базовым разбиением R_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$, которое состоит из 1сКЭ V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС, $j=1,\dots,M$, M – общее число 1сКЭ V_j^h , $M=216$) и учитывает неоднородную структуру 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

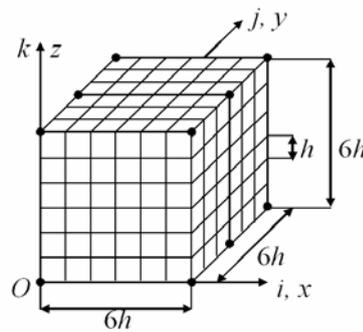


Рис. 6. Мелкая и крупная сетки 2сКЭ $V_d^{(2)}$

Fig. 6. Small and large grids 2gFE $V_d^{(2)}$

На разбиении R_d строим суперэлемент V_S с помощью метода конденсации [5]. Полную потенциальную энергию Π_S суперэлемента V_S представим в форме

$$\Pi_S = \frac{1}{2} \mathbf{q}_S^T [K_S] \mathbf{q}_S - \mathbf{q}_S^T \mathbf{F}_S, \quad (47)$$

где T – транспонирование; $[K_S]$ – матрица жесткости (размерности 654×654); \mathbf{F}_S , \mathbf{q}_S – векторы узловых сил и перемещений (размерности 654) суперэлемента V_S . Базисную функцию $N_{ijk}(x, y, z)$ для узла i, j, k крупной сетки H_d с помощью полиномов Лагранжа запишем в форме $N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$, где

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^2 \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^3 \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}, \quad L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^2 \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha},$$

где x_i, y_j, z_k – координаты узла i, j, k сетки H_d в системе координат $Oxyz$; ijk – целочисленная система координат, введенная для узлов сетки H_d , $i, k=1, 2$; $j=1, 2, 3$ (см. рис. 6).

Обозначим: $N_e = N_{ijk}$, $u_e = u_{ijk}$, $v_e = v_{ijk}$, $w_e = w_{ijk}$, где u_{ijk} , v_{ijk} , w_{ijk} – значения перемещений u , v , w в узле i, j, k сетки H_d , $i, k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, $e = 1, \dots, 12$. Тогда аппроксимирующие функции перемещений $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ 2сКЭ $V_d^{(2)}$ представим

$$u^{(2)} = \sum_{e=1}^{12} N_e u_e, \quad v^{(2)} = \sum_{e=1}^{12} N_e v_e, \quad w^{(2)} = \sum_{e=1}^{12} N_e w_e. \quad (48)$$

Обозначим: \mathbf{q}_d – вектор узловых перемещений крупной сетки H_d (размерности 36), т. е. вектор узловых неизвестных 2сКЭ $V_d^{(2)}$. Используя (48), вектор \mathbf{q}_S узловых перемещений суперэлемента V_S выражаем через вектор \mathbf{q}_d , т. е.

$$\mathbf{q}_S = [A_S^d] \mathbf{q}_d, \quad (49)$$

где $[A_S^d]$ – прямоугольная матрица (размерности 654×36).

Подставляя (49) в (47) получаем $\Pi_S = \Pi_S(\mathbf{q}_d)$. Из выполнения $\partial \Pi_S / \partial \mathbf{q}_d = 0$ получаем равенство $[K_d] \mathbf{q}_d = \mathbf{F}_d$, где $[K_d] = [A_S^d]^T [K_S] [A_S^d]$, $\mathbf{F}_d = [A_S^d]^T \mathbf{F}_S$, где $[K_d]$, \mathbf{F}_d – матрица жесткости (размерности 36×36) и вектор узловых сил (размерности 36) 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

Решение, построенное для сетки H_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$, с помощью формулы (49) проецируется на сетку суперэлемента V_S , затем с помощью соотношений метода конденсаций – на мелкую сетку h_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$, что позволяет найти напряжения в 1сКЭ V_j^h базового разбиения R_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

На модели V_n^b (R_n^0) строим двухсеточную дискретную модель, которая состоит из 2сКЭ типа $V_d^{(2)}$ размерами $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$, где $h_n = 16h/n$, $n = \overline{1, 11}$, и которую обозначим V_n^0 (R_n). Отметим, что модели V_n^0 , R_n имеют одинаковую размерность. Для моделей V_n^0 , R_n находим (по 4-й теории прочности [1]) соответственно максимальные эквивалентные напряжения σ_n^b , σ_n^0 , $n = 3, 5, \dots, 11$. Результаты расчетов представлены в табл. 1, где

$$\delta_n^p (\%) = 100\% \times |p_n - p_{n-2}| / p_n, \quad (50)$$

где $n = 5, 7, 9, 11$; $p_n = \sigma_n^0 / \sigma_n^b$; N_n^0 , b_n^0 – размерность и ширина ленты СУ МКЭ модели V_n^0 , $n = 3, 5, \dots, 11$.

Анализ результатов расчетов показывает равномерную монотонную сходимость напряжений σ_n^b , σ_n^0 , параметра p_n и погрешности δ_n^p . Рассмотрим расчет КТ V_0 на основе БМ \mathbf{R}_0 . Отметим, что в расчетах КТ, как правило, используют три (и более) дискретных модели для анализа сходимости и погрешности численных решений. В данном случае используем три модели: $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0$, модели \mathbf{R}_2 и \mathbf{R}_3 получены путем измельчения БМ \mathbf{R}_0 . На дискретной модели \mathbf{R}_n , используя 2сКЭ типа $V_d^{(2)}$ размерами $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$, определяем двухсеточную дискретную модель \mathbf{R}_n^0 , где h_n – шаг равномерной сетки модели \mathbf{R}_n , $h_n = h/n$, $n = 1, 2, 3$.

Результаты расчетов для моделей \mathbf{R}_n , \mathbf{R}_n^0 даны в табл. 2, где N_n , b_n – размерность и ширина ленты СУ МКЭ модели \mathbf{R}_n ; N_n^0 и b_n^0 – размерность и ширина ленты модели \mathbf{R}_n^0 ; $n = 1, 2, 3$. Коэффициент k_n находим по формуле $k_n = (N_n^0 \times b_n^0) / (N_{11}^0 \times b_{11}^0)$, где $N_n^0 \times b_n^0$ – объем памяти ЭВМ, необходимый для модели \mathbf{R}_n^0 ; $n = 1, 2, 3$; $N_{11}^0 \times b_{11}^0$ – объем памяти ЭВМ, необходимый

для модели V_{11}^0 , где $N_{11}^o = 114048$, $b_{11}^o = 906$, которая используется в расчетах КТ V_0 по МЭУП (см. табл. 1). Итак, реализация МЭУП при расчете КТ V_0 требует в $1,169 \times 10^3$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем реализация расчета КТ V_0 на основе измельчения БМ R_0 (см. табл. 2). Находим напряжение σ_b для тела V^b и коэффициент эквивалентности p . Так как напряжения $\sigma_9^b = 0,477$ и $\sigma_{11}^b = 0,515$ отличаются на малую величину $\delta = (0,515 - 0,477) / 0,515 = 0,07379$ (см. табл. 1), то пусть $\sigma_b = \sigma_{11}^b$, т. е. $\sigma_b = 0,515$. Тестовые расчеты показывают, что напряжение σ_{11}^b найдено с ошибкой не более 15%. Тогда полагаем $\delta_\alpha = 0,15$. Отметим, что условие (24) выполняется, т. е. имеем $\delta_\alpha = 0,15 < C_\alpha = 0,458$. Так как $\delta_{11}^p = 0,221$ (%) малая величина (см. табл. 1), то принимаем $p = p_{11} = 4,54183$.

Таблица 1

Результаты расчета КТ V_0

n	V_n^0	N_n^o	b_n^o	σ_n^b	R_n	σ_n^o	p_n	δ_n^p (%)
3	V_3^0	3456	114	0,319	R_3	0,169	0,52907	–
5	V_5^0	12960	240	0,383	R_5	1,741	4,54020	88,35
7	V_7^0	32256	414	0,434	R_7	1,979	4,55590	0,345
9	V_9^0	94800	636	0,477	R_9	2,173	4,55185	0,089
11	V_{11}^0	114048	906	0,515	R_{11}	2,339	4,54183	0,221

Таблица 2

Результаты расчетов для моделей R_n, R_n^o

n	h_n	R_n	N_n	b_n	R_n^o	N_n^o	b_n^o	k_n
1	h	R_1	32517504	28524	R_1^o	332928	1791	5,77
2	$h/2$	R_2	257465088	112332	R_2^o	2509056	6639	161,21
3	$h/3$	R_3	865945728	251436	R_3^o	8297856	14559	1169,18

Подставляя в представление (4) $p = 4,54183$, $n_1 = 1,3$, $n_2 = 3,5$, $\delta_\alpha = 0,15$, получаем для КТ V_0 скорректированные эквивалентные условия прочности

$$6,95 \leq n_b \leq 13,82. \quad (51)$$

Для тела V^b коэффициент запаса n_b определяем по формуле $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, с учетом, что $\sigma_T = 5$, $\sigma_b = 0,515$, получаем $n_b = 5 / 0,515 = 9,71$. Коэффициент запаса $n_b = 9,71$ тела V^b удовлетворяет условиям прочности (51). Тогда коэффициент запаса n_0 КТ V_0 удовлетворяет условиям прочности (43) (см. теорему 1 п. 3).

7. Применение обобщенных эквивалентных условий прочности

Рассмотрим построение обобщенных эквивалентных условий прочности для КТ V_0 (рис. 3), для которого на границе $S = \{0,5L \leq y \leq L, z = H\}$ КТ V_0 задано множество различных нагрузений Q_{xz} вида

$$Q_{xz} = \{q_x, q_z: q_x = \alpha, q_z = \beta, 0 \leq \alpha, \beta < \infty\}. \quad (52)$$

Для нахождения (верхней, нижней) границ для множества \mathbf{P} коэффициентов эквивалентности, отвечающих множеству нагружения (52), проводятся расчеты для ряда характерных нагружений КТ $V_0: q_x = q_x^{(n)}, q_z = q_z^{(n)} (q_x^{(n)}, q_z^{(n)} = \text{const}), n = \overline{1,4}$. Результаты расчетов даны в табл. 3, где коэффициент эквивалентности $p^{(n)}$ найден для нагружения $q_x^{(n)}, q_z^{(n)}$ с помощью моделей V_{11}^0, R_{11} , см. п. 6, $n = \overline{1,4}$.

Таблица 3

Результаты расчетов для нагружений $q_x^{(n)}, q_z^{(n)}$

n	$q_x^{(n)} \times 10^{-3}$	$q_z^{(n)} \times 10^{-3}$	$p^{(n)}$
1	$q_x^{(1)} = 0$	$q_z^{(1)} = 0,225$	4,53868
2	$q_x^{(2)} = 0,180$	$q_z^{(2)} = 0,325$	4,54185
3	$q_x^{(3)} = 0,275$	$q_z^{(3)} = 0$	4,55305
4	$q_x^{(4)} = 0,750$	$q_z^{(4)} = 0,750$	4,54129

В силу линейности задачи теории упругости и соотношения (30) коэффициент эквивалентности p , который определяется для нагружения $q_x = \alpha_0 q_x^{(n)}, q_z = \alpha_0 q_z^{(n)}$, не зависит от α_0 , где $\alpha_0 = \text{const}, 0 < \alpha_0 < \infty, n = \overline{1,4}$. Тогда при любом $\alpha_0 > 0$ для нагружений $q_x = \alpha_0 q_x^{(3)}, q_z = 0$ и $q_x = 0, q_z = \alpha_0 q_z^{(1)} (q_x = \alpha_0 q_x^{(2)}, q_z = \alpha_0 q_z^{(2)})$ и $q_x = \alpha_0 q_x^{(4)}, q_z = \alpha_0 q_z^{(4)}$, где $q_x^{(4)} = q_z^{(4)}$ соответственно получаем $p = p^{(3)}$ и $p = p^{(1)}$ ($p = p^{(2)}$ и $p = p^{(4)}$) (см. табл. 3). Отсюда следует, что если $q_x \rightarrow q_z$, то $p \rightarrow p^{(4)}$; если $q_z = \alpha_0, q_x \rightarrow 0$, то $p \rightarrow p^{(1)}$; если $q_x = \alpha_0, q_z \rightarrow 0$, то $p \rightarrow p^{(3)}$, если $q_x \neq q_z, q_x, q_z \neq 0$, то $p^{(1)} < p < p^{(3)}$, что подтверждают расчеты. Итак, для любых нагружений q_x, q_z в (52) имеем $\forall p \in \mathbf{P}: p^{(1)} \leq p \leq p^{(3)}$.

Введем коэффициенты

$$p_1 = \min(p^{(n)}), p_2 = \max(p^{(n)}), n = \overline{1,4}, \text{ т. е. } \forall p \in \mathbf{P}: p_1 \leq p \leq p_2. \quad (53)$$

Для КТ V_0 условие (39) выполняется, т. е. имеем

$$p_2 C_1 \leq p_1 C_2, \quad (54)$$

где $C_1 = n_1 / (1 - \delta_\alpha), C_2 = n_2 / (1 + \delta_\alpha)$.

В самом деле, следуя исходным данным для КТ V_0 и результатам табл. 3, имеем $C_1 = 1,5294, C_2 = 3,0435, p_1 = p^{(1)} = 4,53868, p_2 = p^{(3)} = 4,55305$. Получаем $p_2 C_1 = 6,963, p_1 C_2 = 13,81$, т. е. условие (54) для КТ V_0 выполняется. Для коэффициента запаса n_b тела V^b обобщенные эквивалентные условия прочности имеют вид (42), т. е.

$$p_2 C_1 \leq n_b \leq p_1 C_2. \quad (55)$$

Итак, расчет на прочность по МЭУП КТ V_0 , для которого задано множество различных нагружений (52), сводится к построению обобщенных эквивалентных условий прочности (55). Согласно теореме 2, если коэффициент запаса n_b тела V^b , имеющего нагружение $q_x, q_z \in Q_{xz}$,

удовлетворяет обобщенным эквивалентным условиям прочности (55), то коэффициент запаса n_0 КТ V_0 отвечает заданным условиям прочности (43) для нагружения $q_x, q_z \in Q_{xz}$.

Для КТ V_0 обобщенные эквивалентные условия прочности (55) имеют вид

$$6,96 \leq n_b \leq 13,81. \quad (56)$$

В данном примере $p_1 = 4,53868$, $p_2 = 4,55305$, и так как $\Delta p = p_2 - p_1 = 0,01437$ мало, то условия прочности (51) и (56) почти совпадают (см. п. 6).

Достоинство обобщенных эквивалентных условий прочности (55) состоит в том, что они применяются для всех различных нагружений множества Q_{xz} КТ V_0 . Следовательно, нет необходимости определять эквивалентные условия прочности (40), т. е. коэффициент эквивалентности p_q , для каждого заданного нагружения $q_x, q_z \in Q_{xz}$, что приводит к уменьшению временных затрат реализации МЭУП при использовании различных нагружений $q_x, q_z \in Q_{xz}$ в расчетах на прочность КТ V_0 .

Заключение

Кратко изложен метод эквивалентных условий прочности для расчета на прочность тела с неоднородной, микрон неоднородной регулярной структурой, для которого задано множество различных статических нагружений. Предлагаемый метод реализуется на основе МКЭ с использованием многосеточных конечных элементов и сводится к расчету на прочность изотропных однородных тел с применением обобщенных эквивалентных условий прочности. Реализация метода требует малых временных затрат и ресурсов ЭВМ.

Библиографические ссылки

1. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1975. 704 с.
2. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. М. : Машиностроение, 1993. 640 с.
3. Москвичев В. В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. Новосибирск : Наука, 2002. 106 с.
4. Матвеев А. Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности // Известия АлтГУ. Математика и механика. 2017. № 4. С. 116–119. Doi: 10.14258/izvasu(2017)4-21.
5. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. М. : Мир, 1981. 304 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975. 542 с.
7. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М. : Мир, 1982. 232 с.
8. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия: Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, кн. 4. С. 530–543.
9. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок // Вестник КрасГАУ. 2016. № 12. С. 93–100.
10. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. Vol. 158, No. 1. Art. 012067, P. 1–9.

11. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок сложной формы // Вестник КрасГАУ. 2017. № 11. С. 131–140.
12. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2018. № 2. С. 90–103.
13. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных оболочек вращения и двойкой кривизны // Вестник КрасГАУ. 2018. № 3. С. 126–137.
14. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в решении физических краевых задач // Информационные технологии и математическое моделирование. Красноярск, 2017. С. 27–60.
15. Матвеев А. Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов // Деп. в ВИНТИ. 2000. № 2990–В00. 30 с.
16. Матвеев А. Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // Прикладная механика и техническая физика. 2004. № 3. С. 161–171.
17. Матвеев А. Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Известия АлтГУ. Серия: Математика и механика. 2014. № 1/1. С. 80–83. Doi: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.
18. Матвеев А. Д. Метод образующих конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2018. № 6. С. 141–154.
19. Матвеев А. Д. Построение многосеточных конечных элементов для расчета оболочек, пластин и балок на основе образующих конечных элементов. // Вестник Пермского нац. исслед. политех. ун-та. Механика. 2019. № 3. С. 48–57. Doi: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.
20. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М. : Физматлит, 2008. 432 с.
21. Немировский Ю. В., Резников Б. С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск : Наука, Сибирское отделение. 1984. 164 с.
22. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. М. : Наука. 1985. 201 с.
23. Алфутов Н. А., Зиновьев А. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.
24. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. М. : МГУ. 1984. 336 с.
25. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск : Наука, 2001. 288 с.
26. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Киев : Наукова думка. 1985. 302 с.
27. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988. 269 с.
28. Матвеев А. Д. Расчет на прочность композитных конструкций с применением эквивалентных условий прочности // Вестник КрасГАУ. 2014. № 11. С. 68–79.
29. Матвеев А. Д. Метод эквивалентных условий прочности в расчетах композитных конструкций регулярной структуры с применением многосеточных конечных элементов // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20, № 4. С. 423–435. Doi: 10.31772/2587-6066-2019-20-4-423-435.
30. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высшая школа, 1982. 264 с.

References

1. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Handbook of resistance materials]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1975, 704 p.
2. Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B. *Raschet na prochnost' detalej mashin* [Calculation of the strength of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1993, 640 p.
3. Moskvichev V. V. *Osnovy konstrukcionnoj prochnosti tekhnicheskikh sistem i inzhenernykh sooruzhenij* [Fundamentals of structural strength of technical systems and engineering structures]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2002, 106 p.
4. Matveev A. D. [Calculation of elastic structures using the adjusted terms of strength]. *Izvestiya AltGU*. 2017, No. 4, P. 116–119. Doi: 10.14258/izvasu(2017)4-21.
5. Norri D., de Friz Zh. *Vvedenie v metod konechnykh elementov* [Introduction to the finite element method]. Moscow, Mir Publ., 1981, 304 p.
6. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 544 p.
7. Fudzii T., Dzako M. *Mekhanika razrusheniya kompozicionnykh materialov* [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1982, 232 p.
8. Matveev A. D. [The method of multigrid finite elements in the calculations of three-dimensional homogeneous and composite bodies]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Seriya: Fiz.-matem. Nauki*. 2016, Vol. 158, No. 4, P. 530–543 (In Russ.).
9. Matveev A. D. [Multigrid method for finite elements in the analysis of composite plates and beams]. *Vestnik KrasGAU*. 2016, No. 12, P. 93–100 (In Russ.).
10. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. *IOP Conf, Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2016, Vol. 158, No. 1, Art. 012067, P. 1–9.
11. Matveev A.D. *Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov v raschetah kompozitnykh plastin i balok slozhnoj formy* [Multigrid finite element Method in the calculations of composite plates and beams of irregular shape]. // *The Bulletin of KrasGAU*, 2017, No. 11, P. 131–140.
12. Matveev A. D. [Multigrid finite element Method]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 2, P. 90–103 (In Russ.).
13. Matveev A. D. [The method of. multigrid finite elements of the composite rotational and bi-curved shell calculations]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 3, P. 126–137 (In Russ.).
14. Matveev A. D. [Method of. multigrid finite elements to solve physical boundary value problems]. *Ministry of information technologies and mathematical modeling*. Krasnoyarsk, 2017, P. 27–60.
15. Matveev A. D. [Some approaches of designing elastic multigrid finite elements]. *VINITI Proceedings*. 2000, No. 2990-B00, P. 30.
16. Matveev A. D. [Multigrid modeling of composites of irregular structure with a small filling ratio]. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2004, No. 3, P. 161–171 (In Russ.).
17. Matveev A. D. [The construction of complex multigrid finite element heterogeneous and micro-inhomogeneities in structure]. *Izvestiya AltGU*. 2014, No. 1/1, P. 80–83 (In Russ.). Doi: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.
18. Matveev A. D. [Method of generating finite elements]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 6, P. 141–154 (In Russ.).
19. Matveev A. D. [Construction of multigrid finite elements to calculate shells, plates and beams based on generating finite elements]. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019, No. 3, P. 48–57 (In Russ.). Doi: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.

20. Golushko S. K., Nemirovskij Y. V. *Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugih kompozitnyh plastin i obolochek vrashcheniya* [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of rotation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 432 p.
21. Nemirovskij Y. V., Reznikov B. S. *Prochnost' elementov konstrukcij iz kompozitnyh materialov* [Strength of structural elements made of composite materials]. Novosibirsk, Nauka Publ., Sibirskoe ot-delenie. 1984, 164 p.
22. Kravchuk A. S., Majboroda V. P., Urzhumcev Y. S. *Mekhanika polimernyh i kompozicionnyh materialov* [Mechanics of polymer and composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 201 p.
23. Alfutov N. A., Zinov'ev A. A., Popov B. G. *Raschet mnogoslojnyh plastin i obolochek iz kompozicionnyh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 264 p.
24. Pobedrya B. E. *Mekhanika kompozicionnyh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MGU Publ., 1984, 336 p.
25. Andreev A. N., Nemirovskij Y. V. *Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustojchivost', kolebaniya* [Multilayer anisotropic shells and plates. Bending, stability, vibration]. Novosibirsk : Nauka Publ., 2001, 288 p.
26. Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozicionnyh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985, 302 p.
27. Vasil'ev V. V. *Mekhanika konstrukcij iz kompozicionnyh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 269 p.
28. Matveev A. D. [Calculation of the strength of composite structures using equivalent strength conditions]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2014, No. 11, P. 68–79 (In Russ.).
29. Matveev A. D. [The method of equivalent strength conditions in calculating composite structures regular structure using multigrid finite elements]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2019. Vol. 20, No. 4, P. 423-435. Doi: 10.31772/2587-6066-2019-20-4-423-435.
30. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1982, 264 p.

© Матвеев А. Д., 2021

Матвеев Александр Данилович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник; Институт вычислительного моделирования СО РАН. E-mail: mtv241@mail.ru.

Matveev Alexander Danilovich – Cand. Sc., associate Professor, senior researcher; Institute of computational modeling SB RAS. E-mail: mtv241@mail.ru.
