

УДК 539.374

Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-3-452-456

Для цитирования: Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Пространственные двумерные решения // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 3. С. 452–456. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-3-452-456.

For citation: Senashov S. I., Savostyanova I. L. 3-dimensional solutions from two variables. *Siberian Aerospace Journal*. 2021, Vol. 22, No. 3, P. 452–456. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-3-452-456.

Пространственные двумерные решения

С. И. Сенашов*, И. Л. Савостьянова

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

*E-mail: sen@sibsau.ru

В работе рассматриваются стационарные пространственные уравнения идеальной пластичности с условием текучести Мизеса. Материал предполагается несжимаемым. Подробно изучен случай, когда все три компоненты вектора скорости и гидростатическое давление зависят только от двух координат x, y . Для этого случая введено новое название – пространственная двумерная система уравнений, чтобы отличить ее от общепринятых двумерных систем уравнений, когда от нуля отличны только две компоненты вектора скорости и гидростатическое давление. Доказано, что система допускает, в смысле С. Ли, алгебру Ли размерности 10. Показано, что пространственное двумерное деформированное состояние – это есть суперпозиция плоского напряженного состояния и пластического кручения вокруг оси z . Построены два инвариантных решения уравнений, описывающих пространственное двумерное деформированное состояние. Первое решения можно использовать для описания пластических течений между двумя жесткими плитами, которые сближаются с разными скоростями. Второе решение служит для описания напряженно-деформированного состояния материала внутри плоского канала, образованного сходящимися плитами.

Ключевые слова: пространственные решения уравнений идеальной пластичности, точечные симметрии, инвариантные решения.

3-dimensional solutions from two variables

S. I. Senashov*, I. L. Savostyanova

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

*E-mail: sen@sibsau.ru

In this paper, we consider stationary 3-dimensional equations of ideal plasticity with the Mises flow condition. The material is assumed to be incompressible. The case when all three components of the velocity vector and hydrostatic pressure depend only on two coordinates x, y is studied in detail. For this case, a new name is introduced – 3-dimensional solutions from two variables, to distinguish it from the generally accepted two-dimensional state, when only two components of the velocity vector and hydrostatic pressure differ from zero. It is proved that the system admits, in the sense of S. Lie, a Lie algebra of dimension 10. It is shown that are all 3-dimensional solutions from two variables a superposition of the plane stress state and plastic torsion around the z -axis. Two invariant solutions of the equations describing

the 3-dimensional deformed state are constructed. The first solution can be used to describe plastic flows between two rigid plates that approach at different speeds. The second solution is used to describe the stress-strain state of the material inside a flat channel formed by converging plates.

Keywords: 3-dimensional solutions of ideal plasticity equations, point symmetries, invariant solutions.

Введение

В название статьи вынесено понятие «пространственное двумерное решение». Механикам известно плоское деформированное состояние – это случай, когда в двумерной декартовой системе координат две компоненты вектора скорости деформации и гидростатическое давление зависят от x, y . Известно также плоское напряженное состояние – это когда компоненты тензора напряжений $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ равны нулю, а компоненты $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ не зависят от z .

В нашем случае все компоненты тензора напряжений не зависят от z , именно такой случай мы и назвали пространственным двумерным состоянием.

Система пространственных уравнений пластичности в декартовой системе координат $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ в стационарном случае имеет вид

$$\partial_j s_{ij} = \partial_i p, s_{ij} = \lambda (\partial_i u_j + \partial_j u_i) / 2, \partial_i u_j = 0, s_{ij} s_{ij} = 2k_s^2, i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Здесь σ_{ij}, s_{ij} – компоненты тензора и девиатора тензора напряжений; $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ – компоненты вектора скорости деформаций; λ – неотрицательная функция; k_s – постоянная пластичности; p – гидростатическое давление, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Исключая из системы уравнений (1) компоненты девиатора тензора напряжений, получаем следующую нелинейную систему уравнений

$$\partial_i p = \frac{\sqrt{2}k}{2A} \partial_{jj}^2 u_i - \frac{\sqrt{2}k}{A^3} e_{ij} e_{mn} \partial_{mj}^2 u_n, e_{ij} e_{ij} = A^2, \partial_i u_i = 0. \quad (2)$$

Известно, что система уравнений (2) имеет эллиптический тип. Опишем известные решения этой системы.

Решения этой системы построены Р. Хиллом в 1948 г. [1], В. Прагером в 1954 г. [2], Д. Д. Ивлевым в 1960 г. [3; 4], М. А. Задояном в 1964 г. [5–8], а также авторами этой статьи [9–13]. Отметим также ряд точных решений, построенных Б. Д. Анниным [14], для уравнений пластичности в пространственном случае с условием текучести Треска.

Симметрии системы (2)

Группа точечных симметрий системы уравнений (2) порождается следующими операторами

$$\begin{aligned} X_i &= \partial_{x_i}, \quad Y_i = \partial_{u_i}, \quad N = x_i \partial_{x_i}, \quad M = u_i \partial_{u_i}, \quad i = 1, 2, 3. \\ T_1 &= x_2 \partial_{u_3} - x_3 \partial_{u_2}, \quad T_2 = x_3 \partial_{u_1} - x_1 \partial_{u_3}, \quad T_3 = x_1 \partial_{u_2} - x_2 \partial_{u_1}, \\ Z_1 &= x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2} + u_2 \partial_{u_3} - u_3 \partial_{u_2}, \quad Z_2 = x_3 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_3} + u_3 \partial_{u_1} - u_1 \partial_{u_3}, \\ Z_3 &= x_1 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_1} + u_1 \partial_{u_2} - u_2 \partial_{u_1}, \quad S = \partial_p. \end{aligned} \quad (3)$$

Операторам X_i, Y_i, N, M соответствуют следующие непрерывные преобразования

$$x'_i = x_i + a_i, \quad u'_i = u_i + b_i, \quad x'_i = x_i \exp a, \quad u'_i = u_i \exp b, \quad i = 1, 2, 3.$$

Это переносы по координатам и компонентам вектора скоростей деформации, а также растяжения.

Преобразования T_i показывают, что система уравнений (2) не меняется при жестких перемещениях

$$\begin{aligned}u'_2 &= u_2 - c_1 x_3, \quad u'_3 = u_3 + c_1 x_2, \quad u'_1 = u_1 + c_2 x_3, \\u'_3 &= u_3 - c_2 x_1, \quad u'_2 = u_2 + c_3 x_1, \quad u'_1 = u_1 - c_3 x_2.\end{aligned}$$

Группы, порождаемые операторами Z_i , – это вращения вокруг координатных осей

$$\begin{aligned}x'_2 &= x_2 \cos \varphi_1 + x_3 \sin \varphi_1, \quad x'_3 = -x_2 \sin \varphi_1 + x_3 \cos \varphi_1, \\x'_3 &= x_3 \cos \varphi_2 + x_1 \sin \varphi_2, \quad x'_1 = -x_3 \sin \varphi_2 + x_1 \cos \varphi_2, \\x'_1 &= x_1 \cos \varphi_3 + x_2 \sin \varphi_3, \quad x'_2 = -x_1 \sin \varphi_3 + x_2 \cos \varphi_3.\end{aligned}$$

Последнее преобразование описывает инвариантность гидростатического давления относительно сдвигов

$$p' = p + d.$$

Во всех этих формулах a_i , b_i , c_i , φ_i , d – групповые параметры. Обычно предполагается, что они непрерывно меняются в окрестности нуля.

Проведенные исследования показали, что все построенные решения Р. Хиллом, В. Прагером, Д. Д. Ивлевым и М. А. Задояном суть инвариантные, решения относительно некоторых одномерных подгрупп точечных преобразований, порождаемых операторами (3). Инвариантность здесь означает, что решения не меняются при некоторых преобразованиях, порождаемых группой симметрий (3). Так, решение Р. Хилла инвариантно относительно подалгебры, порожденной оператором $2C_0S + X_1 + \alpha Y_1 + \beta T_1$, решение Д. Д. Ивлева инвариантно относительно подалгебры $2C_0S + X_1 + \alpha Y_1$, решение Прагера инвариантно относительно подалгебры $aS + X_1 + T_1 + \alpha T_2$, решение Задояна инвариантно относительно этой же подалгебры. О чем говорит этот факт? Он говорит о том, что фактически все эти решения «двумерны», т. е. в подходящей системе координат их можно записать как функции только от двух независимых переменных. Это же можно сказать и о решениях, построенных авторами этой работы. Тогда возникает вопрос: что надо понимать под пространственным решением? Исходя из приведенных здесь решений, ответ получается такой: пространственные решения – это такие решения, которые имеют три компоненты вектора скорости, давление, фактически зависящие от двух переменных в подходящей системе координат. Эти решения являются инвариантными решениями ранга 2. В этом случае задача поиска пространственных решений может быть формально поставлена так: построение новых инвариантных решений ранга 2 для пространственных уравнений идеальной пластичности. Вид таких решений можно без труда перечислить, если перечислить все различные, с точностью до внутренних автоморфизмов, одномерные подалгебры алгебры (3).

Подалгебр, на которых можно построить инвариантные решения ранга 2, существует несколько. Перечислим их.

$$\begin{aligned}&X_3 + \gamma S, X_1 + Z_1 + \gamma S, \alpha M + N + \gamma S, N + Y_1 + \gamma S, \\&Z_1 + \alpha N + Y_1 + \gamma S, Z_1 + \alpha N + \beta M + \gamma S, \\&X_1 + \alpha Z_1 + M + \gamma S, \\&X_1 + Y_1 + \alpha T_1 + \gamma S, X_1 + Z_1 + T_1 + \gamma S, M + N + T_1 + \gamma S, \\&Z_1 + Y_1 + \alpha T_1 + \gamma S, X_1 + \alpha X_2 + T_2 + \beta T_3 + \gamma S, \\&X_1 + Z_1 + Y_1 + \alpha T_1 + \gamma S.\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь α, β, γ – произвольные постоянные, разным значениям этих постоянных соответствуют не подобные подалгебры.

В этой работе рассмотрим только решения инвариантные относительно подалгебры $X_3 + \gamma S$.

Замечание. Другие решения, построенные на подалгебрах (4), а также вид всех инвариантных решений, которые могут быть построены для системы уравнений (1), можно найти в [11].

Решения, инвариантные относительно этой подалгебры, следует искать в виде

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y), \quad p = p(x, y) + \gamma z. \quad (5)$$

Подставляя соотношения (5) в систему уравнений (1) получим

$$\begin{aligned} \partial_x \sigma_x + \partial_y \tau_{xy} &= 0, \quad \partial_x \tau_{xy} + \partial_y \sigma_y = 0, \quad \partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} = \gamma, \quad \partial_x u + \partial_y v = 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) &= 6k_s^2, \\ \sigma_x - p &= \lambda \partial_x u, \quad \sigma_y - p = \lambda \partial_y v, \quad \sigma_z - p = 0, \quad 2\tau_{xy} = \lambda(\partial_x v + \partial_y u), \\ 2\tau_{xz} &= \lambda \partial_x w, \quad 2\tau_{yz} = \lambda \partial_y w. \end{aligned} \quad (6)$$

Сделаем замену переменных в (6) по следующим формулам

$$\sigma_x = k(\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\varphi), \quad \sigma_y = k(\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\varphi), \quad \tau_{xy} = k \sin \omega \sin 2\varphi. \quad (7)$$

Здесь $k = \delta k_s$, $0 < \delta < 1$ – некоторая постоянная.

Подставляя эти соотношения в (6) получаем

$$\begin{aligned} (-\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi) \partial_x \omega + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \partial_y \omega - 2 \sin \omega \partial_y \varphi &= 0, \\ (\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi) \partial_y \omega + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \partial_x \omega + 2 \sin \omega \partial_x \varphi &= 0, \\ \partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} &= \gamma, \quad \partial_x u + \partial_y v = 0, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_s^2 - k^2 = K^2, \\ \sigma_x - p &= \lambda \partial_x u, \quad \sigma_y - p = \lambda \partial_y v, \quad \sigma_z - p = 0, \quad 2\tau_{xy} = \lambda(\partial_x v + \partial_y u), \\ 2\tau_{xz} &= \lambda \partial_x w, \quad 2\tau_{yz} = \lambda \partial_y w. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) видим, что исходная система распалась на две подсистемы: два первых уравнения по сути совпадают с уравнениями, описывающими плоское напряженное состояние

$$\begin{aligned} (-\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi) \partial_x \omega + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \partial_y \omega - 2 \sin \omega \partial_y \varphi &= 0, \\ (\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi) \partial_y \omega + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \partial_x \omega + 2 \sin \omega \partial_x \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

и уравнениями, напоминающими уравнения, описывающие пластическое кручение стержня, при $\gamma = 0$ и другом пределе текучести

$$\partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} = \gamma, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_s^2 - k^2 = K^2. \quad (10)$$

Решая уравнения (9) и (10) можно найти компоненты тензора напряжений, при этом $\sigma_z = p = 1/2(\sigma_x + \sigma_y)$. Единственная проблема – это определение постоянной k .

Для определения компонент вектора скорости получаем следующие уравнения

$$\frac{\partial_x u}{2\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\partial_y v}{2\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\partial_x v + \partial_y v}{6\tau_{xy}}, \quad \partial_x \left(\frac{\partial_x w}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{\partial_y w}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} \right) = \gamma.$$

Отметим, что последнее уравнение при $\gamma \neq 0$ до сих пор недостаточно исследовано, оно даже не вошло в справочник [15].

В итоге получилось, что решение системы уравнений (6) – это фактически суперпозиция плоского напряженного состояния и пластического кручения вокруг оси z .

Приведем некоторые другие решения уравнений (6). Для этого найдем группу точечных симметрий системы уравнений (6).

Эта группа порождается операторами

$$\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_i = \partial_{u_i}, \quad N = x\partial_x + y\partial_y, \quad M = u_i\partial_{u_i}, \quad i=1,2,3. \\ T = x_1\partial_{u_2} - x_2\partial_{u_1}, \quad Z_3 = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1} + u_1\partial_{u_2} - u_2\partial_{u_1}, \quad S = \partial_p. \end{aligned} \quad (11)$$

Ищем решение, инвариантное относительно подалгебры, порождаемой операторами

$$X_1 + \alpha T + Y_1 + \beta Y_3 + \gamma S.$$

Решение следует искать в виде

$$u = x + \alpha xy + U(y), \quad v = -\alpha / 2x^2 + V(y), \quad w = \beta x + W(y), \quad p = \gamma x + P(y). \quad (12)$$

Из уравнения несжимаемости получаем

$$v = -\alpha / 2(x^2 + y^2) - y + C_1.$$

Подставляем (12) в (6) и получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dy}(\lambda U') = \gamma, \quad \frac{d}{dy}(\lambda W') = 0, \quad 6k_s^2\lambda^{-2} = 2(1 + \alpha y)^2 + 6((U')^2 + \beta^2 + (W')^2). \quad (13)$$

Из (13) имеем

$$\lambda U' = \gamma y + C_2, \quad \lambda W' = C_3.$$

Здесь C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Получаем

$$\begin{aligned} U' / W' = (\gamma y + C_2) / C_3, \\ 6k_s^2\lambda^{-2} = 2(1 + \alpha y)^2 + 6(\beta^2 + (1 + (C_4 + \gamma y)^2)(W')^2), \quad v = \gamma / C_3, \quad C_4 = C_2 / C_3. \end{aligned}$$

Систему уравнений (13) удастся свести к квадратурам, которые выражаются через эллиптические интегралы.

Построенное решение можно использовать для описания пластического течения слоя, сжимаемого жесткими плитами ортогональными оси oz .

Запишем систему (6) в цилиндрической системе координат r, θ, z .

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_r + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + (\sigma_r - \sigma_\theta) / r = 0, \quad \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_\theta + 2\sigma_{r\theta} / r = 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z} + \sigma_{rz} / r = 0, \quad \sigma_r - p = \lambda \partial_r u, \quad \sigma_\theta - p = \lambda(u / r + \partial_\theta v / r), \quad \sigma_z - p = 0, \\ 2\sigma_{r\theta} = \lambda(\partial_\theta u / r + r \partial_r (v / r)), \quad 2\sigma_{z\theta} = \lambda r^{-1} \partial_\theta w, \quad 2\sigma_{zr} = \lambda \partial_r w, \\ (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + 6(\sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{rz}^2) = 6k_s^2, \quad \partial_r u + u / r + \partial_\theta v / r = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Ищем инвариантное решение на подалгебре $Z_3 + M$, оно имеет вид

$$u = U(\theta), \quad v = V(\theta), \quad w = W(\theta), \quad p = P(\theta) + \alpha \ln r. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d_\theta \sigma_r + (\sigma_r - \sigma_\theta) = \alpha, \quad d_\theta \sigma_\theta + 2\sigma_{r\theta} = 0, \quad d_\theta \sigma_{r\theta} + \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_r - p = 0, \\ \sigma_\theta - p = \lambda(U / r + V' / r), \quad \sigma_z - p = 0, \quad 2\sigma_{r\theta} = \lambda(U' / r + r \partial_r (V / r)), \\ 2\sigma_{z\theta} = \lambda r^{-1} W', \quad 2\sigma_{zr} = \lambda / r, \\ (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + 6(\sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{rz}^2) = 6k_s^2, \\ U + V' = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь штрих означает производную по θ .

Отсюда получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\lambda(U'-V))' = \alpha, \lambda(U'-V) = P, (\lambda W')' = 0, 6k_s^2 \lambda^{-2} = (U'-V)^2 + (W')^2 + 1. \quad (17)$$

Система (17) решается полностью аналогично системе (13).

Найденное решение можно использовать для описания пластического течения в сходящемся плоском канале с жесткими и шероховатыми стенками.

Другие решения системы уравнений (1) можно найти в [11].

Заключение

В работе изучен класс уравнений, который назван уравнениями, описывающими пространственное двумерное деформированное состояние. Для этих уравнений найдена группа точечных симметрий, допускаемая ими в смысле Ли. Показано, что двумерное напряженное состояние – это есть суперпозиция плоского напряженного состояния и кручения вокруг оси z . Построены несколько инвариантных решений этих уравнений.

Библиографические ссылки

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М. : ГИТТЛ, 1956. 408 с.
2. Прагер В. Трехмерное пластическое течение при однородном напряженном состоянии. Механика // Сб. переводов и обзоров иностр. лит-ры. 1958. № 3. С. 23–27.
3. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин и др. М. : Физматлит, 2008. 832 с.
4. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 232 с.
5. Ольшак В., Мруз З., Пежина П. Современное состояние теории пластичности. М. : Мир, 1964. 243 с.
6. Задоян М. А. Частное решение уравнений идеальной пластичности // Докл. АН СССР СССР. 1964. Т. 156, № 1. С. 38–39.
7. Задоян М. А. Частное решение уравнений идеальной пластичности в цилиндрических координатах // Докл. АН СССР СССР. 1964. Т. 157. № 1. С. 73–75.
8. Задоян М. А. Пространственные задачи теории пластичности. М. : Наука, 1992. 382 с.
9. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию // Сиб. журн. индуст. матем. 2019. Т. 22, № 3. С. 114–117.
10. Сенашов С. И. Пластические течения среды Мизеса со спирально-винтовой симметрией // Прикладная матем. и механика. 2004. Т. 68, № 1. С. 150–154.
11. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск : Наука, 1983. 140 с.
12. Сенашов С. И. Решение уравнений пластичности в случае спирально-винтовой симметрии // Докл. АН СССР, 1991. Т. 317, № 1. С. 57–59.
13. Сенашов С. И. Решение уравнений пластичности в случае спирально-винтовой симметрии // Известия РАН. Механика твердого тела. 1991. № 5. С. 167–171.
14. Аннин Б. Д. Новые точные решения пространственных уравнений пластичности Треска // Доклады Академии наук. 2007. Т. 415. № 4. С. 482–485.
15. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. 2nd edition, 2012, Taylor&Francis Group. 1875 p.

References

1. Hill R. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Moscow, GITTL Publ., 1956, 408 p.
2. Prager V. [Three-dimensional plastic flow at a homogeneous stress state]. *Mechanics. Collection of translations and reviews of foreign languages. literatures.* 1958, No. 3, P. 23–27 (In Russ.).
3. Ivlev D. D., Maksimova L. A., Nepershin R. I. *Predelnoe sostoyanie deformirovannykh tel i gornykh porod* [The ultimate state of deformed bodies and rocks] Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 832 p.
4. Ivlev D. D. *Teoriya ideal'noj plastichnosti* [Theory of ideal plasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 232 p.
5. Olshak V., Mruz Z., Pezhina P. *Sovremennoe sostoyanie teorii plastichnosti* [The current state of the theory of plasticity]. Moscow, Mir Publ., 1964, 243 p.
6. Zadoyan M. A. [Partial solution of equations of ideal plasticity]. *Dokl. AN SSSR SSSR.* 1964, Vol. 156, No. 1, P. 38–39 (In Russ.).
7. Zadoyan M. A. [Partial solution of equations of ideal plasticity in cylindrical coordinates]. *Dokl. AN SSSR SSSR.* 1964, Vol. 157, No. 1, P. 73–75 (In Russ.).
8. Zadoyan M.A. *Prostranstvennye zadachi teorii plastichnosti* [Spatial problems of the theory of plasticity] Moscow, Nauka Publ., 1992, 382 p.
9. Senashov S. I., Savost'yanova I. L. [A new three-dimensional plastic flow, corresponding to a homogeneous stress state]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki.* 2019, Vol. XX11, No. 3(71), P. 114–117 (In Russ.).
10. Senashov S. I. [Plastic flows of the Mises medium with spiral-helical symmetry]. *Prikladnaya matem. i mekhanika.* 2004, Vol. 68, No. 1, P. 150–154 (In Russ.).
11. Annin B. D., Bytev V. O., Senashov S. I. *Grupповые свойства уравнений упру́гости i plastichnosti* [Group properties of equations of elasticity and plasticity]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 140 p.
12. Senashov S. I. [Solution of plasticity equations in the case of helical-helical symmetry]. *Dokl. AN SSSR.* 1991, Vol. 317, No. 1, P. 57–59 (In Russ.).
13. Senashov S. I. [Solution of plasticity equations in the case of helical-helical symmetry]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela.* 1991, No. 5, P. 167–171 (In Russ.).
14. Annin B. D. [New exact solutions of spatial equations of Tresk plasticity]. *Doklady Akademii nauk.* 2007, Vol. 415, No. 4, P. 482–485 (In Russ.).
15. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. 2nd edition, 2012, Taylor&Francis Group. 1875 p.

© Senashov S. I., Savostyanova I. L., 2021

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: sen@sibsau.ru.

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ИЭС, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

Senashov Sergei Ivanovich – Dr. Sc, Professor, Head of the Department of IES; Siberian State University of Science and Technology. E-mail: sen@sibsau.ru.

Savostyanova Irina Leonidovna – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of IES, Siberian State University of Science and Technology. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.
