УДК 539.3
Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-2-244-260

Для цитирования: Матвеев А. Д. Метод фиктивных дискретных моделей в расчетах тел с неоднородной регулярной структурой // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 2. С. 244–260. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-2-244-260.

For citation: Matveev A. D. The method of fictitious discrete models in calculations bodies with an inhomogeneous regular structure. *Siberian Aerospace Journal.* 2021, Vol. 22, No. 2, P. 244–260. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-2-244-260.

Метод фиктивных дискретных моделей в расчетах тел с неоднородной регулярной структурой

А. Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 630036, г. Красноярск, Академгородок, стр. 50/44
E-mail: mtv241@mail.ru

В расчетах на прочность упругих композитных конструкций (пластины, балки, оболочки), которые широко применяются в авиационной и ракетно-космической технике, с помощью метода конечных элементов (МКЭ) важно знать погрешность решения. Для анализа погрешности решения необходимо использовать последовательность приближенных решений, построенных по МКЭ с применением процедуры измельчения для базовых дискретных моделей (БМ), которые учитывают в рамках микроподхода неоднородную, микронеоднородную структуру конструкций (тел). Дискретные модели, полученные путем измельчения БМ, имеют высокую размерность, что затрудняет для них применение МКЭ. Кроме того, существуют БМ композитных тел (КТ), например, БМ тел с микронеоднородной структурой, которые имеют такую высокую размерность, что реализация МКЭ для таких БМ, в силу ограниченности ресурсов ЭВМ, практически невозможна. Для решения данных проблем здесь предлагается в расчетах КТ по МКЭ использовать фиктивные дискретные модели.

В данной работе предлагается метод фиктивных дискретных моделей (МФДМ) для расчета на прочность упругих тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой. МФДМ реализуется с помощью МКЭ с применением скорректированных условий прочности, которые учитывают погрешность приближенных решений. В основе метода лежит следующее положение. Считаем, что БМ КТ порождают решения, которые мало отличаются от точных. В силу сходимости МКЭ такие БМ для КТ всегда существуют. Расчет КТ по МФДМ сводится к построению и расчету на прочность фиктивных дискретных моделей (ФМ), размерности которых меньше размерности БМ. ФМ отражают: форму, характерные размеры, крепление, нагружение и вид неоднородной структуры КТ и распределение модулей упругости, отвечающее БМ КТ. Последовательность, состоящая из ФМ, сходится к БМ, т. е. предельная ФМ совпадает с БМ. Сходимость такой последовательности обеспечивает равномерную сходимость напряжений ФМ к соответствующим напряжениям БМ. Реализация МКЭ для ФМ с применением многосеточных конечных элементов приводит к большой экономии ресурсов ЭВМ, что позволяет использовать МФДМ для расчетов на прочность тел с микронеоднородной регулярной структурой. Расчет на прочность КТ по МФДМ требует в $10^3 \div 10^6$ *раз меньше объема памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет с использованием БМ КТ, и не содержит процедуру измельчения БМ. Приведенный пример расчета на прочность балки с неоднородной регулярной волокнистой структурой по МФДМ показывает его высокую эффективность. Применение скорректированных условий прочности позволяет использовать* *в расчетах КТ на прочность приближенные решения с большой погрешностью, что приводит к повышению эффективности МФДМ.*

Ключевые слова: упругость, композиты, скорректированные условия прочности, фиктивные дискретные модели, многосеточные конечные элементы.

The method of fictitious discrete models in calculations bodies with an inhomogeneous regular structure

A. D. Matveev

Institute of Computational Modeling
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: mtv241@mail.ru

In calculations for the strength of elastic composite structures (plates, beams, shells), which are widely used in aviation and rocket and space technology, using the finite element method (FEM), it is important to know the error of the solution. To analyze the error of the solution, it is necessary to use a sequence of approximate solutions constructed according to the FEM using the grinding procedure for discrete basic models (BM), which take into account the inhomogeneous, micro-inhomogeneous structure of structures (bodies) within the micro-approach. Discrete models obtained by grinding BM have a high dimension, which makes it difficult for them to use FEM. In addition, there are BM of composite bodies (CB), for example, BM of bodies with a micro-inhomogeneous structure, which have such a high dimensionality that the implementation of FEM for such BM, due to the limited computer resources, is almost impossible. To solve these problems, it is proposed to use fictitious discrete models in the calculations of the CB according to the FEM.

In this paper, we propose a method of fictitious discrete models (MFDM) for calculating the strength of elastic bodies with an inhomogeneous, micro-inhomogeneous regular structure. MFDM is implemented using FEM with the use of adjusted strength conditions that take into account the error of approximate solutions. The method is based on the following statement. We believe that BM CB generates solutions that differ little from the exact ones. Due to the convergence of the FEM, such BM for CB always exist. The calculation of CB according to MFDM is reduced to the construction and calculation of the strength of fictitious discrete models (FM), the dimension of which is less than the dimension of the BM. FM reflects: the shape, characteristic dimensions, attachment, loading, and appearance of the heterogeneous structure of the CB, and the distribution of elastic modulus corresponding to the BM of the CB. The sequence consisting of the FM converges to the BM, i.e. the limiting FM coincides with the BM. The convergence of such a sequence ensures uniform convergence of the FM stresses to the corresponding BM stresses. The implementation of FEM for FM with the use of multigrid finite elements leads to a large saving of computer resources, which allows the use of MFDM for strength calculations of bodies with a micro-inhomogeneous regular structure. The calculation of the strength of CB according to MFDM requires $10^3 \div 10^6$ *less computer memory than a similar calculation using BM CB, and does not contain a procedure for grinding BM. The given example of calculating the strength of a beam with an inhomogeneous regular fiber structure according to the MFDM shows its high efficiency. The use of adjusted strength conditions allows us to use approximate solutions with a large error in the calculations of CB for strength, which leads to an increase in the efficiency of MFDM.*

Keywords: elasticity, composites, adjusted strength conditions, fictitious discrete models, multigrid finite elements.

Введение

В современной авиационной и ракетно-космической технике широко применяются композитные конструкции (пластины, балки, оболочки), особенно, конструкции, имеющие микронеоднородную волокнистую структуру. Расчет на прочность конструкции – один из важнейших на этапе эскизного проектирования, которое является технико-экономическим обоснованием проекта конструкции. Как правило, расчет на статическую прочность упругой конструкции (тела) V_0 определенного класса (например, авиационных конструкций) проводится по запасам прочности [1–3] и сводится к определению максимального эквивалентного напряжения конструкции. В этом случае для тела V_0 заданные условия (по запасам) прочности имеют вид $n_1 \le n_0 \le n_2$, где n_1, n_2 заданы; n_0 – коэффициент запаса тела V_0, $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$; σ_T – предел текучести (предельное напряжение) [1]; σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение тела, отвечающее точному решению задачи упругости (построенному для тела V_0). Для напряжений, которые определяются приближенно, используются скорректированные условия прочности [4], учитывающие погрешность напряжений. При анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих тел активно используется метод конечных элементов (МКЭ) [5–11]. Базовые дискретные модели (БМ) тел, которые учитывают их неоднородную, микронеоднородную структуру в рамках микроподхода [12], имеют очень высокую размерность.

Рассмотрим основные трудности реализации расчета композитных тел (КТ) с помощью МКЭ. Для анализа погрешности приближенного решения необходимо использовать последовательность решений, построенных по МКЭ с помощью процедуры измельчения (в рамках микроподхода) композитных дискретных моделей. Применение процедуры измельчения приводит к резкому увеличению размерностей дискретных моделей. Метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [13–19] эффективно используется для решения задач теории упругости [20–23], в котором используются многосеточные конечные элементы (МнКЭ) [24–29]. Поскольку при построении n-сеточного конечного элемента (КЭ) используется не одна, а n вложенных сеток ($n \ge 2$), то ММКЭ можно считать обобщением МКЭ, т. е. МКЭ – частный случай ММКЭ. Отсюда следует, что если в расчетах тел по МКЭ применяются МнКЭ, то в этом случае, по сути, реализуется ММКЭ. Неоднородные, микронеоднородные структуры в многосеточных дискретных моделях учитываются в рамках микроподхода. МнКЭ порождают дискретные модели малой размерности. Однако, например, БМ тел с микронеоднородной регулярной структурой имеют такую высокую размерность, что реализация МКЭ для таких БМ с применением МнКЭ, в силу ограниченности ресурсов ЭВМ, затруднительна. Для решения данной проблемы здесь при расчете на прочность КТ по МКЭ предлагается использовать фиктивные дискретные модели. Отметим, что существующие приближенные подходы и методы расчета КТ имеют сложные формулировки, являются трудоемкими и труднореализуемыми для КТ сложной формы [30–38].

В данной работе предлагается метод фиктивных дискретных моделей (МФДМ) для расчета на прочность тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой, который реализуется с помощью ММКЭ с применением скорректированных условий прочности. Введем следующее определение.

Определение 1. Дискретные модели, построенные для КТ *V*, будем называть фиктивными моделями (ФМ), если эти ФМ обладают следующими свойствами.

1. Неоднородные структуры ФМ отличаются от неоднородной структуры БМ КТ *V*.
2. ФМ отражают форму, характерные размеры, крепление, нагружение и вид неоднородной структуры КТ *V*, а также распределение модулей упругости, отвечающее БМ КТ *V*.
3. Последовательность, состоящая из ФМ, сходится к БМ КТ *V*, т. е. предельная ФМ последовательности совпадает с БМ КТ *V*.

4. Размерности ФМ меньше размерности БМ КТ V, кроме предельной ФМ, размерность которой равна размерности БМ КТ V.

Отметим, что свойства 3, 4 являются важными для практики.

В данной работе в качестве ФМ рассматриваются масштабированные композитные дискретные модели, размерности которых меньше размерности БМ КТ. Предлагаемые ФМ, образованные с помощью масштабированной регулярной ячейки КТ, имеют такие же характерные размеры, форму, закрепления и нагружения как БМ, но неоднородные структуры ФМ отличаются от неоднородной структуры БМ. Рассматриваемые ФМ отражают вид неоднородной структуры БМ и распределение модулей упругости, отвечающее БМ. В расчетах используется последовательность ФМ, которая сходится к БМ, т. е. предельная ФМ этой последовательности совпадает с БМ. Сходимость такой последовательности (см. свойство 3 в определении 1) обеспечивает сходимость напряжений ФМ к соответствующим напряжениям БМ. Расчеты показывают равномерную монотонную сходимость максимальных эквивалентных напряжений ФМ к максимальному эквивалентному напряжению БМ КТ. Реализация МФДМ требует в $10^3 \div 10^6$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет с использованием БМ КТ, и не требует измельчения БМ КТ. Реализация МКЭ для ФМ с применением МнКЭ приводит к большой экономии ресурсов ЭВМ, что позволяет использовать МФДМ для расчетов на прочность тел с микронеоднородной регулярной структурой. Приведенный пример расчета балки с неоднородной регулярной волокнистой структурой по МФДМ показывает его высокую эффективность. Применение скорректированных условий прочности позволяет использовать в расчетах КТ на прочность приближенные решения с большой погрешностью, что приводит к повышению эффективности МФДМ. При расчете КТ сложной формы по МФДМ целесообразно использовать ФМ с переменными характерными размерами.

1. Основные положения метода фиктивных дискретных моделей. МФДМ применяется для КТ, которые удовлетворяют следующим основным положениям.

Положение 1. КТ состоят из разномодульных изотропных однородных тел, связи между которыми идеальны, т. е. на общих границах разномодульных изотропных однородных тел функции перемещений и напряжений являются непрерывными.

Положение 2. Перемещения, деформации и напряжения разномодульных изотропных однородных тел отвечают соотношениям Коши и закону Гука трехмерной линейной задачи теории упругости [39].

Положение 3. Приближенные решения, которые отвечают БМ КТ, мало отличаются от точных. Такие приближенные решения будем считать точными. Отметим, что в силу сходимости МКЭ такие БМ для КТ всегда существуют.

2. Теорема метода фиктивных дискретных моделей. В МФДМ используются скорректированные условия прочности, которые учитывают погрешность приближенных решений.

Теорема. Пусть для коэффициента запаса n_0 упругого тела V_0 заданы условия прочности

$$n_1 \le n_0 \le n_2, \tag{1}$$

где n_1, n_2 – заданы; $n_1 > 1$, $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$; σ_T – предельное напряжение тела V_0; σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение тела V_0, которое отвечает точному решению задачи теории упругости, построенному для тела V_0.

Пусть коэффициент запаса n_b тела V_0, отвечающий приближенному решению задачи теории упругости, удовлетворяет скорректированным условиям прочности

$$\frac{n_1}{1-\delta_\alpha} \le n_b \le \frac{n_2}{1+\delta_\alpha}. \qquad (2)$$

Тогда коэффициент запаса n_0 тела V_0, отвечающий точному решению задачи теории упругости, удовлетворяет заданным условиям прочности (1), где $n_b = \sigma_T / \sigma_b$; σ_b – максимальное эквивалентное напряжение тела V_0, отвечающее приближенному решению задачи теории упругости, построенному для тела V_0, и найденное с такой погрешностью δ_b, что

$$|\delta_b| \le \delta_\alpha < C_\alpha = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}, \qquad (3)$$

где δ_α – верхняя оценка относительной погрешности δ_b; δ_α – задано, погрешность δ_b для напряжения σ_b определяется по формуле $\delta_b = (\sigma_0 - \sigma_b)/\sigma_0$.

Отметим, что если тело V_0 состоит из пластичных материалов, то σ_T – предел текучести. Из (3) следует, что если $n_2 - n_1$ мало, то σ_b необходимо определять с малой погрешностью δ_b. Доказательство теоремы изложено в работе [4].

3. Реализация метода фиктивных дискретных моделей. Для простоты изложения, не теряя общности суждений, основные процедуры реализации МФДМ рассмотрим на примере балки V_0 с неоднородной регулярной структурой размерами $H \times L \times H$, где $H = 96h$, $L = 1152h$, h – задано, балка расположена в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ (рис. 1).

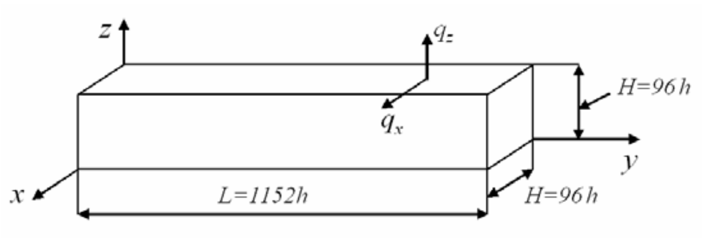

Рис. 1. Размеры балки (тела) V_0 (модели R_n)

Fig. 1. Dimensions of the beam (body) V_0 (model R_n)

Регулярная ячейка G_0 балки V_0 имеет форму куба со стороной $6h$ (рис. 2). Ячейка G_0 расположена в локальной декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, $i, j, k = 1,...,7$. Волокна сечением $h \times h$ расположены вдоль оси Oy, сечения волокон в плоскости Oxz закрашены (рис. 2). Итак, балка армирована продольными непрерывными волокнами. При $y = 0$ балка закреплена, при $z = H$ имеет нагружение q_x, q_z. Для балки V_0 заданы условия прочности (1).

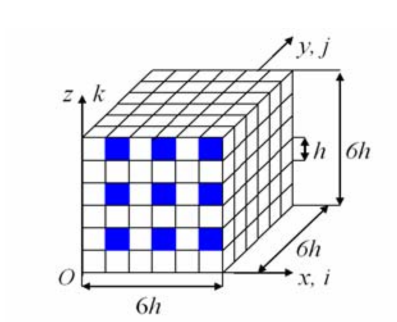

Рис. 2. Регулярная ячейка G_0

Fig. 2. Regular cell G_0

Изотропные однородные волокна имеют одинаковые модули упругости. Считают, что если толщина волокон меньше 0,5 мм, то эти волокна образуют микронеоднородную волокнистую структуру.

3.1. Базовая дискретная модель композитного тела V_0. БМ R_0 КТ V_0, которая состоит из односеточных конечных элементов (1сКЭ) V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС [39]), учитывает в рамках микроподхода неоднородную структуру КТ V_0 и порождает равномерную (базовую) сетку с шагом h размерности $97 \times 1153 \times 97$ с общим числом узловых неизвестных МКЭ равным $N_0 = 32517504$, ширина ленты системы равнений (СУ) МКЭ равна $b_0 = 28524$. Так как БМ R_0 имеет высокую размерность (свыше 32 млн неизвестных МКЭ) и учитывая, что $h / H << 1$ ($h / H = h / (96h) = 0{,}0104 << 1$), то считаем, что максимальное эквивалентное напряжение, отвечающее БМ R_0, мало отличается от точного, полож. 3 ММДМ для БМ R_0 выполняется (см. п. 1). На рис. 2 показана базовая сетка регулярной ячейки G_0.

3.2. Масштабированные композитные дискретные модели. Следуя МФДМ, для КТ V_0 (см. рис. 1) определяем последовательность ФМ. В качестве ФМ используем масштабированные композитные дискретные модели R_n, которые образуют последовательность $\{R_n\}_{n=1}^{16}$. Модель R_n, $n = 1,...,16$, имеет такие же характерные размеры, форму, закрепление и нагружение как БМ R_0 (рис. 1). Дискретная модель R_n, состоящая из 1сКЭ V_e^n 1-го порядка формы куба со стороной h_n (в 1сКЭ V_e^n реализуется трехмерное НДС), имеет равномерную сетку с шагом h_n размерности $n_1^{(n)} \times n_2^{(n)} \times n_3^{(n)}$, где

$$n_1^{(n)} = 6n + 1, \quad n_2^{(n)} = 12 \times 6n + 1, \quad n_3^{(n)} = 6n + 1, \quad n = 1,...,16 . \tag{4}$$

Шаги узловой сетки модели R_n по осям Ox, Oy, Oz соответственно равны $h_x^{(n)} = H / (6n)$, $h_y^{(n)} = L / (72n)$, $h_z^{(n)} = H / (6n)$. Так как $L = 12H$, то $h_n = h_x^{(n)} = h_y^{(n)} = h_z^{(n)}$. В силу (4) имеем

$$h_n = \beta_n h , \quad n = 1,...,16 , \tag{5}$$

где β_n – коэффициент масштабности, $\beta_n = 16 / n$, при $n = 1,...,15$ имеем $\beta_n > 1$, т. е. $h_n > h$, при $n \to 16$ имеем $\beta_n \to 1$, $\beta_{16} = 1$, $h_{16} = h$.

Согласно (4), модель R_n состоит из конечного числа одинаковых по форме тел G_n размерами $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$, $n = 1,...,16$ (рис. 3). КТ G_n расположено в локальной декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Тело G_n имеет такое же число волокон (сечением $h_n \times h_n$) и такое же их взаимное расположение, как регулярная ячейка G_0 (рис. 2). На рис. 3 сечения волокон ячейки G_n в плоскости Oxz закрашены, $i, j, k = 1,...,7$. Волокна и связующий материал КТ G_n и G_0 имеют одинаковые модули упругости.

Введем следующие определения, которые используются при построении масштабированных композитных дискретных моделей.

Определение 2. Будем говорить, что трехмерное упругое тело G образовано путем масштабирования упругого трехмерного тела G^0 с коэффициентом масштабности $p > 0$, если любой точке $A \in G^0$ отвечает такая единственная точка $B \in G$, что $x_B = px_A$, $y_B = py_A$, $z_B = pz_A$, где x_A, y_A, z_A (x_B, y_B, z_B) – координаты точки A (точки B), отвечающие декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$. И наоборот, если любой точке $B \in G$ отвечает такая единственная точка $A \in G^0$, что $x_A = x_B / p$, $y_A = y_B / p$, $z_A = z_B / p$. Модули упругости в точках $A \in G^0$, $B \in G$ одинаковы.

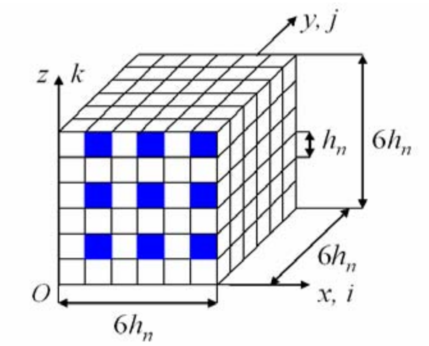

Рис. 3. Регулярная ячейка G_n

Fig. 3. Regular cell G_n

Определение 3. Трехмерное упругое тело G, полученное путем масштабирования заданного (базового) упругого трехмерного тела G^0 с заданным коэффициентом масштабности p, будем называть масштабированным. Связь между масштабированным телом G и базовым телом G^0 представляется в виде $G = p\, G^0$, где p – коэффициент масштабности.

Итак, в силу (5) КТ G_n образуется путем масштабирования регулярной ячейки G_0 БМ КТ V_0 с коэффициентом масштабности β_n (см. определение 2), т. е. тело G_n является масштабированной регулярной ячейкой (см. определение 3). Формы и неоднородные структуры тел G_n и G_0 геометрически подобны, т. е. отличаются только масштабностью (рис. 2, 3, где $h_n > h$, при $n = \overline{1,15}$). Тогда, учитывая (5) и что волокна и связующий материал КТ G_n и G_0 имеют одинаковые модули упругости, связь между телами G_n, G_0 представляется в виде (см. определение 3).

$$G_n = \beta_n G_0, \tag{6}$$

где $\beta_n = 16 / n$; $n = 1,...,16$, при $n \to 16$ имеем $\beta_n \to 1$, $\beta_{16} = 1$.

Поскольку в регулярной ячейке G_0 учитывается неоднородная структура, то в силу (6) и в КТ G_n также учитывается неоднородная структура с помощью 1сКЭ V_e^n формы куба со стороной h_n. Модель R_n, которая в силу (5), (6) образуется с помощью масштабированной регулярной ячейки G_n, будем называть масштабированной. Отметим, что КТ G_n, по сути, является регулярной ячейкой модели R_n. Так как в регулярной ячейке G_n учитывается неоднородная структура, то, следовательно, и в модели R_n учитывается неоднородная структура. Для модели R_n отметим следующие свойства, которые показывают основные достоинства МФДМ.

1. Размерность модели R_n, при $n \le 15$, в силу (4) меньше размерности БМ R_0. Поэтому реализация МКЭ для модели R_n (при $n \le 15$) требует меньше ресурсов ЭВМ, чем для БМ R_0.

2. При построении масштабированных композитных дискретных моделей R_n не используется процедура измельчения БМ КТ.

Отметим, что модели R_n, $n=\overline{1,15}$, по сути, являются фиктивными дискретными моделями.

3.3. Сходимость последовательности масштабированных дискретных моделей. Покажем, что последовательность $\{R_n\}_{n=1}^{16}$, состоящая из масштабированных дискретных моделей R_n, при $n \to 16$ сходится к БМ R_0. Согласно (5), (6) при $n=16$ ($h_{16}=h$, $\beta_{16}=1$, $G_{16}=G_0$) дискретные модели R_{16}, R_0 совпадают, т. е. $R_{16}=\mathrm{R}_0$. Так как модель R_{16}, как и БМ R_0, имеет высокую размерность, т. е. имеет $N_0=32517504$ узловых неизвестных МКЭ, и учитывая, что $h << H$ ($h/H = h/(96h) = 0{,}0104$), то считаем, что максимальное эквивалентное напряжение σ_{16} модели R_{16} мало отличается от точного напряжения σ_0 КТ V_0. Тогда полагаем $\sigma_0=\sigma_{16}$, т. е. положение 3 МФДМ для БМ R_0 выполняется (см. п. 1). В силу (5), (6) при $n \to 16$ (при $\beta_n \to 1$) имеем $G_n \to G_0$. Отсюда, учитывая, что КТ G_n, G_0 есть регулярные ячейки соответственно моделей R_n, R_0 и что эти модели имеют одинаковую форму и характерные размеры, получаем

$$R_n \to \mathrm{R}_0 \quad \text{при} \quad n \to 16 . \tag{7}$$

Согласно (7), при $n \to 16$ (с учетом, что $R_{16}=\mathrm{R}_0$) имеем $\sigma_n \to \sigma_{16}$ или (с учетом равенства $\sigma_0=\sigma_{16}$) $\sigma_n \to \sigma_0$, где σ_n – максимальное эквивалентное напряжение дискретной модели R_n. Пусть $\delta_\sigma = |\sigma_n - \sigma_{n-1}|/\sigma_n$ малая величина и $|\delta_n| \le \delta_\alpha$, где δ_n – относительная погрешность для напряжения σ_n, т. е. $\delta_n = (\sigma_0 - \sigma_n)/\sigma_0$, δ_α задано, $\delta_\alpha < C_\alpha$ (см. (3)), $n = 2, 3, \ldots$. Тогда принимаем $\sigma_b=\sigma_n$. Пусть коэффициент запаса n_b (где $n_b=\sigma_T/\sigma_b$, с учетом, что $\sigma_b=\sigma_n$, имеем $n_b=\sigma_T/\sigma_n$), отвечающий приближенному решению задачи упругости, удовлетворяет скорректированным условиям прочности (2). Тогда коэффициент запаса n_0 КТ V_0, отвечающий точному решению задачи упругости, удовлетворяет заданным условиям прочности (1) (см. теорему в п. 2). Для понижения размерности модели R_n используются МнКЭ.

4. Результаты численных экспериментов. Рассмотрим модельную задачу расчета на прочность консольной балки V_0 с неоднородной регулярной волокнистой структурой размерами $96h \times 1152h \times 96h$ (рис. 1). Регулярная ячейка G_0 балки показана на рис. 2. Для коэффициента запаса n_0 балки заданы условия прочности

$$1{,}8 \le n_0 \le 3{,}4 . \tag{8}$$

Для модельной задачи имеем следующие исходные данные:

$$h=0{,}2083\,;\ \sigma_T=4{,}5\,;\ E_c=1\,,\ E_v=10\,,\ \nu_c=\nu_v=0{,}3\,, \tag{9}$$

где E_c, E_v (ν_c, ν_v) – модули Юнга (коэффициенты Пуассона) соответственно связующего материала и волокна; σ_T – предел текучести волокна; на поверхности $z=H$, $0{,}5L \le y \le L$ действуют нагрузки $q_z=q_x=0{,}00075$ (рис. 1).

В расчетах используем двухсеточные КЭ (2сКЭ). Основные положения построения 2сКЭ рассмотрим на примере 2сКЭ $V_d^{(2)}$ размерами $6h \times 6h \times 6h$ (рис. 4), который состоит из одной регулярной ячейки G_0 (рис. 2). Двухсеточный КЭ $V_d^{(2)}$ расположен в локальной декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$. При построении 2сКЭ $V_d^{(2)}$ используем две вложенные сетки: равномерную мелкую сетку h_d с шагом h размерности $7 \times 7 \times 7$ и крупную – H_d размерности $2 \times 3 \times 2$. По осям Ox, Oz сетка H_d имеет шаг $6h$, по оси Oy – шаг $3h$. На рис. 4 показаны сетки h_d и H_d, узлы крупной сетки H_d отмечены точками (12 узлов). Мелкая сетка h_d порождена базовым разбиением R_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$, которое состоит из 1сКЭ V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС, $j = 1,...,M$, M – общее число 1сКЭ V_j^h, $M = 216$) и учитывает неоднородную структуру 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

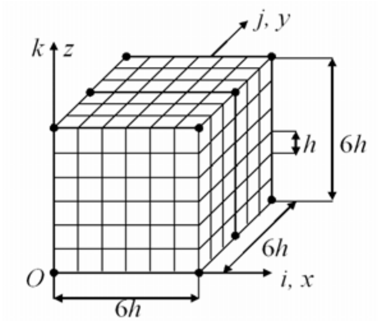

Рис. 4. Мелкая и крупная сетки 2сКЭ $V_d^{(2)}$

Fig. 4. Small and large grids 2gFE $V_d^{(2)}$

На разбиении R_d с помощью метода конденсации [10] строим суперэлемент V_S. Полную потенциальную энергию Π_d разбиения R_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$ представим в виде

$$\Pi_d = \frac{1}{2}\mathbf{q}_S^T[K_S]\mathbf{q}_S - \mathbf{q}_S^T\mathbf{F}_S, \tag{10}$$

где T – транспонирование; $[K_S]$ – матрица жесткости (размерности 654×654); $\mathbf{F}_S$, $\mathbf{q}_S$ – векторы узловых сил и перемещений (размерности 654) суперэлемента V_S.

Базисную функцию $N_{ijk}(x, y, z)$ для узла i, j, k крупной сетки H_d с помощью полиномов Лагранжа запишем в форме $N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$, где

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1,\alpha\neq i}^{2} \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{3} \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}, \quad L_k(z) = \prod_{\alpha=1,\alpha\neq k}^{2} \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha},$$

где x_i, y_j, z_k – координаты узла i, j, k сетки H_d в системе координат $Oxyz$; i, j, k – координаты целочисленной системы координат ijk, введенной для узлов крупной сетки H_d; $i, k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ (рис. 4).

Обозначим: $N_\beta = N_{ijk}$, $u_\beta = u_{ijk}$, $v_\beta = v_{ijk}$, $w_\beta = w_{ijk}$, где u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk} – значения перемещений *u*, *v*, *w* в узле i, j, k сетки H_d; $i, k = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$; $\beta = 1,...,12$. Тогда аппроксимирующие функции перемещений $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ 2сКЭ $V_d^{(2)}$ запишем в виде

$$u^{(2)} = \sum_{\beta=1}^{12} N_\beta u_\beta, \quad v^{(2)} = \sum_{\beta=1}^{12} N_\beta v_\beta, \quad w^{(2)} = \sum_{\beta=1}^{12} N_\beta w_\beta. \tag{11}$$

Обозначим через $\mathbf{q}_d$ вектор узловых перемещений сетки H_d (размерности 36), т. е. вектор узловых неизвестных 2сКЭ $V_d^{(2)}$. Используя (11), вектор $\mathbf{q}_S$ узловых перемещений суперэлемента V_S выражаем через вектор $\mathbf{q}_d$, т. е.

$$\mathbf{q}_S = [A_S^d]\, \mathbf{q}_d\,, \tag{12}$$

где $[A_S^d]$ – прямоугольная матрица (размерности 654×36).

Подставляя (12) в (10), из условия $\partial \Pi_d / \partial \mathbf{q}_d = 0$, получаем $[K_d]\, \mathbf{q}_d = \mathbf{F}_d$, где

$$[K_d] = [A_S^d]^T [K_S][A_S^d],\ \mathbf{F}_d = [A_S^d]^T\, \mathbf{F}_S\,, \tag{13}$$

где $[K_d]$ – матрица жесткости (размерности 36×36) и $\mathbf{F}_d$ – вектор узловых сил (размерности 36) 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

Решение, построенное для крупной сетки H_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$, с помощью формулы (12) проецируется на сетку суперэлемента V_S, а затем, по процедурам метода конденсации [10] проецируется на мелкую сетку h_d, что дает возможность вычислять напряжения в любом 1сКЭ V_j^h базового разбиения R_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

На базе модели R_n строим двухсеточную дискретную модель R_n^o, которая состоит из композитных 2сКЭ типа $V_d^{(2)}$ размерами $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$, $n = 1,...,12$. Для двухсеточной модели R_n^o определяем (по 4-й теории прочности [1]) максимальное эквивалентное напряжение σ_n^o, $n = \overline{1,12}$. Результаты расчетов представлены в табл. 1, где σ_n^o – максимальное эквивалентное напряжение модели R_n^o; N_n^o и b_n^o – размерность и ширина ленты СУ МКЭ модели R_n^o, $n = 5,...,12$, относительная погрешность δ_n (в процентах) определяется по формуле

$$\delta_n(\%) = 100\ \% \times |\, \sigma_n^o - \sigma_{n-1}^o \,| / \sigma_n^o\,, \quad n = 6,...,12\,. \tag{14}$$

Анализ результатов показывает равномерную монотонную сходимость напряжений σ_n^0, $n = 5,...,12$, и относительных погрешностей $\delta_n(\%)$, $n = 6,...,12$.

Таблица 1

Результаты расчетов для моделей R_5^o – R_{12}^o

n	R_n^o	σ_n^o	δ_n (%)	N_n^o	b_n^o	n	R_n^o	σ_n^o	δ_n (%)	N_n^o	b_n^o
5	R_5^o	1,476	–	12960	240	9	R_9^o	1,819	4,01	64800	636
6	R_6^o	1,576	6,34	21168	321	10	R_{10}^o	1,888	3,65	87120	765
7	R_7^o	1,665	5,34	32256	414	11	R_{11}^o	1,952	3,28	114048	906
8	R_8^o	1,746	4,64	46656	519	12	R_{12}^o	2,012	2,98	146016	1059

Отметим, что БМ R_0 порождает максимальное эквивалентное напряжение σ_0 КТ V_0, которое мало отличается от точного. Напряжение σ_0 считаем точным (см. положение 3 п. 1). Согласно расчетам $\sigma_{16}^o = 2{,}140$, где σ_{16}^o – максимальное эквивалентное напряжение модели R_{16}^o. Имеем $R_{16} = \mathrm{R}_0$ (см. п. 3.3). Двухсеточная модель R_{16}^o построена на базе модели R_{16} с применением 2сКЭ $V_d^{(2)}$ (рис. 4). Так как размеры 1сКЭ БМ R_0 малы, то и размеры 2сКЭ модели R_{16}^o также малы, поэтому принимаем $\sigma_{16}^o = \sigma_0 = 2{,}140$.

Расчеты показывают, что если $\delta_n(\%) \le 3\%$ (см. (14)), то погрешность максимального эквивалентного напряжения σ_n^o модели R_n^o не более $10\ \%$. Так как напряжения $\sigma_{12}^o = 2{,}012$ и $\sigma_{11}^o = 1{,}952$ отличаются на $\delta_{12}(\%) = 2{,}98\ \%$ (см. табл. 1), т. е. имеем $\delta_{12}(\%) \le 3\ \%$, то погрешность напряжения σ_{12}^o не более 10 %. Отметим, что напряжение σ_{12}^o отличается от напряжения σ_0 на 5,98 %. Будем считать, что верхняя оценка для погрешности напряжения σ_{12}^o равна 10 %. Тогда принимаем $\delta_\alpha = 0{,}1$, $\sigma_b = \sigma_{12}^o = 2{,}012$. Условие (3) выполняется, т. е. имеем неравенство $\delta_\alpha = 0{,}1 < C_\alpha = 0{,}3$. Подставляя $\delta_\alpha = 0{,}1$, $n_1 = 1{,}8$, $n_2 = 3{,}4$ в (2), получаем скорректированные условия прочности для КТ V_0 в виде

$$2 \le n_b \le 3\,, \tag{15}$$

где n_b – коэффициент запаса КТ V_0, отвечающий приближенному решению задачи упругости,

$$n_b = \sigma_T / \sigma_b\,. \tag{16}$$

Используя в (16) $\sigma_T = 4{,}5$, $\sigma_b = 2{,}012$, находим коэффициент запаса n_b для КТ V_0.

$$n_b = \sigma_T / \sigma_b = 4{,}5 / 2{,}012 = 2{,}24\,. \tag{17}$$

Итак, коэффициент запаса $n_b = 2{,}24$ КТ V_0 (отвечающий приближенному решению задачи упругости) удовлетворяет скорректированным условиям прочности (15). Тогда, согласно теореме п. 2, коэффициент запаса n_0 КТ V_0 (отвечающий точному решению задачи упругости) удовлетворяет заданным условиям прочности (8). Отметим, что БМ R_0 КТ V_0 имеет свыше 32 млн узловых неизвестных МКЭ, что затрудняет реализовать МКЭ с применением 1сКЭ 1-го порядка формы куба со стороной h для построения решения для БМ R_0, которое считаем точным (см. положение 3 п. 1 и п. 3.1). В расчете на прочность по МФДМ композитной балки V_0 (см. рис. 1) используем модель R_{12}^o, которая имеет $N_{12}^o = 146016$ узловых неизвестных МКЭ и ширина ленты СУ МКЭ которой равна $b_{12}^o = 1059$ (см. табл. 1). Дискретная модель R_{12}^o требует в $\mathrm{k}_1 = \dfrac{N_0 \times b_0}{N_{12}^o \times b_{12}^o} = \dfrac{32517504 \times 28524}{146016 \times 1059} = 5998{,}34$ раз меньше объема памяти ЭВМ, т. е. почти в 6×10^3 раз меньше, чем БМ R_0 (см. п. 3.1), что показывает высокую эффективность МФДМ.

5. Применение в МФДМ приближенных решений с большой погрешностью. Рассмотрим случай расчета КТ на прочность по МФДМ, когда возможно применение упругих приближенных решений с большой погрешностью на примере расчета КТ V_0 (см. п. 4). Расчеты показывают, что если $\delta_n(\%) \le 5\%$ (см. (14)), то погрешность максимального эквивалентного напряжения σ_n^o модели R_n^o не более 25 %. Так как напряжения $\sigma_8^o = 1{,}746$ и $\sigma_7^o = 1{,}665$ отличаются на $\delta_8(\%) = 4{,}64\ \%$ (см. табл. 1), т. е. $\delta_8(\%) \le 5\ \%$, то погрешность напряжения σ_8^o не более $25\ \%$. В самом деле, напряжение σ_8^o отличается от напряжения $\sigma_0 = 2{,}140$ на $18{,}41\ \%$. Будем считать, что верхняя оценка для погрешности напряжения σ_8^o равна $25\ \%$. Тогда принимаем $\delta_\alpha = 0{,}25$, $\sigma_b = \sigma_8^o = 1{,}746$. Условие (3) выполняется, т. е. имеем $\delta_\alpha = 0{,}25 < C_\alpha = 0{,}3$. Подставляя $\delta_\alpha = 0{,}25$, $n_1 = 1{,}8$, $n_2 = 3{,}4$ в (2), получаем следующие скорректированные условия прочности для КТ V_0

$$2{,}4 \le n_b \le 2{,}7. \tag{18}$$

Используя в (16) $\sigma_T = 4,5$, $\sigma_b = 1,746$, находим коэффициент запаса n_b для КТ V_0

$$n_b = \sigma_T / \sigma_b = 4,5/1,746 = 2,58. \tag{19}$$

Коэффициент запаса $n_b = 2,58$ КТ V_0 (отвечающий приближенному решению задачи упругости) удовлетворяет скорректированным условиям прочности (18). Тогда коэффициент запаса n_0 КТ V_0 (отвечающий точному решению задачи упругости) удовлетворяет заданным условиям прочности (8) (см. п. 2). В данном случае при расчете на прочность КТ V_0 по МФДМ используем модель R_8^o, которая имеет $N_8^o = 46656$ неизвестных МКЭ и ширина ленты СУ МКЭ которой равна $b_8^o = 519$. Модель R_8^o требует в $\mathrm{k}_2 = \dfrac{N_0 \times b_0}{N_8^o \times b_8^o} = \dfrac{32517504 \times 28524}{46656 \times 519} = 38304,76$ раз меньше объема памяти ЭВМ, т. е. почти в 38×10^3 раз меньше, чем БМ R_0.

Итак, показано, что при расчете КТ V_0 возможно применение упругих приближенных решений с большой погрешностью. В данном случае в расчетах используем напряжение σ_8^o модели R_8^o, погрешность $\varepsilon_8 = 18,41\ \%$ которого больше погрешности $\varepsilon_{12} = 5,98\ \%$ напряжения σ_{12}^o модели R_{12}^o, что приводит к повышению эффективности МФДМ (коэффициент k_2 в 6,38 раз больше коэффициента k_1). Это связано с тем, что размерность и ширина ленты СУ МКЭ модели R_8^o меньше размерности и ширины ленты СУ МКЭ модели R_{12}^o (см. табл. 1). На основании полученных результатов в приведенном примере можно сделать следующий вывод. Применение в МФДМ дискретных моделей КТ, максимальные эквивалентные напряжения которых имеют большую погрешность, приводит к повышению эффективности МФДМ.

6. Фиктивные модели с переменными характерными размерами. При расчете КТ сложной формы по МФДМ целесообразно использовать ФМ с переменными характерными размерами. Краткую суть таких ФМ, не теряя общности суждений, для простоты изложения, рассмотрим на примере балки $V_0^{(1)}$ сложной формы, т. е. с постоянным поперечным сечением сложной формы (типа двутавровой балки) (рис. 5). Балка $V_0^{(1)}$ расположена в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, ось Oy параллельна оси балки. Пусть балка армирована непрерывными продольными волокнами сечением $h \times h$, т. е. которые параллельны оси Oy, где $h = L_0 / N$, N – задано; L_0 – длина балки $V_0^{(1)}$. БМ $R_0^{(1)}$ балки $V_0^{(1)}$ состоит из КЭ V_e 1-го порядка формы куба со стороной h, которая учитывает неоднородную структуру балки и порождает приближенное решение, мало отличающееся от точного. Такое приближенное решение считаем точным (см. положение 3 п. 1). ФМ $R_n^{(1)}$ балки отличаются от ее БМ $R_0^{(1)}$ лишь только одним (переменным) характерным размером L_n (вдоль оси Oy) (рис. 5). ФМ $R_n^{(1)}$ имеет крепление и такой же характер нагружения как БМ $R_0^{(1)}$ балки $V_0^{(1)}$.

Характерный размер L_n ФМ $R_n^{(1)}$ определяем по формуле

$$L_n = L_0 n / N = hn, \tag{20}$$

где $n = n_0, ..., N$; $n_0 > 2$, n_0 – задано.

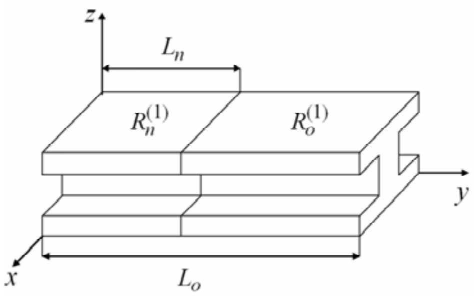

Рис. 5. Балка $V_0^{(1)}$

Fig. 5. Beam $V_0^{(1)}$

ФМ $R_n^{(1)}$ имеет такую же неоднородную структуру как БМ $R_0^{(1)}$, т. е. ФМ $R_n^{(1)}$ армирована непрерывными продольными волокнами сечением $h \times h$ и имеет такое же распределение волокон в сечении как БМ $R_0^{(1)}$ балки $V_0^{(1)}$. Неоднородные структуры ФМ $R_n^{(1)}$ и в БМ $R_0^{(1)}$ учитываются с помощью КЭ V_e 1-го порядка формы куба со стороной h. Из выше изложенного, учитывая, что, согласно (20) $L_n \to L_0$ при $n \to N$, следует

$$R_n^{(1)} \to R_0^{(1)} \quad \text{при } n \to N. \tag{21}$$

Из выполнения (21) получаем

$$\sigma_n^{(1)} \to \sigma_0^{(1)} \quad \text{при } n \to N, \tag{22}$$

где $\sigma_n^{(1)}$ ($\sigma_0^{(1)}$) – максимальное эквивалентное напряжение, отвечающее ФМ $R_n^{(1)}$ (отвечающее БМ $R_0^{(1)}$ балки $V_0^{(1)}$).

Поскольку ФМ $R_n^{(1)}$ и БМ $R_0^{(1)}$ балки состоят из КЭ V_e 1-го порядка формы куба со стороной h и поперечные сечения этих моделей одинаковы, то сечения ФМ $R_n^{(1)}$ и БМ $R_0^{(1)}$ содержат одинаковое число узлов, которое обозначим через N_0. Тогда общее число узлов M_0 БМ $R_0^{(1)}$ равно $M_0 = N_0(N+1)$, общее число узлов M_n ФМ $R_n^{(1)}$ – $M_n = N_0(n+1)$. При $n_0 \le n < N$ получаем, что $M_n < M_0$, т. е. размерность ФМ $R_n^{(1)}$ меньше размерности БМ $R_0^{(1)}$. При $n = N$ имеем $M_N = M_0$, т. е. размерности ФМ $R_N^{(1)}$ и БМ $R_0^{(1)}$ совпадают. Итак, показано, что при расчете композитной балки $V_0^{(1)}$ (рис. 5) сложной формы по МФДМ целесообразно использовать ФМ $R_n^{(1)}$ с переменным характерным размером L_n, что приводит к экономии ресурсов ЭВМ.

Заключение

Предложен метод фиктивных дискретных моделей для расчета на статическую прочность упругих тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой. Предлагаемый метод сводится к построению и расчету на прочность фиктивных дискретных моделей, размерности которых меньше размерностей базовых дискретных моделей композитных тел, и реализуется с помощью МКЭ с применением скорректированных условий прочности, которые учитывают погрешность приближенных решений. Реализация МКЭ для фиктивных дискретных моделей с применением многосеточных конечных элементов обеспечивает большую экономию ресурсов ЭВМ, что позволяет использовать предлагаемый метод для расчетов на прочность тел с микронеоднородной регулярной структурой. Реализация метода фиктивных дискретных моделей требует меньше ресурсов ЭВМ, чем реализация МКЭ для базовых дискретных моделей. При построении фиктивных дискретных моделей не используется процедура измельчения базовых моделей. Расчеты показывают высокую эффективность предлагаемого метода в расчетах на прочность тел с неоднородной регулярной волокнистой структурой. Применение скорректированных условий прочности позволяет использовать в расчетах приближенные решения с большой погрешностью, что приводит к повышению эффективности метода фиктивных дискретных моделей.

Библиографические ссылки

1. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1975. 704 с.

2. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. М. : Машиностроение, 1993. 640 с.

3. Москвичев В. В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. Новосибирск : Наука, 2002. 106 с.

4. Матвеев А. Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности. // Известия АлтГУ. Математика и механика. 2017. № 4. С. 116–119. Doi: 10.14258/izvasu(2017)4-21.

5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. 715 p.

6. Голованов А. И., Тюленева О. И., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М. : Физматлит, 2006. 392 с.

7. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М. : Стройиздат, 982. 448 с.

8. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М. : Высшая школа, 1985. 392 с.

9. Секулович М. Метод конечных элементов. М. : Стройиздат, 1993. 664 с.

10. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов: М. : Мир, 1981. 304 с.

11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975. 542 с.

12. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М. : Мир, 1982. 232 с.

13. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2016. Т. 158, кн. 4. С. 530–543.

14. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных платин и балок. // Вестник КрасГАУ. 2016. № 12. С. 93–100.

15. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. Vol. 158, No. 1. Art. 012067. P. 1–9.

16. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок сложной формы. // Вестник КрасГАУ. 2017. № 11. С. 131–140.

17. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов. // Вестник КрасГАУ. 2018. № 2. С. 90–103.

18. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных оболочек вращения и двоякой кривизны // Вестник КрасГАУ. 2018. № 3. С. 126–137.

19. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в решении физических краевых задач // Информационные технологии и математическое моделирование. Красноярск, 2017. С. 27–60.

20. Работнов Ю. Н. Механика деформированного твердого тела. М. : Наука, 1988. 711 с.

21. Демидов С. П. Теория упругости. М. : Высшая школа, 1979. 432 с.

22. Тимошенко С. П., Дж. Гудьер. Теория упругости. М. : Наука, 1979. 560 с.

23. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М. : Высшая школа, 1968. 512 с.

24. Матвеев А. Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов // Деп. в ВИНИТИ. 2000. № 2990–В00. 30 с.

25. Матвеев А. Д. Смешанные дискретные модели в анализе упругих трехмерных неоднородных тел сложной формы. // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. № 1. С. 182–195.

26. Матвеев А. Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом наполнения. // Прикладная механика и техническая физика. 2004. № 3. С. 161–171.

27. Матвеев А. Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Известия АлтГУ. Серия: Математика и механика. 2014. № 1/1. С. 80–83. Doi: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.

28. Матвеев А. Д. Метод образующих конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2018. № 6. С. 141–154.

29. Матвеев А. Д. Построение многосеточных конечных элементов для расчета оболочек, пластин и балок на основе образующих конечных элементов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 3. С. 48–57. Doi: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.

30. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М. : Физматлит, 2008. 432 с.

31. Немировский Ю. В., Резников Б. С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск : Наука ; Сибирское отделение, 1984. 164 с.

32. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. М. : Наука. 1985. 201 с.

33. Алфутов Н. А., Зиновьев А. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.

34. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М. : МГУ, 1984. 336 с.

35. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск : Наука, 2001. 288 с.

36. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Киев : Наукова думка, 1985. 302 с.

37. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988. 269 с.

38. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Т. 3. Прикладные исследования / А. Н. Гузь, И. В. Игнатов, А. Г. Гирченко и др. Киев : Наукова думка, 1983. 262 с.

39. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высшая школа, 1982. 264 с.

References

1. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Hand book of resistance materials']. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1975, 704 p.

2. Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B. *Raschet na prochnost' detalej mashin* [Calculation of the strength of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1993, 640 p.

3. Moskvichev V. V. *Osnovy konstrukcionnoy prochnosti tekhnicheskih sistem i inzhenernyh sooruzheniy* [Fundamentals of structural strength of technical systems and engineering structures]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2002, 106 p.

4. Matveev A. D. [Calculation of elastic structures using the adjusted terms of strength]. *Izvestiya AltGU.* 2017, No. 4, P. 116–119 (In Russ.). Doi: 10.14258/izvasu(2017)4-21.

5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013, 715 p.

6. Golovanov A. I., Tiuleneva O. I., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktsii* [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 392 p.

7. Bate K., Vilson E. *Chislennye metody analiza i metod konechnykh elementov* [Numerical analysis methods and finite element method]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1982, 448 p.

8. Obraztsov I. F., Savel'ev L. M., Khazanov Kh. S. *Metod konechnykh elementov v za-dachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov* [Finite element method in problems of aircraft structural mechanics]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1985, 392 p.

9. Sekulovich M. *Metod konechnykh elementov* [Finite element method]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1993, 664 p.

10. Norri D., de Friz Zh. *Vvedenie v metod konechnykh elementov* [Introduction to the finite element method]. Moscow, Mir Publ., 1981, 304 p.

11. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 544 p.

12. Fudzii T., Dzako M. *Mekhanika razrusheniya kompozicionnyh materialov* [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1982, 232 p.

13. Matveev A. D. [The method of multigrid finite elements in the calculations of three-dimensional homogeneous and composite bodies]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Seriia: Fiz.-matem. Nauki.* 2016, Vol. 158, Iss. 4, P. 530–543 (In Russ.).

14. Matveev A. D. [Multigrid method for finite elements in the analysis of composite plates and beams]. *Vestnik KrasGAU.* 2016, No. 12, P. 93–100 (In Russ.).

15. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. *IOP Conf, Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2016, Vol. 158, No. 1, Art. 012067, P. 1–9.

16. Matveev A. D. [Multigrid finite element Method in the calculations of composite plates and beams of irregular shape]. *The Bulletin of KrasGAU.* 2017, No. 11, P. 131–140 (In Russ.).

17. Matveev A. D. [Multigrid finite element Method]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 2, P. 90–103 (In Russ.).

18. Matveev A. D. [The method of. multigrid finite elements of the composite rotational and bi-curved shell calculations]. *The Bulletin of KrasGAU.* 2018, No. 3, P. 126–137 (In Russ.).

19. Matveev A. D. [Method of. multigrid finite elements to solve physical boundary value problems]. Information technologies and mathematical modeling. Krasnoyarsk, 2017. P. 27–60.

20. Rabotnov Y. N. [Mechanics of a deformed solid]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 711 p.

21. Demidov S. P. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979. 432 p.

22. Timoshenko S. P., Dzh. Gud'er. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 560 p.

23. Bezuhov N. I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti* [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1968, 512 p.

24. Matveev A. D. [Some approaches of designing elastic multigrid finite elements]. *VINITI Proceedings.* 2000, № 2990-В00, P. 30 (In Russ.).

25. Matveev A. D. [Mixed discrete models in the analysis of elastic three-dimensional inhomogeneous bodies of complex shape]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika.* 2013, No. 1, P. 182–195 (In Russ.).

26. Matveev A. D. [Multigrid modeling of composites of irregular structure with a small filling ratio*]. J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2004, No. 3, P. 161–171 (In Russ.).

27. Matveev A. D. [The construction of complex multigrid finite element heterogeneous and microinhomogeneities in structure]. *Izvestiya AltGU.* 2014. № 1/1, P. 80–83. Doi: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.

28. Matveev A. D. [Method of generating finite elements]. *The Bulletin of KrasGAU.* 2018, No. 6, P. 141–154 (In Russ.).

29. Matveev A. D. [Construction of multigrid finite elements to calculate shells, plates and beams based on generating finite elements]. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019, No. 3, P. 48–57 (In Russ.). Doi: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.

30. Golushko S. K., Nemirovskij Y. V. *Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugih compozitnyh plastin i obolochek vrashcheniya* [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of rotation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 432 p.

31. Nemirovskij Y. V., Reznikov B. S. *Prochnost' elementov konstrukciy iz kompozitnyh materiallov* [Strength of structural elements made of composite materials]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984, 164 p.

32. Kravchuk A. S., Majboroda V. P., Urzhumcev Y. S. *Mekhanika polimernyh i kompozicionnyh materialov* [Mechanics of polymer and composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 201 p.

33. Alfutov N. A., Zinov'ev A. A., Popov B. G. *Raschet mnogosloynyh plastin i obolochek iz kompozicionnyh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 264 p.

34. Pobedrya B. E. *Mekhanika kompozicionnyh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MGU Publ., 1984, 336 p.

35. Andreev A. N., Nemirovskij Y. V. *Mnogosloynye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustojchivost', kolebaniya* [Multilayer anisotropic shells and plates. Bending, stability, vibration]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2001, 288 p.

36. Vanin G. A. *Mikromekhanika kompozicionnyh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985, 302 p.

37. Vasil'ev V. V. *Mekhanika konstrukciy iz kompozicionnyh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 269 p.

38. Guz' A. N., Ignatov I. V., Girchenko A. G. et al. [Mechanics of composite materials and structural elements]. *Prikladnye issledovaniya*. 1983, Vol. 3, 262 p.

39. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1982, 264 p.

Матвеев Александр Данилович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН. E-mail: mtv241@mail.ru.

Matveev Alexander Danilovich – Cand. Sc., associate Professor, senior researcher, Institute of computational modeling SB RAS. E-mail: mtv241@mail.ru.