

УДК 532.593, 533.6.011.72

Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-4-558-567

Для цитирования: Адрианов А. Л., Сизаско В. О некорректном представлении ударного процесса на ударных полях в вязком теплопроводном газе // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 4. С. 558–567. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-4-558-567.

For citation: Adrianov A. L., Sizasko V. About incorrect representation of the shock process on shock polars in a viscous heat-conducting gas. *Siberian Aerospace Journal*. 2021, Vol. 22, No. 4, P. 558–567. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-4-558-567.

О некорректном представлении ударного процесса на ударных полях в вязком теплопроводном газе

А. Л. Адрианов^{1,2}, В. Сизаско²

¹Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

²Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
E-mail: adrian58al@gmail.com

Рассматриваются ударные газодинамические процессы, нашедшие широкое применение в ракетно-космической технике при конструировании и оптимизации устройств, энергетических установок. Производится анализ известных точных и асимптотических соотношений/условий на ударной волне, в частности – обобщенных дифференциальных соотношений (ОДС) на криволинейном косом скачке уплотнения для модели вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса. Показаны преимущества использования дискретно-аналитического подхода, например: 1) возможность максимально использовать гладкость ударного газодинамического образования (скачка) в касательном направлении; 2) строить эффективные вычислительные алгоритмы, лишённые негативного действия аппроксимационной/искусственной вязкости на схематизированном разрыве. Параллельно рассмотрен весьма распространённый графический способ отображения результатов газодинамических расчетов на плоскость ударных поляр, предложенный Буземаном, и объёмный (3D) поляр oid, предложенный В. Н. Усковым. Сам математический аппарат ударных поляр построен на точных соотношениях типа Ренкина – Гюгонио и неплохо зарекомендовал себя даже при моделировании течений вязкого теплопроводного газа. Однако в многочисленных литературных источниках присутствуют результаты (ударные решения) как физического, так и вычислительного экспериментов, которые не отображаются строго на ударных полях. В настоящей работе показано, что в редких случаях данный и весьма распространённый способ такого отображения может быть и некорректным. Доказано, что основными причинами такого дефекта является совместное действие трех основных факторов: неравномерность течения перед ударным образованием, краевой эффект за ним, действие внешнего фактора вязкости и механизма теплопроводности.

Ключевые слова: ударный газодинамический процесс, газодинамический разрыв, обобщенные дифференциальные соотношения на скачке уплотнения, ударные поляра и поляр oid.

About incorrect representation of the shock process on shock polars in a viscous heat-conducting gas

A. L. Adrianov^{1,2}, V. Sizasko²

¹Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

²Siberian Federal university
79, Svobodnyy prospekt, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
E-mail: adrian58al@gmail.com

The shock gas-dynamic processes, which have found wide application in rocket and space technology in the design and optimization of devices and power plants, were considered. An analysis of the known exact and asymptotic relations/conditions on the shock wave were carried out, in particular, generalized differential relations (GDR) on a curvilinear oblique shock wave for a model of a viscous heat-conducting gas at large Reynolds numbers. The advantages of using the discrete-analytical approach were shown, for example: 1) the ability to make the most of smoothness of the shock gas-dynamic formation (jump) in the tangential direction; 2) build efficient computational algorithms devoid of the negative action of approximation/artificial viscosity on a schematized discontinuity. At the same time, a very widespread graphical method for displaying the results of gas-dynamic calculations on the plane of shock polars, proposed by Busemann, and a volumetric (3D) polaroid, proposed by V. N. Uskov, was reviewed. The mathematical method of shock polars was built on exact relations of the Rankine – Hugoniot type and was proven itself quite well even in the simulation of viscous heat-conducting gas flows. However, in numerous literary sources there are assisting results (shock solutions) of both physical and computational experiments, which are not strictly reflecting in shock polars. In this abstract, it was shown that in rare cases this and a very widespread way of such a mapping may be incorrect. It was proved that the main reasons for such a defect are the combined action of three main factors: non-uniformity of the flow before the shock formation, the edge effect behind it, the action of the external viscosity factor and the mechanism of heat conductivity.

Keywords: shock gasdynamic process, gasdynamic discontinuity, generalized differential relations at the compression jump, shock polar and polaroid.

Введение

Ударные газодинамические процессы [1] нашли широкое применение в ракетно-космической технике при конструировании и оптимизации устройств, энергетических установок, в современных технологиях и даже медицине. Само «ударное образование» (тонкий ударный слой) при его корректной идеализации (выделении или схематизации ударной волны, скачка уплотнения (СУ)) можно считать разрывным, что позволило применить аналитический аппарат для связи газодинамических параметров по обе стороны такого «разрыва» [2–13]. Более того, если имеет место дополнительный запас гладкости в касательном к СУ направлении, то удаётся аналитически связать не только сами параметры, но и частные производные от них по обе стороны СУ. Такая связь для модели идеального газа в виде дифференциальных условий динамической совместности на СУ дана в [8] В. Н. Усковым. В [10; 11] дан их обобщённый аналог – обобщённые дифференциальные соотношения на СУ (ОДС) для модели вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса (Re_∞). Математический аппарат в виде ОДС позволяет произвести редукцию от уравнений Навье – Стокса вязкого теплопроводного газа (УНСВТ) к системе ОДУ в плане постановки вязкой задачи проникновения СУ в сдвиговый слой. В процессе математического моделирования на основе ОДС удаётся в рамках единого вычислительного алгоритма проходить «насквозь» от газодинамической до диффузионной стадии эволюции СУ в сдвиговом слое, задаваясь при этом различными краевыми

эффектами (КЭ), а с другой – значительно экономить вычислительный ресурс: счет на ПЭВМ вместо многих часов (УНСВТ) занимает секунды. Однако самое важное в том, что в такой постановке задачи сохраняется естественный (тем более, при учете фактора вязкости и механизма теплопроводности (фактора ВТ)) порядок гладкости решения в касательном к СУ направлении, что и явилось основным мотивом для применения дискретно-аналитического подхода [11].

Буземан в своей работе заложил основу графических методов решения задач об интерференции газодинамических разрывов с помощью ударных поляр (УП) [13], связывающих интенсивность косых СУ с углом разворота потока на них. Такие поляры называют в его честь полярами Буземана, а за их характерный вид – сердцевидными кривыми, а также изомахами, так как каждая ударная поляра строится для конкретного числа Маха набегающего потока. В задачах интерференции газодинамических разрывов, когда одним из элементов той или иной конфигурации может быть волна разрежения, вместо УП чаще используется термин «ударно-волновая поляра» (УВП) [8–11].

Цель настоящей работы – исследование корректности (правильности) применения аппарата УВП для представления отдельных вязких ударных решений. Частично такое исследование на плоскости УВП было проведено в [11]. В настоящей работе отображение таких решений осуществляется, в том числе, и на объемный (3D) аналог УВП – ударно-волновой поляроид. Следует отметить, что проблемы такого некорректного представления/отображения получаемых решений могут иметь место только в редких случаях, поскольку сам математический аппарат УВП построен на точных соотношениях типа Ренкина – Гюгонио и неплохо зарекомендовал себя даже при моделировании течений вязкого теплопроводного газа. Эти редкие, но важные случаи могут наблюдаться при совместном действии следующих трёх факторов: 1) неравномерность невозмущенного течения перед СУ; 2) КЭ за ним, формируемый догоняющими возмущениями; 3) фактор ВТ.

1. Классические и неклассические модели ударного перехода

Известно, что само ударное образование, при его правильной идеализации (схематизации) [1–13], позволяет приближенно заменить его математической поверхностью разрыва первого рода, когда основные газодинамические переменные терпят конечный разрыв. В стационарных задачах вместо подвижных ударных волн (УВ) [1; 7; 12] рассматриваются СУ, хотя и движущуюся с постоянной скоростью УВ также можно рассматривать как СУ в подвижной системе координат. Соотношения, связывающие величины по обе стороны УВ, носят название соотношений Ренкина – Гюгонио, а подобные соотношения на СУ – соотношений на косом скачке уплотнения, включая и прямой СУ. В обоих случаях можно говорить обобщенно о соотношениях типа Ренкина – Гюгонио. Эти соотношения образуют однопараметрическое семейство формул, т. е. при известных параметрах до разрыва, достаточно задать один параметр за ним, чтобы определить (не всегда однозначно!) все связи величин по обе стороны СУ или УВ. В последнем случае в качестве такого параметра часто выступает скорость самой УВ. Эти соотношения имеют и более полные реализации, а именно:

1) продолжение их в виде дифференциальных условий динамической совместности (ДУДС [8; 10; 11], В. Н. Усков);

2) ОДС [10; 11] – обобщение ДУДС на случай действия внешнего (по обе стороны разрыва) фактора ВТ при использовании модели вязкого теплопроводного газа (УНСВТ) при больших числах Рейнольдса;

3) применительно к нестационарным газодинамическим течениям дифференциальные соотношения (как и ДУДС в невязком приближении), выполняющиеся на фронте движущейся с ускорением криволинейной УВ, получены в [12].

Не умаляя общности, рассмотрим обычные, т. е. без учёта внешнего фактора ВТ, соотношения на косом скачке уплотнения, которые вытекают из интегральных законов сохранения на разрыве

$$[\rho v_n] = \rho v_n - \hat{\rho} \hat{v}_n = 0, \quad [p + \rho v_n^2] = 0, \quad [\rho v_n v_\tau] = 0, \quad \left[h + \frac{v_n^2}{2} \right] = 0 \quad (1)$$

и могут быть записаны в известных различных формах, поэтому не приводятся. В (1) ρ – плотность; p – давление; v_n и v_τ – нормальная и касательная составляющие скорости к поверхности разрыва; h – энтальпия (теплосодержание) $h = \gamma/(\gamma - 1)p/\rho$; $\gamma = c_p/c_v$ – показатель изэнтропы.

Универсальность, а поэтому и частая применимость нелинейных, но несложных соотношений/условий на косом СУ можно объяснить следующим:

1) даже в случае сложной пространственной (3D) конфигурации СУ, газодинамический процесс рассматривается локально исключительно в двумерном пространстве (2D) – плоскости, образованной вектором нормали к гладкой поверхности скачка и вектором скорости набегающего сверхзвукового потока (число Маха – $M > 1$);

2) в самих соотношениях не присутствует в явном виде диссипативный механизм, но его работа внутри СУ внешне отражается, в частности, в производстве/возрастании энтропии. Разрывы полной энтальпии и касательной к СУ компоненты скорости отсутствуют: $[h + (v_n^2 + v_\tau^2)/2] = 0$, $[v_\tau] = 0$, но так обстоит дело только в случае обычных соотношений.

При использовании модели (уравнений УНСВТ) вязкого теплопроводного газа, имеется возможность обобщить обычные соотношения на косом СУ добавлением действия малого внешнего фактора ВТ [10; 11]. В таких обобщённых соотношениях появляются дополнительные слагаемые с малым параметром ($1/Re_\infty$) при производных от газодинамических величин. Однако и в этом случае, если градиенты этих величин по обе стороны разрыва отсутствуют, имеет место полная выполнимость обычных соотношений на косом СУ независимо от числа Рейнольдса, что положительно сказывается на точности описания ударного газодинамического процесса и соответственно частой применимости данных соотношений.

Буземан в своей работе [13] заложил основу графических методов решения задач об интерференции газодинамических разрывов с помощью ударных поляр, связывающих интенсивность косых СУ с углом разворота потока на них. Рассмотрим, как выглядит регулярное и нерегулярное (маховское) отражение косого СУ от стенки в физической плоскости и плоскости ударных поляр.

На рис. 1 показаны виды отражения УВ (СУ). Поляры построены в координатах $(\beta, \Lambda = \ln(J))$, где β – угол преломления/разворота вектора скорости на СУ, а $J = \hat{p}/p$ – его интенсивность (отношение давления за СУ к давлению до него). Поляры строятся по конкретному числу Маха и показателю изэнтропы $\gamma = c_p/c_v$. Здесь β_1 – угол разворота потока на входящем/падающем скачке, β_2 – аналогичный угол на отраженном скачке, β_3 – угол разворота на главном скачке при нерегулярном отражении, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – входящий, отраженный и главный скачок (ножка Маха), соответственно. Если отражение регулярное, то выпущенная из точки 1 вторичная поляра (строится по числу Маха за входящим скачком) должна пересекать координатную ось в точке 2. Тогда суммарный угол разворота $\beta_1 + \beta_2 = 0$, а суммарная степень сжатия потока будет $\Lambda_1 + \Lambda_2$. Если отражение нерегулярное, то образуется та или иная тройная конфигурация ударных волн [8; 9], аналогичный расчёт которой основывается на равенстве давлений и наклонов векторов скорости на исходящем из тройной точки тангенциальном разрыве \hat{t} (штрихпунктир на рис. 1, б).

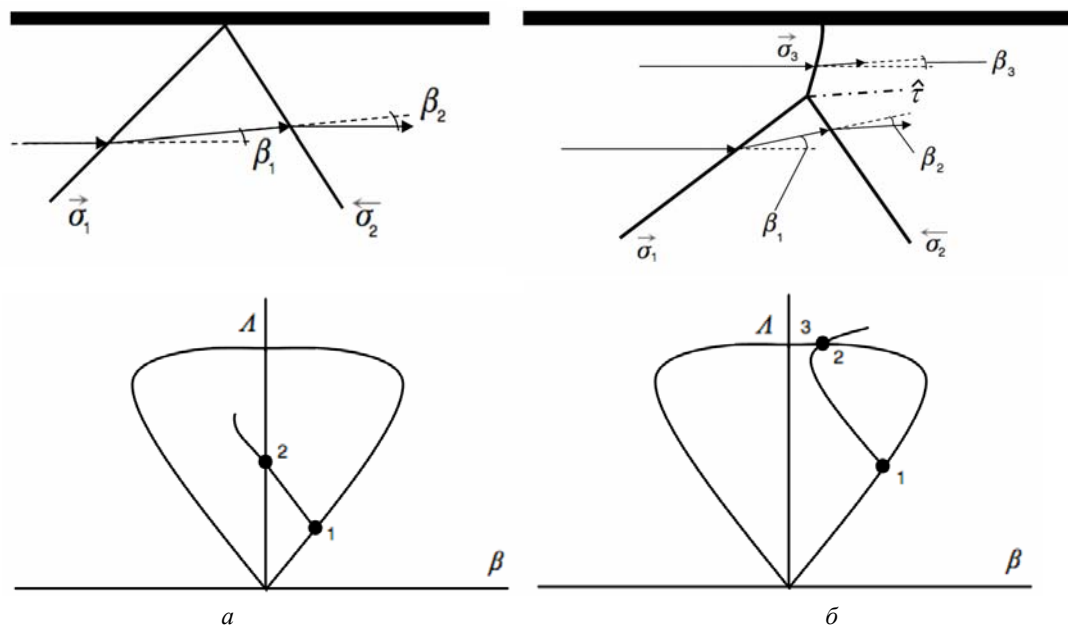


Рис. 1. Регулярное (а) и нерегулярное (б) отражение косога скачка от стенки

Fig. 1. Regular (a) and irregular (b) reflection of an oblique shock from the wall

Зависимость $\beta(J)$ в плоскости поляра, вытекающая из обычных соотношений на косом СУ, даётся следующим образом:

$$\operatorname{tg} \beta = \pm \sqrt{\frac{J_m - J}{J + \varepsilon} \frac{(1 - \varepsilon)(J - 1)}{(J_m + \varepsilon) - (1 - \varepsilon)(J - 1)}}$$

где $J_m = (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon$ – максимальная интенсивность СУ (прямой СУ), $\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$. Соответственно для вторичной поляры требуется брать число Маха за первичным СУ.

Наиболее полно теоретический анализ всевозможных взаимодействий/интерференций стационарных газодинамических разрывов рассмотрен в [8; 9]; при этом способ отображения результатов физического или численного эксперимента на плоскость поляра не вызывает особых нареканий (см. выше). Вместе с тем, в многочисленных современных работах расчётного характера часто присутствуют отдельные точки (решения), которые почему-то (?) не попадают строго на ударные поляры. Разберёмся в этом вопросе.

2. Проникновение скачка в сдвиговый слой и отображение процесса на ударных полярах и поляроиде

Рассмотрим взаимодействие косога СУ с тонким сдвиговым слоем (слоем) в невязкой (вихревой) и вязкой постановке (подробно в [10; 11]), которое схематично показано на рис. 2. В качестве слоя использовалась сверхзвуковая часть пограничного слоя. Тонкий слой на момент взаимодействия его с СУ считаем сформировавшимся, поэтому локально в зоне взаимодействия влиянием вязких сил можно уже пренебречь и использовать для расчёта взаимодействия обычные соотношения на косом СУ, точнее их дифференциальное продолжение – ДУДС (см. выше), поскольку проходящий в слой СУ гладкий и криволинейный. Так выглядит невязкая или вихревая постановка задачи. Однако можно учесть действие внешнего фактора ВТ и производить расчёт на основе универсальных ОДС (см. выше), из которых автоматически при отключенном факторе ВТ следуют ДУДС. Заметим, что ОДС реализованы в рамках дискретно-аналитического подхода [11], с помощью которого и выполнялись настоящие расчёты. Существенно, что в данном подходе принципиально отсутствуют (!) такие негативные эффекты как

схемная или искусственная вязкость, а также эффекты, вызванные работой, так называемых лимитеров (монотонизирующих ограничителей) [14].

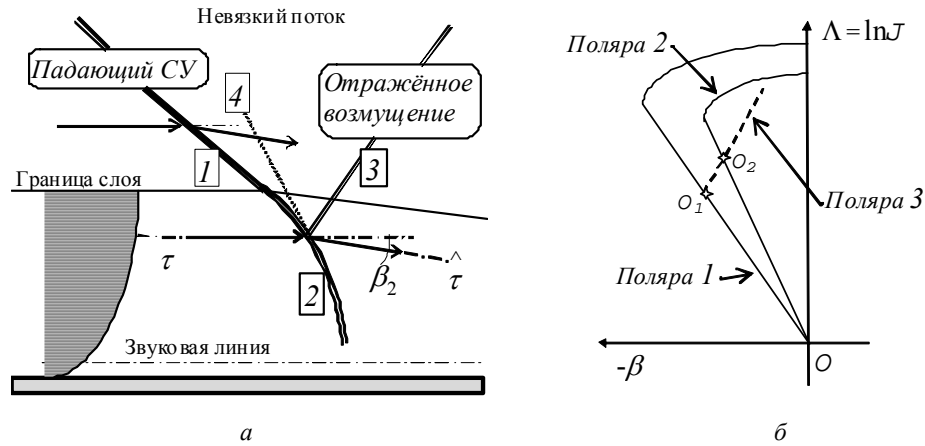


Рис. 2. Схема взаимодействия скачка уплотнения со сдвиговым слоем:
a – физическая плоскость; *b* – плоскость поляра

Fig. 2. Scheme of interaction of a shock wave (SW) with a shear layer:
a – physical plane; *b* – polar plane

На рис. 2, *a* 1–3 – основные элементы рефракции скачка, 4 – догоняющие возмущения, несущие КЭ, а τ и $\hat{\tau}$ – одна и та же линия тока до и за СУ соответственно, являющаяся вырожденным тангенциальным разрывом: его интенсивность обратно пропорциональна количеству разбиений непрерывного профиля скорости. Тоже можно сказать и об отраженном возмущении (рис. 2, *a* 3). Слой был предварительно рассчитан на основе УНСВТ, а далее затабулирован [11] с помощью гладких интерполянтов, так что основные параметры внутри него обладали гладкостью вплоть до вторых производных.

При известной текущей интенсивности СУ J в любой точке слоя процесс проникновения СУ в него с большей степенью схематизации можно отобразить на плоскость УВП (рис. 2, *b*). Для этого удобно представить этот непрерывный процесс дискретным. Поляры 1 и 2 соответствуют двум соседним линиям тока в невозмущенном течении (рис. 2, *a*) с малым различием (в силу непрерывности заданного профиля) чисел Маха, а линейный аналог вторичной поляры 3 отвечает линии тока за падающим СУ (соответствует числу Маха \hat{M}).

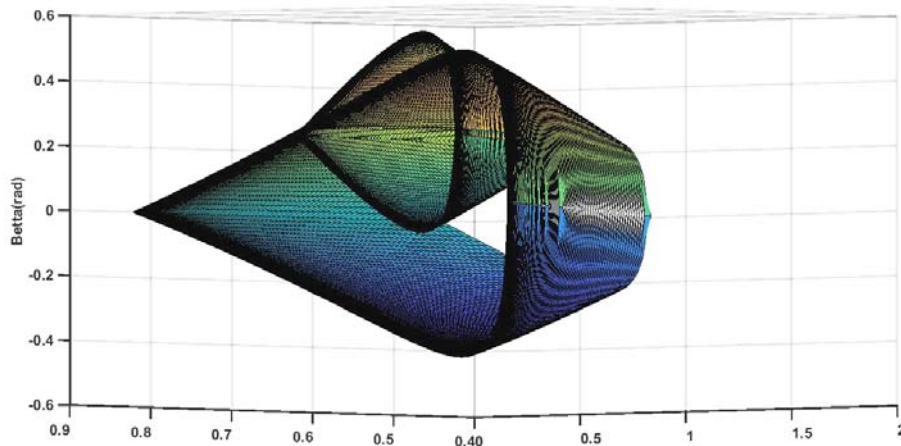


Рис. 3. Ударно-волновой поляроид

Fig. 3. Shock-wave polaroid

Процесс проникновения СУ в слой можно отобразить на объёмном ударном-волновом поле (термин В. Н. Ускова, зафиксированный в [11]) – 3D-аналоге УВП (см. рис. 3). Заметим, что необходимости в отрисовке вторичных поляр в рассматриваемой задаче нет: желательно лишь указывать направление соответствующей ветви как на схематичном рис. 2, б.

В расчёте [11] на внешней линии тока в невозмущенном потоке (см. рис. 2, а): $\rho_\infty = 1,18$; $W_\infty = 0,95$ (полная безразмерная скорость); $M_\infty = 2,275$, а за СУ $\hat{M} = 1,759$ и с каждой линией значения убывают; $Re_x = 1,6 \cdot 10^3$, $Pr = 1$ (важно только для вязкой постановки). КЭ за СУ был ослабляющим.

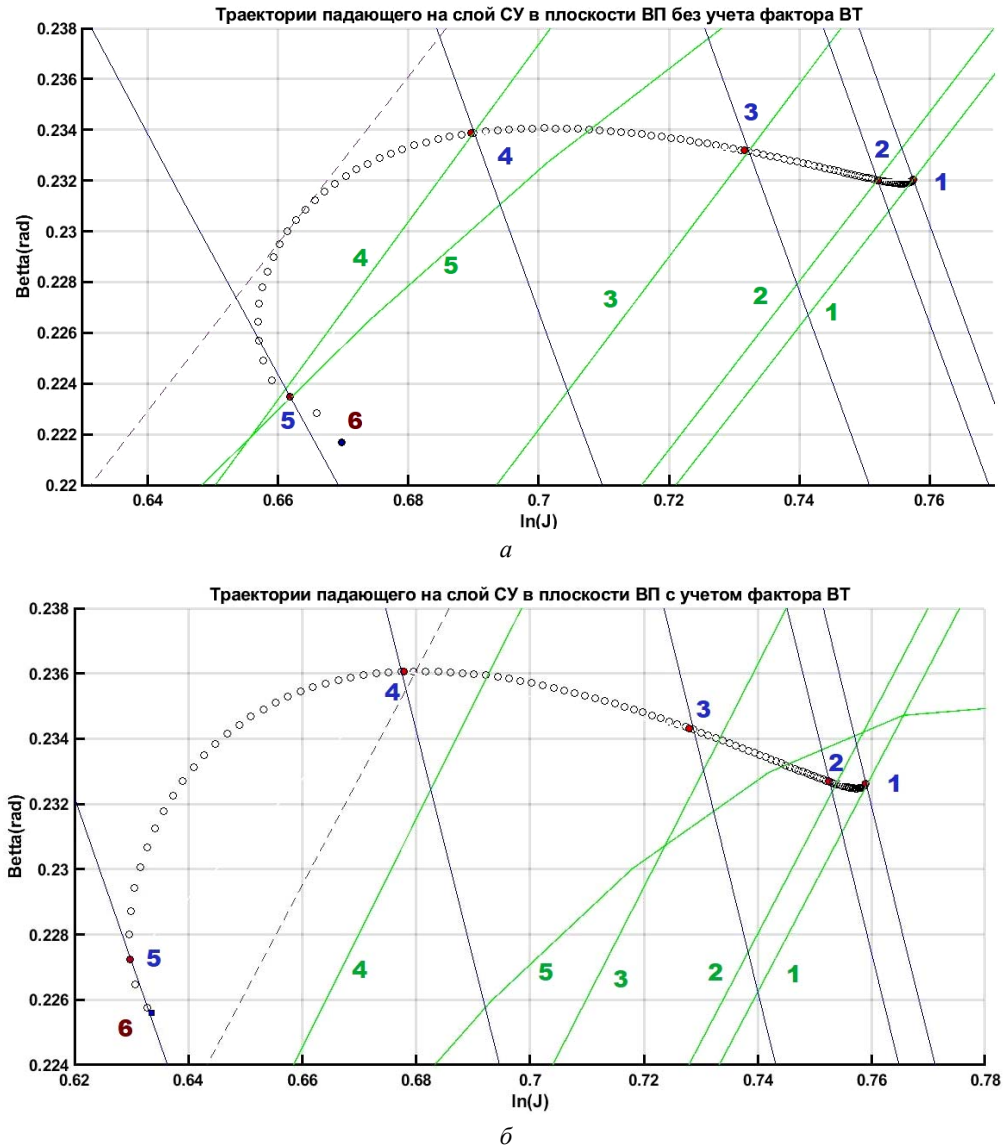


Рис. 4. Трек СУ:

a – без учета фактора ВТ; b – с учетом фактора ВТ. 1–5 – основные УП и точки траектории, соответствующие пересекаемым в физическом пространстве линиям тока; 6 – последняя точка траектории СУ; пунктир – огибающая всех УП. Основные УП показаны зелеными линиями, поперек идущими линеаризованным УВП

Fig. 4. SW track:

a – excluding VHC (Viscosity and Heat Conducting) factor; b – considering VHC factor. 1–5 – main SP (Shock Polar) and trajectory points corresponding to streamlines intersected in physical space; 6 – the last point of the trajectory of the SW (Shock Wave); dotted line – envelope of all SP. The main SP are shown with green lines running across the linearized SWP

Проанализируем различие невязких и вязких (с учётом фактора ВТ) решений в задаче проникновения СУ в сдвиговый слой на плоскости УВП и поляроиде (рис. 4).

На рис. 4 показаны траектории падающего на слой СУ в плоскости УВП в полулогарифмических координатах без учета фактора ВТ (рис. 4, а) и с учетом данного фактора (рис. 4, б). Отдельные выделенные точки траектории, соответствующие пяти пересекаемым СУ выбранным линиям тока, как и фрагменты основных УП для соответствующих чисел Маха, пронумерованы. Пунктиром показан фрагмент огибающей всех УП, для которой аналитическая зависимость получена В. Н. Усковым [8]. В вязком случае выделенные точки на траекториях (треках) СУ уже не совпадают с соответствующими УП (их номерами), и такое рассогласование накапливается по мере проникновения СУ в градиентную часть слоя; трек СУ проходит насквозь через огибающую УП (!). Обычные соотношения на косом СУ в этом случае строго не выполняются (!) и, как следствие, аппарат УВП оказывается менее пригодным. Действие фактора ВТ приводит к более резкому снижению интенсивности СУ чем то, что имеет место только под действием ослабляющего его КЭ.

На рис. 5 оба – невязкое и вязкое решения показаны в виде траекторий (треков) на поверхности основного (первичного) поляроида. Видим, что вязкое решение (красный трек) отслаивается от данного поляроида, что свидетельствует о плохой выполнимости обычных условий на косом СУ и, соответственно, к не вполне корректному использованию поляр или поляроида при отображении результатов вычислений.

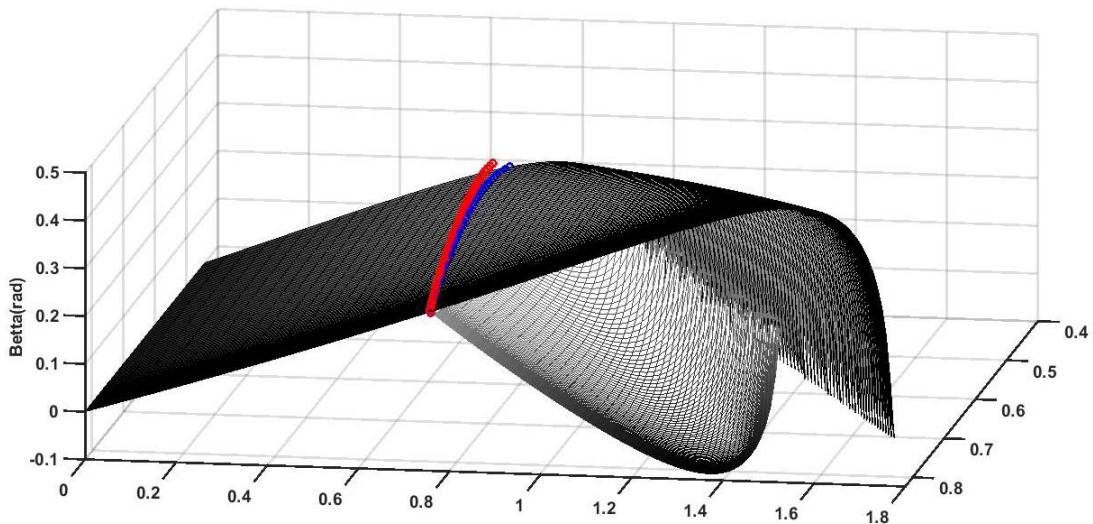


Рис. 5. Отображение траектории падающего на слой СУ на поверхность поляроида. Синий цвет – без учета фактора ВТ. Красный цвет – с учетом фактора ВТ

Fig. 5. Displaying of the trajectory incident on a layer SW on the polaroid surface. Blue color – excluding VHC factor. Red color - taking into account the VHC factor

Заключение

Показано, что в редких случаях при одновременном действии нескольких факторов: неравномерности течения перед СУ, краевого эффекта и действующего фактора ВТ – весьма распространённый способ отображения решения на плоскость ударно-волновых поляр или объёмный (3D) поляроид может быть и некорректным. Таким образом, доказано, что при использовании даже «идеальных» (отсутствуют: схемная/искусственная вязкость, лимитеры) вычислительных методик данное явление может иметь место.

Библиографические ссылки

1. Гриффитс У. Ударные волны // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы / под ред. Дж. Бэтчелора и Г. Моффата. М. : Мир, 1984. 501 с.
2. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковые течения и ударные волны. М. : Изд-во ин. лит., 1950. 426 с.
3. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М. : Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1959. 220 с.
4. Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М. : Изд-во ин. лит., 1962. 411 с.
5. Полачек Х., Зигер Р. И. Взаимодействие ударных волн // Основы газовой динамики / под ред. Г. Эммонса. М. : Изд-во ин. лит., 1963. С. 446–489.
6. Хейз У. Д. Основы теории газодинамических разрывов // Основы газовой динамики / под ред. Г. Эммонса. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 702 с.
7. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М. : Наука, 1977. 274 с.
8. Адрианов А. Л., Усков В. Н., Старых А. Л. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск : Наука, 1995. 180 с.
9. Усков В. Н., Чернышов М. В. Экстремальные ударно-волновые системы в задачах внешней аэродинамики // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21, № 1. С. 15–31.
10. Адрианов А. Л. Обобщенные дифференциальные соотношения на скачке уплотнения // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2009. Вып. 4. С. 22–30.
11. Адрианов А. Л. Математическое моделирование ударных течений идеального и вязкого теплопроводного газа на основе дискретно-аналитического подхода : монография. Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2016. 216 с.
12. Русанов В. В. Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной. М., 1973. (Препринт АН СССР / ИПМ им. М. В. Келдыша; № 18).
13. Буземан А. Годографический метод газовой динамики // ZAMM. 1937. № 17(2). С. 73–79.
14. Емельянов В. Н. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках / под ред. проф. В. Н. Емельянова, д.ф.-м.н. К. Н. Волкова. М. : Физматлит, 2014. 416 с.

References

1. Griffiths W. [Shock waves]. *Modern hydrodynamics. Successes and problems*. Ed. J. Batchelor and G. Moffat. Moscow, Mir Publ., 1984, 501 p.
2. Courant R., Friedrichs K. *Sverkhzvukovye techeniya i udarnye volny* [Supersonic flows and shock waves]. Moscow, Izd-vo in. lit. Publ., 1950, 426 p.
3. Cherny G. G. *Techeniya gaza s bol'shoy sverkhzvukovoy skorost'yu* [Gas flows with high supersonic speed]. Moscow, Gos. izd-vo fiz.-matem. lit. Publ., 1959, 220 p.
4. Bai Shi-i. *Vvedenie v teoriyu techeniya szhimaemoy zhidkosti* [Introduction to the theory of compressible liquid flow]. Moscow, Izd-vo in. lit. Publ., 1962, 411 p.
5. Polachek H., Sieger R. I. [Interaction of shock waves]. *Osnovy gazovoy dinamiki*. Ed. G. Emmons. Moscow, Izd-vo in. lit. Publ., 1963, P. 446–489.
6. Hayes W. D. [Fundamentals of the theory of gas-dynamic discontinuities]. *Osnovy gazovoy dinamiki*. Ed. G. Emmons. Moscow, Izd-vo inostr. lit. Publ., 1963, 702 p.
7. Bazhenova T. V., Gvozdeva L. G. *Nestatsionarnye vzaimodeystviya udarnykh voln* [Nonstationary interactions of shock waves]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 274 p.

8. Adrianov A. L., Uskov V. N., Starykh A. L. *Interferentsiya statsionarnykh gazodinamicheskikh razryvov* [Interference of stationary gas dynamic breaks]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1995, 180 p.
9. Uskov V. N., Chernyshov M. V. [Extreme shock-wave systems in problems of external aerodynamics]. *Teplofizika i aeromekhanika*. 2014, Vol. 21, No. 1, P. 15–31 (In Russ.).
10. Adrianov A. L. [Generalized differential relations on the shock wave]. *Vopr. atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matem. modelirovanie fiz. protsessov*. 2009, Is. 4, P. 22–30 (In Russ.).
11. Adrianov A. L. *Matematicheskoe modelirovanie udarnykh techeniy ideal'nogo i vyazkogo teploprovodnogo gaza na osnove diskretno-analiticheskogo podkhoda* [Mathematical modeling of shock flows of ideal and viscous heat-conducting gas on the basis of a discrete-analytical approach]. Krasnoyarsk, Sib. Feder. un-ty Publ., 2016, 216 p.
12. Rusanov V. V. Derivatives of gas-dynamic functions behind a curved shock wave. M., 1973. (Preprint of the USSR Academy of Sciences / Keldysh M. V. Institute of Applied Mathematics; No. 18).
13. Busemann A. [Hodographic method of gas dynamics]. *ZAMM*. 1937, No. 17 (2), P. 73–79.
14. Emelyanov V. N. Difference schemes in problems of gas dynamics on unstructured grids. Ed. by Prof. V. N. Emelyanov, Dr. phys.-math. sciences K. N. Volkova. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 416 p.

© Адрианов А. Л., Сизаско В., 2021

Адрианов Александр Леонидович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры летательных аппаратов, Институт космической техники, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева; профессор кафедры математического моделирования и процессов управления, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет. E-mail: adrian58al@gmail.com.

Сизаско Всеволод – аспирант; Сибирский федеральный университет.

Adrianov Alexander Leonidovich – Dr. Sc., Associate Professor, Professor of the Department of Aircraft; Institute of Space Technology; Reshetnev Siberian State University, Professor of the Department of Mathematical Modeling and Processes of controlling; Institute of Mathematics and Fundamental Informatics, Siberian Federal University. E-mail: adrian58al@gmail.com.

Sizasko Vsevolod – post-graduate student; Siberian Federal University.
