

УДК 539.3

Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-4-624-635

Для цитирования: Матвеев А. Д. Применение фиктивных дискретных моделей с переменными характеристическими размерами в расчетах на прочность композитных тел // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 4. С. 624–635. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-4-624-635.

For citation: Matveev A. D. Application of fictitious discrete models with variable characteristic dimensions in calculations for the strength of composite bodies. *Siberian Aerospace Journal*. 2021, Vol. 22, No. 4, P. 624–635. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-4-624-635.

Применение фиктивных дискретных моделей с переменными характеристическими размерами в расчетах на прочность композитных тел

А. Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
E-mail: mtv241@mail.ru

Для анализа напряженно-деформированного состояния однородных и композитных тел (КТ) эффективно применяется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ), в котором используются многосеточные конечные элементы (МнКЭ). ММКЭ порождает многосеточные дискретные модели малой размерности, в которых неоднородная структура тел учитывается в рамках микроподхода с помощью МнКЭ. Базовые дискретные модели (БМ), учитывающие неоднородную структуру тел, имеют высокую размерность. Для понижения размерности дискретных моделей тел используется ММКЭ. Однако, существуют БМ КТ (например, БМ тел с микронеоднородной структурой), которые имеют такую высокую размерность, что реализация ММКЭ для таких БМ, в силу ограниченности ресурсов ЭВМ, затруднительна. Кроме того, для многосеточных дискретных моделей высокой размерности ММКЭ порождает численно неустойчивые решения, что связано с погрешностью вычислений ЭВМ. Для решения данных проблем здесь предлагается в расчетах использовать фиктивные дискретные модели, особенность которых состоит в том, что их размерности меньше размерностей БМ КТ.

В данной работе предлагается метод фиктивных дискретных моделей (МФДМ) для расчета на статическую прочность упругих композитных тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой. МФДМ реализуется с помощью ММКЭ с применением скорректированных условий прочности, которые учитывают погрешность приближенных решений. В основе МФДМ лежит положение, что решения, отвечающие БМ КТ, мало отличаются от точных, т. е. эти решения считаем точными.

Расчет КТ по МФДМ сводится к построению и расчету на прочность фиктивных дискретных моделей (ФМ), которые обладают следующими свойствами. ФМ отражают форму, характерные размеры, крепление, нагружение и вид неоднородной структуры КТ, распределение модулей упругости, отвечающее БМ КТ. Размерности ФМ меньше размерности БМ КТ. Последовательность, состоящая из ФМ, сходится к БМ, т. е. предельная ФМ совпадает с БМ. Как показывают расчеты, сходимость такой последовательности обеспечивает равномерную сходимость максимальных эквивалентных напряжений ФМ к максимальному эквивалентному напряжению БМ КТ, что позволяет применять такие ФМ в расчетах упругих тел на прочность.

Рассматриваются два типа ФМ. Первый тип – масштабированные ФМ, второй – ФМ с переменными характеристическими размерами. В данной работе подробно рассматриваются ФМ второго типа. Расчеты показывают, что реализация ММКЭ для ФМ с одним, двумя или тремя переменными характеристическими размерами приводит к большой экономии ресурсов ЭВМ, что позволяет исполь-

зывать МФДМ для тел с микронеоднородной регулярной структурой. Расчеты на прочность КТ по МФДМ требуют в $10^3 \div 10^7$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет с использованием БМ КТ, и не содержат процедуру измельчения БМ. Приведенный пример расчета на прочность трехмерной композитной балки по МФДМ с применением ФМ с тремя переменными характеристическими размерами показывает его высокую эффективность.

Ключевые слова: упругость, композиты, скорректированные условия прочности, фиктивные дискретные модели, многосеточные конечные элементы.

Application of fictitious discrete models with variable characteristic dimensions in calculations for the strength of composite bodies

A. D. Matveev

Institute of Computational Modeling SB RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: mtv241@mail.ru

To analyze the stress-strain state of homogeneous and composite bodies (CB), the method of multigrid finite elements (MMFE) is effectively used, which uses multigrid finite elements (MgFE). MMFE generates multigrid discrete models of small dimension, in which the inhomogeneous structure of bodies is taken into account within the framework of a micro-approach using MgFE. Basic discrete models (BM), taking into account the heterogeneous structure of bodies, have a high dimension. To reduce the dimensionality of discrete models of bodies, MMFE is used. However, there are BM CB (for example, BM bodies with a micro-homogeneous structure), which have such a high dimension that the implementation of MMFE for such BM, due to limited computer resources, is difficult. In addition, for multigrid discrete models of high dimension, the MMFE generates numerically unstable solutions, which is associated with the error of computer calculations. To solve these problems, it is proposed here to use fictitious discrete models in calculations, the peculiarity of which is that their dimensions are smaller than the dimensions of BM CB.

In this paper, we propose a method of fictitious discrete models (MFDM) for calculating the static strength of elastic composite bodies with an inhomogeneous, micro-homogeneous molecular structure. MFDM is implemented using MMFE using adjusted strength conditions that take into account the error of approximate solutions. The MFDM is based on the position that the solutions that meet the BM CB differ little from the exact ones, i. e. we consider these solutions to be accurate.

The calculation of CB by MFDM is reduced to the construction and calculation of the strength of fictitious discrete models (FM), which have the following properties. FM reflect: the shape, characteristic dimensions, fastening, loading and type of inhomogeneous structure of the CB, and the distribution of elastic modulus corresponding to BM CB. The dimensions of FM are smaller than the dimensions of BM CB. The sequence consisting of FM converges to BM, i. e. the limiting FM coincides with BM. Calculations show that the convergence of such a sequence ensures uniform convergence of the maximum equivalent stresses of the FM to the maximum equivalent stress of the BM CB, which allows the use of such FM in the calculations of elastic bodies for strength.

Two types of FM are considered. The first type is scaled FM, the second type is FM with variable characteristic sizes. In this paper, the FM of the second type is considered in detail. Calculations show that the implementation of MMFE for FM with one, two or three variable characteristic sizes leads to a large saving of computer resources, which allows the use of MFDM for bodies with a micro-homogeneous regular structure. Calculations for the strength of CB according to MFDM require several times less computer memory than a similar calculation using BM CB, and does not contain a procedure for grinding BM. The

given example of calculating the strength of a three-dimensional composite beam according to MFDM using FM with three variable characteristic dimensions shows its high efficiency.

Keywords: elasticity, composites, adjusted strength conditions, fictitious discrete models, multigrid finite elements.

Введение

Статический расчет на прочность упругой конструкции (тела) V_0 проводится, как правило, по запасам прочности [1–3] и сводится к определению максимального эквивалентного напряжения конструкции. В этом случае для тела V_0 заданные условия прочности имеют вид $n_1 \leq n_0 \leq n_2$, где n_1 , n_2 заданы, n_0 – коэффициент запаса тела V_0 , $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$, σ_T – предельное напряжение тела V_0 , σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение тела V_0 , отвечающее точному решению задачи упругости, построенному для тела V_0 . Для максимальных эквивалентных напряжений, которые определяются приближенно, используются скорректированные условия прочности [4]. При анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих тел эффективно используется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [5–11], в котором используются многосеточные конечные элементы (МнКЭ) [5–17]. ММКЭ порождает многосеточные дискретные модели малой размерности, в которых неоднородная структура тел учитывается в рамках микроподхода [18] с помощью МнКЭ. Базовые дискретные модели (БМ) композитных тел (КТ), которые учитывают их неоднородную, микронеоднородную структуру в рамках микроподхода, имеют очень высокую размерность. Для понижения размерностей дискретных моделей очень результативно используется ММКЭ. Однако, например, БМ тел с микронеоднородной регулярной структурой имеют такую высокую размерность, что реализация ММКЭ для таких БМ, в силу ограниченности ресурсов ЭВМ, затруднительна. Кроме того, для многосеточных дискретных моделей высокой размерности ММКЭ порождает численно неустойчивые решения, что связано с погрешностью вычислений ЭВМ. Для решения данных проблем здесь предлагается в расчетах использовать фиктивные дискретные модели, особенность которых состоит в том, что их размерности меньше размерностей БМ КТ. Существующие приближенные подходы и методы расчета КТ имеют сложные формулировки и труднореализуемы для тел, имеющих сложную неоднородную структуру [19–26].

В данной работе предлагается метод фиктивных дискретных моделей (МФДМ) для расчета на прочность тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой. МФДМ реализуется с помощью ММКЭ с применением скорректированных условий прочности, которые учитывают погрешность численных решений. Введем определение для фиктивных дискретных моделей.

Определение. Дискретные модели КТ V будем называть фиктивными моделями (ФМ), если эти ФМ обладают следующими свойствами.

1. Неоднородные структуры ФМ отличаются (не отличаются) от неоднородной структуры БМ КТ V .
2. ФМ отражают: форму, характерные размеры, крепление, нагружение и вид неоднородной структуры КТ V , и распределение модулей упругости, отвечающее БМ КТ V .
3. Последовательность, состоящая из ФМ, сходится к БМ КТ V , т. е. предельная ФМ последовательности совпадает с БМ КТ V .
4. Размерности ФМ меньше размерности БМ КТ V , кроме предельной ФМ, размерность которой равна размерности БМ КТ V .

Здесь рассматриваются два основных типа ФМ. Первый тип – масштабированные ФМ, второй – ФМ с переменными характерными размерами.

В работе [27] в качестве ФМ подробно рассматриваются масштабированные композитные дискретные модели, размерности которых меньше размерности БМ КТ. Предлагаемые ФМ, образованные с помощью масштабированной регулярной ячейки КТ, имеют такие же характерные размеры, форму, крепления и нагружения, как БМ, но неоднородные структуры ФМ отличаются от неоднородной структуры БМ. Масштабированные ФМ отражают вид неоднородной структуры БМ КТ и распределение модулей упругости, отвечающее БМ. Сходимость последовательности масштабированных ФМ обеспечивает равномерную сходимость максимальных эквивалентных напряжений ФМ к максимальному эквивалентному напряжению БМ. Высокая эффективность применения масштабированных ФМ в МФДМ показана на примере расчета на прочность балки с неоднородной регулярной структурой [27].

В данной работе подробно рассматриваются ФМ второго типа. Расчеты показывают, что реализация ММКЭ для ФМ с одним, двумя или тремя переменными характерными размерами приводит к большой экономии ресурсов ЭВМ, что позволяет использовать МФДМ для тел с микронеоднородной регулярной структурой.

Расчет на прочность КТ по МФДМ требует в $10^3 \div 10^7$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет с использованием БМ КТ, и не содержит процедуру измельчения БМ. Приведенный пример расчета на прочность трехмерной композитной балки по МФДМ с применением ФМ с тремя переменными характерными размерами показывает его высокую эффективность.

1. Основные положения метода фиктивных дискретных моделей

МФДМ применяется для КТ с регулярной структурой, которые удовлетворяют следующим положениям.

Положение 1. КТ состоят из разномодульных изотропных однородных упругих тел, связи между которыми идеальны, т. е. на общих границах разномодульных изотропных однородных тел функции перемещений и напряжений являются непрерывными.

Положение 2. Перемещения, деформации и напряжения разномодульных изотропных однородных тел отвечают соотношениям трехмерной линейной задачи теории упругости [28].

Положение 3. Приближенные решения, которые отвечают БМ КТ, мало отличаются от точных. Такие приближенные решения будем считать точными. Отметим, что в силу сходимости ММКЭ такие БМ для КТ всегда существуют.

2. Фиктивные дискретные модели с переменными характерными размерами

На практике широко применяются композитные балки и оболочки с постоянным поперечным сечением, которые армированы непрерывными волокнами постоянной толщины. Волокна параллельны оси балки (оболочки).

Не теряя общности суждений, для простоты изложения, суть построения ФМ с одним переменным характерным размером рассмотрим на примере консольной балки, форма постоянного поперечного сечения которой есть симметричный двутавр, состоящий из 3-х прямоугольников (рис. 1). КТ V_0 , расположенное в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, при $y = 0$ жестко закреплено, т. е. при $y = 0$ имеем: $u, v, w = 0$. Ось Oy на рис. 1 параллельна оси балки V_0 . КТ V_0 армировано непрерывными волокнами сечением $h \times h$, которые параллельны оси Oy и имеют одинаковые модули упругости. На рис. 2 показано сечение балки, состоящее из 3-х прямоугольников, сечения волокон закрашены.

На рис. 1, 3 a, b – характерные размеры поперечного сечения БМ R_0 КТ V_0 и ФМ R_n, L_0 (L_n) – длина БМ R_0 (ФМ R_n), $L_n \leq L_0$. ФМ R_n имеет такое же крепление (т. е. при $y = 0$ ФМ R_n жестко закреплена) и такой же характер нагружения, как БМ R_0 .

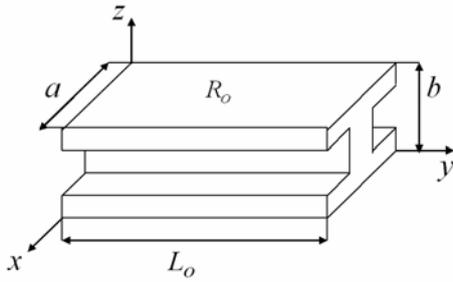


Рис. 1. Балка (КТ) V_0 , БМ R_0

Fig. 1. Beam (CB) V_0 , BM R_0

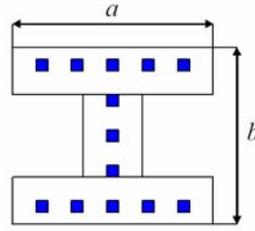


Рис. 2. Сечение КТ V_0

Fig. 2. Section of CB V_0

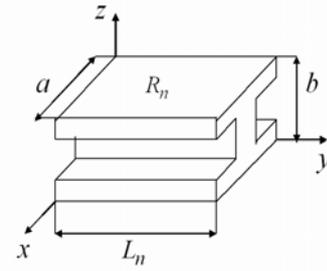


Рис. 3. ФМ R_n балки V_0

Fig. 3. FM R_n beams V_0

ФМ R_n имеет такую же неоднородную структуру, как КТ V_0 , т. е. ФМ R_n армирована непрерывными параллельными оси Oy волокнами сечением $h \times h$ и имеет такой же вид распределения волокон в поперечном сечении, как КТ V_0 (рис. 2). Модули упругости волокон и связующего материала КТ V_0 и ФМ R_n одинаковы. Для простоты изложения пусть

$$h = L_0 / N, \quad (1)$$

где N – целое; N – задано; $N \gg 1$; h – мало.

БМ R_0 КТ V_0 состоит из КЭ V_e 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС [28]), учитывает неоднородную структуру и сложную форму КТ V_0 . Пусть БМ R_0 порождает решение, которое мало отличается от точного и которое будем считать точным (полож. 3, п. 1). Неоднородная структура в ФМ R_n , как и в БМ R_0 , учитывается с помощью КЭ V_e 1-го порядка. Учитывая (1), размер L_n ФМ R_n находим по формуле

$$L_n = L_0 n / N = hn, \quad (2)$$

где n – целое, $n = n_0, \dots, N$, n_0 – задано, имеем $L_n \leq L_0$.

Из вышеизложенного, учитывая, что согласно (2) $L_n \rightarrow L_0$ при $n \rightarrow N$, следует, что

$$R_n \rightarrow R_0 \text{ при } n \rightarrow N. \quad (3)$$

При $n = N$ в силу (2), (3) имеем $R_N = R_0$. Тогда из выполнения (3) вытекает

$$\sigma_n \rightarrow \sigma_0 \text{ при } n \rightarrow N, \quad (4)$$

где σ_n (σ_0) – максимальное эквивалентное напряжение ФМ R_n (БМ R_0).

ФМ R_n и БМ R_0 состоят из КЭ V_e 1-го порядка формы куба со стороной h и поперечные сечения этих моделей одинаковы. Значит, сечения ФМ R_n и БМ R_0 имеют одинаковое число узлов, равное N_0 . Тогда общее число узлов M_0 БМ R_0 равно $M_0 = N_0(N + 1)$. Общее число узлов M_n ФМ R_n равно $M_n = N_0(n + 1)$. Отсюда следует, что при $n_0 \leq n < N$ имеем

$$M_n < M_0. \quad (5)$$

При $n = N$ имеем $M_N = M_0$, т. е. $R_N = R_0$. Итак, использование ФМ R_n с переменным размером L_n в расчетах на прочность по МФДМ КТ V_0 в силу (5) приводит к экономии ресурсов ЭВМ. Расчеты показывают наибольшую эффективность МФДМ при использовании в расчетах ФМ с тремя переменными характерными размерами.

3. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим модельную задачу расчета на прочность консольной балки V_0 с неоднородной регулярной волокнистой структурой размерами $48h \times 1152h \times 96h$ (рис. 4). Регулярная ячейка G_0 балки размерами $6h \times 6h \times 6h$ на рис. 5 расположена в локальной декартовой системе координат $Oxyz$, волокна сечением $h \times h$ направлены вдоль оси Oy , сечения волокон в плоскости Oxz закрашены, $i, j, k = 1, \dots, 7$.

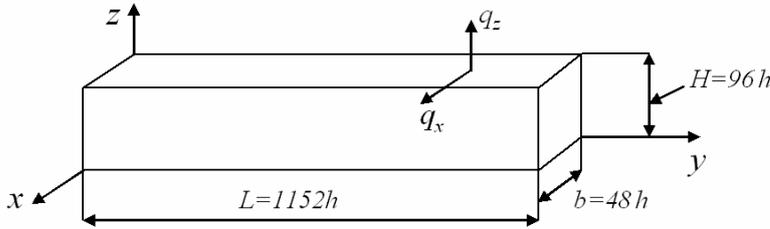


Рис. 4. Размеры балки V_0

Fig. 4. Dimensions of the beam V_0

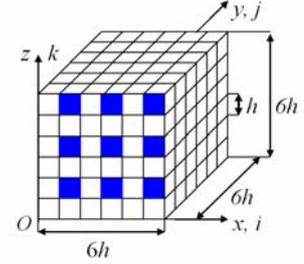


Рис. 5. Регулярная ячейка G_0

Fig. 5. Regular cell G_0

Балка армирована продольными непрерывными волокнами. При $y = 0$ балка жестко закреплена, на поверхности $z = H$ имеет нагружение q_x, q_z . Для коэффициента запаса n_0 балки заданы условия прочности

$$1,8 \leq n_0 \leq 3,4. \quad (6)$$

Для модельной задачи имеем следующие исходные данные:

$$h = 0,2083; \quad \sigma_T = 6; \quad E_c = 1, \quad E_v = 10, \quad \nu_c = \nu_v = 0,3, \quad (7)$$

где E_c, E_v (ν_c, ν_v) – модули Юнга (коэффициенты Пуассона) матрицы и волокна; σ_T – предел текучести волокна, на границе $z = H$; $0,5L \leq y \leq L$ задана нагрузка $q_z = q_x = 0,000375$ (рис. 4).

Базовая модель R_0 КТ V_0 состоит из односеточных конечных элементов (1сКЭ) V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС [28]), учитывает неоднородную структуру КТ V_0 и порождает равномерную сетку с шагом h размерности $49 \times 1153 \times 97$ с общим числом узловых неизвестных метода конечных элементов (МКЭ) [29; 30], равным $N_0 = 16426368$, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна $b_0 = 14556$. Считаем, что БМ R_0 КТ V_0 удовлетворяют полож. 3 п. 1. В расчетах используем ФМ R_n с тремя переменными характерными размерами, $b_n \times L_n \times H_n$ (рис. 6), где

$$b_n = 6hn, \quad L_n = 24 \times 6hn, \quad H_n = 2 \times 6hn, \quad (8)$$

т. е. ФМ R_n состоит из регулярных ячеек G_0 , рис. 5, $n = 2, \dots, 8$. При $n < 8$ имеем: $b_n < b$, $L_n < L$, $H_n < H$, при $n = 8$: $b_8 = b$, $L_8 = L$, $H_8 = H$, т. е. характерные размеры ФМ R_8 совпадает с размерами БМ КТ V_0 . Так как ФМ и БМ КТ V_0 представлены одинаковыми конечными элементами (КЭ) (см. п. 2), то $R_8 = R_0$. При $y = 0$ ФМ R_n жестко закреплена, на поверхности $z = H_n$, $0,5L_n \leq y \leq L_n$ имеет нагружение $q_z = q_x = 0,000375$.

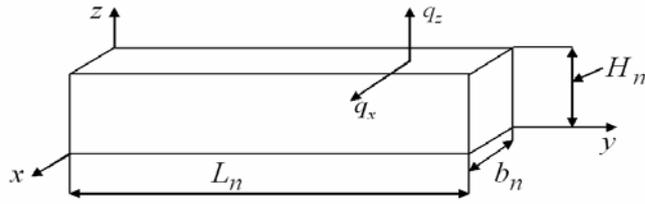


Рис. 6. Переменные характерные размеры ФМ R_n балки V_0
 Fig. 6. Variable characteristic dimensions of the FM R_n beam V_0

В расчетах используем двухсеточный КЭ (2сКЭ) $V_d^{(2)}$, имеющий размеры $6h \times 6h \times 6h$ (рис. 7), т. е. состоящий из одной регулярной ячейки G_0 (рис. 5). На базе модели R_n строим двухсеточную модель R_n^o , которая состоит из 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

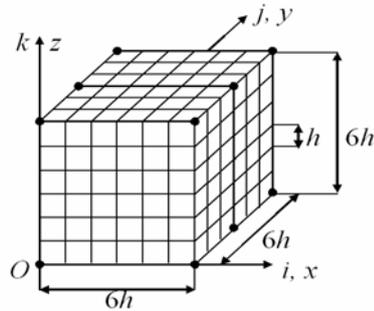


Рис. 7. Мелкая и крупная сетки 2сКЭ $V_d^{(2)}$
 Fig. 7. Small and large grids 2gFE $V_d^{(2)}$

На рис. 7 2сКЭ $V_d^{(2)}$ расположен в локальной декартовой системе координат $Oxyz$. При построении 2сКЭ $V_d^{(2)}$ используем две вложенные сетки: мелкую сетку h_d с шагом h размерности $7 \times 7 \times 7$ и крупную – H_d размерности $2 \times 3 \times 2$. По осям Ox , Oz сетка H_d имеет шаг $6h$, по оси Oy – шаг $3h$. На рис. 7 показаны сетки h_d и H_d , узлы крупной сетки H_d отмечены точками, 12 узлов. Мелкая сетка h_d порождена базовым разбиением R_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$, которое состоит из 1сКЭ V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС) и учитывает неоднородную структуру 2сКЭ $V_d^{(2)}$. Процедура построения матрицы жесткости и вектора узловых сил 2сКЭ $V_d^{(2)}$ подробно изложена в работе [27].

Результаты расчетов даны в табл. 1, где σ_n^o – максимальное эквивалентное напряжение модели R_n^o , найденное по 4-й теории прочности, N_n^o и b_n^o – размерность и ширина ленты СУ ММКЭ модели R_n^o , $n = 2, \dots, 7$, относительная погрешность δ_n (%) определяется по формуле

$$\delta_n(\%) = 100\% \times |\sigma_n^o - \sigma_{n-1}^o| / \sigma_n^o, \quad n = 2, \dots, 7. \quad (9)$$

Анализ результатов показывает равномерную монотонную сходимость напряжений σ_n^o и погрешностей $\delta_n(\%)$, $n = 2, \dots, 7$.

Таблица 1

Результаты расчетов для моделей $R_2^o - R_7^o$

n	R_n^o	σ_n^o	$\delta_n(\%)$	N_n^o	b_n^o	n	R_n^o	σ_n^o	$\delta_n(\%)$	N_n^o	b_n^o
2	R_2^o	1,801	–	4320	105	5	R_5^o	2,373	7,33	47520	420
3	R_3^o	1,993	9,61	12096	186	6	R_6^o	2,525	6,03	78624	573
4	R_4^o	2,199	9,36	25920	291	7	R_7^o	2,661	5,12	120960	751

Так как $R_8 = R_0$, то напряжение σ_8^o ФМ R_8^o , равное $\sigma_8^o = 2,785$, считаем точным решением, т. е. $\sigma_0 = 2,785$ (см. п. 2, полож. 3 п. 1). В расчетах на прочность упругих тел по МФДМ используются скорректированные условия прочности (учитывающие погрешность приближенных решений), которые представлены в следующей теореме.

Теорема. Пусть для коэффициента запаса n_0 упругого тела V_0 заданы условия прочности

$$n_1 \leq n_0 \leq n_2, \quad (10)$$

где n_1, n_2 – заданы, $n_1 > 1$; $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$, σ_T – предельное напряжение тела V_0 ; σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение тела V_0 , которое отвечает точному решению задачи теории упругости, построенному для тела V_0 .

Пусть коэффициент запаса n_b тела V_0 , отвечающий приближенному решению задачи теории упругости, удовлетворяет скорректированным условиям прочности

$$\frac{n_1}{1 - \delta_\alpha} \leq n_b \leq \frac{n_2}{1 + \delta_\alpha}. \quad (11)$$

Тогда коэффициент запаса n_0 тела V_0 , отвечающий точному решению задачи теории упругости, удовлетворяет заданным условиям прочности (10), где $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, σ_b – максимальное эквивалентное напряжение тела V_0 , отвечающее приближенному решению задачи теории упругости, построенному для тела V_0 , и найденное с такой погрешностью δ_b , что

$$|\delta_b| \leq \delta_\alpha < C_\alpha = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}, \quad (12)$$

где δ_α – верхняя оценка относительной погрешности δ_b , δ_α – задано, погрешность δ_b для напряжения σ_b определяется по формуле $\delta_b = (\sigma_0 - \sigma_b) / \sigma_0$.

Отметим, что если тело V_0 состоит из пластичных материалов, то σ_T – предел текучести. Из (12) следует, что если $n_2 - n_1$ мало, то σ_b необходимо определять с малой погрешностью δ_b .

Доказательство теоремы изложено в работе [4].

Для заданных $n_1 = 1,8$ и $n_2 = 3,4$ согласно (12) имеем $C_\alpha = 0,31$. Расчеты показывают, что если $\delta_n(\%) \leq 10\%$, то погрешность напряжения σ_n^o модели R_n^o не более 15%. Напряжения $\sigma_6^o = 2,525$ и $\sigma_5^o = 2,373$ отличаются на $\delta_6(\%) = 6,028\%$ (см. табл. 1), тогда погрешность напряжения σ_6^o не более 15%, т. е. имеем $\delta_\alpha \leq 0,15$. Отметим, что $\sigma_6^o = 2,525$ отличается от точного напряжения $\sigma_0 = 2,785$ на 9,33%. Принимаем $\delta_\alpha = 0,15$, $\sigma_b = \sigma_6^o$. Условие (12) для δ_α выполняется, т. е. имеем $\delta_\alpha = 0,15 < C_\alpha = 0,31$. Используя $\delta_\alpha = 0,15$, $n_1 = 1,8$ и $n_2 = 3,4$ в (11) получаем

$$2,12 \leq n_b \leq 2,96. \quad (13)$$

Используя $\sigma_b = 2,525$, $\sigma_T = 6$, находим коэффициент запаса n_b для КТ V_0 по формуле

$$n_b = \sigma_T / \sigma_b = 6 / 2,525 = 2,38. \quad (14)$$

Так как найденный коэффициент n_b удовлетворяет скорректированным условиям прочности (13), то согласно выше сформулированной теореме коэффициент запаса n_0 КТ V_0 , отвечающий точному решению задачи упругости, найденному для КТ V_0 , удовлетворяет заданным условиям прочности (6), т. е. $1,8 \leq n_0 \leq 3,4$. В самом деле, $n_0 = \sigma_T / \sigma_0 = 6 / 2,785 = 2,15$, коэффициент запаса $n_0 = 2,15$ КТ V_0 удовлетворяет заданным условиям прочности (6), т. е. имеем $1,8 < 2,15 < 3,4$.

В расчетах на прочность КТ V_0 по МФДМ используем дискретную модель R_6^o , которая требует в $k = \frac{N_0 \times b_0}{N_6^o \times b_6^o} = \frac{16426368 \times 14556}{78624 \times 573} = 5307,30$ раз меньше объема памяти ЭВМ, т. е. почти в $5,3 \times 10^3$ раз меньше, чем БМ R_0 КТ V_0 , что показывает высокую эффективность реализации МФДМ с применением ФМ с тремя переменными характерными размерами.

Заключение

Предложен метод фиктивных дискретных моделей (МФДМ) для расчета на статическую прочность упругих тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой. Предлагаемый метод сводится к построению и расчету на прочность фиктивных дискретных моделей (ФМ), размерности которых меньше размерностей базовых дискретных моделей (БМ) композитных тел (КТ), и реализуется с применением метода многосеточных конечных элементов (ММКЭ) и скорректированных условий прочности, которые учитывают погрешность приближенных решений. Здесь ФМ представляются двумя основными типами. Первый тип – масштабированные ФМ, второй тип – ФМ с переменными характерными размерами. В данной работе подробно рассматриваются ФМ второго типа. Расчеты показывают, что реализация ММКЭ для ФМ с переменными характерными размерами приводит к большой экономии ресурсов ЭВМ, что позволяет использовать МФДМ для тел с микронеоднородной регулярной структурой. Расчеты на прочность КТ по МФДМ требуют в $10^3 \div 10^7$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет с использованием БМ КТ, и не содержат процедуру измельчения БМ. Приведенный пример расчета на прочность композитной балки по МФДМ с применением ФМ с тремя переменными характерными размерами показывает его высокую эффективность.

Библиографические ссылки

1. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1975. 704 с.
2. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. М. : Машиностроение, 1993. 640 с.
3. Москвичев В. В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. Новосибирск : Наука, 2002. 106 с.
4. Матвеев А. Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности // Известия АлтГУ. Математика и механика. 2017. № 4. С. 116–119. Doi: 10.14258/izvasu(2017)4-21.

5. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия: Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, кн. 4. С. 530–543.
6. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок // Вестник КрасГАУ. 2016. № 12. С. 93–100.
7. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. Vol. 158, № 1. P. 1–9.
8. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок сложной формы // Вестник КрасГАУ. 2017. № 11. С. 131–140.
9. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2018. № 2. С. 90–103.
10. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных оболочек вращения и двоякой кривизны // Вестник КрасГАУ. 2018. № 3. С. 126–137.
11. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в решении физических краевых задач. // Информационные технологии и математическое моделирование. 2017. С. 27–60.
12. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов. // Деп. в ВИНТИ № 2990–В00. 2000. 30 с.
13. Матвеев А. Д. Смешанные дискретные модели в анализе упругих трехмерных неоднородных тел сложной формы // Вестник ПНИПУ. Механика. Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. Политехн. ун-та. 2013. № 1. С. 182–195.
14. Матвеев А. Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // Прикладная механика и техническая физика. 2004. № 3. С. 161–171.
15. Матвеев А. Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микрон неоднородной структурой // Известия АлтГУ. Серия: Математика и механика. 2014. № 1/1. С. 80–83. Doi: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.
16. Матвеев А. Д. Метод образующих конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2018. № 6. С. 141–154.
17. Матвеев А. Д. Построение многосеточных конечных элементов для расчета оболочек, пластин и балок на основе образующих конечных элементов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 3. С. 48–57. Doi: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.
18. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М. : Мир, 1982. 232 с.
19. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М. : ФИЗМАТЛИТ. 2008. 432 с.
20. Немировский Ю. В., Резников Б. С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск : Наука, Сибирское отделение. 1984. 164 с.
21. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. М. : Наука. 1985. 201 с.
22. Алфутов Н. А., Зиновьев А. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.
23. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М. : МГУ, 1984. 336 с.
24. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск : Наука, 2001. 288 с.
25. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Киев : Наукова думка. 1985. 302 с.
26. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988. 269 с.

27. Матвеев А. Д. Метод фиктивных дискретных моделей в расчетах тел с неоднородной регулярной структурой // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 2. С. 244–260. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-2-244-260.
28. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высшая школа, 1982. 264 с.
29. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов: М. : Мир, 1981. 304 с.
30. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975. 542 с.

References

1. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Handbook of resistance materials']. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1975, 704 p.
2. Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B. *Raschet na prochnost' detalej mashin* [Calculation of the strength of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1993, 640 p.
3. Moskvichev V. V. *Osnovy konstrukcionnoy prochnosti tekhnicheskikh sistem i inzhenernykh sooruzheniy* [Fundamentals of structural strength of technical systems and engineering structures]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2002, 106 p.
4. Matveev A. D. [Calculation of elastic structures using the adjusted terms of strength]. *Izvestiya AltGU*. 2017, No. 4, P. 116–119. Doi: 10.14258/izvasu(2017)4-21.
5. Matveev A. D. [The method of multigrid finite elements in the calculations of three-dimensional homogeneous and composite bodies]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Seriya: Fiz.-matem. Nauki*. 2016, Vol. 158, Is. 4, P. 530–543 (In Russ.).
6. Matveev A. D. [Multigrid method for finite elements in the analysis of composite plates and beams]. *Vestnik KrasGAU*. 2016, No. 12, P. 93–100 (In Russ.).
7. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2016, Vol. 158, No. 1, Art. 012067, P. 1–9.
8. Matveev A. D. [Multigrid finite element Method in the calculations of composite plates and beams of irregular shape]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2017, No. 11, P. 131–140.
9. Matveev A. D. [Multigrid finite element Method]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 2, P. 90–103 (In Russ.).
10. Matveev A. D. [The method of. multigrid finite elements of the composite rotational and bi-curved shell calculations]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 3, P. 126–137 (In Russ.).
11. Matveev A. D. [Method of. multigrid finite elements to solve physical boundary value problems]. *Information technologies and mathematical modeling*. Krasnoyarsk, 2017, P. 27–60.
12. Matveev A. D. [Some approaches of designing elastic multigrid finite elements]. *VINITI Proceedings*. 2000, No. 2990-B00, P. 30 (In Russ.).
13. Matveev A. D. [Mixed discrete models in the analysis of elastic three-dimensional inhomogeneous bodies of complex shape]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika*. 2013, No. 1, P. 182–195 (In Russ.).
14. Matveev A. D. [Multigrid modeling of composites of irregular structure with a small filling ratio]. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2004, No. 3, P. 161–171 (In Russ.).
15. Matveev A. D. [The construction of complex multigrid finite element heterogeneous and micro-inhomogeneities in structure]. *Izvestiya AltGU. Seriya: Matematika i mekhanika*. 2014, No. 1/1, P. 80–83 (In Russ.). Doi: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.
16. Matveev A. D. [Method of generating finite elements]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 6, P. 141–154 (In Russ.).
17. Matveev A. D. [Construction of multigrid finite elements to calculate shells, plates and beams based on generating finite elements]. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019, No. 3, P. 48–57 (In Russ.). Doi: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.

18. Fudzii T., Dzako M. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1982, 232 p.
19. Golushko S. K., Nemirovskij Y. V. *Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugih kompozitsionnykh plastin i obolochek vrashcheniya* [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of rotation]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2008, 432 p.
20. Nemirovskij Y. V., Reznikov B. S. *Prochnost' elementov konstrukcij iz kompozitsionnykh materialov* [Strength of structural elements made of composite materials]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984, 164 p.
21. Kravchuk A. S., Majboroda V. P., Urzhumcev Y. S. *Mekhanika polimernykh i kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of polymer and composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 201 p.
22. Alfutov N. A., Zinov'ev A. A., Popov B. G. *Raschet mnogoslojnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 264 p.
23. Pobedrya B. E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MGU Publ., 1984, 336 p.
24. Andreev A. N., Nemirovskij Y. V. *Mnogosloynnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustoychivost', kolebaniya* [Multilayer anisotropic shells and plates. Bending, stability, vibration]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2001, 288 p.
25. Vanin G. A. *Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985, 302 p.
26. Vasil'ev V. V. *Mekhanika konstrukcij iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 269 p.
27. Matveev A. D. [The method of fictitious discrete models in calculations bodies with inhomogeneous regular structure]. *Siberian Aerospace Journal*. 2021, Vol. 22, No. 2. P. 244–260. (In Russ.) Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-2-244-260.
28. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1982, 264 p.
29. Norri D., de Friz Zh. *Vvedenie v metod konechnykh elementov* [Introduction to the finite element method]. Moscow, Mir Publ., 1981, 304 p.
30. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 544 p.

© Матвеев А. Д., 2021

Матвеев Александр Данилович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник; Институт вычислительного моделирования СО РАН. E-mail: mtv241@mail.ru.

Matveev Alexander Danilovich – Cand. Sc., associate Professor, senior researcher; Institute of computational modeling SB RAS. E-mail: mtv241@mail.ru.
