

**Для цитирования:** Матвеев А. Д. Метод эквивалентных условий прочности в расчетах композитных конструкций регулярной структуры с применением многосеточных конечных элементов // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20, № 4. С. 423–435. Doi: 10.31772/2587-6066-2019-20-4-423-435

**For citation:** Matveev A. D. The method of equivalent strength conditions in calculating composite structures with a regular structure using multigrid finite elements. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2019, Vol. 20, No. 4, P. 423–435. Doi: 10.31772/2587-6066-2019-20-4-423-435

## МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УСЛОВИЙ ПРОЧНОСТИ В РАСЧЕТАХ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ МНОГОСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН  
Российская Федерация, 630036, г. Красноярск, Академгородок, стр. 50/44  
E-mail: mtv241@mail.ru

*Пластины, балки и оболочки с неоднородной и микронеоднородной регулярной структурой широко применяются в авиационной и ракетно-космической технике. На этапе эскизного проектирования первоначально важно знать, удовлетворяет ли коэффициент запаса конструкции заданным условиям прочности. Для определения коэффициента запаса необходимо решить по методу конечных элементов (МКЭ) задачу упругости для проектируемой конструкции с учетом ее неоднородной структуры, что требует больших ресурсов ЭВМ. В данной работе предложен метод эквивалентных условий прочности (МЭУП) для расчета на прочность упругих конструкций с неоднородной регулярной структурой. Предлагаемый метод сводится к расчету на прочность изотропных однородных тел с применением эквивалентных условий прочности. В основе МЭУП лежит следующее утверждение. Для всякого композитного тела  $V_0$  существует такое изотропное однородное тело  $V^b$  и такое число  $p$  (коэффициент эквивалентности), что если коэффициент запаса  $n_b^0$  тела  $V^b$  удовлетворяет эквивалентным условиям прочности  $pn_1 \leq n_b^0 \leq pn_2$ , то коэффициент запаса  $n_0$  тела  $V_0$  удовлетворяет заданным условиям прочности  $n_1 \leq n_0 \leq n_2$ , и наоборот,  $n_1, n_2$  – заданы, коэффициенты  $n_b^0, n_0$  отвечают точным решениям задач упругости, построенных для тел  $V^b$  и  $V_0$ . Расчет на прочность по МКЭ изотропных однородных тел наиболее простой в реализации и требует меньше памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет тел с учетом их неоднородной структуры. Изложена процедура определения коэффициента эквивалентности  $p$  с помощью МКЭ. При построении решений по МКЭ для изотропных однородных тел применяются многосеточные конечные элементы, порождающие модели малой размерности и решения с малой погрешностью. Скорректированные эквивалентные условия прочности имеют вид  $pn_1(1 + \varepsilon_1) \leq n_b \leq pn_2(1 - \varepsilon_2)$ , где  $n_b$  – коэффициент запаса тела  $V^b$  и величины  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  отвечают приближенному решению. Реализация МКЭ для многосеточных дискретных моделей требует в  $10^3 \div 10^6$  раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовых. Приведен расчет на прочность балки с микронеоднородной регулярной структурой с помощью МЭУП.*

*Ключевые слова:* упругость, композиты, эквивалентные условия прочности, многосеточные конечные элементы, пластины, балки, оболочки.

## THE METHOD OF EQUIVALENT STRENGTH CONDITIONS IN CALCULATING COMPOSITE STRUCTURES WITH A REGULAR STRUCTURE USING MULTIGRID FINITE ELEMENTS

A. D. Matveev

Institute of Computational Modeling  
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation  
E-mail: mtv241@mail.ru

*Plates, beams and shells with non-uniform and micro-inhomogeneities regular structure are widely used in aviation and rocket and space technology. At the preliminary design stage, it is initially important to know whether the design safety factor meets the specified strength conditions. To determine the margin factor, it is necessary to solve the elastic-*

ity problem for the designed structure by the finite element method (FEM), taking into account its inhomogeneous structure, which requires large computer resources. In this paper, we propose a method of equivalent strength conditions (MESOC) for calculating the static strength of elastic structures with a inhomogeneous regular structure. The proposed method is reduced to the calculation of the strength of isotropic homogeneous bodies using equivalent strength conditions. The MESOC is based on the following statement. For any composite body  $V_0$ , there exists such an isotropic homogeneous body  $V^b$  and such a number  $p$  (equivalence coefficient) that if the body  $V^b$  stock coefficient satisfies  $n_b^0$  the equivalent strength conditions  $pn_1 \leq n_b^0 \leq pn_2$ , then the body  $V_0$  stock coefficient satisfies  $n_0$  the given strength conditions  $n_1 \leq n_0 \leq n_2$ , and Vice versa,  $n_1, n_2$  – given, the coefficients  $n_b^0, n_0$ , meet the exact solutions of elasticity problems constructed for bodies  $V_0, V^b$ . The method under consideration is reduced to FEM strength calculation of isotropic homogeneous bodies, which is the easiest to implement and requires less computer memory than a similar calculation of composite bodies taking into account their inhomogeneous structure. The procedure for determining the equivalence coefficients for a number of composite plates, beams and shells of rotation is described. High-precision multigrid finite elements generating discrete models of small dimension and solutions with small error are used in the construction of elastic solutions according to FEM for isotropic homogeneous bodies. The adjusted equivalent strength conditions are of the form  $pn_1(1 + \varepsilon_1) \leq n_b \leq pn_2(1 - \varepsilon_2)$ , where  $n_b$  is the body  $V^b$  reserve coefficient and the values  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  correspond to the approximate solution constructed for the body  $V^b$ . Implementation of FEM for multigrid discrete models requires several  $10^3 \div 10^6$  times less computer memory than for basic models. The calculation of the strength of a beam with a micro-homogeneous regular structure with the help of MESOC is given.

*Keywords: elasticity, composites, equivalent strength conditions, multigrid finite elements, plates, beams, shells.*

**Введение.** Расчет на прочность конструкции является одним из важнейших на этапе эскизного проектирования [1], которое является технико-экономическим обоснованием проекта конструкции. Как правило, расчет на прочность конструкций проводится по запасам прочности [1–3]. Согласно этому расчету для коэффициента запаса  $n_0$  проектируемой конструкции  $V_0$  заданные условия прочности имеют вид

$$n_1 \leq n_0 \leq n_2, \quad (1)$$

где  $n_1, n_2$  – заданы,  $n_1 > 1$ .

На этапе эскизного проектирования конструктору в первую очередь важно знать, удовлетворяет или не удовлетворяет коэффициент запаса  $n_0$  проектируемой конструкции  $V_0$  заданным условиям прочности (1). Если коэффициент  $n_0$  удовлетворяет заданным условиям прочности, то считают, что конструкция  $V_0$  не разрушается при (заданных условиях) эксплуатации. Следует отметить, что в этом случае нет необходимости детально исследовать напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции  $V_0$ . Расчет на прочность конструкции  $V_0$  сводится к нахождению ее коэффициента запаса  $n_0$  и проверке условий прочности (1) для коэффициента  $n_0$ . Коэффициент запаса  $n_0$  определяют по формуле  $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$  [1–3], где  $\sigma_T$  – предельное напряжение конструкции  $V_0$  (предел текучести [3]),  $\sigma_0$  – максимальное эквивалентное напряжение конструкции  $V_0$ . Отметим, что коэффициент запаса  $n_0$  отвечает точному решению задачи упругости, сформулированной для конструкции  $V_0$ . Если максимальные эквивалентные напряжения конструкций определяются приближенно, то в этом слу-

чае используются скорректированные условия прочности [4]. При анализе НДС композитных конструкций широко используют метод конечных элементов (МКЭ) [5–8]. Базовые дискретные модели конструкций с неоднородной и микронеоднородной структурой, которые состоят из конечных элементов (КЭ) 1-го порядка и учитывают их структуры в рамках микроподхода [9], имеют очень высокую размерность, что порождает трудности при реализации МКЭ на ЭВМ. Для таких моделей эффективно используется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [10–12], в котором используются многосеточные конечные элементы (МнКЭ) [13; 14]. Следует отметить, МКЭ есть частный случай ММКЭ, и если при решении краевых задач по МКЭ используются МнКЭ, то в этом случае, по сути, реализуется ММКЭ.

Для практики важно знать погрешность приближенного решения, которое используется в расчетах. Оценить погрешность приближенных решений можно тогда, когда они мало отличаются друг от друга и при этом образуют последовательность решений, которая быстро сходится к точному решению. При построении таких последовательностей применяется процедура измельчения исходного разбиения области тела на КЭ. Процедуры измельчения, используемые для разбиений, которые построены для неоднородной и микронеоднородной (волокнистой) структуры, сложные и трудно реализуемы. Так как волокна имеют малую толщину, то измельчение таких разбиений приводит к резкому увеличению размерностей дискретных моделей. Реализация МКЭ для таких моделей требует больших ресурсов ЭВМ. Кроме того, на закон измельчения накладываются определенные ограничения, связанные с тем, что на каждом шаге измельчения разбиений необходимо учитывать микронеоднородную структуру по микроподходу. Как известно, процедура измельчения, применяемая для дискретных моделей однородных изотропных тел, наиболее

простая в реализации и требует меньше памяти ЭВМ, чем для тел с неоднородной и микронеоднородной структурой (с учетом их структуры).

В данной работе предложен метод эквивалентных условий прочности (МЭУП) для статического расчета на прочность линейно упругой конструкции  $V_0$  с неоднородной (микронеоднородной) регулярной структурой, состоящей из пластичных материалов. Для простоты изложения считаем, что тело  $V_0$  имеет волокнистую структуру. Показано, что расчет на прочность композитного тела  $V_0$  сводится к расчету на прочность (с помощью МКЭ) изотропного однородного тела  $V^b$ . Тела  $V_0$ ,  $V^b$  имеют одинаковые форму, размеры, закрепление и нагружение. Модули упругости тела  $V^b$  и волокна совпадают. В расчетах применяются скорректированные эквивалентные условия прочности вида

$$pn_1(1 + \varepsilon_1) \leq n_b \leq pn_2(1 - \varepsilon_2), \quad (2)$$

где  $\varepsilon_1 = 1/(1 - \delta_p) - 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1 - 1/(1 + \delta_p)$ ;  $p$  – коэффициент эквивалентности;  $n_b$  – коэффициент запаса тела  $V^b$ ,  $n_b = \sigma_T / \sigma^b$ ;  $\sigma_T$  – предел текучести волокна;  $\sigma^b$  – максимальное эквивалентное напряжение тела  $V^b$  (определяемое с помощью МКЭ);  $\delta_p$  – погрешность для напряжения  $\sigma^b$ ,  $0 \leq \delta_p < 1$ .

Показано, что если коэффициент запаса  $n_b$  изотропного однородного тела  $V^b$  удовлетворяет скорректированным эквивалентным условиям прочности (2), то коэффициент запаса  $n_0$  композитного тела  $V_0$  (отвечающий точному решению задачи упругости) удовлетворяет заданным условиям прочности (1). Таким образом, реализация предлагаемого метода сводится к построению скорректированных эквивалентных условий прочности (2) и нахождению коэффициента запаса  $n_b$  тела  $V^b$ , т. е. к определению коэффициента эквивалентности  $p$  и к нахождению с помощью МКЭ максимального эквивалентного напряжения  $\sigma^b$  для тела  $V^b$  (с погрешностью  $\delta_p$ ). Коэффициент эквивалентности  $p$  находим по формуле  $p = \sigma_0 / \sigma^b$ , где  $\sigma_0$  – максимальное эквивалентное напряжение тела  $V_0$ . Напряжения  $\sigma_0$  для композитного тела  $V_0$  и  $\sigma^b$  для изотропного однородного тела  $V^b$  определяем по МКЭ (с применением МнКЭ). Для построения оценки погрешности приближенных решений используются последовательности решений (полученные с помощью МКЭ), которые быстро сходятся к точным.

Достоинства МЭУП состоят в следующем. В расчетах используем изотропные однородные конструкции, которые имеют такие же формы и размеры, закрепления и нагружения, как композитные конструкции. При анализе НДС изотропных однородных конструкций по МКЭ применяются МнКЭ, которые

позволяют строить последовательности решений быстросходящиеся к точным, что позволяет определить погрешность для полученных приближенных решений. МнКЭ для изотропных однородных конструкций порождают дискретные модели малой размерности и приближенные решения с малой погрешностью. Реализация МКЭ для многосеточных дискретных моделей требует в  $10^3 \div 10^6$  раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовых. При реализации МЭУП не используются процедуры измельчения дискретных моделей композитных конструкций. Приведен пример расчета на прочность балки с микронеоднородной регулярной волокнистой структурой с помощью МЭУП.

**Основные положения для конструкций.** В работе рассматриваются трехмерные конструкции (тела), для которых выполняются следующие условия.

*Положение 1.* Рассматриваются в декартовых системах координат трехмерные линейно упругие изотропные однородные и композитные тела (конструкции), которые состоят из пластичных материалов, имеют гладкие границы, статические нагружения и одинаковые условия эксплуатации. Функции нагружений тел являются гладкими функциями. Тела имеют границы закрепления, которые не вырождаются в точки. Композитные тела состоят из разномодульных изотропных однородных тел, связи между которыми идеальны, т. е. на общих границах разномодульных однородных тел функции перемещений и напряжений являются непрерывными. Перемещения, деформации и напряжения разномодульных тел отвечают соотношениям Коши и закону Гука трехмерной линейной задачи теории упругости [15]. Эквивалентные напряжения для упругих тел определяются по 4-й теории прочности [1].

**Эквивалентные условия прочности и эквивалентные по прочности конструкции, выраженные через коэффициенты запаса.** Пусть две упругие конструкции  $V_1$  и  $V_2$  имеют одинаковые форму, геометрические размеры, закрепления и статические нагружения, но отличаются модулями упругости. Пусть для коэффициентов запаса  $n_1$ ,  $n_2$  соответственно конструкций  $V_1$ ,  $V_2$  заданы условия прочности

$$n_a^1 \leq n_1 \leq n_b^1, \quad (3)$$

$$n_a^2 \leq n_2 \leq n_b^2, \quad (4)$$

где  $n_a^1, n_a^2 > 1$ ;  $n_a^1, n_a^2, n_b^1, n_b^2$  – заданы; коэффициент  $n_1$  ( $n_2$ ) отвечает точному решению задачи упругости, сформулированной для конструкции  $V_1$  ( $V_2$ ).

Для конструкций  $V_1$ ,  $V_2$  введем следующие два определения.

*Определение 1.* Если из выполнения условий (4) для коэффициента  $n_2$  следует выполнение условий (3) для коэффициента  $n_1$  и наоборот, если из выполнения условий (3) для коэффициента  $n_1$  следует выполнение условий (4) для коэффициента  $n_2$ , тогда условия прочности (3), (4) будем называть эквива-

лентными условиями прочности соответственно для конструкций  $V_1, V_2$ .

*Определение 2.* Пусть конструкции  $V_1, V_2$ , для которых соответственно условия (3), (4) являются эквивалентными условиями прочности, не разрушаются при одинаковых условиях эксплуатации. Тогда конструкции  $V_1, V_2$  будем называть эквивалентными по прочности.

На практике эквивалентность по прочности конструкций  $V_1, V_2$  означает, что вместо работающей конструкции  $V_1$  можно использовать конструкцию  $V_2$ , и наоборот. Отметим, что из двух эквивалентных по прочности конструкций целесообразно использовать в работе такую конструкцию, которая более технологична в изготовлении, отвечает заданным техническим требованиям и требует меньше финансовых затрат на изготовление и эксплуатацию.

**Теорема о существовании эквивалентных условий прочности.** Рассмотрим теорему, в которой доказывается существование эквивалентных условий прочности для упругих композитных конструкций (тел).

*Теорема 1.* Пусть на трехмерное линейно упругое композитное тело  $V_0$  (расположенное в декартовой системе координат  $Oxyz$ ) действуют заданные статические поверхностные силы  $\mathbf{q}$ , т. е. силы, действующие на незакрепленной части границы  $S_q$  тела  $V_0$ , и объемные силы  $\mathbf{p}$ , где  $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}^T$ ,  $\mathbf{p} = \{p_x, p_y, p_z\}^T$ ;  $q_x, q_y, q_z, p_x, p_y, p_z$  – гладкие функции координат  $x, y, z$ . На границе  $S_u$  тело  $V_0$  жестко закреплено, т. е. на  $S_u$ :  $u = v = w = 0$ ,  $S_0 = S_u + S_q$ ,  $S_0$  – гладкая граница тела  $V_0$ . Тело  $V_0$  состоит из компонент  $V_i$ , т. е. из пластичных разномодульных изотропных однородных тел  $V_i$ , где  $i = 1, \dots, N$ ,  $N$  – общее число тел  $V_i$  тела  $V_0$ . Пусть максимальное эквивалентное напряжение композитного тела  $V_0$  возникает в теле  $V_\alpha, 1 \leq \alpha \leq N$ . Пусть для коэффициента запаса  $n_0$  композитного тела  $V_0$  (который отвечает точному решению задачи упругости для тела  $V_0$ ) заданы условия прочности

$$n_1 \leq n_0 \leq n_2, \quad (5)$$

где  $n_1, n_2$  – заданы,  $n_1 > 1$ .

Тогда существуют такое трехмерное упругое изотропное однородное тело  $V^b$  и такие числа  $n_1^p, n_2^p$ , что если коэффициент запаса  $n_b^0$  тела  $V^b$  (отвечающий точному решению задачи упругости для тела  $V^b$ ) удовлетворяет эквивалентным условиям прочности вида

$$n_1^p \leq n_b^0 \leq n_2^p, \quad (6)$$

то коэффициент запаса  $n_0$  композитного тела  $V_0$  удовлетворяет условиям прочности (5), и наоборот.

Если коэффициента запаса  $n_0$  композитного тела  $V_0$  удовлетворяет условиям (5), то коэффициент запаса  $n_b^0$  изотропного однородного тела  $V^b$  удовлетворяет условиям (6), причем, между коэффициентами запаса  $n_0, n_b^0$  существует взаимно однозначная связь.

*Доказательство.* Пусть однородное изотропное тело  $V^b$  и композитное тело  $V_0$  имеют одинаковые форму, размеры, крепления и нагружения, но отличаются модулями упругости. Пусть модули упругости тела  $V^b$  равны модулям упругости тела  $V_\alpha$  композитного тела  $V_0, 1 \leq \alpha \leq N$ . Коэффициенты запаса  $n_0, n_b^0$  находим по формулам (1–3)

$$n_0 = \sigma_T / \sigma_0, \quad (7)$$

$$n_b^0 = \sigma_T / \sigma_b^0, \quad (8)$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести тела  $V_\alpha$  [3];  $\sigma_0, \sigma_b^0$  – максимальные эквивалентные напряжения, возникающие соответственно в телах  $V_0, V^b$  и отвечающие точным решениям задач упругости.

Пусть коэффициент  $n_0$  удовлетворяет условиям прочности (5). Тогда подставляя (7) в (5) получим неравенства

$$n_1 \leq \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \leq n_2. \quad (9)$$

Существует такое число  $p$  (коэффициент эквивалентности), что

$$p = \sigma_0 / \sigma_b^0. \quad (10)$$

Учитывая (10) в (9), имеем

$$pn_1 \leq \frac{\sigma_T}{\sigma_b^0} \leq pn_2. \quad (11)$$

Используя (8) в (11), получаем

$$pn_1 \leq n_b^0 \leq pn_2. \quad (12)$$

Существуют такие числа  $n_1^p, n_2^p$ , что

$$n_1^p = pn_1, n_2^p = pn_2. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получаем, что для коэффициента  $n_b^0$  выполняются условия (6). Итак, существуют такие числа  $n_1^p, n_2^p$ , что коэффициент запаса  $n_b^0$  изотропного однородного тела  $V^b$  удовлетворяет условиям (6). Обратно, пусть коэффициент запаса  $n_b^0$  тела  $V^b$  удовлетворяет условиям прочности (6). Подставляя (8) в (6) и учитывая (10), (13), получим

$$pn_1 \leq \frac{p\sigma_T}{\sigma_0} \leq pn_2.$$

Откуда с учетом (7) следует выполнение для коэффициента запаса  $n_0$  композитного тела  $V_0$  условий прочности (5). Итак, показано, что всякому коэффициенту  $n_b \in (n_1^p, n_2^p)$  соответствует единственный ко-

эффицент  $n_0 \in (n_1, n_2)$ , найденный по формуле (7), и наоборот, всякому коэффициенту  $n_0 \in (n_1, n_2)$  соответствует единственный коэффициент  $n_b^0 \in (n_1^p, n_2^p)$ , отвечающий формуле (8). Рассмотрим предельные случаи. Пусть  $n_b^0 = n_1^p$ . Используя соотношения (8), (13), (10) в последнем равенстве, получаем  $p\sigma_T / \sigma_0 = pn_1$ . Откуда с учетом (7) следует  $n_0 = n_1$ . Аналогично можно показать, что если  $n_b^0 = n_2^p$ , то  $n_0 = n_2$ . Пусть  $n_0 = n_1$ . Используя (7), (10) в последнем равенстве, получаем  $\sigma_T / \sigma_b^0 = pn_1$ . Откуда с учетом (8), (13) вытекает  $n_b^0 = n_1^p$ . Аналогично можно показать, что если  $n_0 = n_2$ , то  $n_b^0 = n_2^p$ . Таким образом, между коэффициентами запаса  $n_0$  и  $n_b^0$  существует взаимно однозначная связь. Теорема 1 доказана.

Эквивалентные условия прочности (6) можно представить через коэффициент эквивалентности  $p$  в виде  $pn_1 \leq n_b^0 \leq pn_2$ , построение которых сводится к нахождению коэффициента  $p$ .

Отметим, что условия (5), (6) являются эквивалентными условиями прочности соответственно для тел (конструкций)  $V_0, V^b$  (см. определение 1). Считают, что если  $n_0$  удовлетворяет заданным условиям прочности (5), то конструкция  $V_0$  не разрушается при эксплуатации. Пусть конструкция  $V^b$  не разрушается при эксплуатации. Тогда конструкции  $V_0, V^b$  являются эквивалентными по прочности (см. определение 2).

Итак, доказано существование эквивалентных условий прочности для композитных тел (конструкций), имеющих любую структуру, форму, любые размеры, статические нагружения и закрепления, которые отвечают выше сформулированному положению 1 и условиям теоремы 1. Следует отметить, что для всякой композитной конструкции  $V_0$  всегда можно построить изотропную однородную конструкцию  $V^b$ , т. е. всегда для конструкции  $V^b$  можно задать по определенным правилам форму, размеры, нагружение, закрепление и модули упругости. Однако, в общем случае, эквивалентные условия прочности для изотропной однородной конструкции  $V^b$  можно построить лишь только для заданных усилий  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ , что непрактично. Это связано с тем, что напряжения  $\sigma_0, \sigma_b^0$  и  $p$  отвечают заданному нагружению  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  конструкций  $V^b, V_0$ , см. формулы (10), (13).

*Замечание 1.* Пусть найдено значение  $p$  и максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_b^0$  конструкции  $V^b$ . Тогда для конструкции  $V_0$  по формуле (10) определяем максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_0$ , т. е.  $\sigma_0 = p\sigma_b^0$ , и затем по формуле (7) вычисляем ко-

эффицент запаса прочности  $n_0$ , т. е.  $n_0 = \sigma_T / (p\sigma_b^0)$ , что важно знать при проектировании конструкции  $V_0$ .

Скорректированные условия прочности, учитывающие погрешность напряжений. В общем случае (например, для тел сложной формы) построить аналитические решения трехмерной задачи теории упругости очень трудно. Однако с помощью МКЭ [5–8] и ММКЭ [10–12] можно построить приближенные решения задач теории упругости с заданной погрешностью для напряжений. Следует отметить, что при проектировании ряда конструкций (например, конструкций минимального веса) нарушение заданных условий прочности (5), т. е. эквивалентных условий прочности (6), недопустимо. Эквивалентные условия прочности (6) не учитывают погрешность приближенных решений, что порождает трудности при их выполнении.

Пусть для коэффициента запаса упругой конструкции  $V^b$  заданы условия прочности вида

$$n_1^p \leq n_b^0 \leq n_2^p, \quad (14)$$

где  $n_1^p, n_2^p$  – заданы;  $n_b^0$  – коэффициент запаса прочности конструкции  $V^b$ , отвечающий точному решению трехмерной задачи упругости (сформулированной для данной конструкции).

В теореме 2 сформулированы скорректированные условия прочности, учитывающие погрешность приближенных решений. Для удобства и непрерывности изложения в теореме 2 используются обозначения, введенные в теореме 1.

*Теорема 2.* Пусть для упругой конструкции  $V^b$  заданы условия прочности (14) и определено максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_b$ , отвечающее приближенному решению задачи упругости. Пусть

$$|\delta| \leq \delta_p < C_p = \frac{\Delta n}{n_1^p + n_2^p}, \quad (15)$$

где  $\Delta n = |n_2^p - n_1^p|$ ,  $n_1^p, n_2^p$  – заданы;  $\delta$  – относительная погрешность для напряжения  $\sigma_b$ , т. е.

$$\delta = \frac{\sigma_b - \sigma_b^0}{\sigma_b^0}, \quad (16)$$

где  $\sigma_b^0$  – максимальное эквивалентное напряжение конструкции  $V^b$ , отвечающее точному решению задачи упругости, напряжения  $\sigma_b^0, \sigma_b$  определяются по 4-й теории прочности,  $\delta_p$  – оценка для погрешности  $\delta$ .

Пусть коэффициент запаса  $n_b$  конструкции, отвечающий приближенному решению, удовлетворяет скорректированным условиям прочности вида

$$\frac{n_1^p}{1 - \delta_p} \leq n_b \leq \frac{n_2^p}{1 + \delta_p}. \quad (17)$$

где  $n_b = \sigma_T / \sigma_b$ ,  $\sigma_T$  – предел текучести.

Тогда коэффициент запаса  $n_b^0$  конструкции, отвечающий точному решению, удовлетворяет заданным условиям прочности (14), где  $n_b^0 = \sigma_T / \sigma_b^0$ .

Доказательство.

Из (16) следует  $\sigma_b = (1 + \delta) \sigma_b^0$ . Отсюда получаем

$$n_b^0 = (1 + \delta)n_b. \quad (18)$$

Отметим, что в (15)  $C_p < 1$ . Пусть  $\delta_0$  такое, что  $\delta_0 = |\delta|$ . Тогда в силу (15) имеем соотношения

$$0 \leq \delta_0 = |\delta| \leq \delta_p < 1. \quad (19)$$

Принимая в (18) последовательно  $\delta = -\delta_0$ ,  $\delta = \delta_0$ , введем коэффициенты

$$n_1^r = (1 - \delta_0)n_b, n_2^r = (1 + \delta_0)n_b, \quad (20)$$

Тогда в силу (18), (20) получаем

$$n_b^0 = n_1^r \text{ или } n_b^0 = n_2^r. \quad (21)$$

Введем коэффициенты  $n_1^d, n_2^d$  по формулам

$$n_1^d = (1 - \delta_p)n_b, n_2^d = (1 + \delta_p)n_b. \quad (22)$$

В силу, что  $0 \leq \delta_p < 1, n_b > 0$ , из (22) следует

$$n_2^d \geq n_1^d. \quad (23)$$

Пусть для коэффициента  $n_b$  выполняются условия прочности (17), т. е. пусть

$$n_1^p \leq (1 - \delta_p)n_b, (1 + \delta_p)n_b \leq n_2^p.$$

Тогда для коэффициентов  $n_1^d, n_2^d$  с учетом (23) выполняются неравенства

$$n_1^p \leq n_1^d \leq n_2^d \leq n_2^p. \quad (24)$$

Из сравнения (20), (22) с учетом (19), следуют неравенства

$$n_1^d \leq n_1^r, n_2^r \leq n_2^d.$$

Отсюда, учитывая, что согласно (19)  $n_1^r \leq n_2^r$ , получаем

$$n_1^d \leq n_1^r \leq n_2^r \leq n_2^d. \quad (25)$$

Тогда в силу (24), (25) выполняются неравенства

$$n_1^p \leq n_1^r \leq n_2^r \leq n_2^p. \quad (26)$$

Из выполнения (26) с учетом (21) следует выполнение заданных условий прочности (14) для коэффициента запаса  $n_b^0$ . Ограничения на параметр  $\delta_p$  находим из предположения существования условий прочности (17), т. е. пусть

$$\frac{n_1^p}{1 - \delta_p} \leq \frac{n_2^p}{1 + \delta_p}. \quad (27)$$

Откуда следует

$$\delta_p \leq C_p = \frac{\Delta n}{n_1^p + n_2^p}. \quad (28)$$

Отметим, что поскольку  $n_2^p > n_1^p \geq 1$ , то из (28) следует  $0 < C_p < 1$ . Если  $\delta_p = C_p$ , то диапазон для варьирования значений коэффициента  $n_b$  равен нулю, т. е. в этом случае  $n_b = (n_1^p + n_2^p) / 2$ , что трудно выполнить на практике при заданных  $n_1^p, n_2^p$ . Итак, при  $\delta_p < C_p$  возможно выполнение заданных условий прочности (14) для коэффициента  $n_b^0$  с применением скорректированных условий прочности (17) и приближенного решения, которое порождает для напряжения  $\sigma_b$  такую погрешность  $\delta$ , что  $|\delta| \leq \delta_p$ . Теорема 2 доказана.

**Скорректированные эквивалентные условия прочности, учитывающие погрешность напряжений.** На практике для решения задач теории упругости, сформулированных для трехмерных композитных конструкций, применяются численные методы, например, ММКЭ [10-12], которые порождают решения с малой погрешностью. В связи с этим возникает необходимость учитывать погрешность решений в эквивалентных условиях прочности. В работе [16] рассматриваются эквивалентные условия прочности без учета погрешности приближенных решений. Используя результаты работы [4], и на основе теорем 1, 2 сформулируем скорректированные эквивалентные условия прочности, которые учитывают погрешность решений. Скорректированные эквивалентные условия прочности отражает следующая теорема, в которой используются обозначения, введенные в теоремах 1, 2.

*Теорема 3.* Пусть для коэффициента запаса упругой изотропной однородной конструкции  $V^b$  определены эквивалентные условия прочности вида

$$n_1^p \leq n_b^0 \leq n_2^p, \quad (29)$$

где  $n_1^p, n_2^p$  – заданы, т. е. определен параметр  $p$  (см. теорему 1);  $n_b^0$  – коэффициент запаса прочности конструкции  $V^b$ , отвечающий точному решению трехмерной задачи упругости (сформулированной для конструкции  $V^b$ ). Пусть для конструкции  $V^b$  определено максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_b$ , отвечающее приближенному решению задачи упругости. Пусть

$$|\delta| \leq \delta_p < C_p = \frac{\Delta n}{n_1^p + n_2^p}, \quad (30)$$

где  $\Delta n = |n_2^p - n_1^p|$ ,  $\delta$  – относительная погрешность для напряжения  $\sigma_b$ , т. е.  $\delta = (\sigma_b - \sigma_b^0) / \sigma_b^0$ , где  $\sigma_b^0$  – максимальное эквивалентное напряжение конструкции  $V^b$ , отвечающее точному решению задачи упругости,  $\delta_p$  – оценка для погрешности  $\delta$ .

Пусть коэффициент запаса  $n_b$  конструкции, отвечающий приближенному решению, удовлетворяет

скорректированным эквивалентным условиям прочности вида

$$\frac{n_1^p}{1-\delta_p} \leq n_b \leq \frac{n_2^p}{1+\delta_p}. \quad (31)$$

где  $n_b = \sigma_T / \sigma_b$ ,  $\sigma_T$  – предел текучести.

Тогда коэффициент запаса  $n_b^0$  конструкции, отвечающий точному решению, удовлетворяет эквивалентным условиям прочности (29), где  $n_b^0 = \sigma_T / \sigma_b^0$ .

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2. Отметим, что  $\delta_p$  можно рассматривать как максимальную погрешность для максимального эквивалентного напряжения  $\sigma_b$  конструкции  $V^b$ . Соотношения (31) представим в виде

$$n_1^p (1 + \varepsilon_1) \leq n_b \leq n_2^p (1 - \varepsilon_2),$$

или, учитывая (13), имеем

$$pn_1(1 + \varepsilon_1) \leq n_b \leq pn_2(1 - \varepsilon_2), \quad (32)$$

где величины  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  определяются с помощью погрешности  $\delta_p$  напряжения  $\sigma_b$  по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1-\delta_p} - 1, \quad \varepsilon_2 = 1 - \frac{1}{1+\delta_p}, \quad 0 \leq \delta_p < 1, \quad (33)$$

здесь  $p$  – коэффициент эквивалентности.

**Основные положения метода эквивалентных условий прочности.** Рассмотрим консольную композитную балку  $V_0$  регулярной структуры (которая расположена в декартовой системе координат  $Oxyz$ ) длиной  $L = 1536h = 600$ , квадратного сечения размерами  $H \times H$ , где  $H = 128h = 50$  (рис. 1). Балка  $V_0$  состоит из пластичных материалов и имеет статическое нагружение  $q_z(x, y, z)$ .

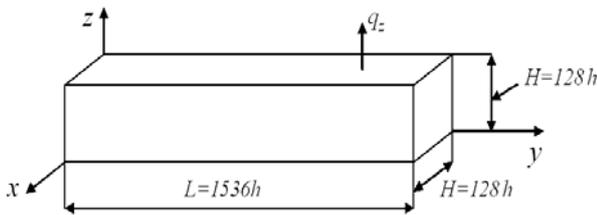


Рис. 1. Характерные размеры балки  $V_0$

Fig. 1. The characteristic sizes of the beam  $V_0$

Регулярная ячейка  $G_0$  композитной балки  $V_0$  имеет размеры  $8h \times 8h \times 8h$ , в которой расположены продольные волокна сечением  $h \times h$  (рис. 2) сечения волокон закрашены, 16 волокон. Таким образом, балка армирована продольными волокнами – сечением  $h \times h$ , расстояние между волокнами равно  $h$ . Волокна являются изотропными однородными телами и имеют одинаковые модули упругости.

Считают [17], если толщина волокон меньше 0,5 мм, то такие волокна образуют микронеоднородную структуру. Пусть  $L = 600$  мм,  $H = 50$  мм, тогда  $h = 0,3906$  мм, т. е. балка  $V_0$  размерами  $5 \text{ см} \times 60 \text{ см} \times 5 \text{ см}$  имеет микронеоднородную регулярную волокнистую структуру.

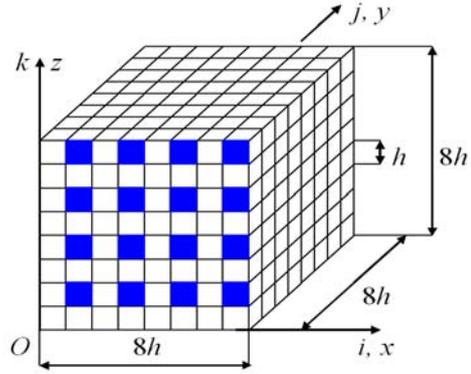


Рис. 2. Регулярная ячейка  $G_0$

Fig. 2. Regular cell  $G_0$

Для коэффициента запаса  $n_0$  композитной балки  $V_0$  заданы условия прочности вида (5). Требуется определить коэффициент запаса  $n_0$  данной балки, т. е. проверить, удовлетворяет ли балка  $V_0$  заданным условиям прочности. Для решения данной задачи используем метод эквивалентных условий прочности (МЭУП), основные положения которого рассмотрим (для простоты изложения, не теряя общности суждений) на примере балки  $V_0$  с микронеоднородной регулярной структурой. Базовое регулярное разбиение  $R_0$  балки  $V_0$  состоит из (базовых) односеточных КЭ (1сКЭ)  $V_j^h$  1-го порядка формы куба со стороной  $h$  [8], в которых реализуется трехмерное НДС. Разбиение  $R_0$  учитывает микронеоднородную структуру балки, порождает равномерную мелкую (базовую) сетку с шагом  $h$  размерности  $129 \times 1537 \times 129$  и дискретную модель с общим числом узловых неизвестных МКЭ  $N_0 = 76681728$ , ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна  $b_0 = 50316$ . Реализация МКЭ для базовой модели  $R_0$  (более 76 млн. узловых неизвестных) требует больших ресурсов ЭВМ. Построение последовательности решений связано с применением процедуры измельчения базового разбиения, которая для композитной структуры балки  $V_0$  является сложной и труднореализуемой, так как каждый шаг измельчения приводит к резкому увеличению размерности дискретной задачи. Отметим, что шаг базового регулярного разбиения  $R_0$  композитной балки  $V_0$  не может быть больше  $h$ , так как сечение волокна имеет размеры  $h \times h$ .

Согласно МЭУП введем изотропную однородную балку  $V^b$  такую, что балки  $V^b$ ,  $V_0$  имеют одинаковые

форму, размеры, заданные закрепления и нагружения, но отличаются модулями упругости. Модули упругости балки  $V^b$  равны модулям упругости волокна балки  $V_0$ . Реализация МЭУП сводится к построению скорректированных эквивалентных условий прочности (32) и к определению коэффициента запаса  $n_b$  тела  $V^b$ , т. е. к определению коэффициента эквивалентности  $p$  для балки  $V_0$  и к определению с помощью МКЭ максимального эквивалентного напряжения  $\sigma_b$  для тела  $V^b$  с погрешностью  $\delta_p$ . Коэффициент  $p$  определяется по формуле  $p = \sigma_0 / \sigma_b$ , где  $\sigma_0$ ,  $\sigma_b$  – максимальные эквивалентные напряжения соответственно тел  $V_0$ ,  $V^b$ . Отметим, что нахождение напряжения  $\sigma_0$  по МКЭ (с применением односеточных КЭ формы куба со стороной  $h$  [8]) для балки  $V_0$  с учетом ее микронеоднородной структуры требует больших ресурсов ЭВМ.

Для нахождения коэффициента эквивалентности  $p$  и напряжения  $\sigma_b$  предлагается следующая процедура.

Для изотропного однородного тела  $V^b$  строим последовательность базовых регулярных разбиений (дискретных моделей)  $\{V_n^0\}_{n=1}^N$ , состоящих из базовых 1сКЭ  $V_j^{(n)}$  1-го порядка формы куба со стороной  $h_n$ .

Дискретная модель  $V_n^0$  имеет размерность  $n_1^{(n)} \times n_2^{(n)} \times n_3^{(n)}$ , где

$$\begin{aligned} n_1^{(n)} &= 8n + 1, \quad n_2^{(n)} = 96n + 1, \\ n_3^{(n)} &= 8n + 1, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (34)$$

Шаги базовой сетки по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  равны  $h_x^{(n)} = H / (8n)$ ,  $h_y^{(n)} = L / (96n)$ ,  $h_z^{(n)} = H / (8n)$ , так как  $L = 12H$ , то  $h_n = h_x^{(n)} = h_y^{(n)} = h_z^{(n)}$ , причем,  $h_n > h$ ,  $n = 1, \dots, N - 1$ . Отметим, что при  $n = N$  получаем  $h_N = h$  (для закона измельчения (34) при  $N = 16$  имеем  $h_{16} = h$ ), т. е. при  $n = 16$  размерности изотропной однородной дискретной модели  $V_{16}^0$  и базового разбиения  $\mathbf{R}_0$  композитной балки  $V_0$  одинаковы. Важно отметить следующее. Закон измельчения для разбиений задается так, что каждое разбиение  $V_n^0$  состоит из конечного числа одинаковых по форме и размерами таких областей  $G_n^b$ , что область  $G_n^b$  и область регулярной ячейки  $G_0$  (рис. 2) имеют одинаковую форму, но отличаются характерными размерами. Для заданного закона измельчения (34) область  $G_n^b$  имеет размеры  $8h_n \times 8h_n \times 8h_n$ . Область  $G_n^b$  отличается от области регулярной ячейки  $G_0$  (размерами  $8h \times 8h \times 8h$ , рис. 2) характерными размерами вида  $h_n = \beta_n h$ , где  $\beta_n > 1$ . При  $n \rightarrow 16$  имеем  $\beta_n \rightarrow 1$ , при  $n = 16$  получаем  $\beta_{16} = 1$ .

Введем область  $G_n^0$ , форма и характерные размеры которой совпадают с областью  $G_n^b$ ,  $n = 1, \dots, N$ . При этом область  $G_n^0$  имеет композитную структуру, которая по виду совпадает со структурой регулярной ячейки  $G_0$ , т. е. область  $G_n^0$  имеет такое же число волокон (с квадратным сечением размерами  $h_n \times h_n$ ) и такое же их взаимное расположение, как в ячейке  $G_0$  (16 продольных волокон, рис. 2). Волокна в областях  $G_n^0$ ,  $G_0$  имеют одинаковые модули упругости. Области  $G_n^0$ ,  $G_0$ , по сути, отличаются только масштабностью, т. е. формально можно записать  $G_n^0 = \beta_n G_0$ , где  $\beta_n$  – коэффициент масштабности,  $\beta_n > 1$ ,  $n = 1, \dots, N - 1$ . При  $n = N$  получаем  $\beta_N = 1$ , т. е.  $G_N^0 = G_0$ . Для закона измельчения (34) при  $n = 16$  имеем  $\beta_{16} = 1$ , т. е.  $G_{16}^0 = G_0$ . Отметим, что в области  $G_n^0$  учитывается неоднородная (волокнистая) структура.

Заменяем в дискретной модели  $V_n^0$  все однородные изотропные области  $G_n^b$  на композитные области  $G_n^0$ . В результате на основе изотропной однородной модели  $V_n^0$  получаем композитную (базовую) дискретную модель, которую обозначим через  $R_n^0$  (в которой учитывается неоднородная структура). Таким образом, при  $n = 16$  композитная дискретная модель  $R_{16}^0$  совпадает с базовой моделью  $\mathbf{R}_0$  композитной балки  $V_0$ , т. е. имеем  $R_{16}^0 = \mathbf{R}_0$ . Итак, дискретные модели  $V_n^0$ ,  $R_n^0$  имеют одинаковую форму, характерные размеры и размерность, одинаковые закрепления и нагружения, но отличаются модулями упругости. Согласно (34) размерности моделей  $V_n^0$ ,  $R_n^0$  резко возрастают при увеличении  $n$ . Для понижения размерности дискретных моделей эффективно применяются МнКЭ [10; 11; 13; 14]. Используя  $m$  – сеточные КЭ в дискретных базовых моделях  $V_n^0$ ,  $R_n^0$ , получаем соответственно  $m$  – сеточные дискретные модели  $V_n^b$ ,  $R_n$ , которые имеют одинаковую форму, характерные размеры, размерность, одинаковые закрепления и нагружения как балка  $V_0$ , но отличаются модулями упругости. Размерности  $m$  – сеточных дискретных моделей  $V_n^b$ ,  $R_n$  значительно меньше размерностей соответственно базовых моделей  $V_n^0$ ,  $R_n^0$ . Процедура определения коэффициента эквивалентности  $p$  заключается в следующем. Для дискретных моделей  $V_n^b$ ,  $R_n$  определяем соответственно максимальные эквивалентные напряжения  $\sigma_n^b$ ,  $\sigma_n$ , с помощью которых находим коэффициент  $p_n = \sigma_n / \sigma_n^b$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Имеем  $p_n \rightarrow p$  при  $n \rightarrow N$ . Пусть

$\delta_n = |p_n - p_{n-1}| / p_n$  есть малая величина, тогда принимаем  $p = p_n$ . Пусть построена последовательность решений  $\{\sigma_n^b\}_{n=1}^{12}$ , которая быстро сходится к точному решению и пусть  $\delta_n^\sigma = |\sigma_n^b - \sigma_{n-1}^b| / \sigma_n^b$  малая величина. Тогда считаем, что  $\sigma_n^b$  есть максимальное эквивалентное напряжение изотропного однородного тела  $V^b$  (найденное с погрешностью  $\delta_p$ ). Подставляя полученные  $p$ ,  $\delta_p$  и заданные коэффициенты  $n_1, n_2$  в (32), определяем скорректированные эквивалентные условия прочности для композитной балки  $V_0$ . Коэффициент запаса  $n_b$  для тела  $V^b$  находим по формуле  $n_b = \sigma_T / \sigma_n^b$ , где  $\sigma_T$  – предел текучести волокна. Если найденный коэффициент  $n_b$  удовлетворяет полученным скорректированным эквивалентным условиям прочности вида (32), то коэффициент запаса  $n_0$  композитной балки  $V_0$  (рис. 1) удовлетворяет заданным условиям прочности вида (5).

**Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим модельную задачу о расчете на прочность консольной балки  $V_0$  с микронеоднородной волокнистой регулярной структуры размерами  $128h \times 1536h \times 128h$ ,  $h$  – мало, задано (см. рис. 1). Балка  $V_0$  состоит из пластичных материалов, имеет квадратное сечение размерами  $H \times H$ , где  $H = 128h$ . Регулярная ячейка микронеоднородной структуры балки  $V_0$  размерами  $8h \times 8h \times 8h$  имеет 16 одинаковых продольных волокон сечением  $h \times h$  (см. рис. 2), т. е. балка армирована изотропными однородными продольными волокнами – сечением  $h \times h$ , расстояние между волокнами равно  $h$ . При  $y = 0: u = v = w = 0$ , т. е. в плоскости  $xOz$ , балка  $V_0$  закреплена. Для коэффициента запаса  $n_0$  балки  $V_0$  заданы условия прочности вида

$$1,3 \leq n_0 \leq 3,2. \quad (35)$$

Для балки  $V_0$  используем следующие исходные данные:

$$h = 0,3906; \sigma_T = 5; E_v = 10, E_c = 1, \\ v_c = v_v = 0,3, q_z = 0,0018, \quad (36)$$

где  $E_c, E_v$  ( $v_c, v_v$ ) – модули Юнга (коэффициенты Пуассона) соответственно связующего материала и волокон,  $\sigma_T$  – предел текучести волокна, нагрузка  $q_z$  действует на поверхности  $z = H, 0,5L \leq y \leq L$  (см. рис. 1).

Для расчета балки  $V_0$  используем МЭУП с применением МНКЭ. В расчетах используем однородные и композитные лагранжевые трехсеточные КЭ (3сКЭ) формы прямоугольного параллелепипеда. Основные положения построения 3сКЭ рассмотрим на примере композитного 3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$  формы прямоугольного

параллелепипеда размерами  $8h \times 16h \times 8h$  [10; 15]. 3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$  расположен в локальной декартовой системе координат  $Oxyz$ , который содержит две регулярных ячейки  $G_0$  размерами  $8h \times 8h \times 8h$  композитной балки  $V_0$ . Вначале рассмотрим процедуру построения композитного лагранжевого двухсеточного КЭ (2сКЭ)  $V_d^{(2)}$  размерами  $8h \times 8h \times 8h$ , который содержит одну регулярную ячейку  $G_0$ . В процедуре используем равномерную мелкую сетку  $h_d$  с шагом  $h$  размерности  $9 \times 9 \times 9$  и крупную сетку  $H_d$ , вложенную в мелкую,  $H_d \subset h_d$ . На рис. 3 показана мелкая сетка  $h_d$  и крупная сетка  $H_d$ , имеющая 125 узлов, которые отмечены точками. Мелкая сетка  $h_d$  порождена базовым разбиением  $R_d$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$ , которое состоит из 1сКЭ  $V_j^h$  1-го порядка формы куба со стороной  $h$  (в которых реализуется трехмерное НДС,  $j = 1, \dots, M, M$  – общее число 1сКЭ  $V_j^h, M = 512$ ) и которое учитывает микронеоднородную структуру 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ . Волокна параллельны оси  $Oy$ , сечения волокон в плоскости  $Oxz$  закрашены, 16 волокон (рис. 3).

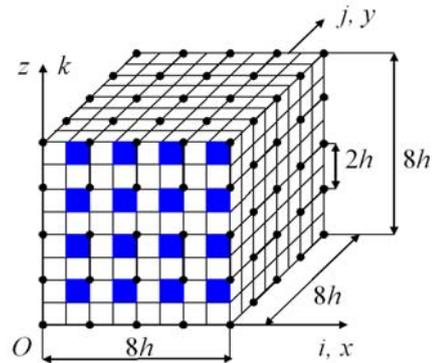


Рис. 3. Мелкая и крупная сетки 2сКЭ  $V_d^{(2)}$

Fig. 3. Small and large mesh 2gFE  $V_d^{(2)}$

Полную потенциальную энергию  $\Pi_d$  базового разбиения  $R_d$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$  представим [5; 8]

$$\Pi_d = \sum_{j=1}^{512} \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}_j^T [K_j^h] \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T \mathbf{P}_j \right), \quad (37)$$

где  $[K_j^h]$  – матрица жесткости,  $\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j$  – векторы узловых сил и перемещений 1сКЭ  $V_j^h$  базового разбиения 2сКЭ,  $T$  – транспонирование.

С помощью полиномов Лагранжа [5] на крупной сетке  $H_d$  определяем аппроксимирующие функции перемещений  $u_2, v_2, w_2$  для 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ , которые запишем в форме

$$u_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} v_{ijk},$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} w_{ijk}, \quad (38)$$

где  $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$  – значения перемещений  $u, v, w$  в узле  $i, j, k$  сетки  $H_d$ ;  $i, j, k$  – координаты целочисленной системы координат  $ijk$ , введенной для узлов сетки  $H_d$  (рис. 3);  $N_{ijk} = N_{ijk}(x, y, z)$  – базисная функция узла  $i, j, k$  сетки  $H_d$ ,  $i, j, k = 1, \dots, 5$ ,  $N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$ , где

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^5 \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^5 \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha},$$

$$L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^5 \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}, \quad (39)$$

здесь  $x_i, y_j, z_k$  – координаты узла  $i, j, k$  сетки  $H_d$  в системе координат  $Oxyz$ , рис. 3.

Обозначим:  $N_\beta = N_{ijk}$ ,  $u_\beta = u_{ijk}$ ,  $v_\beta = v_{ijk}$ ,  $w_\beta = w_{ijk}$ , где  $i, j, k = 1, \dots, 5$ ,  $\beta = 1, \dots, 125$ . Тогда выражения (38) принимают вид

$$u_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta u_\beta, \quad v_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta v_\beta, \quad w_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta w_\beta. \quad (40)$$

Обозначим через  $\mathbf{q}_d = \{u_1, \dots, u_{125}, v_1, \dots, v_{125}, w_1, \dots, w_{125}\}^T$  вектор узловых перемещений сетки  $H_d$ , т. е. вектор узловых неизвестных 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ . Используя (40), компоненты вектора  $\mathbf{q}_j$  узловых неизвестных 1сКЭ  $V_j^h$  выражаем через компоненты вектора  $\mathbf{q}_d$ , в результате получим равенство

$$\mathbf{q}_j = [A_j^2] \mathbf{q}_d, \quad (41)$$

где  $[A_j^2]$  – прямоугольная матрица,  $j = 1, \dots, 512$ .

Подставляя (41) в выражение (37), из условия  $\partial \Pi_d / \partial \mathbf{q}_d = 0$  получаем  $[K_d] \mathbf{q}_d = \mathbf{F}_d$ , где

$$[K_d] = \sum_{j=1}^{512} [A_j^2]^T [K_j^h] [A_j^2], \quad \mathbf{F}_d = \sum_{j=1}^{512} [A_j^2]^T \mathbf{P}_j, \quad (42)$$

здесь  $[K_d]$  – матрица жесткости (размерности  $375 \times 375$ ),  $\mathbf{F}_d$  – вектор узловых сил (размерности 375) 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ .

Рассмотрим построение лагранжевого трехсеточного КЭ (3сКЭ)  $V_\alpha^{(3)}$ , используя два 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ . Мелкая  $h_\alpha$  и крупная  $H_\alpha$  сетки 3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$  показаны на рис. 4, узлы сетки  $H_\alpha$  отмечены точками, 12 узлов. Узлы мелкой сетки  $h_\alpha$  являются узлами крупных сеток  $H_d$  двух 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ ,  $d = 1, 2$ .

Полную потенциальную энергию  $\Pi_\alpha$  3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$  представим в форме

$$\Pi_\alpha = \sum_{d=1}^2 \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}_d^T [K_d] \mathbf{q}_d - \mathbf{q}_d^T \mathbf{F}_d \right), \quad (43)$$

где  $[K_d]$ ,  $\mathbf{F}_d$ ,  $\mathbf{q}_d$  – матрица жесткости, векторы узловых сил и перемещений 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ ,  $d = 1, 2$ .

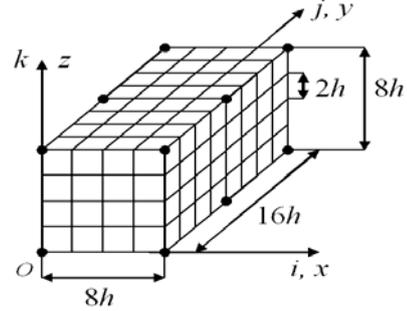


Рис. 4. Мелкая  $h_\alpha$  и крупная  $H_\alpha$  сетки 3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$

Fig. 4. Small  $h_\alpha$  and large  $H_\alpha$  mesh 3gFE  $V_\alpha^{(3)}$

С помощью полиномов Лагранжа на крупной сетке  $H_\alpha$  определяем аппроксимирующие функции перемещений  $u_3, v_3, w_3$  для 3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$ , которые запишем в форме

$$u_3 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_3 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 N_{ijk} v_{ijk},$$

$$w_3 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 N_{ijk} w_{ijk}, \quad (44)$$

где  $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$  – значения перемещений  $u, v, w$  в узле  $i, j, k$  сетки  $H_\alpha$ ;  $i, j, k$  – координаты целочисленной системы координат  $ijk$ , введенной для узлов сетки  $H_\alpha$  (рис. 4);  $N_{ijk} = N_{ijk}(x, y, z)$  – базисная функция узла  $i, j, k$  сетки  $H_\alpha$ ,  $i, k = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$ , где

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^2 \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^3 \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha},$$

$$L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^2 \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}, \quad (45)$$

здесь  $x_i, y_j, z_k$  – координаты узла  $i, j, k$  сетки  $H_\alpha$  в системе координат  $Oxyz$ , рис. 4.

Обозначим:  $N_\beta = N_{ijk}$ ,  $u_\beta = u_{ijk}$ ,  $v_\beta = v_{ijk}$ ,  $w_\beta = w_{ijk}$ , где  $i, k = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\beta = 1, \dots, 12$ . Тогда выражения (44) принимают вид

$$u_3 = \sum_{\beta=1}^{12} N_\beta u_\beta, \quad v_3 = \sum_{\beta=1}^{12} N_\beta v_\beta, \quad w_3 = \sum_{\beta=1}^{12} N_\beta w_\beta. \quad (46)$$

Обозначим через  $\mathbf{q}_\alpha = \{u_1, \dots, u_{12}, v_1, \dots, v_{12}, w_1, \dots, w_{12}\}^T$  вектор узловых перемещений крупной сетки  $H_\alpha$ , т. е. вектор узловых неизвестных 3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$ . Используя (46), компоненты вектора  $\mathbf{q}_d$  узловых неизвестных 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  выражаем через компоненты вектора  $\mathbf{q}_\alpha$ , в результате получим

$$\mathbf{q}_d = [A_d^3] \mathbf{q}_\alpha, \quad (47)$$

где  $[A_d^3]$  – прямоугольная матрица,  $d = 1, 2$ .

Подставляя (47) в выражение (43), из условия  $\partial \Pi_\alpha / \partial \mathbf{q}_\alpha = 0$  получаем  $[K_\alpha] \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha$ , где

$$[K_\alpha] = \sum_{d=1}^2 [A_d^3]^T [K_d] [A_d^3], \quad \mathbf{F}_\alpha = \sum_{d=1}^2 [A_d^3]^T \mathbf{F}_d, \quad (48)$$

здесь  $[K_\alpha]$  – матрица жесткости (размерности  $36 \times 36$ ),  $\mathbf{F}_\alpha$  – вектор узловых сил (размерности 36) 3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$ .

*Замечание 2.* Решение, построенное для крупной сетки  $H_\alpha$  3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$ , с помощью формулы (47) проецируется на мелкую сетку  $h_\alpha$  3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$ . Затем, с помощью формулы (41) определяем узловые перемещения базовых разбиений 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ , что дает возможность вычислять напряжения в любом 1сКЭ  $V_j^h$  базового разбиения  $R_d$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$ ,  $d = 1, 2$ .

*Замечание 3.* В силу (41) размерность вектора  $\mathbf{q}_d$  (т. е. размерность 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ ) не зависит от общего числа  $M$  1сКЭ  $V_j^h$ , т. е. от размерности разбиения  $R_d$ . Поэтому для учета в 2сКЭ микронеоднородной структуры можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения  $R_d$ , состоящие из 1сКЭ  $V_j^h$ . В этом случае в 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  (следовательно, и в 3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$ ) сколь угодно точно описывается трехмерное НДС (без введения дополнительных упрощающих гипотез).

С помощью процедур, изложенных в работе [14] проектируются 2сКЭ для расчета композитных оболочек вращения, колец сложной формы и валов, которые имеют центральные круговые отверстия, композитных и однородных цилиндрических оболочек, пластин и балок сложной формы, которые широко используются на практике. Процедура построения однородных МнКЭ аналогична процедуре построения композитных МнКЭ.

Для композитной балки  $V_0$  определяем изотропное однородное тело  $V^b$  (балку  $V^b$ ). Тела  $V_0$ ,  $V^b$  имеют одинаковые форму, размеры, закрепление и нагружение, модули упругости тела  $V^b$  равны модулям упругости волокна. Используя закон измельчения (34), строим по процедуре, описанной выше, трехсеточные дискретные модели  $V_n^b$ ,  $R_n$ , состоящие

соответственно из изотропных однородных и композитных 3сКЭ типа  $V_\alpha^{(3)}$  размерами  $8h_n \times 16h_n \times 8h_n$ ,  $n = 1, 12$ . Для дискретной изотропной однородной модели  $V_n^b$  находим решения  $w_n^b$ ,  $\sigma_n^b$ , где  $w_n^b$ ,  $\sigma_n^b$  – максимальные перемещение и эквивалентное напряжение дискретной модели  $V_n^b$ ,  $n = 1, \dots, 12$ . Эквивалентные напряжения определяем по 4-й теории прочности. Результаты расчетов представлены в табл. 1. Анализ результатов расчетов показывает быструю равномерно монотонную сходимость приближенных решений  $(w_n^b, \sigma_n^b)$  к точному. Напряжения  $\sigma_{11}^b = 0,665$ ,  $\sigma_{12}^b = 0,686$ , отличаются на  $\delta = 3,061\%$ . Тестовые расчеты показывают, что в этом случае напряжение  $\sigma_{12}^b$  найдено с погрешностью  $10\% \div 15\%$ . Принимаем  $\delta_p = 0,15$ . Условие (30) для  $\delta_p$  выполняется. Учитывая в (30) соотношения (13), (35), имеем  $\delta_p = 0,15 < C_p = 0,42$ . Согласно (33) при  $\delta_p = 0,15$  получаем  $\varepsilon_1 = 0,176$ ,  $\varepsilon_2 = 0,131$ . Скорректированные эквивалентные условия прочности (32) для  $\varepsilon_1 = 0,176$ ,  $\varepsilon_2 = 0,131$  имеют вид

$$1,176 p n_1 \leq n_b \leq 0,869 p n_2, \quad (49)$$

где  $n_b$  – коэффициент запаса тела  $V^b$ , определяемый с помощью МКЭ.

Результаты расчетов балки  $V^b$

$V_n^b$	$w_n^b$	$\sigma_n^b$	$V_n^b$	$w_n^b$	$\sigma_n^b$
$V_1^b$	204,851	0,377	$V_7^b$	238,033	0,569
$V_2^b$	228,503	0,489	$V_8^b$	238,263	0,595
$V_3^b$	234,023	0,524	$V_9^b$	238,422	0,620
$V_4^b$	236,109	0,537	$V_{10}^b$	238,545	0,643
$V_5^b$	237,119	0,543	$V_{11}^b$	238,630	0,665
$V_6^b$	237,683	0,547	$V_{12}^b$	238,697	0,686

Отметим, что трехсеточная дискретная модель  $V_{12}^b$ , состоящая из лагранжевых 3сКЭ типа  $V_\alpha^{(3)}$  ( $\alpha = 1, \dots, 32768$ ) размерами  $8h_{12} \times 16h_{12} \times 8h_{12}$ , имеет  $N_{12}^b = 73008$  узловых неизвестных МКЭ, ширина ленты СУ МКЭ равна  $b_{12} = 1059$ . Реализация МКЭ для дискретной модели  $V_{12}^b$  требует в  $k = \frac{N_0 \times b_0}{N_{12}^b \times b_{12}} = \frac{76681728 \times 50316}{73008 \times 1059} = 49903,566$  раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой модели  $\mathbf{R}_0$  балки  $V_0$ , что показывает высокую эффективность применения лагранжевых 3сКЭ типа  $V_\alpha^{(3)}$  в расчетах. Коэффициент эквивалентности  $p$  для композитной балки  $V_0$  определяем с помощью процедуры, которая описана выше. Дискретные модели  $V_n^b$ ,  $R_n$ ,

$n = 9, 11, 12$ , построены с помощью 3сКЭ типа  $V_\alpha^{(3)}$  на основе базовых регулярных разбиений соответственно размерностей:  $73 \times 865 \times 73$ ,  $89 \times 1057 \times 89$  и  $97 \times 1153 \times 97$ . Коэффициенты эквивалентности  $p_n$  находим по формуле  $p_n = \sigma_n / \sigma_n^b$ , где  $\sigma_n$ ,  $\sigma_n^b$  – максимальные эквивалентные напряжения соответственно моделей  $R_n$ ,  $V_n^b$ ,  $n = 9, 11, 12$ . В результате расчетов получаем:  $p_9 = 3,002$ ,  $p_{11} = 3,000$ ,  $p_{12} = 2,999$ . Относительные погрешности для найденных коэффициентов  $p_9$ ,  $p_{11}$ ,  $p_{12}$  равны

$$\delta_1(\%) = 100\% \times |p_{11} - p_9| / p_{11} = \\ = 100\% \times |3,002 - 3,000| / 3,000 = 0,066\%$$

$$\delta_2(\%) = 100\% \times |p_{12} - p_{11}| / p_{12} = \\ = 100\% \times |3,000 - 2,999| / 2,999 = 0,033\%$$

Поскольку  $p_9 > p_{11} > p_{12}$  и  $\delta_2$  самая малая величина, то считаем, что коэффициент эквивалентности равен  $p = p_{12} = 2,999$ . Подставляя в (49)  $p = 2,999$ ,  $n_1 = 1,3$ ,  $n_2 = 3,2$ , получаем

$$4,584 \leq n_b \leq 8,339. \quad (50)$$

Коэффициент запаса однородного тела  $V^b$  равен  $n_b = \sigma_T / \sigma_{12}^b = 5 / 0,686 = 7,288$ , который удовлетворяет скорректированным эквивалентным условиям прочности (50). Это означает, что коэффициент запаса  $n_0$  композитной балки  $V_0$  удовлетворяет заданным условиям прочности (35).

Проведем проверочные расчеты. На основе базового разбиения  $R_0$  балки  $V_0$  с применением 3сКЭ  $V_\alpha^{(3)}$  строим трехсеточные дискретные модели: композитную  $R_{16}$  и изотропную однородную  $R_{16}^b$ , отвечающие закону измельчения (34) при  $n = 16$ . Считаем, что напряжения  $\sigma_{16} = 2,279$ ,  $\sigma_{16}^b = 0,762$  отвечают точным решениям, т. е.  $\sigma_0 = \sigma_{16}$ ,  $\sigma_b = \sigma_{16}^b$ . Тогда коэффициент запаса для композитного тела  $V_0$  равен  $n_0 = \sigma_T / \sigma_0 = 5 / 2,279 = 2,194$ , т. е.  $n_0 = 2,194$  удовлетворяет заданным условиям прочности (35), что подтверждает аналогичный вывод, полученный с помощью МЭУП.

Коэффициент эквивалентности  $p_0$  (отвечающий точным решениям) для балки  $V_0$  равен  $p_0 = \sigma_0 / \sigma_b = 2,279 / 0,762 = 2,990$ . Отметим, что коэффициенты  $p = 2,999$  и  $p_0 = 2,990$  отличаются на 0,301 %, т. е. в самом деле, можно принять  $p_0 = p$ .

Размерность базовой дискретной модели  $V_{12}^0$  (сетка которой при  $n = 12$  имеет размерность  $97 \times 1153 \times 97$ , см. формулы (34)) равна 32517504, ширина ленты СУ МКЭ равна 28524. Число узловых неизвестных МКЭ трехсеточной дискретной модели  $V_{12}^b$  равно 73008, ширина ленты СУ МКЭ равна 1059. Реа-

лизация МКЭ для однородной изотропной трехсеточной дискретной модели  $V_{12}^b$  требует в  $k_2 = \frac{32517504 \times 28524}{73008 \times 1059} = 11996,685$  раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой модели  $V_{12}^0$ , состоящей из известных 1сКЭ формы куба со стороной  $h_{12}$ .

**Заключение.** Предложен метод эквивалентных условий прочности для расчета на статическую прочность конструкций (пластины, балки, оболочки) с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой при заданных условиях прочности. Реализация метода сводится к расчету на прочность изотропных однородных тел с применением эквивалентных условий прочности, построенных на основе заданных. При расчете однородных тел по МКЭ используются МнКЭ, которые порождают дискретные модели малой размерности и решения с малой погрешностью. Реализация предлагаемого метода требует малых ресурсов ЭВМ.

#### Библиографические ссылки

1. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1975. 704 с.
2. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. М. : Машиностроение, 1993. 640 с.
3. Москвичев В. В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. Новосибирск : Наука, 2002. 106 с.
4. Матвеев А. Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности // Известия АлтГУ. Серия: Математика и механика. 2017. № 4. С. 116–119. Doi: 10.14258/izvasu(2017)4-21.
5. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. М. : Мир, 1981. 304 с.
6. Голованов А. И., Тюленева О. И., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М. : Физматлит, 2006. 392 с.
7. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М. : Высшая школа, 1985. 392 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975. 542 с.
9. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М. : Мир, 1982. 232 с.
10. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия: Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, кн. 4. С. 530–543.
11. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок // Вестник КрасГАУ. 2016. № 12. С. 93–100.
12. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. Vol. 158, No. 1. Art. 012067. P. 1–9.
13. Матвеев А. Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и мик-

ронеоднородной структурой // Известия АлтГУ. Серия: Математика и механика. 2014. № 1/1. С. 80–83. Doi: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.

14. Матвеев А. Д. Построение многосеточных конечных элементов для расчета оболочек, пластин и балок на основе образующих конечных элементов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 3. С. 48–57. Doi: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.

15. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высшая школа, 1982. 264 с.

16. Матвеев А. Д. Расчет на прочность композитных конструкций с применением эквивалентных условий прочности // Вестник КрасГАУ. 2014. № 11. С. 68–79.

17. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М. : Физматлит, 2008. 432 с.

### References

1. Pisarenko G. S., YAKovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Handbook of resistance materials]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1975, 704 p.

2. Birger I. A., SHorr B. F., Iosilevich G. B. *Raschet na prochnost' detaley mashin* [Calculation of the strength of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1993. 640 p.

3. Moskvichev V. V. *Osnovy konstrukcionnoy prochnosti tekhnicheskikh sistem i inzhenernykh sooruzheniy* [Fundamentals of structural strength of technical systems and engineering structures]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2002, 106 p.

4. Matveev A. D. [Calculation of elastic structures using the adjusted terms of strength]. *Izvestiya AltGU. Matematika i mekhanika*. 2017, No. 4, P. 116–119 (In Russ.). Doi: 10.14258/izvasu(2017)4-21.

5. Norri D., de Friz Zh. *Vvedenie v metod konechnykh elementov* [Introduction to the finite element method]. Moscow, Mir Publ., 1981, 304 p.

6. Golovanov A. I., Tiuleneva O. I., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksii* [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled constructions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 392 p.

7. Obraztsov I. F., Savel'ev L. M., Khazanov H. S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov* [Finite element method in problems of aircraft structural mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1985, 392 p.

8. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 544 p.

9. Fudzii T., Dzako M. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1982.

10. Matveev A. D. [The method of multigrid finite elements in the calculations of three-dimensional homogeneous and composite bodies]. *Uchen. zap. Kazan. unta. Seriya: Fiz.-matem. Nauki*. 2016, Vol. 158, Iss. 4, P. 530–543 (In Russ.).

11. Matveev A. D. [Multigrid method for finite elements in the analysis of composite plates and beams]. *Vestnik KrasGAU*. 2016, No. 12, P. 93–100 (In Russ.).

12. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2016, Vol. 158, No. 1, Art. 012067, P. 1–9.

13. Matveev A. D. [The construction of complex multigrid finite element heterogeneous and microinhomogeneities in structure]. *Izvestiya AltGU. Matematika i mekhanika*. 2014, No. 1/1, P. 80–83. Doi: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.

14. Matveev A. D. [Construction of multigrid finite elements to calculate shells, plates and beams based on generating finite elements]. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019, No. 3, P. 48–57 (In Russ.). Doi: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.

15. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1982, 264 p.

16. Matveev A. D. [Strength calculation of composite structures using equivalent strength conditions]. *Vestnik KrasGAU*. 2014, No. 11, P. 68–79 (In Russ.).

17. Golushko S. K., Nemirovskii I. V. *Priamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugikh kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniya* [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of rotation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 432 p.

© Матвеев А. Д., 2019

**Матвеев Александр Данилович** – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник; Институт вычислительного моделирования СО РАН. E-mail: mtv241@mail.ru.

**Matveev Alexander Danilovich** – Cand. Sc., associate Professor, senior researcher; Institute of computational modeling SB RAS. E-mail: mtv241@mail.ru.