УДК 519.622
Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-3-450-467

Для цитирования: Метод сумм Хаара численного решения системы кинематических уравнений Пуассона, определяющих эволюцию положения космического аппарата / К. А. Кириллов, Е. В. Овчинникова, К. В. Сафонов и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24, № 3. С. 450–467. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-3-450-467.

For citation: Kirillov K. A. et al. [The method of Haar sums for numerical solution of kinematic Poisson equations system that determine an evolution of a spacecraft position]. *Siberian Aerospace Journal.* 2023, Vol. 24, No. 3, P. 450–467. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-3-450-467.

Метод сумм Хаара численного решения системы кинематических уравнений Пуассона, определяющих эволюцию положения космического аппарата

К. А. Кириллов[1]*, Е. В. Овчинникова[1], К. В. Сафонов[1],
Г. П. Титов[2], А. И. Хохлов[2], А. А. Гашин[1]

[1]Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31
[2]АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнёва» (АО «РЕШЕТНЁВ»)
Российская Федерация, 662972, г. Железногорск Красноярского края, ул. Ленина, 52
*E-mail: kkirillow@yandex.ru

В представленной работе предложен метод численного решения системы кинематических уравнений Пуассона, определяющих эволюцию положения космического аппарата (КА), по которой определяют матрицу перехода от связанной с КА системы координат в выбранный момент времени t_1 к связанной с КА системе координат в текущий момент времени t_2. Указанная матрица перехода используется в ходе решения задачи определения трехосной ориентации КА по показаниям магнитометра с использованием информации о его угловых скоростях. Предложенный метод основан на замене производных искомых функций в кинематических уравнениях Пуассона на частичные суммы рядов по масштабированной системе Хаара. Эти суммы представляют собой обобщенные многочлены по масштабированной системе Хаара и, следовательно, являются ступенчатыми (кусочно-постоянными) функциями. Выведены оценки погрешности предложенного метода, показывающие, что в случае коэффициентов уравнений, представляющих собой функции, удовлетворяющие условию Липшица, абсолютная погрешность вычисления каждого из элементов матрицы перехода от одной системы координат к другой есть величина $O(N^{-1})$ при $N \to \infty$, где N – число разбиений отрезка $[t_1, t_2]$ при построении сетки узлов, задействованных в данном методе. Доказано, что трудоемкость построенного алгоритма приближенного решения системы кинематических уравнений Пуассона незначительно превышает трудоемкость решения указанной системы методом Эйлера, который имеет первый порядок точности. Приведены результаты численных экспериментов, показывающие, что в определенных случаях метод сумм Хаара дает погрешность, значительно меньшую, чем метод Эйлера, и практически идентичную погрешностям методов Эйлера – Коши и Рунге – Кутты 2-го порядка, трудоемкость которых примерно в два раза превосходит трудоемкость метода сумм Хаара.

Ключевые слова: трехосная ориентация космического аппарата, система координат, связанная с космическим аппаратом, система кинематических уравнений Пуассона, система функций Хаара.

The method of Haar sums for numerical solution of kinematic Poisson equations system that determine an evolution of a spacecraft position

K. A. Kirillov[1]*, E. V. Ovchinnikova[1], K. V. Safonov[1],
G. P. Titov[2], A. I. Khokhlov[2], A. A. Gashin[1]

[1]Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
[2]JSC "Academician M. F. Reshetnev "Information Satellite Systems" (RESHETNEV JSC)
52, Lenin St., Zheleznogorsk, Krasnoyarsk region, 662972, Russian Federation
*E-mail: kkirillow@yandex.ru

In the present paper the method for the numerical solution of Poisson kinematic equations system that determine the evolution of the spacecraft position is proposed. The system of Poisson kinematic equations is used to determine the transition matrix from the coordinate system associated with the spacecraft at the selected time t_1 to the coordinate system associated with the spacecraft at the current time t_2. This matrix is used in the process of solving problems of determining a three-axis orientation of the spacecraft from the readings of the magnetometer using information about its angular velocities. The proposed method is based on replacing the derivatives of the desired functions in the Poisson kinematic equations by partial sums of series in the scaled Haar system. The partial sums of these series are generalized polynomials in the scaled Haar system. Hence these sums are step (piecewise constant) functions. The estimates of the proposed method error are derived, which reveal that in the case of the coefficients of the equations which are functions matching the Lipschitz condition, the absolute error in calculating each of the elements of the transition matrix from one coordinate system to another is the value $O(N^{-1})$ at $N \to \infty$, where N is the number of partitions of the segment $[t_1, t_2]$ when constructing a grid of nodes involved in this method. It is proved that the complexity of constructing an algorithm for approximating the system of Poisson kinematic properties insignificantly exceeds the complexity of solving this system by Euler method, which has the first order of accuracy. The results of numerical experiments are presented, showing that in certain cases the Haar sums method gives an error that is much smaller than the Euler method, and is almost identical to the errors of the Euler – Cauchy and Runge – Kutta methods of the 2nd order, the complexity of which is approximately two times greater than the complexity of the Haar sums method.

Keywords: spacecraft three-axis orientation, the coordinate system associated with the spacecraft, system of Poisson kinematic equations, system of Haar functions.

Введение

В [1] предложен способ определения трехосной ориентации космического аппарата (КА) по показаниям магнитометра с использованием информации о его угловых скоростях. В ходе решения данной задачи рассматривают два измерения вектора напряженности магнитного поля Земли (МПЗ) и угловой скорости КА, сделанные в выбранный момент времени t_1, а также в момент времени t_2, соответствующий максимальному значению острого угла между этими измерениями вектора напряженности МПЗ. Затем, учитывая измеренные значения угловой скорости КА в указанные моменты времени t_1 и t_2, интегрируют систему кинематических уравнений Пуассона [1–6]

$$\begin{cases} d_{11}'(t) = \omega_3(t)d_{21}(t) - \omega_2(t)d_{31}(t), \\ d_{21}'(t) = \omega_1(t)d_{31}(t) - \omega_3(t)d_{11}(t), \\ d_{31}'(t) = \omega_2(t)d_{11}(t) - \omega_1(t)d_{21}(t), \\ d_{12}'(t) = \omega_3(t)d_{22}(t) - \omega_2(t)d_{32}(t), \\ d_{22}'(t) = \omega_1(t)d_{32}(t) - \omega_3(t)d_{12}(t), \\ d_{32}'(t) = \omega_2(t)d_{12}(t) - \omega_1(t)d_{22}(t), \\ d_{13}'(t) = \omega_3(t)d_{23}(t) - \omega_2(t)d_{33}(t), \\ d_{23}'(t) = \omega_1(t)d_{33}(t) - \omega_3(t)d_{13}(t), \\ d_{33}'(t) = \omega_2(t)d_{13}(t) - \omega_1(t)d_{23}(t), \end{cases} \qquad (1)$$

по которой определяют матрицу D_{12} поворота связанной с КА системы координат относительно инерциальной системы координат от момента времени t_1 к моменту времени t_2. В системе (1) через $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ обозначены проекции абсолютной угловой скорости КА на координатные оси абсцисс, ординат и аппликат соответственно (по информации от измерителя угловой скорости), $d_{ij}(t)$ – элементы матрицы D_{12}, $d_{ij}'(t)$ – их производные, $i, j = 1, 2, 3$. Начальное значение матрицы D_{12} (в момент времени t_1) принимается равным единичной матрице E.

Методы решения системы кинематических уравнений Пуассона (1) были рассмотрены, например, в [7–11]. В представленной работе предложен метод численного решения системы (1), основанный на замене производных искомых функций в этих уравнениях на обобщенные многочлены по масштабированной системе Хаара. Выведены оценки погрешности предложенного метода

$$\left| d_{ij}(t_2) - d_{ij}^{(n)}(t_2) \right| \le \Sigma_j(n) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где

$$\Sigma_j(n) \sim T\left[2^{n-1}\Omega(T+1)^{-1}\left(e^{2\Omega(T+1)} - 1\right) + \Omega_S - \omega\left(\omega_j, 2^{-n}\right) \right]$$

при $n \to \infty$, $j = 1, 2, 3$. Здесь $d_{ij}^{(n)}(t_2)$ – приближенные значения при $t = t_2$ элементов матрицы D_{12}, полученные в результате решения системы уравнений (1) данным методом ($i, j = 1, 2, 3$), $N = 2^n$ – число разбиений отрезка $[t_1, t_2]$ при построении сетки узлов, задействованных в предложенном методе, $\omega_j(t)$ – непрерывные на отрезке $[t_1, t_2]$ функции ($j = 1, 2, 3$), $T = t_2 - t_1$, $\Omega = \max\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$, где

$$\Omega_j = \max_{t \in [t_1, t_2]} \left| \omega_j(t) \right| \quad (j = 1, 2, 3),$$

где $\omega(f, \delta)$ – модуль непрерывности функции f, т. е.

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|t' - t''| \le \delta} \left| f(t') - f(t'') \right|,$$

а величина Ω_S определяется равенством

$$\Omega_S = \sum_{j=1}^{3} \omega\left(\omega_j, 2^{-n}\right).$$

Если при этом функции $\omega_j(t)$ удовлетворяют условию Липшица с константами $L_j \geq 0,$ то

$$\Sigma_j(n) \sim NT\left[2\Omega\left(T+1\right)^{-1}\left(e^{2\Omega(T+1)}-1\right)+L-L_j\right]$$

при $N \to \infty,$ $j = 1, 2, 3,$ $L = L_1 + L_2 + L_3,$ откуда следует, что в данном случае абсолютная погрешность вычисления каждого из элементов матрицы D_{12} перехода от одной системы координат к другой есть величина $O(N^{-1})$ при $N \to \infty.$

Система уравнений (1) с начальными условиями, вытекающими из равенства $D_{12} = E,$ разбивается на три задачи Коши. Доказано, что для численного решения каждой из этих трех задач Коши требуется $\Lambda_X(N) \sim 17N$ (при $N \to \infty$) арифметических операций, что незначительно превосходит трудоемкость решения каждой из этих задач Коши методом Эйлера.

Приведены результаты численных экспериментов, показывающие, что в определенных случаях метод сумм Хаара дает погрешность, значительно меньшую, чем метод Эйлера, и практически идентичную погрешностям методов Эйлера – Коши и Рунге – Кутты 2-го порядка, трудоемкость которых примерно в два раза превосходит трудоемкость метода сумм Хаара.

1. Постановка задачи. Основные определения

При определении ориентации космического аппарата необходимо учитывать его угловое движение в инерциальной системе координат. Для этого в интервале времени от t_1 до t_2 (t_1 и t_2 соответствуют двум положениям космического аппарата на орбите) приближенно решается система уравнений Пуассона (1), определяющих эволюцию положения космического аппарата из момента времени t_1 в момент времени t_2. Легко видеть, что система уравнений (1) с учетом начального значения матрицы D_{12} ($D_{12} = E$) сводится к следующим трем задачам Коши для систем уравнений:

$$\begin{cases} d_{1j}'(t) = \omega_3(t)d_{2j}(t) - \omega_2(t)d_{3j}(t), \\ d_{2j}'(t) = \omega_1(t)d_{3j}(t) - \omega_3(t)d_{1j}(t), \\ d_{3j}'(t) = \omega_2(t)d_{1j}(t) - \omega_1(t)d_{2j}(t); \end{cases} \tag{2}$$

$$d_{ij}\left(t_1\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad i = 1,2,3; \tag{3}$$

$j = 1, 2, 3.$ Считаем, что $\omega_1(t),$ $\omega_2(t),$ $\omega_3(t)$ – непрерывные на отрезке $\left[t_1, t_2\right]$ функции.

Построим алгоритм решения задачи Коши (2)–(3) и выведем оценки погрешности, используя методы, аналогичные приведенным в [12] в случае решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Приведем определение системы функций Хаара и сопутствующее ему понятие двоичных промежутков, введенные в [13].

Двоичным промежутком $l_{m,j}$ назовем промежуток с концами в точках $(j-1)/2^{m-1}$, $j/2^{m-1}$ ($m = 1,2, ..., j = 1,2, ..., 2^{m-1}$). Будем считать двоичные промежутки замкнутыми слева и открытыми справа. Если правый конец двоичного промежутка совпадает с 1, то будем считать этот промежуток замкнутым также и справа. Введем обозначения:

$$l_{m,j}^- = l_{m+1,2j-1}, \ \ l_{m,j}^+ = l_{m+1,2j}.$$

Очевидно, что

$$l_{m,j}^- \bigcup l_{m,j}^+ = l_{m,j}.$$

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1,2, ..., j = 1,2, ..., 2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определяются следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{(m-1)/2} & \text{при } x \in l_{m,j}^{-}, \\ -2^{(m-1)/2} & \text{при } x \in l_{m,j}^{+}, \\ 0 & \text{при } x \notin l_{m,j}, \end{cases}$$

$m = 1,2,\ldots,\ j = 1,2,\ldots,2^{m-1}$. Наряду с двойной нумерацией используется также простая нумерация:

$$\chi_{m,j}(x) = \chi_k(x),$$

где $k = 2^{m-1} + j,\ k = 2, 3, \ \ldots$ В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_1(x) \equiv 1$, которая остается вне групп.

2. Построение алгоритма численного решения задач Коши (2)–(3)

Введем обозначение $T = t_2 - t_1$. Будем искать приближенное решение

$$\left(d_{1j}^{(n)}(t), d_{2j}^{(n)}(t), d_{3j}^{(n)}(t)\right)$$

каждой из трех задач Коши (2)–(3), представляя производные

$$d_{1j}^{(n)}{}'(t),\ d_{2j}^{(n)}{}'(t),\ d_{3j}^{(n)}{}'(t)$$

в виде обобщенных многочленов по масштабированной системе Хаара $\left\{\chi_k\left((t-t_1)/T\right)\right\}$ порядков не выше 2^n:

$$d_{ij}^{(n)}{}'(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} C_{ij}^{(n,k)} \chi_k((t-t_1)/T),\ C_{ij}^{(n,k)} \in \mathbf{R},$$

$k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$. Такие обобщенные многочлены являются ступенчатыми функциями:

$$d_{ij}^{(n)}{}'(t) = d_{ij}^{(n,k)} \text{ при } t_1 + 2^{-n}Tk \le t \le t_1 + 2^{-n}T\left(k+1\right), \tag{4}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$.

Восстановим функции $d_{ij}^{(n)}(t)$ по их производным:

$$d_{ij}^{(n)}(t) = \delta_{ij} + 2^{-n}T\sum_{l=0}^{k-1} d_{ij}^{(n,l)} + \left(t - t_1 - 2^{-n}Tk\right)d_{ij}^{(n,k)} \text{ при } t_1 + 2^{-n}Tk \le t \le t_1 + 2^{-n}T\left(k+1\right), \tag{5}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$. Считаем, что в (5) при $k = 0$

$$\sum_{l=0}^{k-1} d_{ij}^{(n,l)} = 0.$$

Функции (5) являются кусочно-линейными с узлами в точках множества

$$\left\{t_{n,k} : t_{n,k} = t_1 + 2^{-n}Tk, k = 0,1,\ldots,2^n - 1\right\}. \tag{6}$$

Будем считать, что измеритель угловой скорости определяет значения проекций абсолютных угловых скоростей $\omega_1(t),\ \omega_2(t),\ \omega_3(t)$ именно в точках множества (6). Потребуем, чтобы функции (5) удовлетворяли системам уравнений (2) на этом множестве. Тогда получаем:

$$\begin{cases} d_{1j}^{(n)}{}'\left(t_{n,k}\right) = \omega_3\left(t_{n,k}\right) d_{2j}^{(n)}\left(t_{n,k}\right) - \omega_2\left(t_{n,k}\right) d_{3j}^{(n)}\left(t_{n,k}\right), \\ d_{2j}^{(n)}{}'\left(t_{n,k}\right) = \omega_1\left(t_{n,k}\right) d_{3j}^{(n)}\left(t_{n,k}\right) - \omega_3\left(t_{n,k}\right) d_{1j}^{(n)}\left(t_{n,k}\right), \\ d_{3j}^{(n)}{}'\left(t_{n,k}\right) = \omega_2\left(t_{n,k}\right) d_{1j}^{(n)}\left(t_{n,k}\right) - \omega_1\left(t_{n,k}\right) d_{2j}^{(n)}\left(t_{n,k}\right), \end{cases}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, $j = 1, 2, 3$. С учетом представления функций (5) и (4), обозначив для краткости

$$\omega_j\left(t_{n,k}\right) = \omega_j^{(n,k)} \quad (j = 1, 2, 3),$$

будем иметь:

$$\begin{cases} d_{1j}^{(n,k)} = \omega_3^{(n,k)}\left(\delta_{2j} + 2^{-n}T\sum_{l=0}^{k-1} d_{2j}^{(n,l)}\right) - \omega_2^{(n,k)}\left(\delta_{3j} + 2^{-n}T\sum_{l=0}^{k-1} d_{3j}^{(n,l)}\right), \\ d_{2j}^{(n,k)} = \omega_1^{(n,k)}\left(\delta_{3j} + 2^{-n}T\sum_{l=0}^{k-1} d_{3j}^{(n,l)}\right) - \omega_3^{(n,k)}\left(\delta_{1j} + 2^{-n}T\sum_{l=0}^{k-1} d_{1j}^{(n,l)}\right), \\ d_{3j}^{(n,k)} = \omega_2^{(n,k)}\left(\delta_{1j} + 2^{-n}T\sum_{l=0}^{k-1} d_{1j}^{(n,l)}\right) - \omega_1^{(n,k)}\left(\delta_{2j} + 2^{-n}T\sum_{l=0}^{k-1} d_{2j}^{(n,l)}\right), \end{cases} \tag{7}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, $j = 1, 2, 3$.

Таким образом, приходим к следующему алгоритму численного решения задач Коши (2)–(3).

1. Для каждого $j = 1, 2, 3$ выполняем следующие вычисления.

1.1. Находим значения

$$s_{1j}^{(n,0)},\ s_{2j}^{(n,0)},\ s_{3j}^{(n,0)}$$

по формулам, которые получаются из (7) при $k = 0$:

$$\begin{cases} s_{1j}^{(n,0)} = \delta_{2j}\omega_3^{(n,0)} - \delta_{3j}\omega_2^{(n,0)}, \\ s_{2j}^{(n,0)} = \delta_{3j}\omega_1^{(n,0)} - \delta_{1j}\omega_3^{(n,0)}, \\ s_{3j}^{(n,0)} = \delta_{1j}\omega_2^{(n,0)} - \delta_{2j}\omega_1^{(n,0)} \end{cases}$$

(при $k = 0$ суммы, фигурирующие в (7), считаются равными нулю).

1.2. Последовательно находим значения величин

$$\begin{gathered} s_{1j}^{(n,1)},\ s_{2j}^{(n,1)},\ s_{3j}^{(n,1)}; \\ s_{1j}^{(n,2)},\ s_{2j}^{(n,2)},\ s_{3j}^{(n,2)}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{1j}^{\left(n,2^n-1\right)},\ s_{2j}^{\left(n,2^n-1\right)},\ s_{3j}^{\left(n,2^n-1\right)}, \end{gathered}$$

по формулам

$$s_{1j}^{(n,k)} = s_{1j}^{(n,k-1)} + d_{1j}^{(n,k)},\ s_{2j}^{(n,k)} = s_{2j}^{(n,k-1)} + d_{2j}^{(n,k)},\ s_{3j}^{(n,k)} = s_{3j}^{(n,k-1)} + d_{3j}^{(n,k)}, \tag{8}$$

предварительно вычисляя для каждого $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ величины

$$\begin{cases} d_{1j}^{(n,k)} = \omega_3^{(n,k)}\cdot\left(\delta_{2j} + \tau\cdot s_{2j}^{(n,k-1)}\right) - \omega_2^{(n,k)}\cdot\left(\delta_{3j} + \tau\cdot s_{3j}^{(n,k-1)}\right), \\ d_{2j}^{(n,k)} = \omega_1^{(n,k)}\cdot\left(\delta_{3j} + \tau\cdot s_{3j}^{(n,k-1)}\right) - \omega_3^{(n,k)}\cdot\left(\delta_{1j} + \tau\cdot s_{1j}^{(n,k-1)}\right), \\ d_{3j}^{(n,k)} = \omega_2^{(n,k)}\cdot\left(\delta_{1j} + \tau\cdot s_{1j}^{(n,k-1)}\right) - \omega_1^{(n,k)}\cdot\left(\delta_{2j} + \tau\cdot s_{2j}^{(n,k-1)}\right), \end{cases} \tag{9}$$

где $\tau = 2^{-n}T$. Формулы (8), (9) следуют из рекуррентных соотношений (7).

2. По формулам, вытекающим из (5), для j = 1, 2, 3 вычисляем значения

$$d_{1j}^{(n)}(t_2) = \delta_{1j} + \tau \cdot s_{1j}^{(n,2^n-1)},\ d_{2j}^{(n)}(t_2) = \delta_{2j} + \tau \cdot s_{2j}^{(n,2^n-1)},\ d_{3j}^{(n)}(t_2) = \delta_{3j} + \tau \cdot s_{3j}^{(n,2^n-1)}.$$

3. Составляем матрицу перехода из связанной с космическим аппаратом системы координат в момент времени t_1 в связанную с космическим аппаратом систему координат в момент времени t_2:

$$D_{12} = \begin{pmatrix} d_{11}^{(n)}(t_2) & d_{12}^{(n)}(t_2) & d_{13}^{(n)}(t_2) \\ d_{21}^{(n)}(t_2) & d_{22}^{(n)}(t_2) & d_{23}^{(n)}(t_2) \\ d_{31}^{(n)}(t_2) & d_{32}^{(n)}(t_2) & d_{33}^{(n)}(t_2) \end{pmatrix}.$$

Оценим число арифметических операций, требуемых для реализации данного алгоритма. На k-м шаге (k = 1, 2, …, 2^n) процесса вычисления величин

$$d_{1j}^{(n,k)},\ d_{2j}^{(n,k)},\ d_{3j}^{(n,k)}\ \ (j \in \{1,2,3\}\ \text{фиксировано})$$

производится 17 арифметических операций: 3 арифметических операции требуется для нахождения промежуточных величин (8), 13 арифметических операций – для нахождения $d_{1j}^{(n,k)}$, $d_{2j}^{(n,k)}$, $d_{3j}^{(n,k)}$ по формулам (9) (из трех величин δ_{1j}, δ_{2j}, δ_{3j} только одна равна 1, остальные две равны 0) и 1 операция – для перехода к следующему узлу сетки ($t_{n,k+1} = t_{n,k} + \tau$). После выполнения ($2^n$–1)-го шага вычислений по формулам (8), (9) находим

$$d_{1j}^{(n)}(t_2) = \delta_{1j} + \tau \cdot s_{1j}^{(n,2^n)},\ d_{2j}^{(n)}(t_2) = \delta_{2j} + \tau \cdot s_{2j}^{(n,2^n)},\ d_{3j}^{(n)}(t_2) = \delta_{3j} + \tau \cdot s_{3j}^{(n,2^n)},\ \ j \in \{1,2,3\}.$$

Таким образом, если N – число разбиений отрезка $[t_1, t_2]$ ($N = 2^n$), то для численного решения каждой из трех задач Коши (2)–(3) (для каждого j = 1, 2, 3) требуется $\Lambda_{\text{Х}}(N)$ арифметических операций, где величина $\Lambda_{\text{Х}}(N)$ удовлетворяет соотношению

$$\Lambda_{\text{Х}}(N) \sim 17N \ \text{при}\ N \to \infty.$$

Сравним трудоемкость построенного алгоритма с трудоемкостью численного решения задач Коши (2)–(3) методом Эйлера [14; 15], погрешность которого так же, как и изложенного в настоящей работе метода (в случае удовлетворяющих условию Липшица функций $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$), есть величина, ограниченная по сравнению с N^{-1} при $N \to \infty$.

Нетрудно проверить, что для численного решения каждой из трех задач Коши (2)–(3) (для каждого j = 1, 2, 3) методом Эйлера требуется $\Lambda_{\text{Э}}(N)$ арифметических операций, где величина $\Lambda_{\text{Э}}(N)$ удовлетворяет соотношению

$$\Lambda_{\text{Э}}(N) \sim 16N \ \text{при}\ N \to \infty.$$

Отсюда следует, что трудоемкость решения задач (2) – (3) с помощью построенного в настоящей работе алгоритма незначительно превосходит трудоемкость решения этих задач методом Эйлера.

3. Вывод оценок погрешности метода

При $t_1 + 2^{-n}Tk < t < t_1 + 2^{-n}T(k+1)$ ($k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$) для разности производных от функций-компонент точного и приближенного решений будем иметь:

$$d_{1j}{}'(t)-d_{1j}^{(n)}{}'(t)=\omega_3(t)\int_{t_1}^{t}\left[d_{2j}{}'(\tau)-d_{2j}^{(n)}{}'(\tau)\right]d\tau+\left(\omega_3(t)-\omega_3^{(n,k)}\right)\int_{t_1}^{t}d_{2j}^{(n)}{}'(\tau)d\tau+$$

$$+\omega_3^{(n,k)}\int_{t_{n,k}}^{t}d_{2j}^{(n)}{}'(\tau)d\tau-\omega_2(t)\times\int_{t_1}^{t}\left[d_{3j}{}'(\tau)-d_{3j}^{(n)}{}'(\tau)\right]d\tau-\left(\omega_2(t)-\omega_2^{(n,k)}\right)\int_{t_1}^{t}d_{3j}^{(n)}{}'(\tau)d\tau-$$

$$-\omega_2^{(n,k)}\int_{t_{n,k}}^{t}d_{3j}^{(n)}{}'(\tau)d\tau+\delta_{2j}\left(\omega_3(t)-\omega_3^{(n,k)}\right)-\delta_{3j}\left(\omega_2(t)-\omega_2^{(n,k)}\right).$$

Тогда для $t_1+2^{-n}Tk<t<t_1+2^{-n}T(k+1)$ ($k=0,\,1,\,\ldots,\,2^n-1$) получаем:

$$\left|d_{1j}{}'(t)-d_{1j}^{(n)}{}'(t)\right|\le\Omega\left[\int_{t_1}^{t}\left|d_{2j}{}'(\tau)-d_{2j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_{n,k}}^{t_{n,k+1}}\left|d_{2j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_1}^{t}\left|d_{3j}{}'(\tau)-d_{3j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_{n,k}}^{t_{n,k+1}}\left|d_{3j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau\right]+$$

$$+\omega\left(\omega_3,2^{-n}\right)\int_{t_1}^{t_{n,k+1}}\left|d_{2j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\omega\left(\omega_y,2^{-n}\right)\int_{t_1}^{t_{n,k+1}}\left|d_{3j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\delta_{2j}\omega\left(\omega_3,2^{-n}\right)+\delta_{3j}\omega\left(\omega_2,2^{-n}\right),$$

где

$$\Omega=\max\left\{\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3\right\},\ \ \Omega_j=\max_{t\in[t_1,t_2]}\left|\omega_j(t)\right|\ \ (j=1,\,2,\,3),$$

а $\omega(f,\delta)$ – модуль непрерывности функции f, т. е.

$$\omega(f,\delta)=\sup_{|t'-t''|\le\delta}\left|f(t')-f(t'')\right|.$$

Аналогично, для $t_1+2^{-n}Tk<t<t_1+2^{-n}T(k+1)$ ($k=0,\,1,\,\ldots,\,2^n-1$) имеем:

$$\left|d_{2j}{}'(t)-d_{2j}^{(n)}{}'(t)\right|\le\Omega\left[\int_{t_1}^{t}\left|d_{3j}{}'(\tau)-d_{3j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_{n,k}}^{t_{n,k+1}}\left|d_{3j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_1}^{t}\left|d_{1j}{}'(\tau)-d_{1j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_{n,k}}^{t_{n,k+1}}\left|d_{1j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau\right]+$$

$$+\omega\left(\omega_1,2^{-n}\right)\int_{t_1}^{t_{n,k+1}}\left|d_{3j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\omega\left(\omega_3,2^{-n}\right)\int_{t_1}^{t_{n,k+1}}\left|d_{1j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\delta_{3j}\omega\left(\omega_1,2^{-n}\right)+\delta_{1j}\omega\left(\omega_3,2^{-n}\right),$$

$$\left|d_{3j}{}'(t)-d_{3j}^{(n)}{}'(t)\right|\le\Omega\left[\int_{t_1}^{t}\left|d_{1j}{}'(\tau)-d_{1j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_{n,k}}^{t_{n,k+1}}\left|d_{1j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_1}^{t}\left|d_{2j}{}'(\tau)-d_{2j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_{n,k}}^{t_{n,k+1}}\left|d_{2j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau\right]+$$

$$+\omega\left(\omega_2,2^{-n}\right)\int_{t_1}^{t_{n,k+1}}\left|d_{1j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\omega\left(\omega_1,2^{-n}\right)\int_{t_1}^{t_{n,k+1}}\left|d_{2j}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\delta_{1j}\omega\left(\omega_2,2^{-n}\right)+\delta_{2j}\omega\left(\omega_1,2^{-n}\right),$$

$k=0,\,1,\,\ldots,\,2^n-1$.

Для $t_1+2^{-n}Tk<t<t_1+2^{-n}T(k+1)$ ($k=0,\,1,\,\ldots,\,2^n-1$) справедливы неравенства

$$\left|d_{i1}^{(n)}{}'(t)\right|\le\alpha_i^{(n,k)}\ \ (i=1,\,2,\,3),\tag{10}$$

где

$$\alpha_1^{(n,k)}=2^{-n}\Omega\sum_{l=0}^{k-1}\left(\left|d_{21}^{(n,l)}\right|+\left|d_{31}^{(n,l)}\right|\right),\ \alpha_2^{(n,k)}=\Omega+2^{-n}\Omega\sum_{l=0}^{k-1}\left(\left|d_{11}^{(n,l)}\right|+\left|d_{31}^{(n,l)}\right|\right),\ \alpha_3^{(n,k)}=$$

$$=\Omega+2^{-n}\Omega\sum_{l=0}^{k-1}\left(\left|d_{11}^{(n,l)}\right|+\left|d_{21}^{(n,l)}\right|\right),\tag{11}$$

$k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Здесь мы по-прежнему считаем, что при $k = 0$ суммы в (11) принимают значение, равное нулю.

Истинность неравенств (10) при $k = 0$ вытекает из равенств

$$d_{11}^{(n,0)} = 0,\ \ d_{21}^{(n,0)} = -\omega_3^{(n,0)},\ \ d_{31}^{(n,0)} = \omega_2^{(n,0)}, \tag{12}$$

которые следуют из (7). Применяя неравенства (10) к оценке величин

$$\left|d_{i1}^{(n,k-1)}\right| \ \ (i = 1,\, 2,\, 3),$$

получим

$$\alpha_i^{(n,k)} = \alpha_i^{(n,k-1)} + 2^{-n}\Omega\left(\Delta^{(k-1)} - \left|d_{i1}^{(n,k-1)}\right|\right) \le \alpha_i^{(n,k-1)} + 2^{-n}\Omega\left(\Gamma^{(k-1)} - \alpha_i^{(n,k-1)}\right), \tag{13}$$

$i = 1, 2, 3$, где

$$\Delta^{(k-1)} = \sum_{i=1}^{3}\left|d_{i1}^{(n,k-1)}\right|,\ \ \Gamma^{(k-1)} = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^{(n,k-1)},$$

$k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Из (13) по индукции выводим неравенства

$$\alpha_i^{(n,k)} \le \frac{1}{3}\left[\left(1 + 2^{-n+1}\Omega\right)^k \Gamma^{(0)} + \left(3\alpha_i^{(n,0)} - \Gamma^{(0)}\right)\left(1 - 2^{-n}\Omega\right)^k\right],$$

$i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Из равенств (12) следует, что

$$\alpha_1^{(n,0)} = 0,\ \ \alpha_2^{(n,0)} = \Omega,\ \ \alpha_3^{(n,0)} = \Omega,$$

откуда с учетом (11) получаем неравенства для $t_1 + 2^{-n}Tk < t < t_1 + 2^{-n}T(k+1)$ ($k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$):

$$\left|d_{11}^{(n)\,\prime}(t)\right| \le \frac{2\Omega}{3}\left[\left(1 + 2^{-n+1}\Omega\right)^k - \left(1 - 2^{-n}\Omega\right)^k\right],$$

$$\left|d_{i1}^{(n)\,\prime}(t)\right| \le \frac{\Omega}{3}\left[2\left(1 + 2^{-n+1}\Omega\right)^k + \left(1 - 2^{-n}\Omega\right)^k\right] \ \ (i = 2,\, 3). \tag{14}$$

Из (14) следуют неравенства

$$\int_{t_{n,k}}^{t_{n,k+1}}\left|d_{11}^{(n)\,\prime}(\tau)\right|d\tau \le \frac{2^{-n+1}\Omega}{3}\left[\left(1 + 2^{-n+1}\Omega\right)^k - \left(1 - 2^{-n}\Omega\right)^k\right],$$

$$\int_{t_{n,k}}^{t_{n,k+1}}\left|d_{i1}^{(n)\,\prime}(\tau)\right|d\tau \le \frac{2^{-n}\Omega}{3}\left[2\left(1 + 2^{-n+1}\Omega\right)^k + \left(1 - 2^{-n}\Omega\right)^k\right]$$

($i = 2, 3$), из которых получаем:

$$\int_{t_1}^{t_{n,k+1}}\left|d_{11}^{(n)\,\prime}(\tau)\right|d\tau \le \frac{\Omega T(k+1)}{3\cdot 2^{n-1}}\left[\left(1 + \frac{\Omega}{2^{n-1}}\right)^k - \left(1 - \frac{\Omega}{2^n}\right)^k\right],$$

$$\int_{t_1}^{t_{n,k+1}}\left|d_{i1}^{(n)\,\prime}(\tau)\right|d\tau \le \frac{\Omega T(k+1)}{3\cdot 2^{n}}\left[2\left(1 + \frac{\Omega}{2^{n-1}}\right)^k + \left(1 - \frac{\Omega}{2^n}\right)^k\right]$$

($i = 2, 3$), поэтому для $t_1 + 2^{-n}Tk < t < t_1 + 2^{-n}T(k+1)$ ($k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$) будет выполняться

$$\left|d_{11}'(t) - d_{11}^{(n)\,\prime}(t)\right| \le \Omega\left[\int_{t_1}^{t}\left|d_{21}'(\tau) - d_{21}^{(n)\,\prime}(\tau)\right|d\tau + \int_{t_1}^{t}\left|d_{31}'(\tau) - d_{31}^{(n)\,\prime}(\tau)\right|d\tau\right] + \frac{2^{-n+1}\Omega^2}{3}\times$$

$$\times\left[2\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)^k+\left(1-2^{-n}\Omega\right)^k\right]+\frac{2^{-n}\Omega T\left(k+1\right)}{3}\left[2\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)^k+\left(1-2^{-n}\Omega\right)^k\right]\times$$

$$\times\left(\omega\left(\omega_3,2^{-n}\right)+\omega\left(\omega_2,2^{-n}\right)\right). \qquad (15)$$

Аналогично выводятся неравенства

$$\left|d_{21}{}'(t)-d_{21}^{(n)}{}'(t)\right|\le\Omega\left[\int_{t_1}^{t}\left|d_{31}{}'(\tau)-d_{31}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_1}^{t}\left|d_{11}{}'(\tau)-d_{11}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau\right]+$$

$$+\frac{\Omega^2}{3\cdot 2^n}\left[4\left(1+\frac{\Omega}{2^{n-1}}\right)^k-\left(1-\frac{\Omega}{2^n}\right)^k\right]+\frac{\Omega T\left(k+1\right)}{3\cdot 2^n}\left[2\left(1+\frac{\Omega}{2^{n-1}}\right)^k+\left(1-\frac{\Omega}{2^n}\right)^k\right]\omega\left(\omega_1,2^{-n}\right)+$$

$$+\left[\frac{\Omega T\left(k+1\right)}{3\cdot 2^{n-1}}\left(\left(1+\frac{\Omega}{2^{n-1}}\right)^k-\left(1-\frac{\Omega}{2^n}\right)^k\right)+1\right]\omega\left(\omega_3,2^{-n}\right), \qquad (16)$$

$$\left|d_{31}{}'(t)-d_{31}^{(n)}{}'(t)\right|\le\Omega\left[\int_{t_1}^{t}\left|d_{11}{}'(\tau)-d_{11}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau+\int_{t_1}^{t}\left|d_{21}{}'(\tau)-d_{21}^{(n)}{}'(\tau)\right|d\tau\right]+$$

$$+\frac{\Omega^2}{3\cdot 2^n}\left[4\left(1+\frac{\Omega}{2^{n-1}}\right)^k-\left(1-\frac{\Omega}{2^n}\right)^k\right]+\frac{\Omega T\left(k+1\right)}{3\cdot 2^n}\left[2\left(1+\frac{\Omega}{2^{n-1}}\right)^k+\left(1-\frac{\Omega}{2^n}\right)^k\right]\omega\left(\omega_1,2^{-n}\right)+$$

$$+\left[\frac{\Omega T\left(k+1\right)}{3\cdot 2^{n-1}}\left(\left(1+\frac{\Omega}{2^{n-1}}\right)^k-\left(1-\frac{\Omega}{2^n}\right)^k\right)+1\right]\omega\left(\omega_2,2^{-n}\right), \qquad (17)$$

$t_1+2^{-n}Tk<t<t_1+2^{-n}T\left(k+1\right)$, $k=0,1,\ldots,2^n-1$. Почленно суммируя неравенства (15)–(17), получаем:

$$\left|d_{11}{}'(t)-d_{11}^{(n)}{}'(t)\right|+\left|d_{21}{}'(t)-d_{21}^{(n)}{}'(t)\right|+\left|d_{31}{}'(t)-d_{31}^{(n)}{}'(t)\right|\le$$

$$\le 2\Omega\int_{t_1}^{t}\left(\left|d_{11}{}'(\tau)-d_{11}^{(n)}{}'(\tau)\right|+\left|d_{21}{}'(\tau)-d_{21}^{(n)}{}'(\tau)\right|+\left|d_{31}{}'(\tau)-d_{31}^{(n)}{}'(\tau)\right|\right)d\tau+A(n,k),$$

где

$$A(n,k)=2^{-n+2}\Omega^2\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)^k+\frac{2^{-n+1}\Omega T\left(k+1\right)}{3}\left[2\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)^k+\left(1-2^{-n}\Omega\right)^k\right]\omega\left(\omega_1,2^{-n}\right)+$$

$$+\left[\frac{2^{-n}\Omega T\left(k+1\right)}{3}\left(4\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)^k-\left(1-2^{-n}\Omega\right)^k\right)+1\right]\left[\omega\left(\omega_2,2^{-n}\right)+\omega\left(\omega_3,2^{-n}\right)\right].$$

В [12] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Если неотрицательная функция $f(x)$, $x_0\le x\le X$, имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода $\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}\subset(x_0,X)$, в которых $f(x_k)\le\max\{f(x_k-0),f(x_k+0)\}$, $k=1,2,\ldots,N$, и удовлетворяет с некоторыми постоянными $\alpha,\beta>0$ условию

$$f\left(x\right)\le\alpha+\beta\int_{x_0}^{x}f\left(t\right)dt$$

хотя бы во всех точках непрерывности (а тогда и вообще во всех точках отрезка $[x_0, X]$), то при $x_0 \le x \le X$ выполняется неравенство

$$f(x) \le \alpha e^{\beta(x-x_0)}.$$

Применяя эту лемму, приходим к следующему неравенству:

$$\left|d_{11}'(t) - d_{11}^{(n)}{}'(t)\right| + \left|d_{21}'(t) - d_{21}^{(n)}{}'(t)\right| + \left|d_{31}'(t) - d_{31}^{(n)}{}'(t)\right| \le A(n,k)e^{2\Omega(t-t_1)}.$$

Следовательно, для $t_1 + 2^{-n}Tk < t < t_1 + 2^{-n}T(k+1)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$

$$\left|d_{i1}'(t) - d_{i1}^{(n)}{}'(t)\right| \le A(n,k)e^{2\Omega(t-t_1)}, \tag{18}$$

$i = 1, 2, 3$. Справедливо равенство

$$d_{i1}(t_{n,k}) - d_{i1}^{(n)}(t_{n,k}) = \delta_{i1} + \int_{t_1}^{t_{n,k}} d_{i1}'(\tau)d\tau - \delta_{i1} - 2^{-n}\sum_{l=0}^{k-1} d_{i1}^{(n,l)} = \int_{t_1}^{t_{n,k}} d_{i1}'(\tau)d\tau - 2^{-n}\sum_{l=0}^{k-1} d_{i1}^{(n,l)},$$

где $t_{n,k}$ – точки множества (6), $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, $i = 1, 2, 3$. Отсюда получаем:

$$d_{i1}(t_2) - d_{i1}^{(n)}(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} d_{i1}'(\tau)d\tau - 2^{-n}T\sum_{l=0}^{2^n-1} d_{i1}^{(n,l)} = \sum_{l=0}^{2^n-1}\int_{t_{n,l}}^{t_{n,l+1}} d_{i1}'(\tau)d\tau - 2^{-n}T\sum_{l=0}^{2^n-1} d_{i1}^{(n,l)} =$$

$$= 2^{-n}T\sum_{l=0}^{2^n-1}\left(d_{i1}'(\tau_l) - d_{i1}^{(n)\prime}(t_{n,l})\right) = 2^{-n}T\sum_{l=0}^{2^n-1}\left[\left(d_{i1}'(\tau_l) - d_{i1}^{(n)\prime}(\tau_l)\right) + \left(d_{i1}^{(n)\prime}(\tau_l) - d_{i1}^{(n)\prime}(t_{n,l})\right)\right] =$$

$$= 2^{-n}T\sum_{l=0}^{2^n-1}\left(d_{i1}'(\tau_l) - d_{i1}^{(n)\prime}(\tau_l)\right), \tag{19}$$

где τ_l – точки интервала $(t_{n,l}, t_{n,l+1})$, $l = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, $i = 1, 2, 3$. Здесь мы воспользовались теоремой о среднем для определенного интеграла, из которой вытекает существование точек τ_l интервала $(t_{n,l}, t_{n,l+1})$ таких, что для непрерывных функций $d_{i1}'(\tau)$ выполняются равенства

$$\int_{t_{n,l}}^{t_{n,l+1}} d_{i1}'(\tau)d\tau = d_{i1}'(\tau_l)\left(t_{n,l+1} - t_{n,l}\right) = 2^{-n}d_{i1}'(\tau_l),$$

где $l = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, $i = 1, 2, 3$, а также тем, что на каждом из интервалов

$$\left(t_{n,l}, t_{n,l+1}\right) = \left(t_1 + 2^{-n}Tl, t_1 + 2^{-n}T(l+1)\right)$$

многочлены Хаара $d_{i1}^{(n)\prime}(t)$ принимают постоянное значение, вследствие чего

$$d_{i1}^{(n)\prime}(\tau_l) = d_{i1}^{(n)\prime}(t_{n,l}),$$

$l = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, $i = 1, 2, 3$. Применяя неравенство треугольника и неравенства (16), из (17) получаем:

$$\left|d_{i1}(t_2) - d_{i1}^{(n)}(t_2)\right| \le 2^{-n}T\sum_{l=0}^{2^n-1}\left|d_{i1}'(\tau_l) - d_{i1}^{(n)\prime}(\tau_l)\right| \le$$

$$\le 2^{-n}T\sum_{l=0}^{2^n-1} A(n,l)e^{2\Omega(\tau_l - t_1)} < 2^{-n}T\sum_{l=0}^{2^n-1} A(n,l)e^{2^{-n+1}\Omega T(l+1)}, \tag{20}$$

$i = 1, 2, 3$. Имеют место равенства

$$\sum_{l=0}^{N-1} q^l = \left(q^N - 1\right)\left(q-1\right)^{-1}, \quad \sum_{l=0}^{N-1}\left(l+1\right)q^l = \left(Nq^{N+1} - \left(N+1\right)q^N + 1\right)\left(q-1\right)^{-2},$$

истинность которых легко проверяется по индукции. Используя эти равенства, вычислим следующие суммы:

$$\sigma_1(n) = \sum_{l=0}^{2^n-1} e^{2^{-n+1}\Omega T(l+1)}\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)^l = e^{2^{-n+1}\Omega T}\,\frac{e^{2\Omega T}\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)^{2^n}-1}{e^{2^{-n+1}\Omega T}\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)-1},$$

$$\sigma_2(n) = \sum_{l=0}^{2^n-1} e^{2^{-n+1}\Omega T(l+1)}\left(l+1\right)\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)^l =$$

$$= e^{2^{-n+1}\Omega T}\,\frac{e^{2\Omega T}2^n e^{2^{-n+1}\Omega T}\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)^{2^n+1} - e^{2\Omega T}\left(2^n+1\right)\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)^{2^n}+1}{\left(e^{2^{-n+1}\Omega T}\left(1+2^{-n+1}\Omega\right)-1\right)^2},$$

$$\sigma_3(n) = \sum_{l=0}^{2^n-1} e^{2^{-n+1}\Omega T(l+1)}\left(l+1\right)\left(1-2^{-n}\Omega\right)^l =$$

$$= e^{2^{-n+1}\Omega T}\,\frac{e^{2\Omega T}2^n e^{2^{-n+1}\Omega T}\left(1-2^{-n}\Omega\right)^{2^n+1} - e^{2\Omega T}\left(2^n+1\right)\left(1-2^{-n}\Omega\right)^{2^n}+1}{\left(e^{2^{-n+1}\Omega T}\left(1-2^{-n}\Omega\right)-1\right)^2}.$$

Из неравенства (20) получаем:

$$\left|d_{i1}\left(t_2\right) - d_{i1}^{(n)}\left(t_2\right)\right| \le 2^{-n}T\left\{2^{-n+2}\Omega^2\sigma_1(n) + \frac{2^{-n+1}\Omega T}{3}\left[2\sigma_2(n)+\sigma_3(n)\right]\omega\left(\omega_1, 2^{-n}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{2^{-n}\Omega T}{3}\left(4\sigma_2(n)-\sigma_3(n)\right)+1\right]\left[\omega\left(\omega_2, 2^{-n}\right)+\omega\left(\omega_3, 2^{-n}\right)\right]\right\}, \tag{21}$$

$i = 1, 2, 3$. Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n+2}\sigma_1(n) = 2\Omega^{-1}\left(T+1\right)^{-1}\left(e^{2\Omega(T+1)}-1\right), \quad \lim_{n\to\infty} 2^{-n+1}\sigma_2(n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} 2^{-n+1}\sigma_3(n) = 0. \tag{22}$$

Тогда из неравенства (20) вытекает оценка

$$\left|d_{i1}\left(t_2\right) - d_{i1}^{(n)}\left(t_2\right)\right| \le \Sigma_1(n), \tag{23}$$

$i = 1, 2, 3$, где

$$\Sigma_1(n) \sim T\left[2^{-n+1}\Omega\left(T+1\right)^{-1}\left(e^{2\Omega(T+1)}-1\right) + \omega\left(\omega_2, 2^{-n}\right) + \omega\left(\omega_3, 2^{-n}\right)\right]$$

при $n\to\infty$. Если при этом функции $\omega_2(t)$ и $\omega_3(t)$ удовлетворяют условию Липшица, т. е. существуют константы $L_2 \ge 0$ и $L_3 \ge 0$ такие, что для любого числа $\delta > 0$ выполняются неравенства

$$\omega\left(\omega_2, \delta\right) \le L_2\delta, \quad \omega\left(\omega_3, \delta\right) \le L_3\delta,$$

то для величины $\Sigma_1(n)$, фигурирующей в неравенстве (23), имеет место соотношение

$$\Sigma_1(n) \sim 2^{-n} T\left[2\Omega(T+1)^{-1}\left(e^{2\Omega(T+1)}-1\right)+L_2+L_3\right]$$

при $n \to \infty$.

Аналогично тому, как было получено неравенство (21), выводим соотношения

$$\left|d_{ij}(t_2)-d_{ij}^{(n)}(t_2)\right| \le 2^{-n} T\left\{2^{-n+2}\Omega^2\sigma_1(n)+\frac{2^{-n+1}\Omega T}{3}\left[2\sigma_2(n)+\sigma_3(n)\right]\omega\left(\omega_j, 2^{-n}\right)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{2^{-n}\Omega T}{3}\left(4\sigma_2(n)-\sigma_3(n)\right)+1\right]\left[\Omega_S-\omega\left(\omega_j, 2^{-n}\right)\right]\right\}, \qquad (24)$$

$i = 1, 2, 3, j = 2, 3$, где Ω_S определяется равенством

$$\Omega_S = \sum_{j=1}^{3}\omega\left(\omega_j, 2^{-n}\right).$$

Учитывая (22) и (24), приходим к оценкам

$$\left|d_{ij}(t_2)-d_{ij}^{(n)}(t_2)\right| \le \Sigma_j(n),$$

$i = 1, 2, 3, j = 2, 3$, где

$$\Sigma_j(n) \sim T\left[2^{-n+1}\Omega(T+1)^{-1}\left(e^{2\Omega(T+1)}-1\right)+\Omega_S-\omega\left(\omega_j, 2^{-n}\right)\right]$$

при $n \to \infty$, $j = 2, 3$. Если при этом функции $\omega_j(t)$ удовлетворяют условию Липшица с константами $L_j \ge 0$ ($j = 1, 2, 3$), то

$$\Sigma_j(n) \sim 2^{-n} T\left[2\Omega(T+1)^{-1}\left(e^{2\Omega(T+1)}-1\right)+L-L_j\right]$$

при $n \to \infty$, $j = 2, 3$, где $L = L_1 + L_2 + L_3$.

4. Результаты численных экспериментов

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши (2)–(3) для $j = 1$ со значениями параметров $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ и коэффициентами

$$\omega_1(t) = \cos 1{,}5t;\; \omega_2(t) = \frac{1}{2}\sin 1{,}5t + \frac{3\sqrt{3}}{4};\; \omega_3(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 1{,}5t - 0{,}75.$$

Нетрудно проверить, что точное решение такой задачи Коши есть

$$d_{11}(t) = \cos 1{,}5t;\; d_{21}(t) = \frac{1}{2}\sin 1{,}5t;\; d_{31}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 1{,}5t;$$

причем $d_{11}(t_2) \approx -0{,}07074$, $d_{21}(t_2) \approx 0{,}49875$, $d_{31}(t_2) \approx 0{,}86386$.

В табл. 1 приведены значения величины квадратного корня из среднеквадратичной ошибки компонент решения рассматриваемой задачи Коши в точке t_2 с использованными в примере 1 значениями параметров и коэффициентов, полученные методами сумм Хаара, Эйлера, Эйлера – Коши [16] и Рунге – Кутты 2-го порядка [14; 15] для N разбиений отрезка $[t_1, t_2]$, где $N = 2^{15}, 2^{16}, \ldots, 2^{24}$.

В данном случае погрешности решения задачи Коши (2)–(3) методами сумм Хаара и Эйлера практически идентичны, но погрешности для методов Эйлера – Коши и Рунге – Кутты 2-го порядка значительно меньше погрешностей, полученных в результате применения первых двух методов.

Таблица 1

Величина квадратного корня из среднеквадратичной ошибки компонент решения в точке t_2 для значений параметров и коэффициентов, использованных в примере 1

N (число разбиений отрезка $[t_1, t_2]$)	Величина $\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(d_{i1}(t_2)-d_{i1}^{(n)}(t_2)\right)^2}$			
	Метод сумм Хаара	Метод Эйлера	Метод Эйлера – Коши	Метод Рунге – Кутты 2-го порядка
2^{15}	$1{,}98221\cdot10^{-5}$	$2{,}14845\cdot10^{-5}$	$2{,}90010\cdot10^{-10}$	$2{,}90010\cdot10^{-10}$
2^{16}	$9{,}91096\cdot10^{-6}$	$1{,}07423\cdot10^{-5}$	$7{,}25045\cdot10^{-11}$	$7{,}25045\cdot10^{-11}$
2^{17}	$4{,}95546\cdot10^{-6}$	$5{,}37117\cdot10^{-6}$	$1{,}81151\cdot10^{-11}$	$1{,}81152\cdot10^{-11}$
2^{18}	$2{,}47772\cdot10^{-6}$	$2{,}68559\cdot10^{-6}$	$4{,}53666\cdot10^{-12}$	$4{,}53667\cdot10^{-12}$
2^{19}	$1{,}23886\cdot10^{-6}$	$1{,}34279\cdot10^{-6}$	$1{,}13229\cdot10^{-12}$	$1{,}13229\cdot10^{-12}$
2^{20}	$6{,}19430\cdot10^{-7}$	$6{,}71397\cdot10^{-7}$	$2{,}89097\cdot10^{-13}$	$2{,}89107\cdot10^{-13}$
2^{21}	$3{,}09715\cdot10^{-7}$	$3{,}35699\cdot10^{-7}$	$6{,}36173\cdot10^{-14}$	$6{,}36283\cdot10^{-14}$
2^{22}	$1{,}54857\cdot10^{-7}$	$1{,}67849\cdot10^{-7}$	$1{,}62080\cdot10^{-14}$	$1{,}62080\cdot10^{-14}$
2^{23}	$7{,}74287\cdot10^{-8}$	$8{,}39247\cdot10^{-8}$	$5{,}05499\cdot10^{-14}$	$5{,}05598\cdot10^{-14}$
2^{24}	$3{,}87144\cdot10^{-8}$	$4{,}19624\cdot10^{-8}$	$2{,}36189\cdot10^{-14}$	$2{,}36183\cdot10^{-14}$

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши (2)–(3) для $j = 1$ со значениями параметров $t_1 = 0,\ t_2 = 2$ и коэффициентами

$$\omega_1(t) = \sqrt[5]{\mathrm{ch}^9 t},\ \ \omega_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[5]{\mathrm{ch}^9 t}\ \mathrm{tg}\, t + 1\right),\ \ \omega_3(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[5]{\mathrm{ch}^9 t}\ \mathrm{tg}\, t - 1\right).$$

Нетрудно проверить, что точное решение такой задачи Коши есть

$$d_{11}(t) = \cos t,\ \ d_{21}(t) = d_{31}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,$$

причем $d_{11}(t_2) \approx -0{,}41615,\ \ d_{21}(t_2) = d_{31}(t_2) \approx 0{,}64297.$

В табл. 2 приведены значения величины квадратного корня из среднеквадратичной ошибки компонент решения рассматриваемой задачи Коши в точке t_2 с использованными в примере 2 значениями параметров и коэффициентов, полученные методами сумм Хаара, Эйлера, Эйлера – Коши [16] и Рунге – Кутты 2-го порядка [14; 15] для N разбиений отрезка $[t_1, t_2]$, где $N = 2^{15}, 2^{16}, \ldots, 2^{24}$.

Таблица 2

Величина квадратного корня из среднеквадратичной ошибки компонент решения в точке t_2 для значений параметров и коэффициентов, использованных в примере 2

N (число разбиений отрезка $[t_1, t_2]$)	Величина $\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(d_{i1}(t_2)-d_{i1}^{(n)}(t_2)\right)^2}$			
	Метод сумм Хаара	Метод Эйлера	Метод Эйлера – Коши	Метод Рунге – Кутты 2-го порядка
2^{15}	$1{,}77319\cdot10^{-2}$	$5{,}86421\cdot10^{-2}$	$1{,}94818\cdot10^{-2}$	$4{,}54692\cdot10^{-3}$
2^{16}	$2{,}27484\cdot10^{-3}$	$1{,}68334\cdot10^{-2}$	$1{,}28402\cdot10^{-3}$	$6{,}33870\cdot10^{-4}$
2^{17}	$3{,}17159\cdot10^{-4}$	$6{,}71757\cdot10^{-4}$	$9{,}98299\cdot10^{-5}$	$1{,}30330\cdot10^{-4}$
2^{18}	$6{,}52261\cdot10^{-5}$	$3{,}35977\cdot10^{-4}$	$1{,}68894\cdot10^{-5}$	$6{,}26192\cdot10^{-5}$
2^{19}	$3{,}12779\cdot10^{-5}$	$2{,}52341\cdot10^{-4}$	$1{,}56949\cdot10^{-5}$	$9{,}12427\cdot10^{-6}$
2^{20}	$4{,}57051\cdot10^{-6}$	$1{,}76562\cdot10^{-4}$	$1{,}35320\cdot10^{-6}$	$2{,}37992\cdot10^{-6}$
2^{21}	$1{,}45672\cdot10^{-6}$	$1{,}43105\cdot10^{-4}$	$3{,}89106\cdot10^{-7}$	$6{,}50765\cdot10^{-7}$
2^{22}	$5{,}97437\cdot10^{-7}$	$6.01678\cdot10^{-5}$	$2{,}00878\cdot10^{-7}$	$3{,}41657\cdot10^{-7}$
2^{23}	$3{,}05874\cdot10^{-7}$	$3{,}76402\cdot10^{-5}$	$1{,}86299\cdot10^{-7}$	$3{,}07409\cdot10^{-7}$
2^{24}	$1{,}51830\cdot10^{-7}$	$1{,}30176\cdot10^{-5}$	$1{,}13470\cdot10^{-7}$	$2{,}58138\cdot10^{-7}$

В данном случае метод сумм Хаара дает погрешность, значительно меньшую, чем метод Эйлера, и практически идентичную погрешностям решения задачи Коши (2)–(3) методами Эйлера – Коши и Рунге – Кутты 2-го порядка.

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши (2)–(3) для $j = 1$ со значениями параметров $t_1 = 0$, $t_2 = 2$ и коэффициентами

$$\omega_1(t) = \sqrt[8]{|\sec t|},\ \ \omega_2(t) = \frac{3}{5}\sqrt[8]{|\sec t|}\,\operatorname{tg} t + \frac{4}{5},\ \ \omega_3(t) = \frac{4}{5}\sqrt[8]{|\sec t|}\,\operatorname{tg} t - \frac{3}{5}.$$

Точное решение такой задачи Коши имеет вид

$$d_{11}(t) = \cos t,\ \ d_{21}(t) = \frac{3}{5}\sin t,\ \ d_{31}(t) = \frac{4}{5}\sin t,$$

причем $d_{11}(t_2) \approx -0{,}41615$, $d_{21}(t_2) \approx 0{,}54558$, $d_{31}(t_2) \approx 0{,}72744$.

В табл. 3 приведены значения величины квадратного корня из среднеквадратичной ошибки компонент решения рассматриваемой задачи Коши в точке t_2 с использованными в примере 3 значениями параметров и коэффициентов, полученные методами сумм Хаара, Эйлера, Эйлера – Коши [16] и Рунге – Кутты 2-го порядка [14; 15] для N разбиений отрезка $[t_1, t_2]$, где $N = 2^{15}, 2^{16}, \ldots, 2^{24}$.

Таблица 3

Величина квадратного корня из среднеквадратичной ошибки компонент решения в точке t_2 для значений параметров и коэффициентов, использованных в примере 3

N (число разбиений отрезка $[t_1, t_2]$)	Величина $\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(d_{i1}(t_2) - d_{i1}^{(n)}(t_2)\right)^2}$			
	Метод сумм Хаара	Метод Эйлера	Метод Эйлера – Коши	Метод Рунге – Кутты 2-го порядка
2^{15}	$4{,}09952\cdot10^{-5}$	$3{,}64380\cdot10^{-2}$	$8{,}14584\cdot10^{-5}$	$1{,}60285\cdot10^{-5}$
2^{16}	$1{,}83821\cdot10^{-5}$	$1{,}47670\cdot10^{-3}$	$1{,}05944\cdot10^{-5}$	$4{,}83737\cdot10^{-6}$
2^{17}	$8{,}94108\cdot10^{-6}$	$1{,}00902\cdot10^{-3}$	$5{,}50037\cdot10^{-6}$	$3{,}37017\cdot10^{-6}$
2^{18}	$4{,}46564\cdot10^{-6}$	$6{,}25570\cdot10^{-4}$	$2{,}39992\cdot10^{-6}$	$2{,}41542\cdot10^{-6}$
2^{19}	$2{,}41361\cdot10^{-6}$	$5{,}37907\cdot10^{-4}$	$1{,}77466\cdot10^{-6}$	$1{,}31424\cdot10^{-6}$
2^{20}	$1{,}16140\cdot10^{-6}$	$2{,}79979\cdot10^{-4}$	$1{,}47872\cdot10^{-6}$	$1{,}05524\cdot10^{-6}$
2^{21}	$6{,}26278\cdot10^{-7}$	$1{,}65719\cdot10^{-4}$	$7{,}68163\cdot10^{-7}$	$1{,}01374\cdot10^{-6}$
2^{22}	$3{,}14122\cdot10^{-7}$	$1{,}80869\cdot10^{-4}$	$5{,}62648\cdot10^{-7}$	$8{,}27771\cdot10^{-7}$
2^{23}	$6{,}62019\cdot10^{-7}$	$1{,}51395\cdot10^{-4}$	$5{,}56389\cdot10^{-7}$	$2{,}44021\cdot10^{-7}$
2^{24}	$6{,}36338\cdot10^{-7}$	$4{,}78043\cdot10^{-5}$	$4{,}17734\cdot10^{-7}$	$1{,}36309\cdot10^{-7}$

Пример 3, как и пример 2, показывает, что в определенных случаях метод сумм Хаара дает погрешность, значительно меньшую, чем метод Эйлера, и практически идентичную погрешностям методов Эйлера – Коши и Рунге – Кутты 2-го порядка.

При этом следует отметить, что трудоемкость методов Эйлера – Коши и Рунге – Кутты 2-го порядка примерно вдвое превосходит трудоемкость метода сумм Хаара – число арифметических операций $\Lambda_{\text{ЭК}}(N)$ и $\Lambda_{\text{РК}}(N)$, требуемых для решения каждой из трех задач Коши (2)–(3) методами Эйлера – Коши и Рунге – Кутты 2-го порядка соответственно, удовлетворяет соотношениям

$$\Lambda_{\text{ЭК}}(N) \sim 34N \ \text{ при } \ N \to \infty,\ \ \Lambda_{\text{РК}}(N) \sim 32N \ \text{ при } \ N \to \infty.$$

Заключение

В настоящей работе представлен новый метод решения системы кинематических уравнений Пуассона, определяющих эволюцию положения КА из момента времени t_1 в момент времени t_2. Из полученных оценок погрешности метода следует, что если функции, представляющие собой проекции абсолютной угловой скорости КА на координатные оси, удовлетворяют условию Липшица, то абсолютная погрешность вычисления каждого из элементов матрицы перехода от связанной с КА системы координат в момент времени t_1 к связанной с КА системе координат в момент времени t_2, так же, как и в случае решения указанной системы уравнений методом Эйлера, есть величина $O(N^{-1})$ при $N \to \infty$. где N – число разбиений отрезка $[t_1, t_2]$ при построении сетки используемых узлов.

Сравнение алгоритмов решения рассматриваемой системы уравнений предложенным методом и методом Эйлера по их вычислительной эффективности показало, что для реализации каждого из них требуется $O(N)$ арифметических операций при $N \to \infty$, при этом трудоемкость построенного в данной работе алгоритма незначительно превышает трудоемкость алгоритма решения системы методом Эйлера.

Из приведенных в работе результатов численных экспериментов следует, что в определенных случаях метод сумм Хаара дает погрешность, значительно меньшую, чем метод Эйлера, и практически идентичную погрешностям методов Эйлера – Коши и Рунге – Кутты 2-го порядка, трудоемкость которых примерно в два раза превосходит трудоемкость метода сумм Хаара.

Библиографические ссылки

1. Пат. 2691536 Российская Федерация, МПК B64G 1/32. Способ определения трехосной ориентации космического аппарата / Нуждин А. Н., Титов Г. П., Омельниченко В. Б. и др. № 2018105409 ; заявл. 13.02.2018 ; опубл. 14.06.2019, Бюл. № 17. 9 с.

2. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. М. : Физматгиз, 1960. 487 с.

3. Барышев В. А., Крылов Г. Н. Контроль ориентации метеорологических спутников. Л. : Гидрометеоиздат, 1968. 210 с.

4. Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Ч. 1: Математические модели инерциальной навигации. М. : МАКС Пресс, 2011. 136 с.

5. Кэрт Б. Э., Андреева Ж. Н., Агошков О. Г. Кинематика (с дополнительными главами). СПб. : Балт. гос. техн. ун-т, 2014. 222 с.

6. Фомичев А. В. Кинематика точки и твердого тела. М. : МФТИ, 2021. 128 с.

7. Богданов О. Н. Методика согласованного моделирования измерений инерциальных датчиков, траекторных параметров объекта с приложением к задачам инерциальной и спутниковой навигации : дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М. : МГУ, 2015. 142 с.

8. Богданов О. Н., Коростелева С. С. Кухтевич С. Е., Фомичев А. В. О выборе алгоритма и тактовой частоты расчета матрицы ориентации для бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Труды МИЭА. 2010. Вып. 2. С. 60–67.

9. Джепе А. Задача навигации и ориентации искусственного спутника Земли на основе датчиков угловой скорости и многоантенного спутникового приемника : дисс. … канд. физ.-мат. наук. М. : МГУ, 2016. 94 с.

10. Маштаков Я. В. Использование прямого метода Ляпунова в задачах управления ориентацией космических аппаратов: дисс. … канд. физ.-мат. наук. М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2019. 94 с.

11. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1: attitude algorithms // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1998. Vol. 21, no. 1. P. 19–28.

12. Лукомский Д. С., Лукомский С. Ф., Терехин П. А. Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 151–159.

13. Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М. : Наука, 1969. 288 с.

14. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике. М. : Интернет-ун-т инф. технологий, 2006. 523 с.

15. Пантелеев А. В., Якимова А. С., Рыбаков К. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум. М. : Инфра-М, 2016. 432 с.

16. Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методами Рунге – Кутта. М. : НИВЦ МГУ, 2014. 58 с.

References

1. Nuzhdin A. N., Titov G. P., Omel'nichenko V. B. and others. *Sposob opredeleniya trekhosnoy orientatsii kosmicheskogo apparata* [Method of determining three-axis orientation of spacecraft]. Patent RF, no 2691536, 2019.

2. Appel' P. *Teoreticheskaya mekhanika. Tom 2: Dinamika sistemy. Analiticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics. Vol. 2: System dynamics. Analytical mechanics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 487 p.

3. Baryshev V. A., Krylov G. N. *Kontrol' orientatsii meteorologicheskikh sputnikov* [Orientation control of meteorological satellites]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1968, 210 p.

4. Golovan A. A., Parusnikov N. A. *Matematicheskie osnovy navigatsionnykh sistem. Chast' 1: Matematicheskie modeli inertsial'noy navigatsii* [Mathematical foundations of navigation systems. Part 1: Mathematical models of inertial navigation]. Moscow, MAKS Press Publ., 2011, 136 p.

5. Kert B. E., Andreeva Zh. N., Agoshkov O. G. *Kinematika (s dopolnitel'nymi glavami)* [Kinematics (with additional chapters)]. St.Petersburg, Baltic St. Tech. Univ. Publ., 2014, 222 p.

6. Fomichev A. V. *Kinematika tochki i tverdogo tela* [Kinematics of a point and a rigid body]. Moscow, Moscow Inst. of Physics and Technology Publ., 2021, 128 p.

7. Bogdanov O. N. *Metodika soglasovannogo modelirovaniya izmereniy inertsial'nykh datchikov, traektornykh parametrov ob"ekta s prilozheniem k zadacham inertsial'noy i sputnikovoy navigatsii. Dis. kand. fiz.-mat. nauk.* [Method of coordinated modeling of measurements of inertial sensors, trajectory parameters of an object with application to problems of inertial and satellite navigation. Cand. sci. (phys. and math.) diss.]. Moscow, Moscow St. Univ. Publ., 2015, 142 p.

8. Bogdanov O. N., Korosteleva S. S. Kukhtevich S. E., Fomichev A. V. [On the choice of algorithm and clock frequency for calculating the orientation matrix for a strapdown inertial navigation system]. *Trudy MIEA.* 2010, Iss. 2, P. 60–67 (In Russ.).

9. Dzhepe A. *Zadacha navigatsii i orientatsii iskusstvennogo sputnika Zemli na osnove datchikov uglovoy skorosti i mnogoantennogo sputnikovogo priemnika. Dis. kand. fiz.-mat. nauk.* [The problem of navigation and orientation of an artificial Earth satellite based on angular velocity sensors and a multi-antenna satellite receiver. Cand. sci. (phys. and math.) diss.]. Moscow, Moscow St. Univ. Publ., 2016, 94 p.

10. Mashtakov Ya. V. *Ispol'zovanie pryamogo metoda Lyapunova v zadachakh upravleniya orientatsiey kosmicheskikh apparatov. Dis. kand. fiz.-mat. nauk* [Use of the direct Lyapunov method in problems of spacecraft attitude control. Cand. sci. (phys. and math.) diss.]. Moscow, Keldysh Inst. of Applied Mathematics Publ., 2019, 94 p.

11. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1: attitude algorithms. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 1998, Vol. 21, No. 1, P. 19–28.

12. Lukomskiy D. S., Lukomskiy S. F., Terekhin P. A. [Solution of Cauchy Problem for Equation First Order Via Haar Functions]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser.: Matematika. Mekhanika. Informatika.* 2016, Vol. 16, Iss. 2, P. 151–159 (In Russ.).

13. Sobol' I. M. *Mnogomernye kvadraturnye formuly i funktsii Khaara* [Multidimensional quadrature formulas and Haar functions]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 288 p.

14. Petrov I. B., Lobanov A. I. *Lekcii po vychislitel'noy matematike* [Lectures on computational mathematics]. Moscow, Internet-Universitet Informacionnyh Tehnologiy Publ., 2006, 523 p.

15. Panteleev A. V., Yakimova A. S., Rybakov K. A. *Obyknovennye differencial'nye uravneniya. Praktikum* [Ordinary differential equations. Practical work]. Moscow, Infra-M Publ., 2016, 432 p.

16. Arushanyan O. B., Zaletkin S. F. Reshenie sistem obyknovennyh differencial'nyh uravneniy metodami Runge – Kutta [Solving of ordinary differential equations systems by Runge–Kutta methods]. Moscow, Research Computing Center of Moscow St. Univ. Publ., 2014, 58 p.

Кириллов Кирилл Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: kkirillow@yandex.ru.

Овчинникова Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: ovchinnikova_ev@sibsau.ru.

Сафонов Константин Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: safonovkv@rambler.ru.

Титов Геннадий Павлович – ведущий специалист 935 Отдела; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнёва». E-mail: titov@iss-reshetnev.ru.

Хохлов Антон Игоревич – инженер 935 Отдела; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнёва». E-mail: hohlovai@iss-reshetnev.ru.

Гашин Артем Александрович – аспирант кафедры прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: artem.gashin@gmail.com.

Kirillov Kirill Anatolievich – Dr. Sc. (Phys. and Math.), Associate Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: kkirillow@yandex.ru.

Ovchinnikova Elena Vladimirovna – Cand. Sc. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: ovchinnikova_ev@sibsau.ru.

Safonov Konstantin Vladimirovich – Dr. Sc. (Phys. and Math.), Professor, Head of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: safonovkv@rambler.ru.

Titov Gennady Pavlovich – Leading Specialist in the 935 Department; JSC "Academician M. F. Reshetnev "Information Satellite Systems". E-mail: titov@iss-reshetnev.ru.

Khokhlov Anton Igorevich – Engineer in the 935 Department; JSC "Academician M. F. Reshetnev "Information Satellite Systems". E-mail: hohlovai@iss-reshetnev.ru.

Gashin Artem Alexandrovich – Graduate student of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: artem.gashin@gmail.com.