

УДК 539.3

Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-3-482-500

Для цитирования: Сабилов Р. А., Фисенко Е. Н. Моделирование невесомости подвешенной на тросах системы балок изменением сил натяжения // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24, № 3. С. 482–500. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-3-482-500.

For citation: R. A. Sabirov, Fisenko E. N. [Modeling of suspended weightlessness on the cables of the beam system, by changing the tension forces]. *Siberian Aerospace Journal*. 2023, Vol. 24, No. 3, P. 482–500. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-3-482-500.

Моделирование невесомости подвешенной на тросах системы балок изменением сил натяжения

Р. А. Сабилов, Е. Н. Фисенко

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31
E-mail: rashidsab@mail.ru

Рассматривается проблема имитации невесомости систем балок, подвешенных на нерастяжимых тросах. Имитация невесомости означает обнуление или уменьшение какого-либо выбранного силового фактора (например, реакции опоры или момента в опоре или сочленении) и кинематического фактора (прогиба или угла поворота). Требуется подобрать усилия в тросах такими, чтобы сумма квадратов прогибов в точках упругой линии балки была минимальной.

Задача формулируется как задача нелинейного программирования, осуществляется поиск минимума целевой функции с ограничениями в виде уравнений равновесия. В общем виде все выписанные для геометрически изменяемой системы уравнения линейно-зависимы. Из системы уравнений выбираются параметры, при которых векторы вводятся в базис, а оставшиеся параметры считаются свободными и являются координатами целевой функции. Задача свелась к задаче квадратичного программирования без ограничений. Частные производные по координатам дают систему линейных алгебраических уравнений, позволяющую определить координаты, принятые как свободные параметры, а затем вычислить и координаты, введенные в базис. Опорный план нелинейных задач оптимизации может иметь локальные минимумы. Показано, что при любом начальном базисе, оптимальный план единственный.

Для вычисления прогибов балки применяется метод начальных параметров. В качестве начальных параметров рассматриваются прогиб, угол поворота, дополнительные углы поворота в шарнирных сочленениях, а также реакция и изгибающий момент. Континуальная задача переводится в дискретную ограничением количества точек, в которых вычисляются прогибы. Целевая функция имеет конечное число переменных. Определяется, какое количество выбранных точек на упругой линии балок является достаточным для обеспечения сходимости функций прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил с целью приложения к практическим расчетам.

Выполнена оптимизация прогибов балки, шарнирно закрепленной, подвешенной на двух тросах с проверкой решений, сменой базисных переменных и исследованием сходимости в зависимости от выбора количества точек, в которых вычисляются прогибы.

Проанализировано деформирование систем двутавровых балок, соединенных шарнирами между собой, имеющими в условиях гравитации погонный вес. Для имитации невесомости системы подкрепляются тросами. Рассмотрены граничные условия: жесткое заземление; шарнирно-неподвижное опирание, скользящая заделка, свободный край. Модели систем трех балок при имитации невесомости в определенной степени эквивалентны. Вид граничного условия в большей мере влияет на первую балку. Силы натяжения тросов выравнивают деформированное и напряженное состояние в последующих балках. Любую из рассмотренных систем с представленными граничными условиями можно перевести в эквивалентную ей, изменив граничные силовые факторы, задав моменты или установив пружину с заданной жесткостью и корректировкой натяжения тросов.

Ключевые слова: прогибы балок, метод начальных параметров, нелинейное программирование, регулирование прогибов и внутренних сил, имитация невесомости, обезвешивание балок.

Modeling of suspended weightlessness on the cables of the beam system, by changing the tension forces

R. A. Sabirov, E. N. Fisenko

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
E-mail: rashidsab@mail.ru

The problem of weightlessness simulation of beam systems suspended on inextensible cables is considered. Imitation of weightlessness means zeroing or reducing any selected force factor (for example, the reaction of the support or the moment in the support or joint), and the kinematic factor (deflection or angle of rotation). It is required to select the forces in the cables such that the sum of the squares of the deflections at the points of the elastic line of the beam is minimal.

The problem is formulated as a nonlinear programming problem; the search for the minimum of the objective function with constraints, in the form of equilibrium equations, is carried out. In general, all equations written out for a geometrically variable system are linearly dependent. Parameters are selected from the system of equations, the vectors at which are entered into the basis, and the remaining parameters are considered free and are the coordinates of the objective function. The problem was reduced to the problem of quadratic programming without restrictions. Partial derivatives of coordinates give a system of linear algebraic equations that allows you to determine the coordinates taken as free parameters, and then calculate the coordinates entered into the basis. The reference plan of nonlinear optimization problems can have local minima; it is shown that for any initial basis, the optimal plan is the only one.

To calculate the deflections of the beam, the method of initial parameters is used. Deflection, angle of rotation, additional angles of rotation in articulated joints are considered as initial parameters; as well as the reaction and bending moment. The continuum problem is transformed into a discrete one by limiting the number of points at which deflections are calculated. The objective function has a finite number of variables. It is determined which number of selected points on the elastic line of the beams is sufficient to ensure the convergence of the functions of deflections, angles of rotation, bending moments and transverse forces for the purpose of application to practical calculations.

Optimization of deflections of a beam pivotally fixed, suspended on two cables with verification of solutions, change of basic variables and convergence study depending on the choice of the number of points at which deflections are calculated is performed.

The deformation of systems of I-beams connected by hinges to each other, having linear weight in gravity conditions, is analyzed. To simulate weightlessness, the system is supported by six cables. The boundary conditions are considered: – rigid pinching; – hinge-fixed support, – sliding sealing; – free edge. Models of three-beam systems in the simulation of weightlessness, to a certain extent equivalents. The type of boundary condition affects the first beam to a greater extent; the tension forces of the cables equalize the deformed and stressed state in subsequent beams. Any of the considered systems with the presented boundary conditions can be converted into an equivalent one by changing the boundary force factors, setting torques or installing a spring with a given stiffness and adjusting the tension of the cables.

Keywords: deflections of beams, method of initial parameters, nonlinear programming, regulation of deflections and internal forces, simulation of weightlessness, de-hanging of beams.

Введение

Проблема оптимального и рационального проектирования конструкций актуальна в авиационной и аэрокосмической технике [1; 2]. Обзор, классификация и конструкторский анализ солнечных батарей космических аппаратов рассмотрен в [3], где анализируются солнечные

батареи из жестких панелей, солнечные панели с гибкой подложкой, надувные солнечные батареи, самораскрывающиеся солнечные батареи и другие конструкции.

Разработка современных гибких каркасов солнечных батарей приведена в [4]. В [5] рассматриваются динамические аспекты систем обезвешивания крупногабаритных трансформируемых элементов космических аппаратов при раскрытии. По разработке стендов моделирования невесомости известны многочисленные авторские свидетельства, например [6]. Распространены схемы тросового обезвешивания конструкций, затрагивающие объемные двумерные и одномерные объекты, к примеру, для рефлекторов антенн каждую однозвенную спицу рассматривают как балку, шарнирно закрепленную одним своим концом на неподвижном основании и подтягиваемую тросом [7].

В [8] рассматривается методика расчета обезвешивания крупногабаритных трансформируемых элементов космических аппаратов при наземных испытаниях на примере балки, жестко защемленной на торце и подвешенной на тросах. Деформирование не учитывается.

Таким образом, обезвешиваемые элементы, в большинстве случаев, рассматриваются бесконечно жесткими на изгиб и подтягиваются тросам в центре тяжести, чтобы не возникали дополнительные реакции в точках сочленения.

Следуя работам [3–5], можно сделать заключение о необходимости освоения вопросов моделирования невесомости конструкции с учетом её деформирования. Отсюда возникает задача регулирования напряжений, деформаций и прогибов дополнительным натяжением (предварительным напряжением) определенных частей конструкций, в частности, растяжение тросами. Регуляторами будут являться усилия натяжения тросов; величины которых следует определить из условия, что сумма квадратов прогибов упругой линии балки (балок) была минимальной. В итоге задача приводится к задаче нелинейного программирования.

Фактор обезвешивания, как имитация невесомости, рассматривается как обнуление какого-либо силового параметра (реакции или момента). Например, балка жестко закреплена и значения усилий в тросах найдены. Требуется обезвесить так, чтобы не было реакции в опоре. Для этого рассматривается расчет балки, имеющей возможность перемещения по направлению реакции с нулевым углом поворота. Вычисленные усилия в тросах обеспечат обезвешивание реакции. Например, надо устранить момент, тогда решаем задачу с шарнирно-неподвижным опиранием. Сопоставление найденного здесь угла поворота с изгибающим моментом при жестком закреплении позволит подобрать жесткость пружины для обеспечения эквивалентности.

В работе рассматриваются линейно-деформируемые системы. Тросы имеют бесконечно большую жесткость на растяжение. Упругая линия балки содержит бесконечное множество точек, поэтому подвергается анализу дискретная задача с конечным числом точек на упругой линии. Задача нелинейного программирования может иметь локальные минимумы. Выполняется проверка на наличие единственного оптимального плана в зависимости от выбора переменных, вводимых в базис.

1. Формулировка задачи минимизации прогибов

Рассмотрим многопролетную балку, состоящую из трех балок общей длины L , как геометрически изменяемую систему (рис. 1, *a*). Для превращения этой системы балок в статически определимую требуется наложить три дополнительные связи, так как данная система имеет три степени свободы. Пусть на балку (рис. 1, *b*) действуют активные сосредоточенные силы P_1, P_2, \dots, P_n , распределенные нагрузки q_1, q_2, \dots, q_k , момент M_A . Для уравнивания этих нагрузок приложим силы обезвешивания N_1, N_2, \dots, N_S , обеспечивающие равновесие системы. Если количество дополнительных сил N_1, N_2, \dots, N_S меньше числа степеней свободы балки, тогда балка остается геометрически изменяемой системой. Если количество дополнительных сил N_1, N_2, \dots, N_S равно числу степеней свободы балки, тогда силы вычисляются из уравнений равновесия (полагаем, что силы расставлены правильно). В этом случае оптимизировать нечего,

равновесие балки и равновесие ее частей выполняется. Если количество дополнительных сил N_1, N_2, \dots, N_S больше числа степеней свободы балки, тогда можно варьировать силами, добиваясь требуемых параметров обезвешивания, например, устранения реакций в сочленениях, уменьшения прогибов в заданных точках, регулирования внутренних сил и напряжений. Балка, первоначально не имеющая достаточного числа опорных связей, под действием дополнительных сил должна находиться в равновесии (естественно, не должно быть признаков мгновенной изменяемости).

Задача моделирования деформирования подвешенных на тросах балок с условием минимизации суммы квадратов ее прогибов варьированием сил натяжения приводит к задаче нелинейного программирования [9; 10]. Целевую функцию F выразим через прогибы в n точках:

$$F(R_A, \theta_A, M_A, N_1, N_2, \dots, N_S) = \sum_{k=1}^n [v(z_k)]^2 \rightarrow \min, \quad z_k = k(L/n), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь

$$v(z_k) = f(R_A, \theta_A, M_A, N_1, N_2, \dots, N_S), \quad (2)$$

функция прогиба в точке с координатой z_k с неизвестными параметрами $R_A, \theta_A, M_A, N_1, N_2, \dots, N_S$; k – номер точки (расстояние между точками одинаковое); θ_A – угол поворота; R_A реакция в точке A балки; M_A – изгибающий момент в точке A ; N_1, N_2, \dots, N_S – искомые силы.

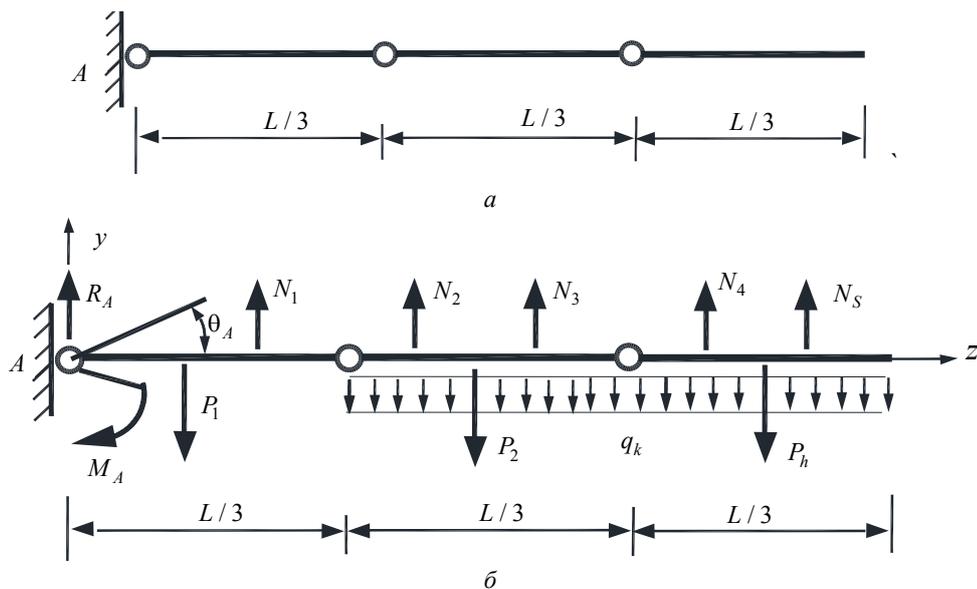


Рис. 1. Модель (расчетная схема) балки с тремя шарнирами:
 а – балка как геометрически изменяемая система; б – балка с действующими на нее нагрузками

Fig. 1. Model (design scheme) of a beam with three hinges:
 a – a beam as a geometrically variable system; b – a beam with loads acting on it

В качестве ограничений к (1) добавляются уравнения равновесия: $\sum y = 0$ – сумма проекций сил на ось y ; $\sum m_i = 0$ – сумма моментов всех сил относительно точки i . Система ограничений имеет вид равенств. Из составленной системы ограничений выделим базисные переменные, например, R_A, N_1, N_2 , которые подставим в (1). Теперь целевая функция (1) будет содержать только свободные переменные, т. е. параметры $\theta_A, M_A, \dots, N_S$:

$$F(\theta_A, M_A, \dots, N_S) = \sum_{k=1}^n [v(z_k)]^2, \quad (3)$$

что позволяет решать задачу оптимизации без ограничений [11]. Частные производные (3) по свободным параметрам (часто параметры называют координатами):

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_A} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial M_A} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial N_S} = 0 \quad (4)$$

дают систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых параметров, определяющих оптимальный план для вычисления прогибов (2) в дискретных точках.

Производные функции прогиба (2)

$$\theta(z) = dv(z) / dz; \quad M(z) = -EJ d^2v(z) / dz^2; \quad Q(z) = dM(z) / dz; \quad q(z) = dQ(z) / dz \quad (5)$$

дают функции угла поворота, изгибающего момента, поперечной силы и нагрузки $q = q(z)$.

Опорный план нелинейных задач оптимизации может иметь локальные минимумы, поэтому в работе будет показана сходимость к оптимальному плану при различных комбинациях базисных и свободных переменных. Для вычисления прогибов (2) применен метод начальных параметров как прямой метод интегрирования дифференциального уравнения четвертого порядка с разрывными функциями [12]. Производные функций вычисляются численно [13].

Балки могут быть не только геометрически изменяемыми, как показано на рис. 1, но и без опор, т. е. подвижными, что противоречит понятиям кинематического анализа строительной механики [14]. Однако равновесие балок достигается натяжением тросов (рис. 2). На рис. 2, а покажем расчетную схему балки без опорных связей с активным моментом M . Здесь равновесие обеспечивается парой равных сил N_1, N_2 . Приведем расчетную схему составной балки, состоящую из четырех балок (рис. 2, б). Представив себе поэтажную схему балок, видим, что главная балка – статически неопределимая, на нее опирается второстепенная – статически определимая балка. Обе правые балки – третья и четвертая – поддерживаются силами $N_4 - N_7$.

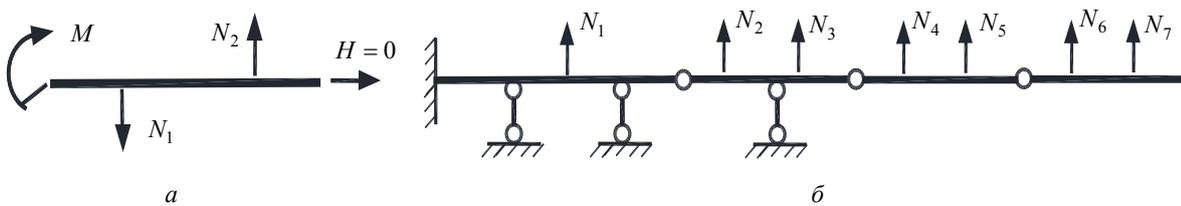


Рис. 2. Расчетные схемы балок:

а – опорных связей нет – равновесие поддерживается силами N_1, N_2 ;

б – составная балка – равновесие поддерживается реакциями опор и силами $N_1 - N_7$

Fig. 2. Design schemes of beams:

а – there are no support links – the equilibrium is maintained by forces;

б – composite beam – the balance is maintained by the reactions of the supports and forces $N_1 - N_7$

Отметим, что для вычисления прогибов (2) можно использовать вариационно-разностный метод в форме метода конечных разностей и МКЭ. Однако первый метод требует во всех шарнирных узлах сочленения вводить дополнительные законтурные узлы, что усложняет программирование, а второй – во всех дискретных точках (назовем их узлами) определять прогибы и углы поворота, что увеличивает размерность задачи. Метод начальных параметров с учетом промежуточных шарниров требует вычисления только прогибов в дискретных точках, а в узлах сочленения балок вычисляется прогиб и приращение угла поворота.

Рассмотрим примеры расчета балок, показывающие единство оптимального плана задачи нелинейного программирования в зависимости от выбора переменных, вводимых в базис, и сходимость решений от назначенного числа точек, в которых вычисляется прогиб.

2. Оптимизация прогибов балки, шарнирно-неподвижно закрепленной и подвешенной на двух тросах

Рассматривается шарнирно-закрепленная с одного торца двутавровая балка, которая поддерживается двумя тросами (рис. 3). Тросы имеют бесконечно большую жесткость на растяжение. На рис. 2 их действие на балку показано силами N_1 и N_2 .

Изначально балка геометрически изменяемая. Добавим уравнивающие силы N_1 , N_2 и составим целевую функцию

$$F(R_A, \theta_A, N_1, N_2, q) = \sum_{k=1}^n [v(z_k)]^2 \rightarrow \min, \quad n = 24. \quad (6)$$

Запишем функцию прогиба на основе метода начальных параметров:

$$v(z) = \theta_A z + \frac{1}{EJ} \left[\frac{R_A z^3}{3!} + \frac{N_1 (z - L/3)^3}{3!} H(z - L/3) + \frac{N_2 (z - 2L/3)^3}{3!} H(z - 2L/3) - \frac{q z^4}{4!} \right]. \quad (7)$$

Здесь $v(z)$ – прогиб в точке z ; θ_A – угол поворота в начале балки (начальный параметр в точке A); R_A – реакция в точке A ; N_1 – усилие в первом тросе; N_2 – усилие во втором тросе (искомые параметры); q – равномерно-распределенная погонная нагрузка; E – модуль Юнга; J – осевой момент инерции поперечного сечения балки; $H()$ – функция Хевисайда.

Длина балки $L = 6$ м; профиль двутавр прокатный, закрепление шарнирно-неподвижное в точке A ; модуль Юнга материала $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; осевой моментом инерции в плоскости изгиба $J = 200 \cdot 10^{-8}$ м⁴; погонный вес балки $q = 100$ н/м.

2.1. Проверка решений сменой базисных переменных

Рассмотрим решения, связанные с особенностями изгиба балки как дискретной задачи с конечным числом точек, в которых вычисляются прогибы. Выполним поиск глобального минимума целевой функции.

Проверяем, что при различных базисных переменных, вводимых в функцию цели, должен существовать единственный оптимальный план.

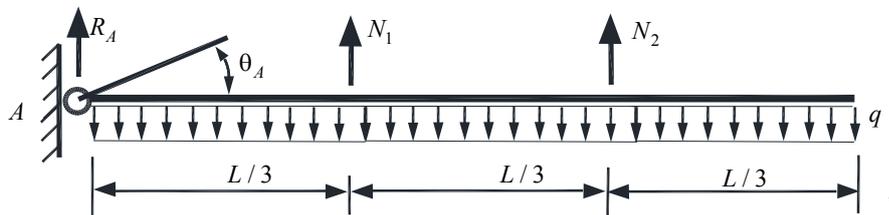


Рис. 3. Балка, прикрепленная шарниром и поддерживаемая двумя тросами

Fig. 3. A beam attached by a hinge and supported by two cables

В качестве ограничений, к целевой функции (6) добавим уравнения равновесия:

$$N_1(L/3) + N_2(2L/3) - qL^2/3 = 0; \quad (8)$$

$$R_A + N_1 + N_2 - qL = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим три варианта приложения базисных переменных.

Вариант 1. Введем в базис переменные N_1 и N_2 . Для этого из (8) и (9) получим силы

$$N_1 = qL / 2 - 2R_A, \quad (10)$$

$$N_2 = qL / 2 + R_A, \quad (11)$$

которые, подставленные в (6), дают следующую задачу нелинейного программирования:

$$F = F(R_A, \theta_A, q) \rightarrow \min \quad (12)$$

без системы ограничений.

Производные по свободным переменным

$$\partial F / \partial R_A = 0, \quad \partial F / \partial \theta_A = 0$$

позволяют вычислить угол поворота θ_A и реакцию R_A . Все параметры для вычисления функции (7) определены.

Вариант 2. В качестве базисных переменных примем N_1 и R_A . Тогда из (8) и (9) выведем

$$N_1 = 3qL / 2 - 2N_2, \quad (13)$$

$$R_A = N_2 - qL / 2, \quad (14)$$

которые, будучи подставленными в (6), дают задачу поиска

$$F = F(N_2, \theta_A, q) \rightarrow \min. \quad (15)$$

Производные по свободным переменным

$$\partial F / \partial N_2 = 0, \quad \partial F / \partial \theta_A = 0$$

дают возможность вычислить угол поворота θ_A и силу натяжения N_2 . Вычисляем функцию (7).

Вариант 3. В качестве базисных переменных примем N_2 и R_A . Тогда из (8) и (9) имеем

$$N_2 = 3qL / 4 - N_1 / 2, \quad (16)$$

$$R_A = qL / 4 - N_1 / 2, \quad (17)$$

которые, подставленные в (6), дают целевую функцию

$$F = F(N_1, \theta_A, q) \rightarrow \min. \quad (18)$$

Производные по переменным N_1 и θ_A

$$\partial F / \partial N_1 = 0, \quad \partial F / \partial \theta_A = 0$$

позволяют вычислить угол поворота θ_A и силу натяжения N_1 . Функция (7) определена.

Во всех трех вариантах базисных переменных получили абсолютно одинаковые искомые параметры R_A, θ_A, N_1, N_2 . Найденные параметры дают решения (эпюры), которые приведем на рис. 4: эпюра прогибов (рис. 4, а); эпюра углов поворота (рис. 4, б); эпюра изгибающих моментов (рис. 4, в); эпюра поперечных сил (рис. 4, г). Четвертая производная функции прогиба $v(z)$ по координате z дает эпюру $q(z) = -100 \text{ кН/м} = \text{const}$, что является проверкой (рис. 4, д).

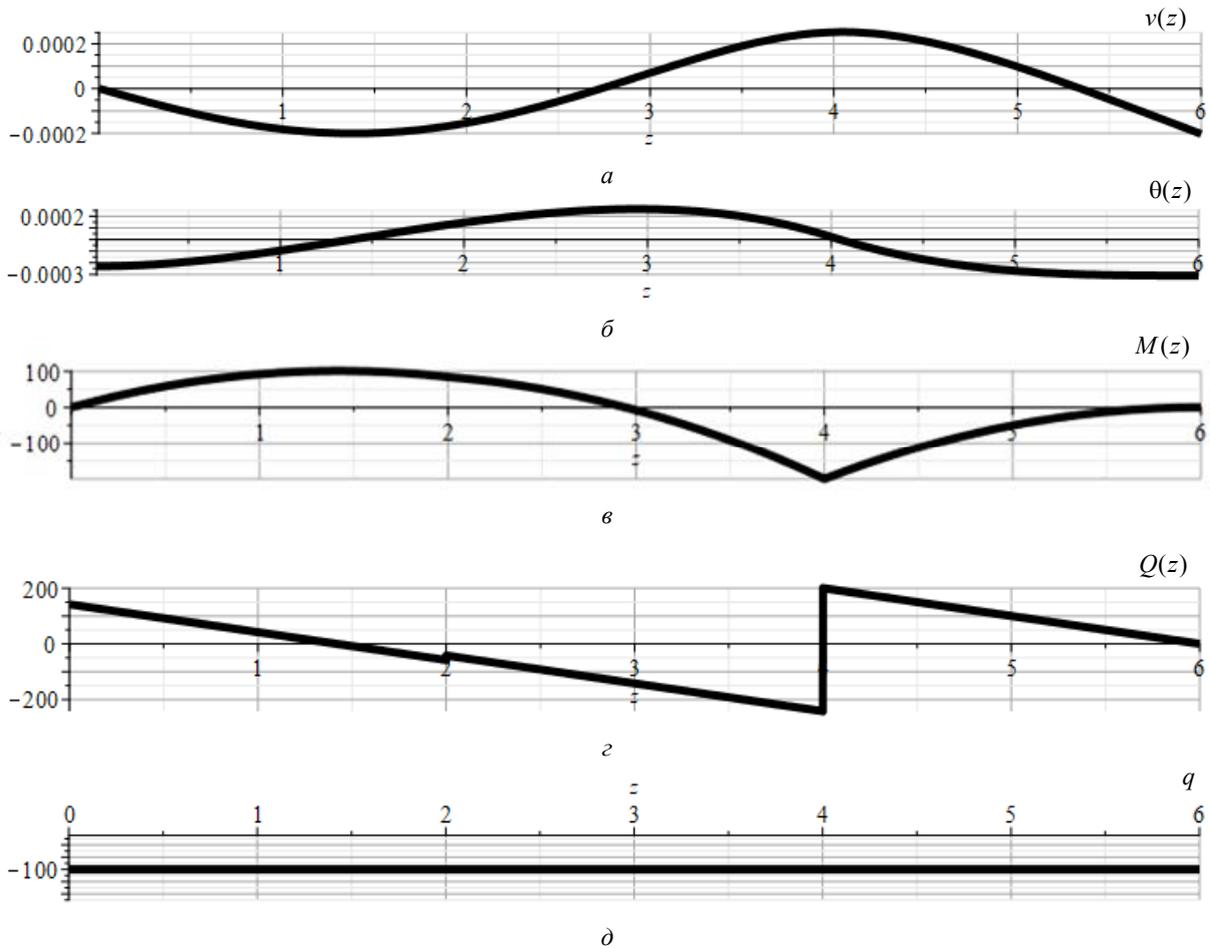


Рис. 4. Функции деформационных и внутренних силовых факторов:
a – прогиб; *b* – эпюра углов поворота; *c* – эпюра изгибающего момента; *d* – эпюра поперечных сил;
e – эпюра нагрузки $q = -100$ н/м

Fig. 4. Functions of deformation and internal force factors:
a – deflection; *b* – plot of rotation angles; *c* – the bending moment plot; *d* – the transverse forces plot;
e – the load plot $q = -100$ N/m

Таким образом, смена базиса не повлияла на решение задачи. Во всех трех вариантах вычисления параметров программирования пришли к единственному оптимальному плану.

2.2. Исследование сходимости решений в зависимости от выбора количества точек, в которых вычисляются прогибы

Рассматривается дискретная задача с конечным числом точек на упругой линии балки. Исходные данные, как в пункте 2.1. Целевая функция вычисляется по формуле (6), а прогибы – по формуле (7).

Проверим, если целевая функция квадратичная, количество узлов на упругой линии балки конечное и метод вычисления прогибов точный, тогда ожидается сходимость прогибов, углов поворота, изгибающих моментов от увеличения числа узлов дискретизации.

Выполним численный эксперимент для $n = 6$, $n = 12$, $n = 24$. Результаты расчетов (эпюры) представлены на рис. 5 и в табл. 1.

На рис. 5, *a* показаны эпюры прогибов. Обнаруживаем следующую сходимость прогибов. Например, на торце балки ($z = L$) прогиб увеличился от величины 0,2025 мм на сетке $n = 6$ до 0,2597 мм на сетке $n = 12$, что есть 28 %. Далее на сетке $n = 24$ прогиб изменился до величины 0,2935 мм. В сравнении с сеткой $n = 12$ это составляет 13 %. Следующее сгущение сетки должно составить разность с предыдущим порядка 6 %. Экстраполяция дает ожидаемый прогиб торца балки равным 0,311 мм.

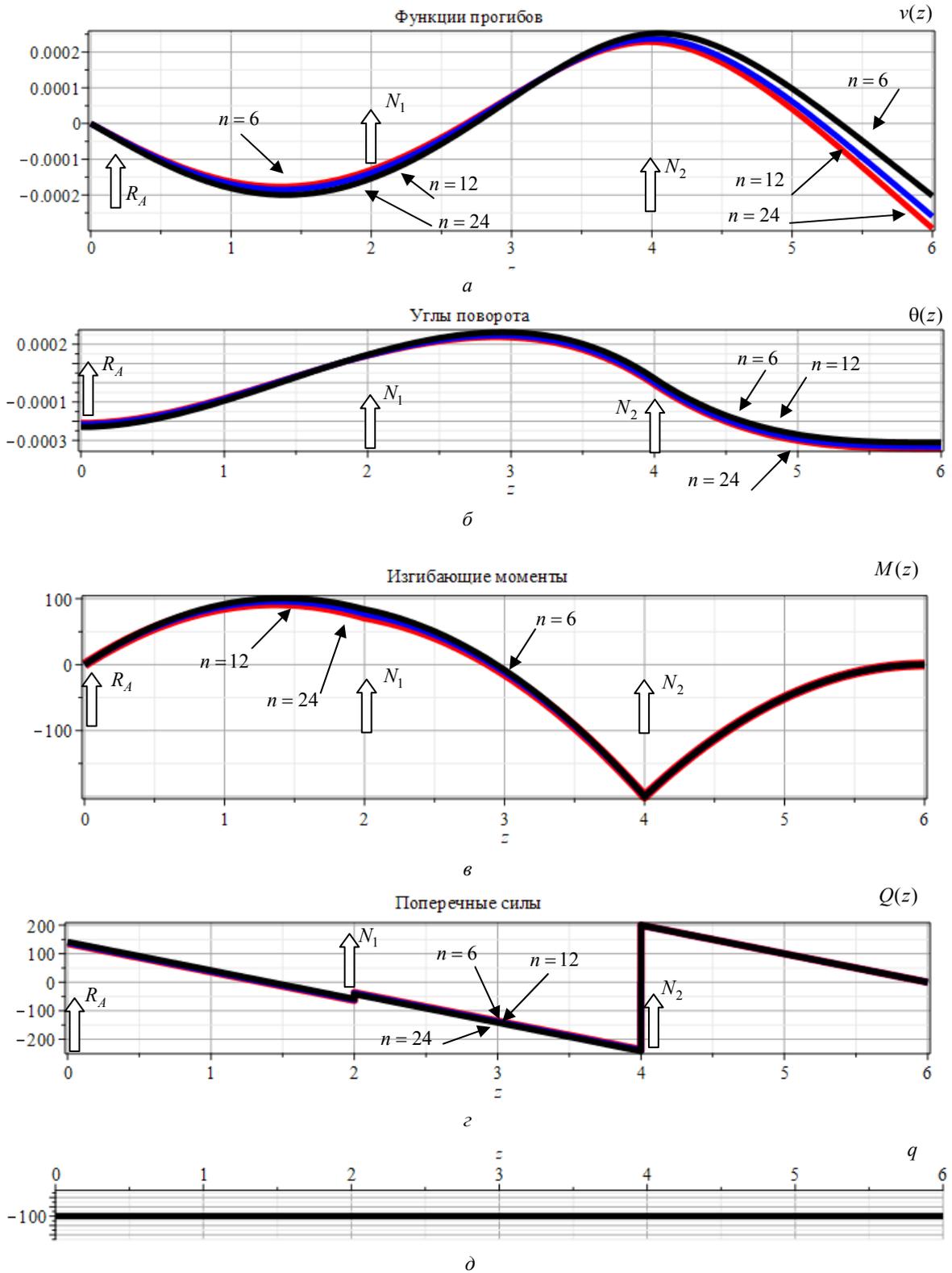


Рис. 5. Оптимальные параметры балки для сеток $n = 6$, $n = 12$ и $n = 24$:
 а – функции прогибов; б – функции углов поворота; в – функции изгибающих моментов; г – функции поперечных сил; д – заданная распределенная нагрузка (вычислена, как четвертая производная функции прогиба)

Fig. 5. Optimal beam parameters for grids $n = 6$, $n = 12$ and $n = 24$:
 а – deflection functions; б – rotation angle functions; в – bending moment functions; г – transverse force functions; д – a given distributed load (calculated as the fourth derivative of the deflection function)

Средние величины суммы квадратов прогибов [15] вычислим по формуле

$$\delta_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n [v(z_k)]^2 / n}, n = 6, n = 12, n = 24. \quad (19)$$

Величины такие: $\delta_6 = 0,171$ мм, $\delta_{12} = 0,159$ мм, $\delta_{24} = 0,152$ мм. Разница, соответственно, 7,4 % и 4,3 %.

На рис. 5, б приведены эпюры углов поворота сечений балки, которые практически совпали.

Вторые производные функций прогибов – суть изгибающие моменты (рис. 5, в), вычисленные на разных сетках, – практически не различимы.

Эпюры поперечных сил (рис. 5, г) полностью совпадают и представляются одной ломаной линией, имеющей разрывы в точках приложения сил.

На рис. 5, д изображена распределенная нагрузка, вычисленная как четвертая производная функции прогиба. Это проверка решения. На всех трех эпюрах получили заданное значение $q = -100$ н/м.

В заключение этого пункта можно сказать, что, судя по изменению прогибов в зависимости от сгущения сетки, достаточны сетки от $n = 12$ до $n = 24$. Если прерогативой является надобность вычисления напряжений, достаточно назначать сетку $n = 6$.

Вычисленные переменные представим в таблице 1. В строках 1–3 таблицы приведены параметры для сеток $n = 6$, $n = 12$, $n = 24$. В строках 4–5 показана относительная разность искомым параметров. В столбцах последовательно записаны: $v(n)$ – прогибы консоли балки в точке $z = L$; $\theta_A(n)$ – начальный параметр, угол поворота сечения; $R_A(n)$ – начальный параметр, реакция в начале балки; $N_1(n)$ – вычисленный параметр, первое усилие; $N_2(n)$ – вычисленный параметр, второе усилие; $\delta(n)$ – среднеквадратичный прогиб торца балки.

Таблица 1

Параметры оптимального проектирования

Номера строк	Число точек	$v(n)$	$\theta_A(n)$	$R_A(n)$	$N_1(n)$	$N_2(n)$	$\delta(n)$
		м	рад	н	н	н	м
1	$n = 6$	-0,0002025	-0,00023013	141,956	16,087	441,956	0,00017097
2	$n = 12$	-0,0002597	-0,00021639	138,464	23,071	438,464	0,00015915
3	$n = 24$	-0,0002935	-0,00020861	136,454	27,091	436,454	0,00015247
Разница в процентах:							
4	$n = 12 / n = 6$	28 %	6,3 %	2,5 %	43 %	0,8 %	7,4 %
5	$n = 24 / n = 12$	13 %	3,7 %	1,5 %	17,4 %	0,5 %	4,3 %

Отметим, что данные в строчках 2 и 3 мало различаются по сравнению с параметрами в строчках 1 и 2. Строки 4 и 5 можно понимать как скорость сходимости искомым параметров.

3. Подвес тросами системы трех балок, соединенных шарнирами

Рассмотрим систему шарнирно-закрепленных между собой двутавровых балок (рис. 6). В условиях гравитации система имеет собственный погонный вес q (рис. 6, а). Для имитации невесомости рассмотрим четыре случая закрепления системы в точке А и поддержание ее шестью тросами. Система имеет жесткое защемление в точке А (рис. 6, б); шарнирно-неподвижное опирание (рис. 6, в), скользящую заделку (рис. 6, г); свободный край (рис. 6, з).

Требуется определить силы натяжения тросов, чтобы сумма квадратов прогибов F в заданных точках была минимальной, т. е.

$$F = \sum_{k=1}^n [v(z_k)]^2 \rightarrow \min, z_k = k(L/6), k = 1, 2, 3, \dots, 18. \quad (20)$$

В (20) F – целевая функция; $v(z_k)$ – искомый прогиб; z_k – координата точки; k – номер точки; $n = 18$ – количество точек; длины всех балок одинаковы и равны L .

3.1. Жесткая заделка

Для вычисления прогибов методом начальных параметров с жестким защемлением балки в точке A (рис. 6, б) функция прогиба имеет вид:

$$v(z) = \theta_1(z-L)H(z-L) + \theta_2(z-2L)H(z-2L) + \\ + \frac{1}{6EJ} \left[3M_A z^2 + R_A z^3 + N_1 \left(z - \frac{L}{3}\right)^3 H\left(z - \frac{L}{3}\right) + N_2 \left(z - \frac{2L}{3}\right)^3 H\left(z - \frac{2L}{3}\right) + N_3 \left(z - \frac{4L}{3}\right)^3 H\left(z - \frac{4L}{3}\right) + \right. \\ \left. + N_4 \left(z - \frac{5L}{3}\right)^3 H\left(z - \frac{5L}{3}\right) + N_5 \left(z - \frac{7L}{3}\right)^3 H\left(z - \frac{7L}{3}\right) + \right. \\ \left. + N_6 \left(z - \frac{8L}{3}\right)^3 H\left(z - \frac{8L}{3}\right) - \frac{qz^4}{4} \right], z \in [0, 3L]. \quad (21)$$

Здесь θ_1 – угол поворота (начальный параметр в точке B); θ_2 – угол поворота (начальный параметр в точке C); M_A – момент в заделке (точка A); R_A – реакция, действующая на балку в точке A ; $N_i, (i=1-6)$ – усилия в тросах (искомые параметры); $q = \text{const}$ – равномерно-распределенная погонная нагрузка; E – модуль Юнга; J – осевой момент инерции поперечного сечения балки; $H()$ – функция Хевисайда.

В формуле (21) приведены параметры θ_1 и θ_2 , которые есть углы поворота балок, примыкающих к промежуточным шарнирам [16], т. е. $\theta_i = \theta_i^{\text{справа}} - \theta_i^{\text{слева}}, i=1,2$. $\theta_i^{\text{справа}}$ – угол поворота в точке i справа у шарнира, а $\theta_i^{\text{слева}}$ – угол поворота в точке i слева у шарнира. Углы поворота θ_i являются дополнительными неизвестными, как и начальные параметры v_A и θ_A .

К уравнениям (21) присоединим уравнения равновесия

$$\Sigma m_C^{\text{справа}} = 0, \Sigma m_B^{\text{справа}} = 0, \Sigma m_A^{\text{справа}} = 0, \quad (22)$$

представляющие систему ограничений. Выделим из (22) базисные переменные N_4, N_5, N_6

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} N_4 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} N_5 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} N_6 = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ 2qL - N_3/3 \\ 9qL/2 - N_1/3 - 2N_2/3 - 4N_3/3 \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

которые добавим в целевую функцию (20). Теперь $F = F(M_A, \theta_1, \theta_2, N_1, N_2, N_3)$. Уравнение равновесия $\Sigma y = 0$ – избыточное и служит для проверки решений. Частные производные F по координатам $M_A, \theta_1, \theta_2, N_1, N_2, N_3$ дают систему шести уравнений относительно момента, двух углов поворота и трех усилий в тросах (отметим симметричность матрицы системы уравнений). Задача свелась к задаче квадратичного программирования без ограничений. Минимум целевой функции (20) определил оптимальный план.

Найденные параметры $M_A, \theta_1, \theta_2, N_1, N_2, N_3$, подставленные в уравнения (21), дают по формулам (5) функции прогибов, углов поворота, изгибающего момента и поперечной силы, соответственно. На рис. 7–10 приведены функции при жесткой заделке; рассмотрены решения для шарнирно-неподвижного края; изображены эпюры для скользящей заделки; рассмотрены функции для свободного края в точке A системы балок.

3.2. Шарнирно-неподвижное опирание

Для системы балок с шарнирным опиранием в точке A (рис. 6, в) формула метода начальных параметров, следующая:

$$v(z) = \theta_A z + \theta_1(z-L)H(z-L) + \theta_2(z-2L)H(z-2L) + \\ + \frac{1}{6EJ} \left[R_A z^3 + N_1 \left(z - \frac{L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{L}{3} \right) + N_2 \left(z - \frac{2L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{2L}{3} \right) + N_3 \left(z - \frac{4L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{4L}{3} \right) + \right. \\ \left. + N_4 \left(z - \frac{5L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{5L}{3} \right) + N_5 \left(z - \frac{7L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{7L}{3} \right) + N_6 \left(z - \frac{8L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{8L}{3} \right) - \frac{qz^4}{4} \right], z \in [0, 3L]. \quad (24)$$

Здесь θ_A – угол поворота в точке A .

Дополнительные уравнения (22) позволяют ввести в базис переменные N_4, N_5, N_6 , как в (23). Из уравнения равновесия $\Sigma y = 0$ определяется реакция R_A для формулы (24). Функции прогибов, углов поворота, изгибающего момента, поперечной силы показаны на рис. 7–10.

3.3. Скользящая заделка

Рассмотрим скользящую заделку в точке A , фрагмент которой представлен на рис. 6, з. Здесь составлены следующие уравнения равновесия:

$$\Sigma m_C^{\text{справа}} = 0, \Sigma m_B^{\text{справа}} = 0, \Sigma y = 0. \quad (25)$$

В базис введем векторы при переменных N_4, N_5, N_6 , и после вычисления производных по свободным переменным из уравнения равновесия $\Sigma m_A = 0$ выразим функции прогиба M_A .

Теперь, функция прогиба:

$$v(z) = v_A + \theta_1(z-L)H(z-L) + \theta_2(z-2L)H(z-2L) + \\ + \frac{1}{6EJ} \left[3M_A z^2 + N_1 \left(z - \frac{L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{L}{3} \right) + N_2 \left(z - \frac{2L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{2L}{3} \right) + N_3 \left(z - \frac{4L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{4L}{3} \right) + \right. \\ \left. + N_4 \left(z - \frac{5L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{5L}{3} \right) + N_5 \left(z - \frac{7L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{7L}{3} \right) + N_6 \left(z - \frac{8L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{8L}{3} \right) - \frac{qz^4}{4} \right], z \in [0, 3L]. \quad (26)$$

Все решения представлены на рис. 7–10.

3.4. Свободный край

В случае свободного края, в точке A балки нет связей (рис. 6, д), неизвестных параметров 10. Тогда $v(z) = f(v_A, \theta_A, \theta_1, \theta_2, N_1, N_2, \dots, N_6)$. Каждый диск балки в плоскости обладает тремя степенями свободы. Всего их 9. Каждый простой шарнир забирает две степени свободы – всего устраняется 4. Для системы из трех балок остается 5 степеней свободы. Чтобы превратить рассматриваемую систему балок в геометрически неизменяемую, следует добавить 5 связей. Вычитается одна степень свободы, так как нет смещения по направлению продольной силы. Можно записать 4 уравнения равновесия, однако они линейно зависимые.

Составим три уравнения равновесия. Функция прогиба будет выглядеть так:

$$v(z) = v_A + \theta_A z + \theta_1(z-L)H(z-L) + \theta_2(z-2L)H(z-2L) + \\ + \frac{1}{6EJ} \left[N_1 \left(z - \frac{L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{L}{3} \right) + N_2 \left(z - \frac{2L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{2L}{3} \right) + N_3 \left(z - \frac{4L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{4L}{3} \right) + \right.$$

$$+N_4 \left(z - \frac{5L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{5L}{3} \right) + N_5 \left(z - \frac{7L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{7L}{3} \right) + N_6 \left(z - \frac{8L}{3} \right)^3 H \left(z - \frac{8L}{3} \right) - \frac{qz^4}{4} \Big] , z \in [0, 3L]. \quad (27)$$

Решения отобразим на рис. 7–10.

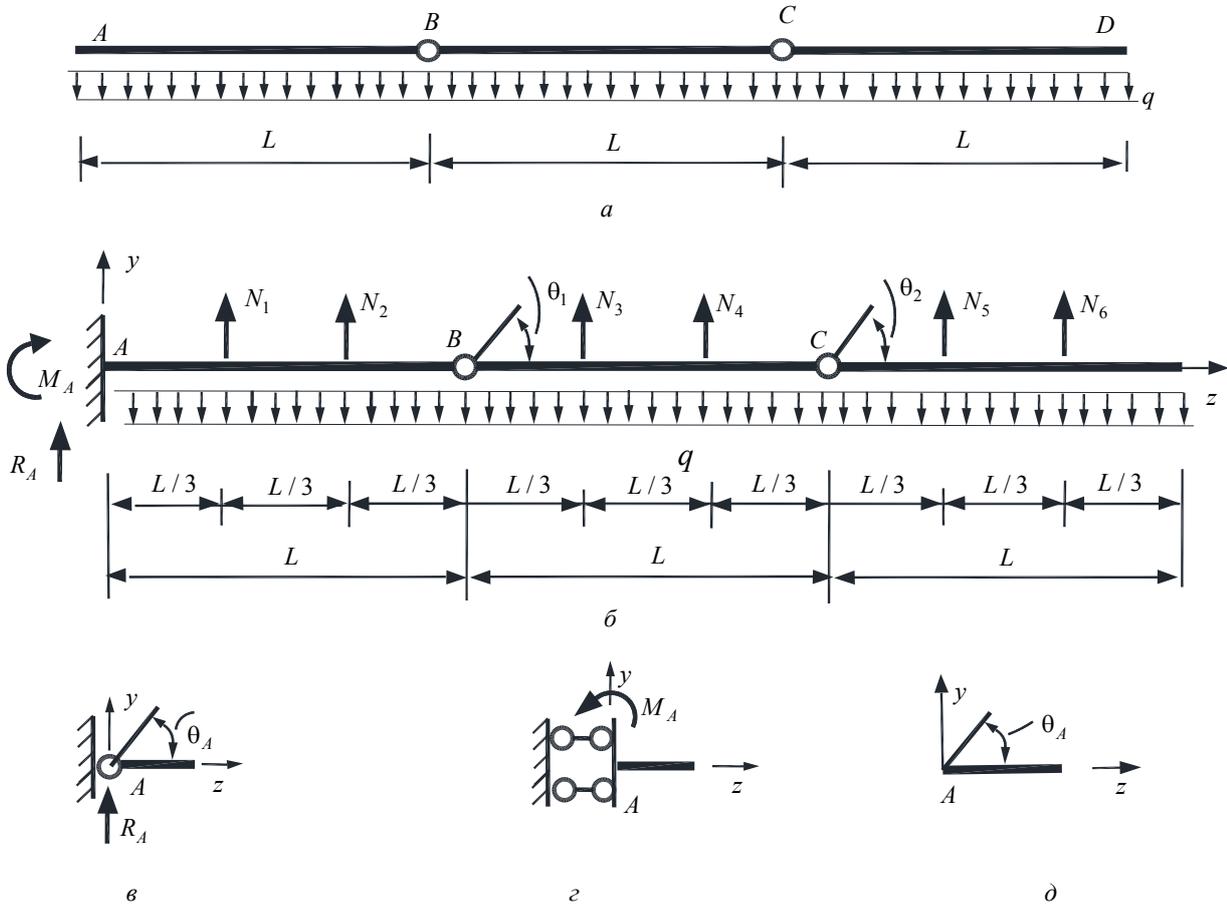


Рис. 6. Система трех балок, соединенных шарнирами:

a – система в условиях гравитации; *b* – моделирование невесомости системы жестким защемлением в точке *A*; *в* – фрагмент шарнирно-неподвижного опирания системы балок в точке *A*; *г* – фрагмент скользящей заделки системы балок в точке *A*; *д* – фрагмент свободного края системы балок в точке *A*

Fig. 6. A system of three beams connected by hinges:

a – the system under gravity conditions; *b* – modeling of the weightlessness of the system by rigid pinching at point *A*; *c* – a fragment of the hinge-fixed support of the beam system at point *A*; *d* – a fragment of the sliding sealing of the beam system at point *A*; *e* – a fragment of the free edge of the beam system at point *A*

В табл. 2 приведем силы натяжения тросов для системы балок с четырьмя типами граничных условий. Сравним силы натяжения для балки жестко защемленной и шарнирно опертая. На первой балке усилия натяжения тросов равны: $N_1^{\text{заделка}} = -278,4 \text{ н}$, $N_1^{\text{шарнир}} = -124,02 \text{ н}$, – разница 220 %; $N_2^{\text{заделка}} = 407,5 \text{ н}$, $N_2^{\text{шарнир}} = 336,07 \text{ н}$, – разница 21 %. На второй балке наибольшие силы натяжения таковы: $N_4^{\text{заделка}} = 262,6 \text{ н}$, $N_4^{\text{шарнир}} = 251,9 \text{ н}$, – разница 4,2 %. На третьей балке усилия натяжения тросов почти равны: $N_5^{\text{заделка}} = 96,3 \text{ н}$, $N_5^{\text{шарнир}} = 100,7 \text{ н}$ – отличие 4,5 %. В крайнем тросе: $N_6^{\text{шарнир}} = 174,6 \text{ н}$ и $N_6^{\text{заделка}} = 176,8 \text{ н}$ – разница 0,13 %.

Вид закрепления (шарнирное закрепление или заделка) влияет на первую от закрепления балку. Силы натяжения тросов, в определенной степени, выравнивают деформированное и напряженное состояние. В последующих балках усилия натяжения тросов практически не отличаются, т. е. не зависят от вида закрепления первой балки. Такой же вывод можно сделать и для балок со скользящей заделкой.

Модели систем трех балок при имитации невесомости, в определенной степени, эквивалентны. Так, например, если к модели системы балок с шарнирным опиранием в точке A задать момент (например, двигателем) равным $89,9 \text{ н}\cdot\text{м}$ или установить пружину жесткостью $G_A = M_A / \theta_A = 89,9 \text{ нм} / 5,78 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 1,5 \text{ кн/рад}$, получаем модель деформирования с жестким защемлением. Соответственно, требуется изменить силы натяжения тросов.

В табл. 3, к усилиям натяжения тросов из табл. 2, добавлены углы поворота в начале системы балок (точка A) и дополнительные углы поворота в шарнирах, среднеквадратичные прогибы и максимальные прогибы. При переходе от жесткого закрепления к шарнирному, далее от скользящей заделки к свободному краю жесткость системы уменьшается. Среднеквадратичные прогибы увеличиваются: $\delta_{\text{заделка}} = 2,301 \cdot 10^{-5} \text{ м}$; $\delta_{\text{шарнир}} = 2,396 \cdot 10^{-5} \text{ м}$; $\delta_{\text{скользящая}} = 2,741 \cdot 10^{-5} \text{ м}$; $\delta_{\text{свободный край}} = 3,282 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, т. е. на 4,1, 14,4 и 19,7 %. Максимальные прогибы в трех первых случаях возникают в точке, где установлен шарнир, соединяющий вторую и третью балку, соответственно, $(4,31 \div 4,5 \div 5,14) \cdot 10^{-5} \text{ м}$, и в середине системы балок со свободным краем – $6,07 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

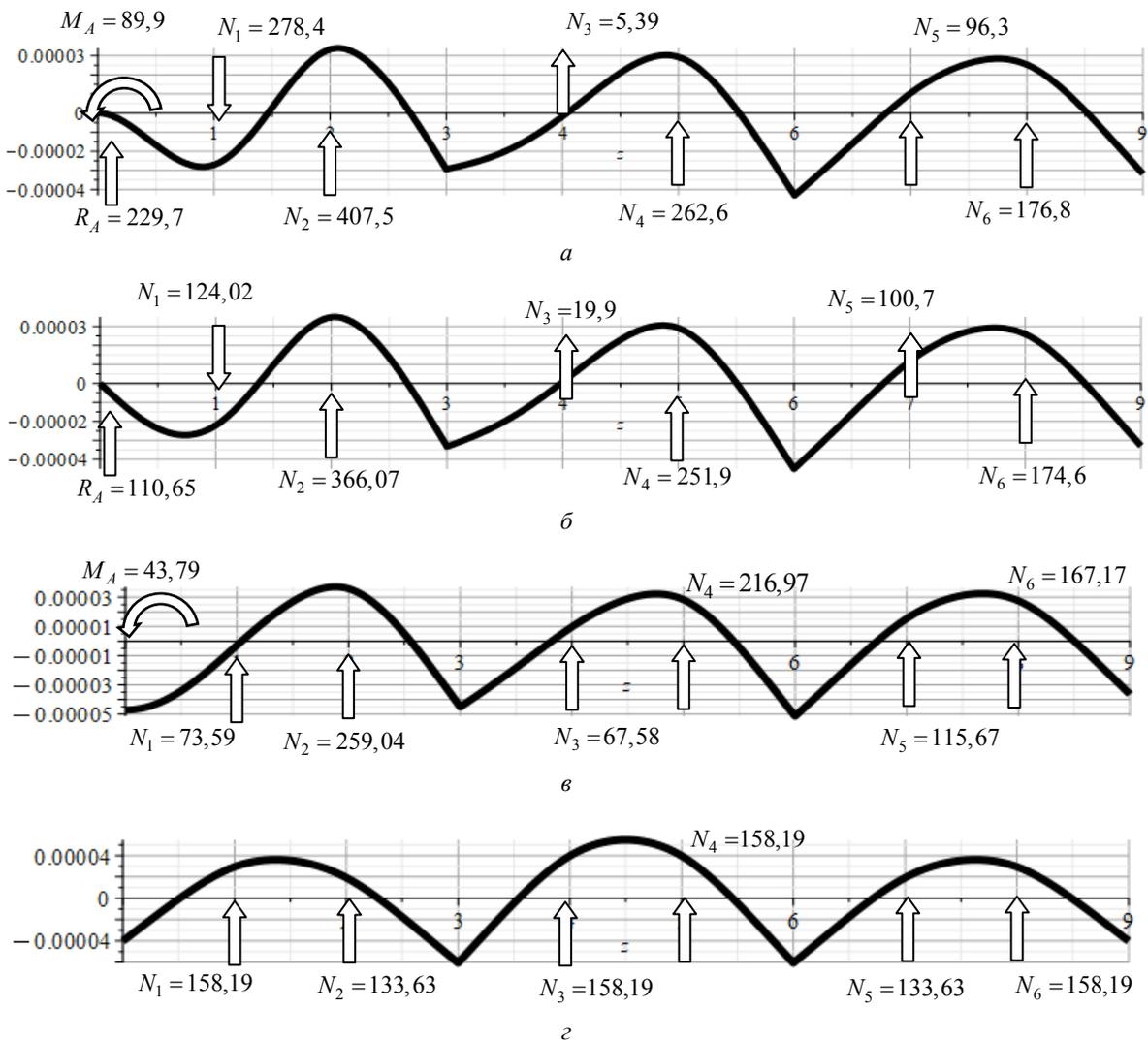


Рис. 7. Функции прогибов и силы натяжения тросов для граничных условий слева:
 а – жесткой заделки; б – шарнирного опирания; в – скользящей заделки; г – свободного края

Fig. 7. Functions of deflections and tension forces of cables for boundary conditions on the left:
 а – rigid sealing; б – hinged support; в – sliding sealing; г – free edge

$M_A = 89,9$ $N_2 = 407,5$ $N_4 = 262,6$ $N_6 = 176,8$

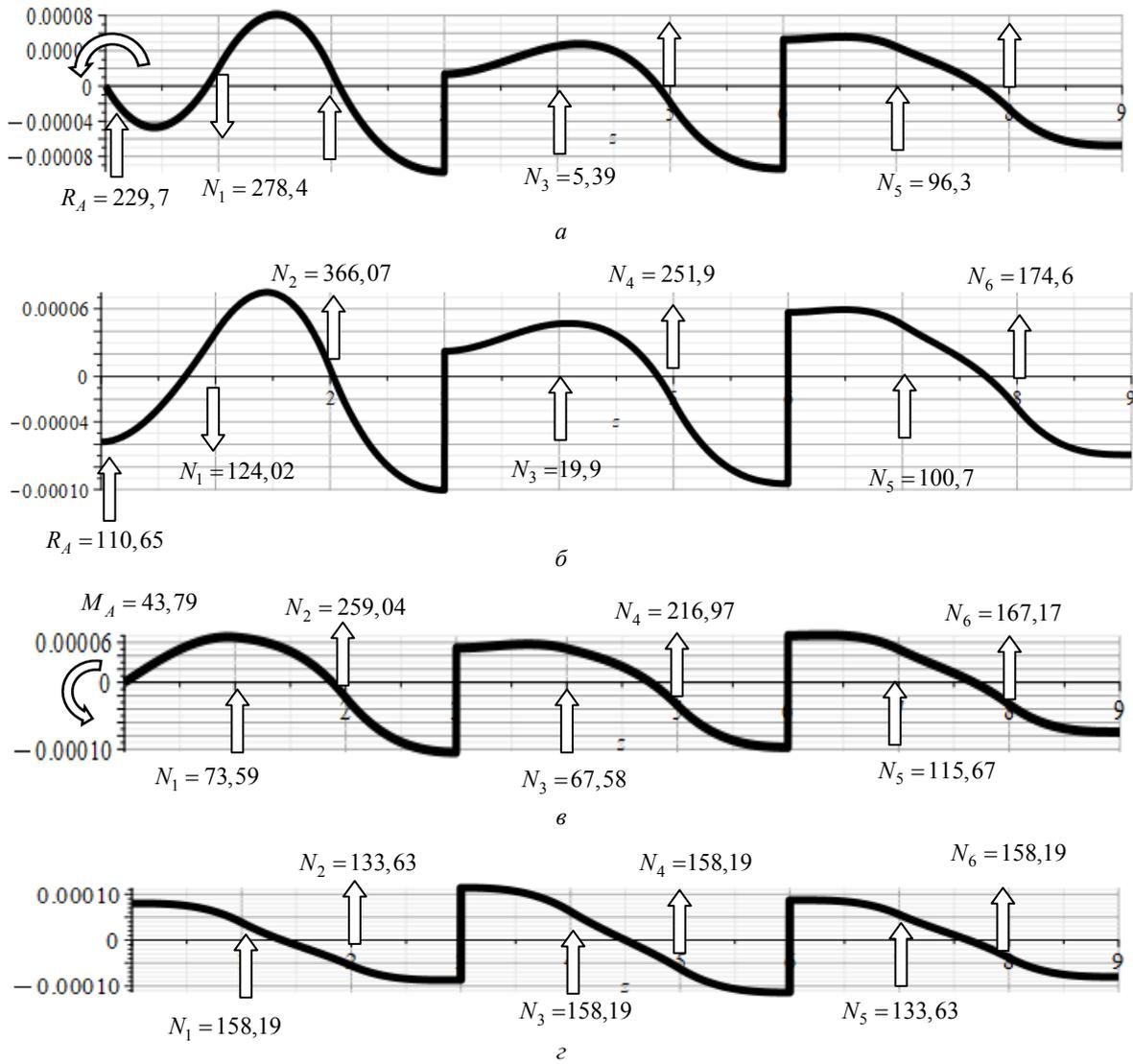


Рис. 8. Функции углов поворота и силы натяжения тросов для граничных условий слева:
 а – жесткой заделки; б – шарнирного опирания; в – скользящей заделки; г – свободного края

Fig. 8. Functions of rotation angles and cable tension force for boundary conditions on the left:
 a – rigid sealing; b – hinged support; c – sliding sealing; d – free edge

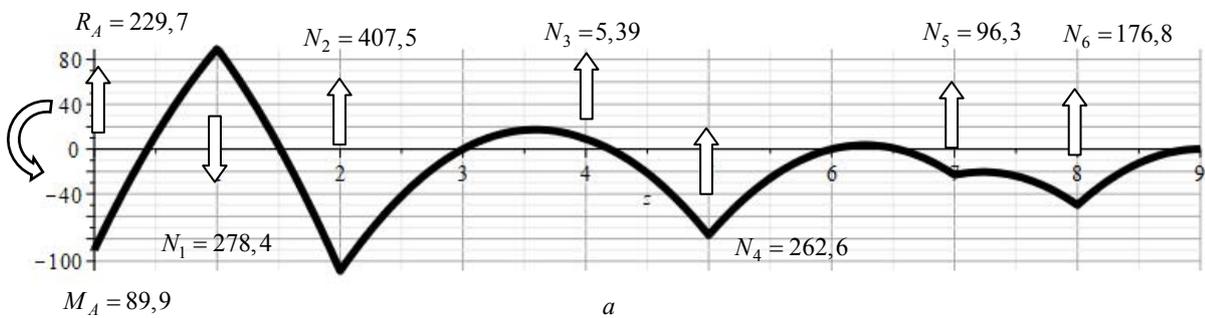


Рис. 9. Функции изгибающих моментов и силы натяжения тросов для граничных условий слева:
 а – жесткой заделки; б – шарнирного опирания; в – скользящей заделки; г – свободного края (Начало)

Fig. 9. Functions of bending moments and tension forces of cables for boundary conditions on the left:
 a – rigid sealing; b – hinged support; c – sliding sealing; d – free edge (The beginning)

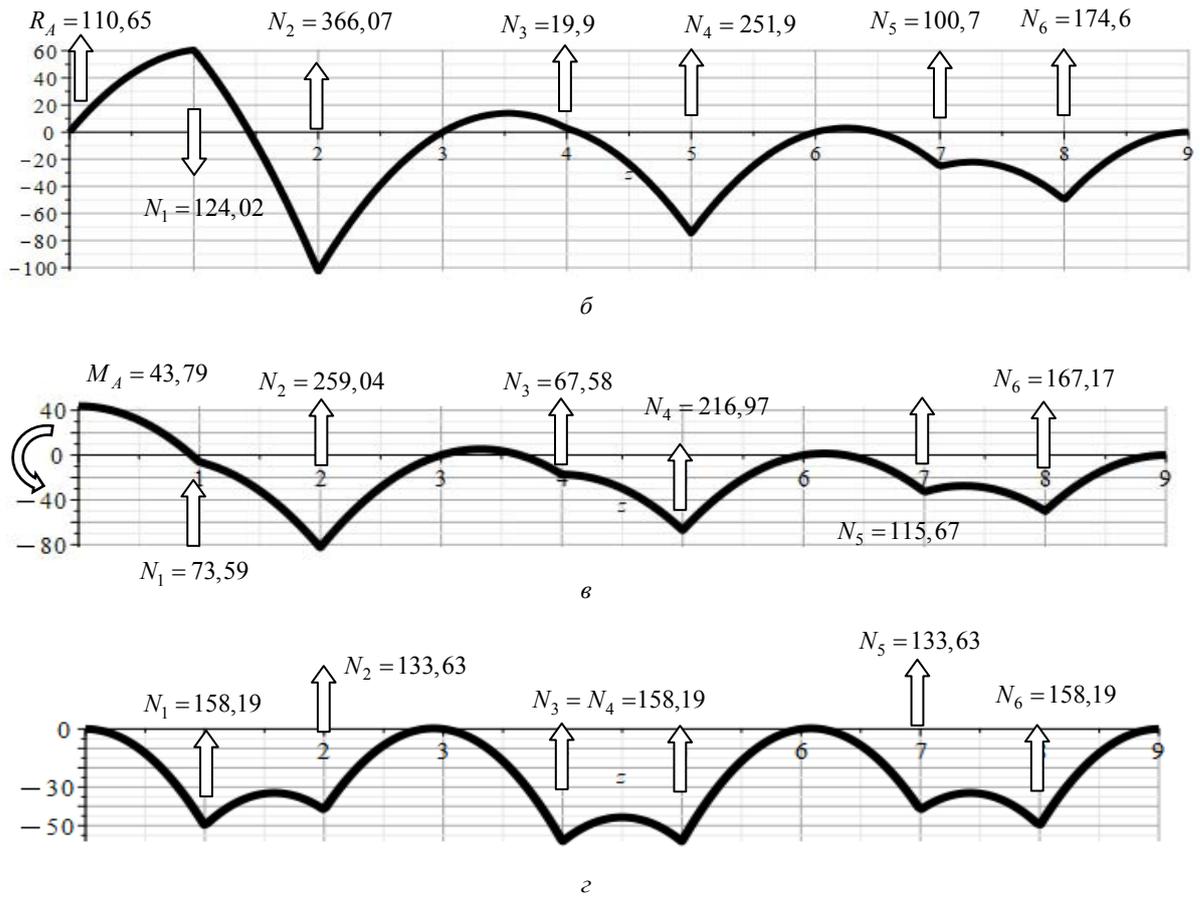


Рис. 9. Окончание

Fig. 9. The ending

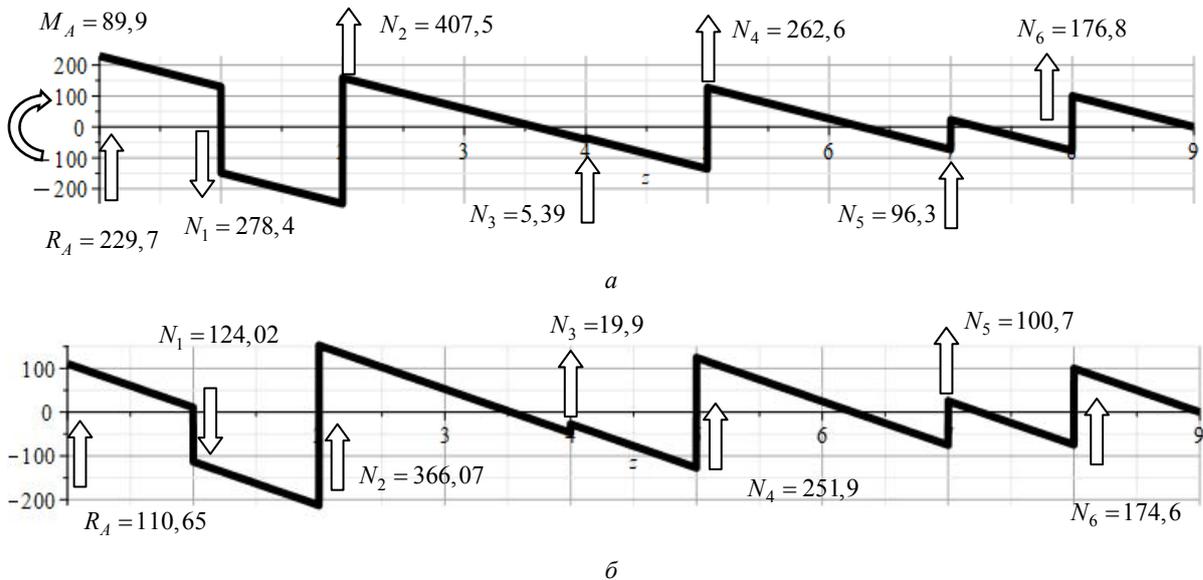


Рис. 10. Функции перерезывающих сил и силы натяжения тросов для граничных условий слева: а – жесткой заделки; б – шарнирного опирания; в – скользящей заделки; г – свободного края (Начало)

Fig. 10. Functions of shearing forces and cable tension forces for boundary conditions on the left: а – rigid sealing; б – hinged support; в – sliding sealing; г – free edge (The beginning)

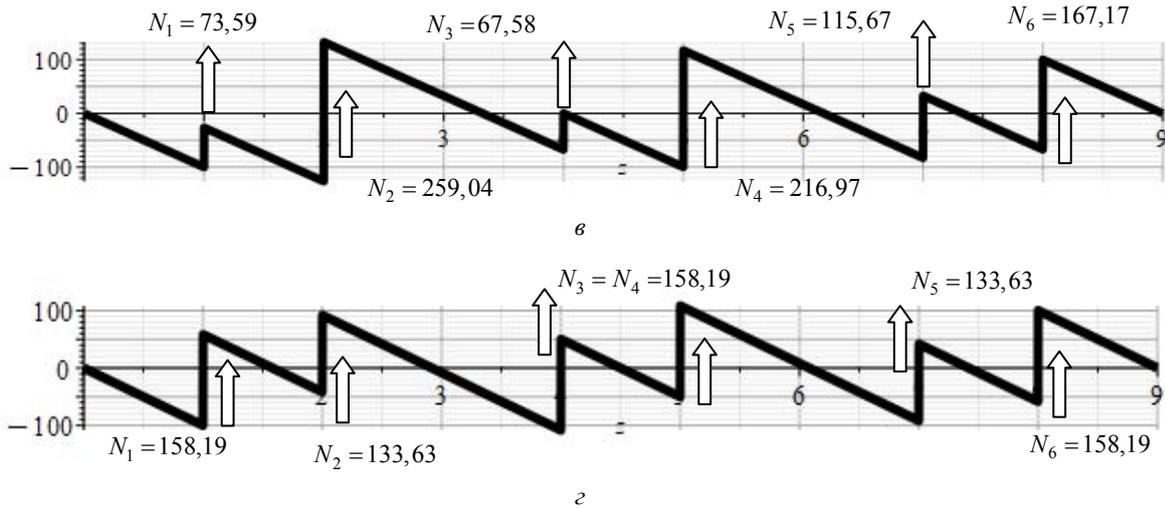


Рис. 10. Окончание

Fig. 10. The ending

Таблица 2

Силы натяжения тросов

Номера строк	Вид закрепле- ния в точке А	<i>N1</i>	<i>N2</i>	<i>N3</i>	<i>N4</i>	<i>N5</i>	<i>N6</i>
		н	н	н	н	н	н
1	Заделка	-278,4	407,5	5,39	262,6	96,3	176,8
2	Шарнирно- неподвижное	-124,02	336,07	19,9	251,9	100,7	174,6
3	Скользкая заделка	73,59	259,04	67,58	216,97	115,67	167,17
4	Свободный край	158,19	133,63	158,19	158,19	133,63	158,19

Таблица 3

Реактивные силы и геометрические характеристики системы

Номера строк	Вид закрепле- ния в точке А	M_A	R_A	θ_A	θ_1	θ_2	δ	$v(z)$
		н·м	н	10^{-5} рад	10^{-5} р ад	10^{-5} р ад	10^{-5} м	10^{-5} м
1	Заделка	-89,9	229,7	0	11,1	14,7	2,301	$v(6 \text{ м}) = 4,31$
2	Шарнирно- неподвижное	0	110,65	5,78	12,3	15,2	2,396	$v(6 \text{ м}) = 4,50$
3	Скользкая заделка	-43,79	0	0	15,6	16,7	2,741	$v(6 \text{ м}) = 5,14$
4	Свободный край	0	0	8,01	-20,1	20,1	3,282	$v(4,5 \text{ м}) = 6,07$

Размерности физических величин прописаны согласно [17].

Заключение

В задаче квадратичного программирования при различных базисных переменных, вводимых в функцию цели, существует единственный оптимальный план. Смена базиса не влияет на решение задачи.

Анализ решения дискретных задач (с конечным числом точек на упругой линии балок) показал, что достаточны сетки от $n = 12$ до $n = 24$ точек. Различие по средневзвешенным прогибам 4,3 %.

Модели систем трех балок при имитации невесомости в определенной степени эквивалентны. Любую из рассмотренных систем с представленными граничными условиями можно перевести в эквивалентную ей, изменив граничные силовые факторы. Например, если в модели с шарнир-

ным опиранием задать момент или установить пружину с заданной жесткостью, получаем модель деформирования с жестким защемлением. Соответственно, требуется корректировать силы натяжения тросов.

Вид граничного условия в большей мере влияет на первую балку; силы натяжения тросов выравнивают деформированное и напряженное состояние. В последующих балках усилия натяжения тросов практически не отличаются.

При переходе от жесткого закрепления к шарнирному, далее от скользящей заделки к свободному краю жесткости систем уменьшаются. Среднеквадратичные прогибы увеличиваются.

Имитирование невесомости системы с условием минимизации суммы квадратов прогибов может быть полезно при подготовке физических экспериментов.

Возможно обобщение постановки задачи о регулировании напряженно-деформированного состояния для систем подвешенных пластин-панелей; в шарнирных соединениях возможна установка пружин; усилия в тросах могут дополнительно распределяться с весовыми множителями.

Библиографические ссылки

1. Феодосьев В. И. Основы техники ракетного полета. М. : Наука, 1979. 496 с.
2. Строительная механика летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. А. Булычев, В. В. Васильев и др. М. : Машиностроение, 1986. 536 с.
3. Анализ конструкций солнечных батарей космических аппаратов / З. А. Казанцев, А. М. Ерошенко, Л. А. Бабкина, А. В. Лопатин // Космические аппараты и технологии. 2021. Т. 5, № 3 (37). С. 121–136.
4. Волков М. В., Двирный В. В. Каркас солнечной батареи из труб треугольного сечения // Космические аппараты и технологии. 2021. Т. 5, № 3 (37). С. 137–145.
5. Автоматическая система обезвешивания крупногабаритных трансформируемых конструкций при раскрытии / А. Г. Верхогляд, С. Н. Макаров, В. М. Михалкин и др. // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 2. С. 134–142.
6. А.с. 1467418 СССР, МКИ G01M13/02, F16H 21/16. Стенд для моделирования невесомости двухзвенных механизмов / А. В. Медарь, В. Б. Бурыкин, Я. Ф. Гайдено, Д. С. Михайлов, В. М. Бажанов, В. П. Кравченко, С. В. Балашин, Е. В. Морозов, С. М. Осохин (СССР). № 4238824/25-28 ; заявл. 04.05.87 ; опубл. 32.03.89. Бюл. № 11. 2 с.
7. Звонцова К. К. Исследование зависимости угла раскрытия спицы от перемещения мачты при моделировании процессов стендовых испытаний механических устройств рефлекторов антенн больших диаметров // Технологии Microsoft в теории и практике программирования : сб. тр. XIII Всеросс. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых уч. Томск, 2016. С. 48–50.
8. Методика расчета системы обезвешивания крупногабаритных трансформируемых элементов космических аппаратов при наземных испытаниях / А. С. Беляев, А. А. Филипас, А. В. Цавнин, А. В. Тырышкин // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 1. С. 106–120.
9. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М. : Мир. 1982. 584 с.
10. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование. М. : Высш. школа, 1980. 300 с.
11. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М. : Мир. 1975. 536 с.
12. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. М. : Наука, 1986. 560 с.
13. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб. : БВХ-Петербург, 2001. 528 с.
14. Строительная механика. Стержневые системы / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников. М. : Стройиздат, 1981. 512 с.
15. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1953. 528 с.
16. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наука. 1975. 400 с.
17. Чертов А. Г. Международная система единиц измерений. М. : Высшая школа, 1967. 288 с.

References

1. Feodosiev V. I. *Osnovy tekhniki raketnogo poleta* [Fundamentals of rocket flight technology]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 496 p.
2. Obratsov I. F., Bulychev L. A., Vasiliev V. V. et al. *Stroitel'naya mekhanika letatel'nykh apparatov* [Structural mechanics of aircraft]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 536 p.
3. Kazantsev Z. A., Eroshenko A. M., Babkina L. A., Lopatin A. V. [Analysis of spacecraft solar array designs]. *Kosmicheskie apparaty i tekhnologii*. 2021, Vol. 5, No. 3 (37), P. 121–136 (In Russ.).
4. Volkov M. V., Dvirny V. V. [Solar battery frame from tubes of triangular section]. *Kosmicheskie apparaty i tekhnologii*. 2021, Vol. 5, No. 3 (37), P. 137–145 (In Russ.).
5. Verkhoglyad A. G., Makarov S. N., Mikhalkin V. M., Stupak M. F., Shevlyakov A. V. [Automatic weight loss system for large transformable structures during opening]. *Instrumentation*. 2016, Vol. 59, No. 2, P. 134–142 (In Russ.).
6. Medar A.V. et al. *A. S. 1467418 USSR, MKIG01M13/02, F16H 21/16. Stend dlya modelirovaniya nevesomosti dvuhzvennykh mekhanizmov (USSR)* [A.s. 1467418 USSR, MKIG01M13/02, F16H 21/16. Stand for determining the weightlessness of two-link supports]. No. 4238824/25-28. 2 p.
7. Zvontsova K. K. [Investigation of the dependence of the opening angle of the spoke on the movement of the mast when modeling the processes of bench testing of mechanical devices of reflectors of antennas of large diameters]. *Tekhnologii Microsoft v teorii i praktike programmirovaniya: sbornik trudov XIII Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii studentov, aspirantov i molodyh uchenykh*. Tomsk, 2016. P. 48–50 (In Russ.).
8. Belyaev A. S. et al. [Methodology for calculating the dewatering system of large-sized transformable elements of spacecraft during ground tests]. *Sibirskiy aerokosmicheskiy zhurnal*. 2021, Vol. 22, No. 1, P. 106–120 (In Russ.).
9. Bazara M., Shetty K. *Nelinejnoe programmirovaniye. Teoriya i algoritmy* [Nonlinear programming. Theory and algorithms]. Moscow, Mir Publ., 1982, 584 p.
10. Kuznetsov Yu. N., Kuzubov V. I., Voloshchenko A. B. *Matematicheskoe programmirovaniye* [Mathematical programming]. Moscow, Higher. School Publ., 1980, 300 p.
11. Himmelblau D. *Prikladnoe nelinejnoe programmirovaniye* [Applied non-linear programming]. Moscow, Mir Publ., 1975, 536 p.
12. Birger I. A., Mavlyutov R. R. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 560 p.
13. Matrosov A.V. *Maple 6. Reshenie zadach vysshey matematiki i mekhaniki* [Maple 6. Solving problems of higher mathematics and mechanics]. St. Petersburg, BVH-Petersburg Publ., 2001, 528 p.
14. Smirnov A. F. et al. *Stroitel'naya mekhanika. Sterzhnevyye sistemy* [Building mechanics. Rod systems] Moscow, Stroyizdat Publ., 1981, 512 p.
15. Mikeladze Sh. E. *CHislennyye metody matematicheskogo analiza* [Numerical methods of mathematical analysis]. Moscow, State. publishing house of technical and theoretical literature Publ., 1953, 528 p.
16. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Resistance Handbook materials]. Kyiv, Nauka Publ., 1975, 400 p.
17. Chertov A. G. *Mezhdunarodnaya sistema edinic izmerenij* [International system of units of measurements]. Moscow, Higher School Publ., 1967, 288 p.

© Сабиров Р. А., Фисенко Е. Н., 2023

Сабиров Рашид Альтавович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технической механики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: rashidsab@mail.ru.

Фисенко Елена Николаевна – старший преподаватель кафедры технической механики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева.

Rashid Altavovich Sabirov – Ph. D., associate Professor, associate Professor of the Department of technical mechanics; Reshetnev Siberian state University of science and technology. E-mail: rashidsab@mail.ru.

Fisenko Elena Nikolaevna – senior lecturer; Reshetnev Siberian state University of science and technology.
