УДК 519.248
Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-4-628-638

Для цитирования: Вайнштейн В. И., Вайнштейн И. И., Сафонов К. В. Решение интегрального уравнения для средней стоимости восстановлений в теории надежности технических систем // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24, № 4. С. 628–638. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-4-628-628-638.

For citation: Vainshtein V. I., Vainshtein I. I., Safonov K. V. [Solution of the integral equation for the average cost of restoration in the theory of reliability of technical systems]. *Siberian Aerospace Journal.* 2023, Vol. 24, No. 4, P. 628–638. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-4-628-638.

Решение интегрального уравнения для средней стоимости восстановлений в теории надежности технических систем

В. И. Вайнштейн[1*], И. И. Вайнштейн[1], К. В. Сафонов[2]

[1]Сибирский федеральный университет
660041, Российская Федерация, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
[2]Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31
[*]E-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru

Отказы элементов при работе технических и многих других систем имеют, как правило, случайный характер. Это приводит к различным моделям процесса восстановления, изучаемым в теории вероятностей и математической теории надежности. В процессе восстановления отказавшие элементы восстанавливаются или заменяются на новые, при этом часто происходит изменение стоимостей и качества восстанавливаемых элементов (функций распределения наработок до отказа).

В работе рассматривается функция затрат (средняя стоимость восстановления) в процессе восстановления порядка (k_1, k_2), *в котором по определенному правилу изменяются стоимости каждого восстановления и функции распределения наработок.*

Учитывая, что функция восстановления (среднее число отказов) хорошо изучена в теории надежности, получено решение интегрального уравнения для функции затрат через функцию восстановления рассматриваемой модели.

Для процесса восстановления порядка (k_1, k_2) *получена формула вычисления функции затрат через функцию восстановления простого процесса, образованного сверткой всех функций распределения периодической части. Для практического применения получены явные формулы функции затрат при процессе восстановления, у которого периодическая часть распределена по экспоненциальному закону или закону Эрланга порядка m с одним и тем же показателем* α.

Полученные формулы могут быть использованы для изучения свойств функции затрат и решения оптимизационных задач в стратегиях проведения процесса восстановления в терминах «цена», «качество», «риск», если, например, за качество принимать среднее число отказов, за цену – среднюю стоимость восстановлений, за риск – дисперсии числа отказов или стоимости восстановлений.

Ключевые слова: модели процесса восстановления, функция восстановления, функция затрат, распределение Эрланга.

Solution of the integral equation for the average cost of restoration in the theory of reliability of technical systems

V. I. Vainshtein[1*], I. I. Vainshtein[1], K. V. Safonov[2]

[1]Siberian Federal University
79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
[2]Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
[*]E-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru

Failures of elements during the operation of technical and many other systems are, as a rule, random in nature. This leads to various models of the recovery process, studied in probability theory and mathematical reliability theory. During the restoration process, failed elements are restored or replaced with new ones, and there is often a change in the costs and quality of the restored elements (time-to-failure distribution functions).

The work examines the cost function (average cost of restoration) in the process of restoration of order (k_1, k_2), *in which, according to a certain rule, the costs of each restoration and the distribution functions of operating time change.*

Considering, that the recovery function (average number of failures) is well studied in reliability theory, a solution to the integral equation for the cost function is obtained through the recovery function of the model under consideration.

For the order restoration process (k_1, k_2), *a formula is obtained for calculating the cost function through the restoration function of a simple process formed by the convolution of all distribution functions of the periodic part. For practical application, explicit formulas are obtained for the cost function during the restoration process, in which the periodic part is distributed according to an exponential law or an Erlang law of order* m *with the same exponent* α.

The resulting formulas can be used to study the properties of the cost function and solve optimization problems in strategies for carrying out the restoration process in terms of price, quality, risk, if, for example, the average number of failures is taken as quality, the average cost of restorations as price, the dispersion of the number of failures as the risk, or cost of restoration.

Keywords: recovery process models, recovery function, cost function, Erlang distribution.

Введение

В математической теории надежности при изучении процессов восстановления в первую очередь рассматриваются числовые характеристики, связанные со случайным числом отказов и случайной стоимостью восстановлений, например, среднее и дисперсия числа отказов и стоимости восстановлений, через которые определяются различные критерии оптимальности проведения стратегий восстановления.

В работе рассматриваются модели процесса восстановления (X_i, c_i), $i = 0,1,\ldots$ с учетом стоимости восстановлений. Здесь X_i – случайные наработки с функциями распределения $F_i(t)$ элементов от $i-1$-го до i-го отказа; c_i – стоимости i-х восстановлений; c_0 – стоимость элемента, установленного в начальный момент времени $t = 0$, $F_0(t) = 0$ при $t < 0$, $F_0(t) = 1$ при $t \geq 0$ [1–4].

Пусть $N(t)$ – количество отказов (восстановлений); $C(t)$ – стоимость восстановлений за время от 0 до t:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} c_i,$$

$$P\left(N(t)=n\right)=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t),$$

$F^{(n)}(t)$ – n-кратная свертка функций распределения $F_i(t)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$

$$F^{(n)}(t)=\left(F^{(n-1)}*F_n\right)(t)=\int_0^t F^{(n-1)}(t-x)\,dF_n(x)\quad F^{(1)}(t)=F_1(t).$$

Для них [1; 2]: $H(t)$ – функция восстановления (среднее число отказов)

$$H(t)=E\left(N(t)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t),$$

$S(t)=E\left(C(t)\right)$ – функция затрат (среднее значение стоимости восстановлений)

$$S(t))=E\left(C(t)\right)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_nF^{(n)}(t).$$

При эксплуатации качества $\left(F_i(t)\right)$ восстановленных элементов и стоимости $\left(c_i\right)$ восстановлений могут отличаться. Это приводит к различным моделям процесса восстановления [1; 3; 5–9].

В работе рассматривается процесс восстановления с учетом стоимости на восстановления порядка $\left(k_1,k_2\right)$, у которого функции распределения и стоимости восстановлений удовлетворяют условию: $F_i(t)=F_j(t)$ и $c_i=c_j$, если индексы $i,j\geq k_1$ при делении на k_2 дают одинаковые остатки [1; 3; 8; 9].

В рассматриваемом процессе после первых k_1-1 восстановлений начинается периодический процесс порядка k_2.

Отметим, что в случае $k_1=1$ имеем периодический процесс восстановления порядка k_2, а если $k_2=1$, процесс восстановления порядка k_1.

Если $F_i(t)$ совпадают $\left(F_i(t)=F_1(t),\ i\geq 1\right)$, или совпадают, начиная с номера $i=2$ $\left(F_i(t)=F_2(t),\ i\geq 2\right)$, имеем хорошо изученные в теории надежности простой (обычный) и общий (запаздывающий) процессы восстановления.

Отметим, что для рассматриваемой модели функция восстановления $H(t)$ хорошо изучена. Разработаны численные методы ее нахождения, и для многих законов распределения, характерных для теории надежности, имеются ее явные представления [1; 6].

Для нахождения функции затрат $S(t)$ имеются интегральные уравнения [1; 2; 10].

Целью работы является получение решения интегрального уравнения для функции затрат $S(t)$ в виде интегрального представления через функцию восстановления $H(t)$. Такое представление будет удобным для ее изучения и вычисления в различных теоретических и прикладных задачах теории надежности.

Представление функции затрат через функцию восстановления

Запишем интегральное уравнение для функции затрат $S(t)$ [1; 2]

$$S(t)=G(t)+\int_0^t S(t-x)\,d\Phi^{(k_2)}(x)\tag{1}$$

при $k_1>1$,

$$G(t)=c_0\left(1-\Phi^{(k_2)}(t)\right)+\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}c_nF^{(n)}(t)-\sum_{n=1}^{k_1-1}c_n\int_0^t F^{(n)}(t-x)\,d\Phi^{(k_2)}(x),$$

при $k_1 = 1$,

$$G(t) = c_0\left(1 - \Phi^{(k_2)}(t)\right) + \sum_{n=1}^{k_2} c_n F^{(n)}(t) \quad ,$$

где $\Phi^{(k_2)}(t) = \left(\Phi_1 * \Phi_2 * ... * \Phi_{k_2}\right)(t)$ – свертка всех функций распределения $\Phi_i(t) = F_{k_1 - 1 + i}(t)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k_2$. Функции $\Phi_i(t)$ задают периодическую часть процесса восстановления.

Пусть $HF(t)$ – функция восстановления простого процесса, $HFG(t)$ – функция восстановления общего процесса, образованного первой функцией распределения $F(t)$ и следующими $G(t)$.

Далее [1; 6]

$$HFG(t) = F(t) + \int_0^t HFG(t - x)\, dG(x). \tag{2}$$

В уравнении (1) сделаем замену

$$S(t) = V(t) + c_0 + \sum_{n=1}^{k_1 - 1} c_n F^{(n)}(t). \tag{3}$$

Получаем

$$V(t) + c_0 + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n F^{(n)}(t) = c_0\left(\quad - \Phi^{(k_2)}(t)\right) + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n F^{(n)}(t) + \sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n F^{(n)}(t) -$$

$$-\sum_{n=1}^{k_1-1} c_n \int_0^t F^{(n)}(t - x)\, d\Phi^{(k_2)}(x) + \int_0^t \left(V(t - x) + c_0 + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n F^{(n)}(t - x)\right) d\Phi^{(k_2)}(x).$$

Отсюда, для нахождения функции $V(t)$, получаем интегральное уравнение

$$V(t) = \sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n F^{(n)}(t) + \int_0^t V(t - x)\, d\Phi^{(k_2)}(x). \tag{4}$$

Сделаем замену

$$V(t) = \left(\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n\right) V_1(t). \tag{5}$$

Уравнение (4) перепишется в виде

$$V_1(t) = Q(t) + \int_0^t V_1(t - x)\, d\Phi^{(k_2)}(x), \tag{6}$$

$$Q(t) = \frac{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n F^{(n)}(t)}{\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n}. \tag{7}$$

Заметим, что $\Phi^{(k_2)}(t)$ и $Q(t)$ являются функциями распределения, $\Phi^{(k_2)}(t)$ как свертка функций распределения наработок, а $Q(t)$ – смесь функций распределения.

Сравнивая уравнения (6) и (2), получаем, что уравнение (6) определяет функцию восстановления $HQ\Phi^{(k_2)}(t)$ общего процесса, задаваемого первой функцией распределения $Q(t)$, второй и последующими $\Phi^{(k_2)}(t)$.

Таким образом,

$$V_1(t) = HQ\Phi^{(k_2)}(t), \tag{8}$$

и с учетом (3), (5), (7), (8)

$$S(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n F^{(n)}(t) + \left(\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n \right) HQ\Phi^{(k_2)}(t)). \tag{9}$$

Учитывая (2),

$$HQ\Phi^{(k_2)}(t) = Q(t) + \int_0^t H\Phi^{(k_2)}(t-x)\,dQ(x), \tag{10}$$

формула (9) запишется в виде

$$S(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_n F^{(n)}(t) + \sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n \left(Q(t) + \int_0^t H\Phi^{(k_2)}(t-x)\,dQ(x) \right),$$

или с учетом (10)

$$S(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n F^{(n)}(t) + \sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n \int_0^t H\Phi^{(k_2)}(t-x)\,dF^{(n)}(x)). \tag{11}$$

Получили, что вычисление функции затрат сводится к вычислению конечного числа сверток функций распределения и нахождению функции восстановления $H\Phi^{(k_2)}(t)$ простого процесса восстановления, образованного функцией распределения $\Phi^{(k_2)}(t)$, или функции восстановления $HQ\Phi^{(k_2)}(t)$.

При практической реализации полученных формул (9), (10), (11) можно использовать численные и аналитические методы вычисления сверток и функций восстановления, рассмотренные в [1; 11]. Также отметим, что полученные формулы дают возможность изучать свойства функции затрат и рассматривать различные оптимизационные задачи по стратегиям проведения процесса восстановления в терминах «цена», «качество», «риск». Если, например, за качество принимать среднее число отказов, за цену – среднюю стоимость восстановлений, за риск – дисперсии числа отказов или стоимости восстановлений [1; 12–15].

Данная работа является продолжением работы [11]. Можно отметить, что теоремы об асимптотическом поведении функции затрат, полученные в [11], значительно проще получаются с использованием полученной формулы представления функции затрат (9).

Функция затрат при простом процессе восстановления с экспоненциальным распределением

Рассмотрим процесс восстановления, у которого изменяются только стоимости восстановлений c_i по закону $c_i = c_j$, если индексы $i, j \geq k_1$ при делении на k_2 дают одинаковые остатки. Это соответствует распространенному случаю, когда при отказах происходят полные восстановления, но стоимости восстановлений изменяются, например, изменяется только цена элемента.

Пусть наработки элементов распределены по экспоненциальному закону $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$. Для этого случая получим расчетные формулы для вычисления функции затрат.

Учитывая, что n-кратная свертка функций распределения независимых случайных величин является функцией распределения их суммы и распределение Эрланга порядка n является распределением суммы n случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону, заключаем, что для рассматриваемого случая

$$F^{(n)}(t) = F_{e,n}(t) = 1 - e^{-\alpha t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\alpha t)^i}{i!}, \quad dF^{(n)}(x) = dF_{e,n}(x) = e^{-\alpha x} \alpha \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!} dx,$$

$$\Phi^{(k_2)}(t) = F_{e,k_2}(t),\ H\Phi^{(k_2)}(t) = HF_{e,k_2}(t),$$

$F_{e,n}(t)-$ распределение Эрланга порядка n и [1; 6]

$$HF_{e,k_2}(t) = \frac{1}{k_2}(\alpha t + \sum_{k=1}^{k_2-1} 1\frac{c^k}{1-c^k}\left(\quad -e^{-\alpha t\left(1-c^k\right)}\right),\ c = e^{\frac{2\pi}{k_2}i} = \cos\left(\frac{2\pi}{k_2}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{k_2}\right), \quad (12)$$

$$HF_{e,k_2}(t) = \frac{1}{k_2}\left(\alpha t - \frac{k_2-1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k_2-1}.\frac{e^{-\alpha t\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{k_2}k\right)\right)}\sin\left(\alpha t\sin\left(\frac{2\pi}{k_2}k\right) + \frac{\pi}{k_2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{k_2}k\right)}\right).$$

Теперь, в соответствии с (11)

$$S(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n F_{e,n}(t) + \sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1} c_n \frac{\alpha^n}{(n-1)!}\int_0^t HF_{e,k_2}(t-x)e^{-\alpha x}x^{n-1}dx\,. \quad (13)$$

Учитывая (12), интегралы, входящие в формулу (13) при вычислении $S(t)$, вычисляются в явном виде. Так [16]

$$\int (e^{\beta x}x^n dx = \frac{e^{\beta t}}{\beta}(t^n + \sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^j \frac{n(n-1)...(n-j+1)}{\beta^j}t^{n-j}\right) + C.$$

Подставляя

$$I(\beta,n)(t) = \int_0^t (e^{\beta x}x^n dx = \frac{e^{\beta t}}{\beta}\ \ t^n + \sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^j \frac{n(n-1)...(n-j+1)}{\beta^j}t^{n-j}\right) + (-1)^{n+1}\frac{n!}{\beta^{n+1}}$$

в (13), получаем

$$S(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_n F_{e,n}(t) +$$

$$+\frac{1}{k_2}\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1}(\ c_n\frac{\alpha^n}{(n-1)!}(\alpha t I(-\alpha,n-1)(t) - \alpha I(-\alpha,n)(t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{k_2-1},\frac{c^k}{1-c^k}\left(I(-\alpha\ \ n-1)(t) - e^{-\alpha\left(1-c^k\right)t}I\left(-\alpha c^k, n-1\right)(t)\right)). \quad (14)$$

Выделяем действительную часть в (14):

$$1-c^k = -2ie^{\frac{\pi k}{k_2}i}\sin\left(\frac{\pi k}{k_2}\right),\ \sum_{k=1}^{k_2-1},\frac{c^k}{1-c^k} = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{k_2-1} ctg\left(\frac{\pi}{k_2}k\right) - \frac{k_2-1}{2}$$

$$Re\sum_{k=1}^{k_2-1},\frac{c^k}{1-c^k} = Re\sum_{k=1}^{k_2-1}\frac{e^{\frac{2\pi k i}{k_2}}e^{-\frac{\pi k i}{k_2}}}{-2i\sin\frac{\pi k}{k_2}} = \frac{1-k_2}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{k_2-1},\frac{c^k}{1-c^k}e^{-\alpha\left(1-c^k\right)t}I\left(-\alpha c^k\ \ n-1\right)(t)) =$$

$$=\sum_{k=1}^{k_2-1}\Big(\frac{c^k}{1-c^k}e^{-\alpha\left(1-c^k\right)t}\ \frac{e^{-\alpha c^k t}}{-\alpha c^k}\big(t^{n-1}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}1\left(-\ \right)^j\frac{(n-1)...(n-j)}{(-\alpha)^j c^{kj}}t^{n-1-j}\right)+\left(-1)^n\frac{(n-1)!}{(-\alpha)^n c^{kn}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{k_2-1}\frac{e^{-\alpha t}}{1-c^k}\left(t^{n-1}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-1)\ldots(n-j)}{\alpha^j}e^{-\frac{2\pi i}{k_2}kj}t^{n-1-j}\right)+$$

$$+\frac{(n-1)!}{\alpha^n}\sum_{k=1}^{k_2-1}\frac{c^{-k(n-1)}e^{-\alpha\left(1-c^k\right)t}}{1-c^k}=$$

$$=-\frac{i}{2\alpha}\sum_{k=1}^{k_2-1}\frac{e^{-\alpha t}e^{-\frac{\pi k}{k_2}i}}{sin\frac{\pi k}{k_2}}\left(t^{n-1}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-1)...(n-j)}{\alpha^j}e^{-\frac{2\pi i}{k_2}kj}t^{n-1-j}\right)+$$

$$+\frac{(n-1)!i}{2\alpha^n}\sum_{k=1}^{k_2-1}\frac{e^{-\frac{\pi k}{k_2}i}}{sin\frac{\pi k}{k_2}}e^{-\frac{2\pi k(n-1)}{k_2}i}e^{-\alpha t}e^{\alpha t cos\frac{2\pi k}{k_2}}e^{\alpha t sin\frac{2\pi k}{k_2}i}=$$

$$=-\frac{i}{2\alpha}\sum_{k=1}^{k_2-1}\frac{e^{-\alpha t}e^{-\frac{\pi k}{k_2}i}}{sin\frac{\pi k}{k_2}}\left(t^{n-1}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-1)...(n-j)}{\alpha^j}e^{-\frac{2\pi i}{k_2}kj}t^{n-1-j}\right)+$$

$$+\frac{(n-1)!i}{2\alpha^n}\sum_{k=1}^{k_2-1}.\frac{e^{-\alpha t\left(1-\cos\frac{2\pi k}{k_2}\right)}e^{\left(\alpha t\sin\frac{2\pi k}{k_2}-\frac{\pi k(2n-1)}{k_2}\right)i}}{\sin\frac{\pi k}{k_2}}\ .$$

Отсюда

$$Re\left(\sum_{k=1}^{k_2-1},\frac{c^k}{1-c^k}e^{-\alpha\left(1-c^k\right)t}I\left(-\alpha c^k\ \ n-1\right)(t)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\alpha}\sum_{k=1}^{k_2-1}\text{в}^{-\alpha t}t^{n-1}-\frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha}\sum_{k=1}^{k_2-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi k}{k_2}\right)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-1)...(n-j)}{\alpha^j}\ \text{in}\left(\frac{\pi k(2j+1)}{k_2}\right)t^{n-1-j}-$$

$$-\frac{(n-1)!}{2\alpha^n}\sum_{k=1}^{k_2-1}.\frac{e^{-\alpha t\left(1-\cos\left(\frac{2\pi k}{k_2}\right)\right)}\sin\left(\alpha t\sin\left(\frac{2\pi k}{k_2}\right)-\frac{\pi k(2n-1)}{k_2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{k_2}\right)}\ .$$

Запишем формулу функции затрат

$$S(t)=c_0+\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}c_nF_{e,n}(t)+$$

$$+\frac{1}{k_2}\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1}\Big(\frac{\alpha^n}{(n-1)!}\left(\alpha t+\frac{1-k_2}{2}\right)I(-\alpha,n-1)(t)-\alpha I(-\alpha,n)(t)+$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\sum_{k=1}^{k_2-1}\Big(e^{-\alpha t}t^{n-1}+\frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha}\sum_{k=1}^{k_2-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi k}{k_2}\right)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-1)\ldots(n-j)}{\alpha^j}\sin\left(\frac{\pi k(2j+1)}{k_2}\right)t^{n-1-j}+$$

$$+\frac{(n-1)!}{2\alpha^n}\sum_{k=1}^{k_2-1}\Big)\frac{e^{-\alpha t\left(1-cos\left(\frac{2\pi k}{k_2}\right)\right)}\sin\left(\alpha t\sin\left(\frac{2\pi k}{k_2}\right)+\frac{\pi k(2n-1)}{k_2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{k_2}\right)}.$$

Рассмотрим еще функцию затрат при процессе восстановления порядка (k_1,k_2), когда все наработки периодической части процесса распределены по закону Эрланга порядка m с параметром α.

Пусть $\Phi_j(t)=F_{e,m,\alpha}(t)$. Найдем $H\Phi^{(k_2)}(t)$. Запишем интегральные уравнения для $HF_{e,m,\alpha}(t)$, $H\Phi^{(k_2)}(t)$

$$HF_{e,m,\alpha}(t)=F_{e,m,\alpha}(t)+\int_0^t HF_{e,m,\alpha}(t-x)\,dF_{e,m,\alpha}(x), \tag{15}$$

$$H\Phi^{(k_2)}(t)=\Phi^{(k_2)}(t)+\int_0^t H\Phi^{(k_2)}(t-x)\,d\Phi^{(k_2)}(x). \tag{16}$$

Пусть

$$F^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(x)$$

Преобразование Лапласа – Стилтьеса функции $F(x)$ [1; 6]. Учитывая $F^*_{e,m,\alpha}(s)=(\frac{\alpha}{s+\alpha})^m$, $(F_i*F_j)^*(s)=F_i^*(s)F_j^*(s)$, из (15), (16) получаем

$$H^*F_{e,m,\alpha}(s)=(\frac{\alpha}{s+\alpha})^m+H^*F_{e,m,\alpha}(s)(\frac{\alpha}{s+\alpha})^m, \tag{17}$$

$$H^*\Phi^{(k_2)}(s)=(\frac{\alpha}{s+\alpha})^{mk_2}+H^*\Phi^{(k_2)}(s)(\frac{\alpha}{s+\alpha})^{mk_2}. \tag{18}$$

Сравнивая (17), (18), заключаем, что

$$H\Phi^{(k_2)}(t)=HF_{e,mk_2,\alpha}(t).$$

Получили, что функция восстановления простого процесса восстановления, образованного k_2 кратной сверткой распределений Эрланга порядка m с параметром α, является функцией восстановления простого процесса восстановления, образованного распределением Эрланга порядка mk_2 с тем же параметром α.

Имеем

$$HF_{e,mk_2,\alpha}(t)=\frac{1}{mk_2}(\alpha t+\sum_{k=1}^{mk_2-1}\Big(\frac{c^k}{1-c^k}\left(\;-e^{-\alpha t\left(1-c^k\right)}\right),$$

$$c=e^{\frac{2\pi}{mk_2}i}=\cos\left(\frac{2\pi}{mk_2}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{mk_2}\right),$$

$$HF_{e,mk_2,\alpha}(t)=\frac{1}{mk_2}\left(\alpha t-\frac{mk_2-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{mk_2-1}.\frac{e^{-\alpha t\left(1-cos\left(\frac{2\pi}{mk_2}k\right)\right)}\sin\left(\alpha t\sin\left(\frac{2\pi}{mk_2}k\right)+\frac{\pi}{mk_2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{mk_2}k\right)}\right).$$

Теперь в соответствии с (11)

$$S(t)=c_0+\sum_{n=1}^{k_1-1}c_nF^{(n)}(t)+\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1}c_n\int_0^t F^{(k_1-1)}(t-x)dF_{e,mn,\alpha}(x)+$$

$$+\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1}c_n\int_0^t HF_{e,mk_2,\alpha}(t-x)e^{-\alpha x}\alpha\frac{(\alpha x)^{mn-1}}{(mn-1)!}dx\,. \qquad (19)$$

Интеграл

$$\int_0^t HF_{e,mk_2,\alpha}(t-x)e^{-\alpha x}\alpha\frac{(\alpha x)^{mn-1}}{(mn-1)!}dx$$

в (19) вычисляется аналогично предыдущему примеру с заменой k_2 на mk_2 и n на mn.

Еще отметим, если дополнительно $F_i(t)=F_{e,l,\beta}(t)$, $i=1,2,\ldots,k_1-1$, то $F^{(n)}(t)=F_{e,nl,\beta}(t)$, $n=1,2,\ldots,k_1-1$, и в соответствии с (19)

$$S(t)=c_0+\sum_{n=1}^{k_1-1}c_nF_{e,nl,\beta}(t)+\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1}c_n\int_0^t F_{e,(k_1-1)l,\beta}(t-x)dF_{e,mn,\alpha}(x)+$$

$$+\sum_{n=k_1}^{k_1+k_2-1}c_n\int_0^t HF_{e,mk_2,\alpha}(t-x)e^{-\alpha x}\alpha\frac{(\alpha x)^{mn-1}}{(mn-1)!}dx\,.$$

Заключение

Важнейшие показатели работы технических и многих других систем являются случайными величинами [17]. Это, например, время работы восстановленных элементов до отказа, число отказов и стоимость восстановления в процессе восстановления. В математической теории надежности при изучении процессов восстановления в первую очередь рассматриваются числовые характеристики этих величин, например, среднее и дисперсия числа отказов и стоимости восстановлений, через которые определяются различные критерии оптимальности стратегий восстановления.

Учитывая, что функция восстановления для рассматриваемой модели хорошо изучена, в работе получено решение интегрального уравнения для функции затрат через функцию восстановления простого процесса, задаваемого сверткой всех функций распределения периодической части. В качестве практического примера получены явные формулы функции затрат при процессе восстановления, у которого периодическая часть распределена по экспоненциальному закону или закону Эрланга порядка m с одним и тем же показателем α.

Отметим, что полученные формулы дают возможность изучать свойства функции затрат и рассматривать различные оптимизационные задачи в стратегиях проведения процесса восстановления в терминах «цена», «качество», «риск». Если, например, за качество принимать среднее число отказов, за цену – среднюю стоимость восстановлений, за риск – дисперсии числа отказов или стоимости восстановлений.

Еще отметим, что наряду с полученными формулами для вычисления функции затрат будут важны и предельные теоремы для стоимости восстановлений (как случайной величины), аналогичные для числа отказов [3], а также нахождение дисперсии стоимости восстановлений в рассматриваемых моделях.

Библиографические ссылки

1. Вайнштейн И. И. Процессы и стратегии восстановления с изменяющимися функциями распределения в теории надежности. Красноярск : СФУ, 2016. 189 с.

2. Шмидт О. О. Обобщенная модель процесса восстановления в теории надежности использования информационных технологий : дис. … канд. ф.-м. н. Красноярск. 2008. 125 с.

3. Булинская Е. В., Соколова А. И. Асимптотическое поведение некоторых стохастических систем хранения // Современные проблемы математики и механики. 2015. Т. 10, вып. 3. С. 37–62.

4. Боровков А. А. Обобщенные процессы восстановления. М. : РАН, 2020. 455 с.

5. Кокс Д. Р., Смит В. Л. Теория восстановления. М. : Советское радио. 1967. 300 с.

6. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. М. : Радио и связь, 1988. 189 с.

7. Боровков А. А. Теория вероятностей. М. : Либроком, 2009. 652 с.

8. Bulinskaya E. V. Limit theorems for generalized renewal processe // Theory of Probability and its Applications. 2018. Vol. 62, No. 1. P. 35–54.

9. Вайнштейн И. И., Вайнштейн В. И., Вейсов Е. А. О моделях процессов восстановления в теории надежности // Вопросы математического анализа : сб. науч. тр. Красноярск, 2003. С. 78–84.

10. Вайнштейн В. И., Вайнштейн И. И., Сафонов К. В. Асимптотика поведения средней стоимости восстановлений в моделях процессов восстановления // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, №4. С. 582–592.

11. Вайнштейн В. И. Функция восстановления при распределении элементов технических систем как смесь функций распределения // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 6. С. 48–49.

12. Вайнштейн В. И., Вайнштейн И. И. Дисперсия стоимости восстановлений и оптимизационные задачи в процессах восстановления технических и информационных систем // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021. Т. 9, № 2 (33) [Электронный ресурс]. URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=931. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.33.2.001.

13. Vainshtein V. I., Vainshtein I. I. Optimization problems in forming a mixture of distribution functions of operating times to failure of elements of technical systems // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2021. T. 50, № 3. C. 274–279.

14. Каштанов В. А., Медведев А. И. Теория надежности сложных систем. М. : Физматлит, 2010. 608 с.

15. Песчанский А. И. Полумарковские модели профилактики ненадежной одноканальной системы обслуживания с потерями. Сер. Научная мысль, 2022. 267 с.

16. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963. 1108 с.

17. Надежность технических систем / Е. В. Сугак, Н. В. Василенко, Г. Г. Назаров и др. Красноярск : МГП «Раско», 2001. 608 с.

References

1. Vainshtein I. I. *Protsessy i strategii vosstanovleniia s izmeniaiushchimisia funktsiiami raspredeleniia v teorii nadezhnosti* [Processes and recovery strategies with changing distribution functions in reliability theory]. Krasnoiarsk, 2016, 189 p.

2. Shmidt O. O. *Obobshchennaia model' protsessa vosstanovleniia v teorii nadezhnosti ispol'zovaniia informatsionnykh teznologii. Dis. kand.* [Generalized model of the recovery process in the theory of reliability of using information technologies. Diss. cand.]. Krasnoiarsk. 2008. 125 c.

3. Bulinskaya E. V., Sokolova A. I. [Asymptotic behavior of some stochastic storage systems]. *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki*. 2015, Vol. 10, No. 3, P. 37–62 (In Russ.).

4. Borovkov A. A. *Obobshchennye protsessy vosstanovleniia* [Generalized recovery processes]. Moscow, RAS Publ., 2020, 455 p.

5. Cox D. R., Smith V. L. *Teoriia vosstanovleniia* [Theory of restoration]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1967, 189 p.

6. Baikhel't F., Franken P. *Nadezhnost' i tekhnicheskoe obsluzhivanie. Matematicheskii podkhod* [Reliability and maintenance. Mathematical approach]. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1988, 189 p.

7. Borovkov A. A. *Teoriia veroiatnostei* [Theory of Probability]. Moscow, Librocom Publ., 2009, 652 p.

8. Bulinskaya E. V. Limit theorems for generalized renewal processe. *Theory of Probability and its Applications.* 2018, Vol. 62, No. 1, P. 35–54.

9. Vainshtein I. I., Vainshtein V. I., Veysov E. A. [On models of recovery processes in reliability theory]. *Voprosy matematicheskogo analiza. Sbornik nauchnykh trudov*. Krasnoiarsk, 2003, P. 78–84 (In Russ.).

10. Vainshtein V. I., Vainshtein I. I., Safonov K. V. [Asymptotic behavior of the average cost of restoration in models of restoration processes]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 4. P. 582–592 (In Russ.).

11. Vainshtein V. I. [Reconstruction function for the distribution of elements of technical systems as a mixture of distribution functions]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*. 2018, No. 6, P. 48–49 (In Russ.).

12. Vainshtein V. I. [Modeling, optimization and information technologies]. *Modelirovanie, optimizatsiia i informatsionnye tekhnologii*. 2021, Vol. 9, No. 2(33). Available at: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=931. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.33.2.001 (In Russ.).

13. Vainshtein V. I., Vainshtein I. I. Optimization problems in forming a mixture of distribution functions of operating times to failure of elements of technical systems. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2021, Vol. 50, No. 3, P. 274–279.

14. Kashtanov V. A., Medvedev A. I. *Teoriia nadezhnosti slozhnykh sistem* [Theory of reliability of complex systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 608 p.

15. Peschanskii A. I. *Polumarkovskie modeli profilaktiki nenadezhnoi odnokanal'noi sistemy obsluzhivaniia s poteriami* [Semi-Markov models for the prevention of an unreliable single-channel service system with losses]. 2022, 267 p.

16. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, 1963, 1108 p.

17. Sugak E. V. et al. *Nadezhnost' tekhnicheskikh sistem* [Reliability of technical systems]. Krasnoiarsk, Rasko Publ., 2001, 608 p.

Вайнштейн Виталий Исаакович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информационной безопасности; Сибирский федеральный университет. E-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru.

Вайнштейн Исаак Иосифович – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры ПМиКБ; Сибирский федеральный университет. E-mail: isvain@mail.ru.

Сафонов Константин Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: safonovkv@rambler.ru.

Vainshtein Vitaly Isaakovich – Cand. Sc., associate professor, Head of the Department of Information Security; Siberian Federal University. E-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru.

Vainshtein Isaak Iosifovich – Cand. Sc., professor, Department of Applied Mathematics and Computer Security; Siberian Federal University. E-mail: isvain@mail.ru.

Safonov Konstantin Vladimirovich – Dr. Sc., Associate Professor, Head of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: safonovkv@rambler.ru.