УДК 519.6
Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-4-673-680

Для цитирования: Кузнецов А. А., Кузнецова А. С., Кишкан В. В. Алгоритм быстрого умножения элементов в 2-группах на основе полиномов Жегалкина // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24, № 4. С. 673–680. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-4-673-680.

For citation: Kuznetsov A. A., Kuznetsova A. S., Kishkan V. V. [An algorithm for fast multiplication of elements in 2-groups based on the Zhegalkin polynomials]. *Siberian Aerospace Journal.* 2023, Vol. 24, No. 4, P. 673–680. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-4-673-680.

Алгоритм быстрого умножения элементов в 2-группах на основе полиномов Жегалкина

А. А. Кузнецов*, А. С. Кузнецова, В. В. Кишкан

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31
*E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru

Проектирование сети многопроцессорной вычислительной системы или дата-центра представляет собой важную проблему, в рамках которой осуществляется поиск моделей графов, обладающих привлекательными топологическими свойствами и позволяющих применять эффективные алгоритмы маршрутизации. Указанными свойствами, в частности такими, как высокая симметрия, иерархическая структура, рекурсивная конструкция, высокая связность и отказоустойчивость, обладают графы Кэли. Например, такие базовые топологии сети, как «кольцо», «гиперкуб» и «тор», являются графами Кэли.

Определение графа Кэли подразумевает, что вершины графа являются элементами некоторой алгебраической группы. Выбор группы и ее порождающих элементов позволяет получить граф, отвечающий необходимым требованиям по диаметру, степени вершин, количеству узлов и т. д. Решению данной задачи посвящено большое количество научных статей и монографий.

Для исследования графов Кэли, в первую очередь, необходимо разработать быстрые алгоритмы умножения элементов в данных группах. Такие алгоритмы помогают осуществлять эффективную маршрутизацию на соответствующих графах Кэли.

Цель настоящей работы – создать алгоритм быстрого умножения элементов в конечных 2-*группах, т. е. в группах периода* 2^n.

В первом разделе статьи дано теоретическое обоснование алгоритма. Показано, что элементы данных групп могут быть представлены в виде битовых строк, а их умножение осуществляется на основе полиномов Жегалкина.

Во втором разделе представлен псевдокод алгоритма, на основе которого вычисляются полиномы Жегалкина. На первом этапе алгоритма вычисляется pc-представление группы, на основе которого получают полиномы Холла. На заключительном этапе полиномы Холла преобразуются в полиномы Жегалкина.

В третьем разделе продемонстрирован пример получения полиномов Жегалкина для двупорожденой группы периода 4.

В заключении рассматриваются перспективы применения алгоритма на реальных вычислительных устройствах. Отмечается, что предложенное представление элементов группы в форме битовых векторов позволяет применять их даже на самых примитивных микроконтроллерах.

Ключевые слова: 2-*группа, граф Кэли, полином Жегалкина.*

An algorithm for fast multiplication of elements in 2-groups based on the Zhegalkin polynomials

A. A. Kuznetsov*, A. S. Kuznetsova, V. V. Kishkan

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
*E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru

Network design for a multiprocessor computing system or data center is an important problem where the search for graph models that have attractive topological properties and allow the use of efficient routing algorithms is carried out. Cayley graphs have the indicated properties, in particular such as high symmetry, hierarchical structure, recursive design, high connectivity and fault tolerance.

The definition of the Cayley graph implies that the vertices of the graph are elements of some algebraic group. Selecting a group and its generating elements allows us to obtain a graph that meets the necessary requirements for diameter, degree of vertices, number of nodes, etc. A large number of scientific articles and monographs are devoted to solving this problem.

The goal of this work is to create an algorithm for fast multiplication of elements in finite 2-groups whose exponent is 2^n.

The first section of the article provides a theoretical justification for the algorithm for fast multiplication in finite 2-groups. It is shown that elements of these groups can be represented in the form of bit strings, and their multiplication is carried out based on the Zhegalkin polynomials.

The second section presents the pseudocode of the algorithm on the basis of which the Zhegalkin polynomials are calculated.

The third section demonstrates an example of obtaining the Zhegalkin polynomials for a two-generated group of exponent 4.

In conclusion, the prospects for using the algorithm on the real hardware are discussed.

Keywords: 2-group, the Cayley graph, the Zhegalkin polynomial.

Введение

Проектирование сети многопроцессорной вычислительной системы (МВС) или дата-центра представляет собой важную проблему, в рамках которой осуществляется поиск моделей графов, обладающих привлекательными топологическими свойствами и позволяющих применять эффективные алгоритмы маршрутизации. Указанными свойствами, в частности такими, как высокая симметрия, иерархическая структура, рекурсивная конструкция, высокая связность и отказоустойчивость, обладают графы Кэли [1]. Например, такие базовые топологии сети, как «кольцо», «гиперкуб» и «тор», являются графами Кэли.

Определение графа Кэли подразумевает, что вершины графа являются элементами некоторой алгебраической группы. Выбор группы и ее порождающих элементов позволяет получить граф [2], отвечающий необходимым требованиям по диаметру, степени вершин, количеству узлов и т. д. Решению данной задачи посвящено большое количество научных статей и монографий, среди которых выделим работы [3–15].

Как было сказано, одной из широко применяемых топологий МВС является k-мерный гиперкуб. Данный граф задается k-порожденной бернсайдовой группой периода 2. Данная группа имеет простую структуру и равна прямому произведению k экземпляров циклической группы порядка 2. Обобщением гиперкуба является n-мерный тор, который порождается прямым произведением n экземпляров циклических подгрупп, порядки которых могут не совпадать. В статьях [16–19] изучаются графы Кэли бернсайдовых групп периода 3, 4, 5 и 7.

Для исследования графов Кэли, порожденных группами бо̀льших периодов, в первую очередь необходимо разработать быстрые алгоритмы умножения элементов в данных группах.

Такие алгоритмы помогают осуществлять эффективную маршрутизацию на соответствующих графах Кэли.

Цель настоящей работы – создать алгоритм быстрого умножения элементов в конечных 2-группах, т. е. в группах периода 2^n.

В первом разделе статьи дано теоретическое обоснование алгоритма быстрого умножения в конечных 2-группах. Показано, что элементы данных групп могут быть представлены в виде битовых строк, а их умножение осуществляется на основе полиномов Жегалкина.

Во втором разделе представлен псевдокод алгоритма, на основе которого вычисляются полиномы Жегалкина.

В третьем разделе продемонстрирован пример получения полиномов Жегалкина для двупорожденой группы периода 4.

В заключении рассматриваются перспективы применения алгоритма на реальных вычислительных устройствах.

1. Доказательство основного результата

Теорема. *Пусть G – произвольная конечная группа 2-группа, порядок которой равен* 2^n*. Тогда будут верны следующие утверждения:*

1. $\forall x \in G \Rightarrow x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}_2^n$.
2. $\forall x, y, z \in G: x \cdot y = z \Rightarrow z_i = f_i(x, y) \in \mathbb{Z}_2$*, где* $f_i(x, y)$ *– некоторые полиномы Жегалкина.*

Доказательство. Любая конечная 2-группа G имеет pc-представление (power commutator presentation [3; 4]):

$$G = \{a_1, \ldots, a_n \mid a_i^2 = v_{ii}, 1 \le i \le n, [a_k, a_j] = v_{jk}, 1 \le j < k \le n\},$$

где слово v_{jk} при $1 \le j \le k \le n$ выражается через $a_{k+1}, \ldots, a_n$ следующим образом:

$$v_{jk} = a_{k+1}^{x_{k+1}} \ldots a_n^{x_n}, \; x_i \in \mathbb{Z}_2.$$

В этом случае

$$\forall x \in G \Rightarrow x = a_1^{x_1} \ldots a_n^{x_n}, \; x_i \in \mathbb{Z}_2.$$

Каждый элемент группы x единственным образом задается через степени $x_1, \ldots, x_n$, поэтому мы можем записывать элементы группы следующим образом:

$$\forall x \in G \Rightarrow x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}_2^n.$$

Таким образом, мы можем естественным образом представлять элементы группы в виде булевых (битовых) векторов размерности n.

Пусть $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ – два произвольных элемента группы G, рассмотрим их произведение $x \cdot y = z = (z_1, ..., z_n)$.

Вычисление степеней z_i традиционно осуществляется на основе собирательного процесса Холла [3; 4]. Однако существует более эффективный способ умножения элементов, основанный на полиномах Холла [20]. В этом случае

$$z_i = x_i + y_i + p_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_{i-1}), \; x_i, y_i, z_i \in \mathbb{Z}_2.$$

Заметим, что операции умножения и сложения в поле $\mathbb{Z}_2$ тождественны булевым операциям «и», а также исключающему «или» соответственно. Произведя указанную замену операций в полиномах Холла, мы получим полиномы Жегалкина [21]. Таким образом,

$$\forall x, y, z \in G: x \cdot y = z \Rightarrow z_i = f_i(x, y) \in \mathbb{Z}_2,$$

где $f_i(x, y)$ – некоторые полиномы Жегалкина. ■

2. Алгоритм вычисления полиномов Жегалкина

В данном разделе рассмотрен алгоритм вычисления полиномов Жегалкина для конечной 2-группы *G*. Алгоритму на входе известны такие параметры группы, как число порождающих элементов, порядок *G* и её период. Также в качестве входного аргумента может фигурировать ступень нильпотентности группы.

Ниже приведен псевдокод алгоритма.

Вход: *G – конечная группа 2-группа G*

Выход: *полиномы Жегалкина для группы G*

1. $pc = \mathrm{pq}(G)$ – вычисляем pc-представление группы при помощи *p*-quotient алгоритма [3, 4]. Заметим, что данный алгоритм уже реализован в таких системах компьютерной алгебры, как GAP и Magma.

2. $H = \mathrm{Hall}(pc)$ – на основе pc-представления вычисляем полиномы Холла при помощи алгоритма из [22].

3. $F = \mathrm{Zhegalkin}(H)$ – получаем полиномы Жегалкина из полиномов Холла путем замены операции умножения и сложения в поле $\square_2$ тождественными булевыми операциям «и», а также исключающему «или» соответственно.

3. Пример

В качестве примера рассмотрим максимальную двупорожденную конечную группу $G = \langle a_1, a_2 \rangle$ периода $2^2 = 4$, которую обычно обозначают $B(2,4)$ или $B_2(4)$. Порядок данной группы равен 2^{12}, и для каждого элемента из *G* существует уникальное pc-представление вида $a_1^{x_1} \ldots a_{12}^{x_{12}}$, где $x_i \in \square_2$, $i = 1,2,\ldots,12$. Здесь a_1 и a_2 – порождающие элементы G, $a_3 \ldots, a_{12}$ вычисляются рекурсивно через a_1 и a_2.

Получим в системе компьютерной алгебры GAP pc-представление данной группы.

Для краткости тривиальные коммутаторные соотношения не приводятся (например, такое, как $[a_4, a_1] = 1$ и др.).

$a_1^2 = a_4$, $a_2^2 = a_5$, $a_3^2 = a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$, $a_4^2 = 1$, $a_5^2 = 1$, $a_6^2 = a_{11}$, $a_7^2 = a_{11} a_{12}$, $a_i^2 = 1 \quad (8 \le i \le 12)$, $[a_3, a_1] = a_6$, $[a_3, a_2] = a_7$, $[a_4, a_2] = a_6 a_8 a_9 a_{10} a_{12}$, $[a_4, a_3] = a_8 a_{11}$, $[a_5, a_1] = a_7 a_8 a_9 a_{10}$, $[a_5, a_3] = a_{10} a_{11} a_{12}$, $[a_5, a_4] = a_9 a_{11}$, $[a_6, a_1] = a_8$, $[a_6, a_2] = a_9$, $[a_6, a_3] = a_{11}$, $[a_6, a_4] = a_{11}$, $[a_6, a_5] = a_{11}$, $[a_7, a_1] = a_9 a_{12}$, $[a_7, a_2] = a_{10}$, $[a_7, a_3] = a_{11} a_{12}$, $[a_7, a_4] = a_{11} a_{12}$, $[a_7, a_5] = a_{11} a_{12}$, $[a_8, a_1] = a_{11}$, $[a_8, a_2] = a_{12}$, $[a_9, a_1] = a_{11} a_{12}$, $[a_9, a_2] = a_{11}$, $[a_{10}, a_1] = a_{12}$, $[a_{10}, a_2] = a_{11} a_{12}$.

Вычислим полиномы Холла группы *G* для порождающих элементов a_1 и a_2 на основе алгоритма из [22]:

1) $a_1 \cdot a_1^{y_1} \ldots a_{12}^{y_{12}} = a_1^{z_1} \ldots a_{12}^{z_{12}}$, где

$z_1 = y_1 + 1,$

$z_2 = y_2,$

$z_3 = y_3,$

$z_4 = y_1 + y_4,$

$z_5 = y_5,$

$z_6 = y_6 + y_1 y_2,$

$z_7 = y_7,$

$z_8 = y_8 + y_1 y_2 + y_1 y_3,$

$z_9 = y_9 + y_1 y_2$,

$z_{10} = y_{10} + y_1 y_2$,

$z_{11} = y_{11} + y_1 y_3 + y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_5 + y_1 y_2 y_6$,

$z_{12} = y_{12} + y_1 y_2$;

2) $a_2 \cdot a_1^{y_1} \ldots a_{12}^{y_{12}} = a_1^{z_1} \ldots a_{12}^{z_{12}}$, где

$z_1 = y_1$,

$z_2 = y_2 + 1$,

$z_3 = y_1 + y_3$,

$z_4 = y_4$,

$z_5 = y_2 + y_5$,

$z_6 = y_6$,

$z_7 = y_7 + y_1 y_2$,

$z_8 = y_8 + y_1 y_3$,

$z_9 = y_9 + y_1 y_3 + y_2 y_4$,

$z_{10} = y_{10} + y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3$,

$z_{11} = y_{11} + y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 + y_2 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_5 + y_1 y_2 y_7$,

$z_{12} = y_{12} + y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 + y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_5 + y_1 y_2 y_7$.

Заменим операции умножения и сложения булевым операциями «и», а также исключающему «или» соответственно. В результате получим полиномы Жегалкина.

Каждый элемент группы представляет собой битовую строку $(z_1, z_2, \ldots, z_{12})$. Таким образом, для кодирования одного элемента в $B(2,4)$ потребуется 12 бит. В общем случае, если порядок группы равен 2^n, то для хранения одного элемента потребуется *n* бит.

Заключение

В заключение скажем, что в задачах, требующих вычисления большого количества произведений элементов группы, описанный в работе метод позволит кардинально уменьшить время работы компьютерных программ. Например, одной из таких проблем является задача поиска кратчайших маршрутов на графах Кэли, которые часто применяются при проектировании топологий для сетей межпроцессорного соединения в суперкомпьютерах, а также дата-центрах.

Кроме того, следует отметить, что предложенное представление элементов группы в форме битовых векторов позволяет применять их даже на самых примитивных микроконтроллерах.

Библиографические ссылки

1. Heydemann M. Cayley graphs and interconnection networks, in Graph symmetry: algebraic methods and applications (Editors: Hahnand Sabidussi) // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1997. P. 167–226.

2. Loz E. New record graphs in the degree-diameter problem // Australasian Journal of Combinatorics. 2008. Vol. 41. P. 63–80.

3. Sims C. Computation with Finitely Presented Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 628 p.

4. Holt D., Eick B., O'Brien E. Handbook of computational group theory. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2005. 514 p.

5. Schibell S., Stafford R. Processor interconnection networks and Cayley graphs // Discrete Applied Mathematics. 1992. Vol. 40. P. 337–357.

6. Stamoulis G., Tsitsiklis J. Effcient routing Scheme for Multiple Broadcasts in Hypercubes // IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems. 1993. Vol. 4(7). P. 725–739.

7. Stamoulis G., Tsitsiklis J. The Effciency of Greedy Routing in Hypercubes and Butteries // IEEE Transaction on Communication. 1994. Vol. 42(11). P. 3051–3061.

8. Kiasari A., Sarbazi-Azad H. Analytic performance comparison of hypercubes and star graphs with implementation constraints // Journal of Computer and System Sciences. 2008. No. 6. P. 1000–1012.

9. Akers S., Krishnamurthy B. A group theoretic model for symmetric interconnection networks // Proceedings of the International Conference on Parallel Processing. 1986. P. 216–223.

10. Tang K., Arden B. Vertex-transitivity and routing for Cayley graphs in GCR representations // Proceedings of ACM Symposium on Applied Computing SAC. 1992. P. 1180–1187.

11. Wang L., Tang K. Topology-Based Routing for Xmesh in Wireless Sensor Networks // Lecture Notes in Electrical Engineering. 2009. Vol. 44. P. 229–239.

12. Ryu J., Noel E., Tang K. Fault-tolerant Routing on Borel Cayley Graph // IEEE ICC Next Generation Networking Symposium. 2012. P. 2872–2877.

13. On the feasibility of completely wireless datacenters / J. Shin, E. Sirer, H. Weatherspoon, D. Kirovski // EEE/ACM Transaction On Networking. 2013. Vol. 21(5). P. 1666–1679.

14. Кузнецов А. А., Кузнецова А. С. Параллельный алгоритм для исследования графов Кэли групп подстановок // Вестник СибГАУ. 2014. № 1(53). С. 34–39.

15. Efficient Routing in Data Center with Underlying Cayley Graph / M. Camelo, D. Papadimitriou, L. Fabrega, P. Vila // Proceedings of the 5th Workshop on Complex Networks CompleNet. 2014. P. 189–197.

16. Кузнецов А. А. Графы Кэли бернсайдовых групп периода 3 // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. С. 248–254.

17. Кузнецов А. А., Кузнецова А. С Перспективные топологии многопроцессорных вычислительных систем, основанные на графах Кэли, заданных группами периода 4 // Вестник СибГАУ. 2016. № 3(17). С. 575–578.

18. Кузнецов А. А. Об одном алгоритме вычисления функций роста в конечных двупорожденных группах периода пять // Прикладная дискретная математика. 2016. № 3(33). С. 116–125.

19. Kuznetsov A. A., Kishkan V. V. The Cayley graphs of finite two-generator burnside groups of exponent 7 // Siberian Journal of Science and Technology. 2018. № 2. P. 217–222.

20. Hall P. Nilpotent groups, Notes of lectures given at the Canadian Mathematical Congress 1957 Summer Seminar, in The collected works of Philip Hall. Oxford: Clarendon Press, 1988. P. 415–462.

21. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М. : Наука, 1986. 384 с.

22. Кузнецов А. А., Кузнецова А. С. Быстрое умножение элементов в конечных двупорожденных группах периода пять // Прикладная дискретная математика. 2013. № 1 (18). С. 110–116.

References

1. Heydemann M. Cayley graphs and interconnection networks, in Graph symmetry: algebraic methods and applications (Editors: Hahnand Sabidussi). *Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*. 1997, P. 167–226.

2. Loz E. New record graphs in the degree-diameter problem. *Australasian Journal of Combinatorics*. 2008, Vol. 41, P.63–80.

3. Sims C. Computation with Finitely Presented Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1994, 628 p.

4. Holt D., Eick B., O'Brien E. *Handbook of computational group theory*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2005, 514 p.

5. Schibell S., Stafford R. Processor interconnection networks and Cayley graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1992, Vol. 40, P. 337–357.

6. Stamoulis G., Tsitsiklis J. Effcient routing Scheme for Multiple Broadcasts in Hypercubes. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems.* 1993, Vol. 4(7), P. 725–739.

7. Stamoulis G., Tsitsiklis J. The Effciency of Greedy Routing in Hypercubes and Butteries. *IEEE Transaction on Communication*. 1994, Vol. 42(11), P. 3051–3061.

8. Kiasari A., Sarbazi-Azad H. Analytic performance comparison of hypercubes and star graphs with implementation constraints. *Journal of Computer and System Sciences*. 2008, No. 6, P. 1000–1012.

9. Akers S., Krishnamurthy B. A group theoretic model for symmetric interconnection networks. *Proceedings of the International Conference on Parallel Processing*. 1986, P. 216–223.

10. Tang K., Arden B. Vertex-transitivity and routing for Cayley graphs in GCR representations. *Proceedings of ACM Symposium on Applied Computing SAC*. 1992, P. 1180–1187.

11. Wang L., Tang K. Topology-Based Routing for Xmesh in Wireless Sensor Networks. *Lecture Notes in Electrical Engineering*. 2009. Vol.44. P. 229–239.

12. Ryu J., Noel E., and Tang K. Fault-tolerant Routing on Borel Cayley Graph // *IEEE ICC Next Generation Networking Symposium*. 2012, P. 2872–2877.

13. Shin J., Sirer E., Weatherspoon H., Kirovski D. On the feasibility of completely wireless datacenters. *EEE/ACM Transaction On Networking*. 2013, Vol. 21(5), P. 1666–1679.

14. Kuznetsov A. A., Kuznetsova A. S. [A parallel algorithm for study of the Cayley graphs of permutation groups]. *Vestnik SibGAU*. 2014, No. 1(53), P. 34–39 (In Russ.).

15. Camelo M., Papadimitriou D., Fabrega L., Vila P. Efficient Routing in Data Center with Underlying Cayley Graph. *Proceedings of the 5th Workshop on Complex Networks CompleNet*. 2014. P. 189–197.

16. Kuznetsov A. A. [The Cayley graphs of Burnside groups of exponent 3]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2015, Vol. 12, P. 248–254 (In Russ.).

17. Kuznetsov A. A., Kuznetsova A. S. [Perspective topologies of multiprocessor computing systems based on the Cayley graphs of groups of period 4]. *Vestnik SibGAU*. 2016, No. 3 (17), P. 575–578 (In Russ.).

18. Kuznetsov A. A. [An algorithm of computation of the growth functions in finite two-generated groups of exponent five]. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*. 2016, No. 3 (33), P. 116–125 (In Russ.).

19. Kuznetsov A. A., Kishkan V. V. The Cayley graphs of finite two-generator burnside groups of exponent 7. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2018. No. 2, P. 217–222 (In Russ.).

20. Hall P. Nilpotent groups, Notes of lectures given at the Canadian Mathematical Congress 1957 Summer Seminar, in The collected works of Philip Hall. Oxford: Clarendon Press, 1988. P. 415–462.

21. Yablonsky S. V. *Vvedeniye v diskretnuyu matematiku* [Introduction to discrete mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 384 p.

22. Kuznetsov A. A., Kuznetsova A. S. [Fast multiplication in finite two-generated groups of exponent five]. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*. 2013, No. 1 (18), P. 110–1116 (In Russ.).

Кузнецов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, директор НОЦ «Институт космических исследований и высоких технологий»; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru.

Кузнецова Александра Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: alexakuznetsova85@gmail.com.

Кишкан Владимир Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: kishkan@mail.ru.

Kuznetsov Alexander Alexeevich – Dr. Sc., Professor, Head of Institute of Space Research and High Technologies; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru.

Kuznetsova Alexandra Sergeevna – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: alexakuznetsova85@gmail.com.

Kishkan Vladimir Vladimirovich – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of Informatics and Computer Science; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: kishkan@mail.ru.