

УДК 534.1

Doi: 10.31772/2712-8970-2024-25-1-18-24

**Для цитирования:** Кравчуновский А. П. Определение коэффициентов энергетической связи балок, соединенных под углом // Сибирский аэрокосмический журнал. 2024. Т. 25, № 1. С. 18–24. Doi: 10.31772/2712-8970-2024-25-1-18-24.

**For citation:** A. P. Kravchunovskii [Calculation of the coupling loss factors for the angle connected beams]. *Siberian Aerospace Journal*. 2024, Vol. 25, No. 1, P. 18–24. Doi: 10.31772/2712-8970-2024-25-1-18-24.

## Определение коэффициентов энергетической связи балок, соединенных под углом

А. П. Кравчуновский

Акционерное общество «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева»  
Российская Федерация, 662972, г. Железнодорожск Красноярского края, ул. Ленина, 52  
E-mail: anton.kravchunovsky@yandex.ru

*Использование статистического энергетического метода для анализа динамических систем предполагает, что коэффициенты энергетической связи подсистем должны быть известны. Коэффициенты энергетической связи показывают, какая часть энергии переходит из одной подсистемы в другую. Они входят в систему уравнений энергетического баланса и предварительно должны быть определены аналитически, экспериментально или численно. Наиболее перспективным из перечисленных методов является численный. В частности, в данной статье использован метод конечных элементов.*

*Целью настоящего исследования является определение коэффициентов энергетической связи двух подсистем в двух вариантах их относительного положения. За основу принята модель Г-образного соединения двух балок, которая довольно часто встречается в подобных исследованиях. Г-образное соединение частей конструкции часто встречается в строительных сооружениях, однако в других отраслях, таких как разработка космической и авиационной техники, зачастую элементы конструкции соединяются под углом, отличным от прямого. А поскольку энергетические методы могут применяться и для аэрокосмической отрасли, при разработке подходов к анализу конструкций с помощью таких методов будет полезным знание о том, как меняются энергетические параметры системы, в частности коэффициенты энергетической связи, в зависимости от того, под каким углом выполнено сопряжение их составных частей.*

*Рассмотрены две конфигурации системы: в первой – балки соединены под прямым углом, во второй – под углом 45°. Вычислены коэффициенты энергетической связи балок для обеих конфигураций системы. Сделаны выводы о возможности распространения полученного результата на более сложные конструкции, а именно конструкции космической техники.*

*Ключевые слова:* энергетический метод, коэффициент энергетической связи, уравнение энергетического баланса, космический аппарат, колебания.

## Calculation of the coupling loss factors for the angle connected beams

A. P. Kravchunovskii

JSC “Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”  
52, Lenin St., Zheleznogorsk, Krasnoyarsk region, 662972, Russian Federation  
E-mail: anton.kravchunovsky@yandex.ru

*The use of the statistical energy method for the analysis of dynamic systems assumes knowing coupling loss factors of the subsystems. Coupling loss factors show how much energy transfers from one subsystem to another. They are included in the system of power-balance equations and must first be determined analytically, experimentally or numerically. The most promising of the listed methods is numerical. In particular, this article uses the finite element method.*

*The purpose of this study is to determine the coupling loss factors of two subsystems in two versions of their relative position. The basis is the model of an L-shaped connection of two beams, which is quite common in such studies. L-shaped connections of structural parts are prevalent in building structures, but in other areas, such as the development of space and aviation technology, structural elements with an angle other than 90° between them. Since energy methods can also be applied to the aerospace industry, when developing approaches to structural analysis using such methods, it will be useful to know how the energy system parameters, in particular the coupling loss factors, depend on the coupled angle.*

*The paper considered two configurations of the system: in the first, the beams connected at a right angle, in the second, at an angle of 45°. We calculate the coupling loss factors of the beams for both system configurations. Conclusions of this paper draw about the possibility of extending the result to more complex structures, namely the spacecraft structures.*

*Keywords: energy method, coupling loss factor, power-balance equation, spacecraft, oscillation.*

## **Введение**

В современной практике для анализа сложных конструкций наравне с широко известным методом конечных элементов (МКЭ) также используются и чуть менее распространенный статистический энергетический метод (СЭМ) или как чаще его можно встретить в зарубежной литературе SEA – Statistical Energy Analysis. Статистический – поскольку предполагается, что исследуемые системы принадлежат статистическим совокупностям с известным распределением динамических параметров [1–4].

Анализ системы с помощью СЭМ, как и с помощью МКЭ, предполагает разбиение системы на более простые подсистемы. Однако СЭМ допускает значительно более крупное разбиение, что экономит временные и вычислительные ресурсы, т. е. достаточно получить такую составную единицу системы, чтобы в ней распространялись колебательные волны одного типа. В то время, как для анализа сложной системы с помощью МКЭ (особенно на высоких частотах), требуется сильно уменьшать размер конечного элемента, и тем самым увеличивать размерность всей системы с целью получения достоверного результата [5].

В основу СЭМ положен закон сохранения энергии, согласно которому полная энергия замкнутой системы сохраняется [6]. Для решения составляется баланс энергий, вводимых в систему и поглощенных ею, а также переходящих из одной подсистемы в другую [7].

Процесс перетекания энергии между подсистемами математически описывается так называемыми коэффициентами энергетической связи подсистем. Они могут быть найдены аналитически, экспериментально или численно. Аналитические зависимости далеко не всегда применимы в силу сложности моделируемых реальных конструкций, экспериментальные – зачастую слишком трудоемки. Наиболее перспективными для этих целей являются численные методы.

## **Постановка задачи**

В СЭМ система разделяется на несколько связанных подсистем, объединяющих моды одного типа (изгибные, крутильные или продольные). Метод является статистическим в том смысле, что рассматриваемые подсистемы условно должны объединять группы идентичных объектов, которые должны обладать аналогичными динамическими свойствами [1]. Метод основан на вычислении энергии, передающейся от одной подсистемы к другой. Энергия каждой подсистемы может рассеиваться посредством демпфирования, которое выражается величиной коэффициента потерь, или переходить в смежные подсистемы [8]. Коэффициент энергетической связи показывает, какая часть энергии переходит из одной подсистемы в другую. Таким образом, переменной в анализе выступа-

ет энергия. Предполагается, что энергия сконцентрирована только на резонансных модах. При этом полная энергия каждой подсистемы представляет собой сумму энергий каждой моды.

Основу СУЭБ составляет система уравнений энергетического баланса (СУЭБ), которая имеет вид

$$\begin{bmatrix} \eta_1 + \sum_{i=2}^n \eta_{1i} & -\eta_{21} & -\eta_{31} & \cdots & -\eta_{n1} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n \eta_{2i} & -\eta_{32} & \cdots & -\eta_{n2} \\ -\eta_{13} & -\eta_{23} & \eta_3 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^n \eta_{3i} & \cdots & -\eta_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{1n} & -\eta_{2n} & -\eta_{3n} & \cdots & \eta_n + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n \eta_{ni} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Pi_1 / \omega \\ \Pi_2 / \omega \\ \Pi_3 / \omega \\ \vdots \\ \Pi_n / \omega \end{Bmatrix}.$$

Здесь  $\eta_i$  – коэффициенты внутренних потерь подсистем;  $\eta_{ij}$  – коэффициенты энергетической связи подсистем;  $E_i$  – колебательные энергии подсистем;  $\Pi_i$  – мощности, вводимые в подсистемы;  $\omega$  – круговая частота;  $n$  – количество подсистем.

Правая часть СУЭБ определяет вводимые в подсистемы энергии, в то время как левая часть определяет колебательные энергии системы. Количество уравнений, входящих в СУЭБ, должно быть равно количеству подсистем. В вектор-столбце правой части СУЭБ не равны нулю только компоненты тех подсистем, в которые вводится энергия.

Колебательная энергия, используемая в расчете, – полная механическая энергия, которая представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий каждой подсистемы и является неизвестной в уравнениях. Предполагается, что вводимые мощности предварительно вычислены, а коэффициенты потерь и коэффициенты связи подсистем приняты по аналогии с уже проведенными расчетами идентичных конструкций и известны при составлении СУЭБ.

Как было отмечено выше, аналитические и экспериментальные способы определения коэффициентов энергетической связи не являются универсальными, и предпочтение в данном случае следует отдать численным методам. Использование для этих целей МКЭ является перспективным и удобным подходом [9–13].

Так, в статье [14] рассмотрено Г-образное соединение двух балок, на примере которого с помощью МКЭ были найдены коэффициенты энергетической связи при переходе энергии из первой балки во вторую.

Г-образное соединение частей конструкции действительно часто встречается в строительных сооружениях, однако в других отраслях, таких как разработка космической и авиационной техники, зачастую элементы конструкции соединяются под углом, отличным от прямого. А поскольку ЭМ может применяться и для аэрокосмической отрасли, при разработке подходов к анализу конструкций с помощью ЭМ будет полезным знание о том, как меняются энергетические параметры системы, в частности коэффициенты энергетической связи, в зависимости от того, под каким углом выполнено сопряжение их составных частей.

Так, например, ячейка сетчатой изогридной (или анизогридной) структуры силовой конструкции космического аппарата подразумевает соединение ребер под произвольными углами.

В настоящем исследовании для контроля расчетных параметров возьмем за основу балочную модель из статьи [14], но изменим некоторые условия под задачи анализа.

Рассмотрим систему, представленную двумя шарнирно опертыми балками, жестко соединенными между собой (рис. 1). Для удобства исследования граничные условия выбраны таким обра-

зом, чтобы в балках возникали только изгибные колебания. Длина первой балки 1,1 м, длина второй балки 0,9 м. Моделирование производилось двумерными конечными элементами одинаковой длины (1 см). Сечения балок 0,001×0,005 м. Балки соединены между собой вдоль длинной стороны сечения. Материал – сталь. Коэффициент внутренних потерь для обеих балок 0,01.

Проведем расчет коэффициентов энергетической связи для двух вариантов соединения балок (рис. 1). Для каждого варианта расчета гармоническая нагрузка 1 Н прикладывалась поочередно к каждой балке на расстоянии 0,1 м от края, всегда перпендикулярно к балке.

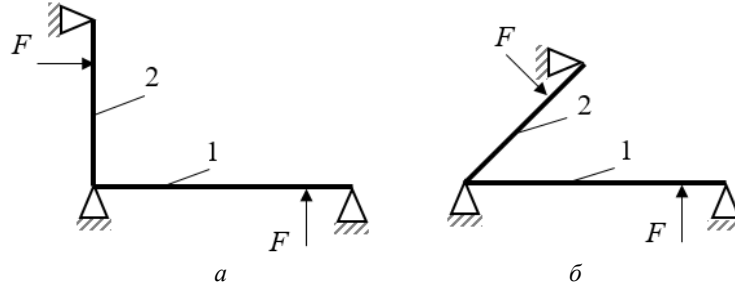


Рис. 1. Варианты соединения двух балок:  
а – угол равен 90°; б – угол равен 45°

Fig. 1. Variation of two beams coupling:  
a – 90° angle; b – 45° angle

Составим СУЭБ для этой системы. Для удобства при  $E$  введем второй индекс так, что запись  $E_{12}$  будет означать энергию первой подсистемы при введении энергии во вторую [15]. Аналогично – для оставшихся  $E_{11}$ ,  $E_{21}$ ,  $E_{22}$ . После чего СУЭБ в матричном виде будет выглядеть так:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_{12} & -\eta_{21} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \eta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{bmatrix},$$

а уравнения системы примут вид

$$\begin{cases} \eta_1 E_{11} + \eta_{12} E_{11} - \eta_{21} E_{21} = \Pi_1 / \omega, \\ \eta_2 E_{21} + \eta_{21} E_{21} - \eta_{12} E_{11} = 0, \\ \eta_1 E_{12} + \eta_{12} E_{12} - \eta_{21} E_{22} = 0, \\ \eta_2 E_{22} + \eta_{21} E_{22} - \eta_{12} E_{12} = \Pi_2 / \omega. \end{cases}$$

Зная коэффициенты внутренних потерь балок, из расчета по МКЭ найдем полные энергии колебаний подсистем. Для этого необходимо провести два расчета, поочередно вводя энергию в каждую балку.

Таким образом, коэффициенты энергетической связи  $\eta_{12}$  и  $\eta_{21}$  могут быть вычислены из следующих выражений:

$$\eta_{12} = \frac{E_{21}(\eta_2 E_{22} + \eta_1 E_{12})}{E_{11} E_{22} - E_{12} E_{21}},$$

$$\eta_{21} = \frac{E_{12}(\eta_1 E_{11} + \eta_2 E_{21})}{E_{11} E_{22} - E_{12} E_{21}}.$$

Результаты расчета коэффициентов энергетической связи для двух вариантов соединения балок представлены на рис. 2 и 3.

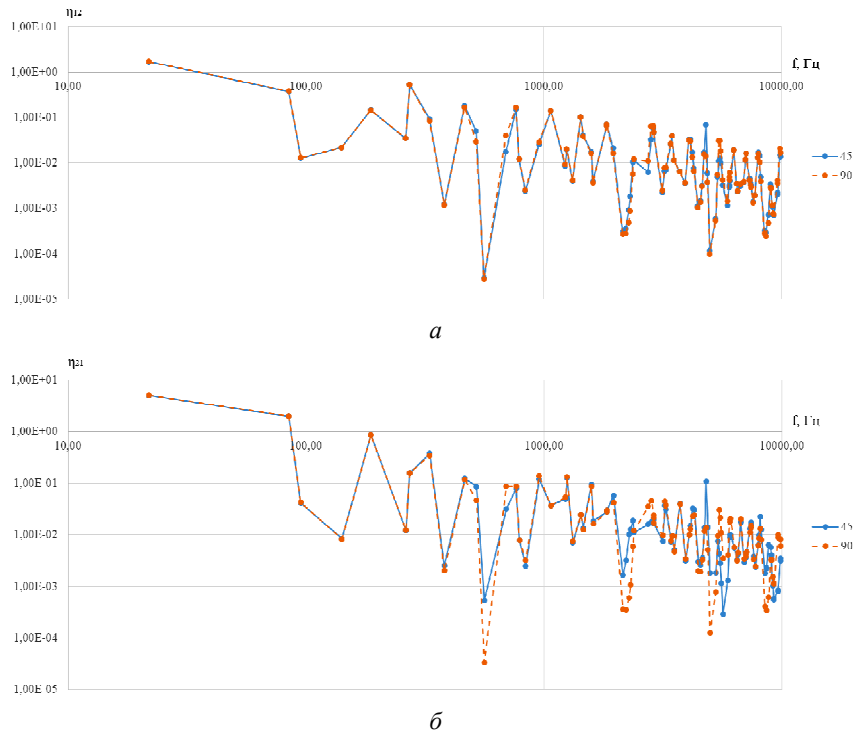


Рис. 2. Коэффициент энергетической связи в зависимости от частоты: *a* –  $\eta_{12}$ ; *б* –  $\eta_{21}$

Fig. 2. Coupling loss factor depending on the frequency: *a* –  $\eta_{12}$ ; *b* –  $\eta_{21}$

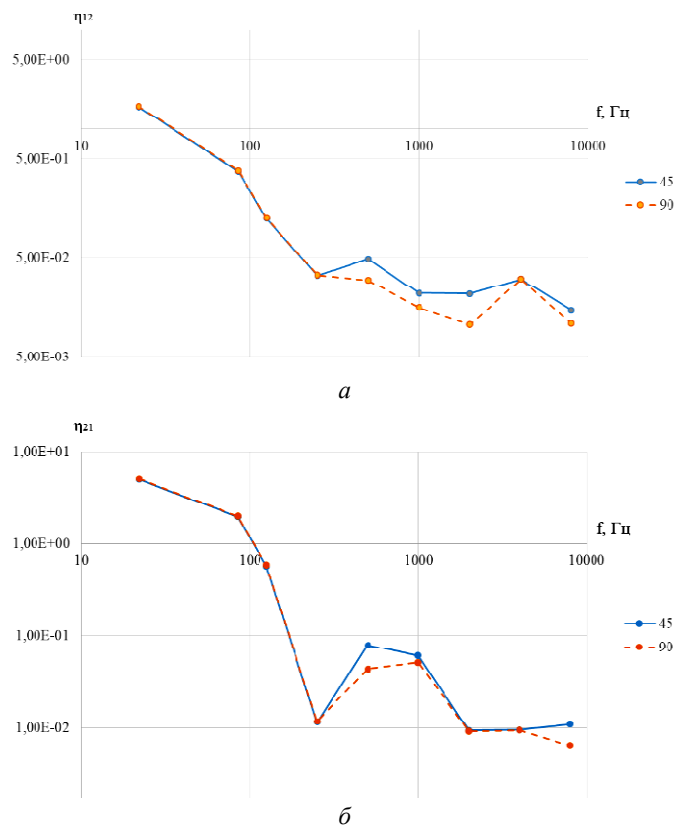


Рис. 3. Коэффициенты энергетической связи по третьоктавным частотным диапазонам: *a* –  $\eta_{12}$ ; *б* –  $\eta_{21}$

Fig. 3. Coupling loss factors in 1/3 octave frequency bands: *a* –  $\eta_{12}$ ; *b* –  $\eta_{21}$

### Результаты

Из графиков, приведенных на рис. 2 видно, что значения коэффициентов энергетической связи двух балок при переходе энергии из первой во вторую  $\eta_{12}$  и, наоборот, из второй в первую  $\eta_{21}$ , незначительно возрастают при уменьшении угла между балками. В то же время разница в значениях  $\eta_{21}$  для случаев соединения балок под углами  $90^\circ$  и  $45^\circ$  более заметна на определенных собственных частотах.

Однако если просуммировать значения коэффициентов энергетической связи в третьоктавных полосах частот, то подобные выводы становится сделать сложнее. Это говорит о том, что к осреднению результатов следует подходить с осторожностью и не ограничиваться анализом осредненных значений.

### Заключение

Получены значения коэффициентов энергетической связи двух балок по результатам двух вариантов расчета. В первом варианте балки соединялись под прямым углом, во втором – угол, образуемый двумя балками был равен  $45^\circ$ . Сравнительный анализ проведенных расчетов показал, что уменьшение угла между балками незначительно влияет на значения коэффициентов энергетической связи двух балок. Полученные результаты позволяют предположить, что для более сложных систем, таких как изогридные (или анизогридные) силовые конструкции космических аппаратов, образованные пересечением ребер под определенным углом, коэффициенты энергетической связи также будут меняться незначительно при изменении угла сопряжения ребер. Это позволило бы не проводить дополнительные расчеты и измерения за счет использования в расчетах уже известных коэффициентов энергетической связи. Данное предположение требует дальнейшего подтверждения на примере анализа более сложных систем.

### Библиографические ссылки

1. Lyon R. H., DeJong R. G. Theory and Application of Statistical Energy Analysis (Butterworths-Heimann), Boston, MA, 1995.
2. Fankhauser N. Statistical Energy Analysis for Room Acoustics : Master`s Thesis. Graz : Signal Processing and Speech Communications Laboratory Graz University of Technology, 2016. 127 p.
3. Johansson D., Connell P. Statistical Energy Analysis software : Master`s Thesis in the Master`s programme in Sound and Vibration. Göteborg : Chalmers University of Technology, 2010. 89 p.
4. Piersol A. G., Paez T. L. Harris` shock and vibration handbook, The McGraw-Hill Companies, Inc. 2010. 1199 p.
5. Equivalent curvatures broadband Insertion Loss simulation technique coupling Virtual SEA and BEM/FEM approaches / J.-F. Rondeau, A. Duval, J. Monet-Descombey, L. Dejaeger // Conference: Internoise : Innsbruck, Austria, 2013. 10 p.
6. Xiaoyan Yan. Energy Finite Element Analysis Developments for High Frequency Vibration Analysis of Composite Structures. PhD thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, 2008.
7. Burroughs C. B., Fischer R. W., Kern F. R. An introduction to statistical energy analysis // Journal of the Acoustical Society of America. 1997. Vol. 101(4). P. 1779–1789.
8. Кравчуновский А. П. Обзор методов анализа микровибраций // Космические аппараты и технологии. 2023. № 4. С. 243–250.
9. Simmons C. Structure-Borne Sound-Transmission through Plate Junctions and Estimates of Sea Coupling Loss Factors Using the Finite-Element Method // Journal of Sound and Vibration. 1991. Vol. 144(2). P. 215–227.
10. Steel J. A., Craik R. J. M. Statistical Energy Analysis of Structure-Borne Sound-Transmission by Finite-Element Methods // Journal of Sound and Vibration. 1994. Vol. 178(4). P. 553–561.
11. The Use of Wave-Absorbing Elements for the Evaluation of Transmission Characteristics of Beam Junctions / K. DeLanghe, P. Sas et al. // Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the ASME. 1997. Vol. 119(3). P. 293–303.
12. Fredo C. R. A SEA-like Approach for the Derivation of Energy Flow Coefficients with a Finite Element Model // Journal of Sound and Vibration. 1997. Vol. 199(4). P. 645–666.

13. An Approach for Evaluating Power Transfer Coefficients for Spot-welded Joints in an Energy Finite Element Formulation / N. Vlahopoulos, X. Zhao et al. // *Journal of Sound and Vibration*. 1999. Vol. 220(1). P. 135–154.

14. Грушецкий И. В., Смольников А. В. Применение метода конечных элементов для расчета коэффициентов энергетической связи, используемых в статистическом энергетическом методе, на примере углового соединения балок // *Техническая акустика*. 2004. № 6. С. 1–10.

15. Hopkins C. Statistical energy analysis of coupled plate systems with low modal density and low modal overlap // *Journal of Sound and Vibration*. 2002. Vol. 251(2). P. 193–214.

## References

1. Lyon R. H., DeJong R. G. *Theory and Application of Statistical Energy Analysis* (Butterworths-Heimann), Boston, MA, 1995.

2. Fankhauser N. *Statistical Energy Analysis for Room Acoustics* : Master's Thesis. Graz : Signal Processing and Speech Communications Laboratory Graz University of Technology, 2016. 127 p.

3. Johansson D., Connell P. *Statistical Energy Analysis software* : Master's Thesis in the Master's programme in Sound and Vibration. Göteborg : Chalmers University of Technology, 2010. 89 p.

4. Piersol A. G., Paez T. L. *Harris' shock and vibration handbook*, The McGraw-Hill Companies, Inc. 2010. 1199 p.

5. Rondeau J.-F., Duval A., Monet-Descombey J. Dejaeger L. Equivalent curvatures broadband Insertion Loss simulation technique coupling Virtual SEA and BEM/FEM approaches. *Conference: Internoise*. 15–18 September 2013, Innsbruck, Austria. 10 p.

6. Xiaoyan Yan. *Energy Finite Element Analysis Developments for High Frequency Vibration Analysis of Composite Structures*. PhD thesis, *The University of Michigan*, Ann Arbor, 2008.

7. Burroughs C.B., Fischer R.W., Kern F.R. An introduction to statistical energy analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(4), 1997 pp. 1779–1789.

8. Kravchunovskiy A. P. [Microvibration analysis methods review]. *Kosmicheskie apparaty i tekhnologii*. 2023, No. 4 (46), P. 243–250 (In Russ.).

9. Simmons C. Structure-Borne Sound-Transmission through Plate Junctions and Estimates of Sea Coupling Loss Factors Using the Finite-Element Method. *Journal of Sound and Vibration*. 1991, 144(2), P. 215–227.

10. Steel J. A., Craik R. J. M. Statistical Energy Analysis of Structure-Borne Sound-Transmission by Finite-Element Methods. *Journal of Sound and Vibration*. 1994, Vol. 178(4), P. 553–561.

11. DeLanghe, K., Sas P. et al. The Use of Wave-Absorbing Elements for the Evaluation of Transmission Characteristics of Beam Junctions. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the ASME*. 1997, Vol. 119(3), P. 293–303.

12. Fredo C. R. A SEA-like Approach for the Derivation of Energy Flow Coefficients with a Finite Element Model. *Journal of Sound and Vibration*. 1997, Vol. 199(4), P. 645–666.

13. Vlahopoulos N., Zhao X. et al. An Approach for Evaluating Power Transfer Coefficients for Spot-welded Joints in an Energy Finite Element Formulation. *Journal of Sound and Vibration*. 1999, Vol. 220(1), P. 135–154.

14. Grushetskiy I. V., Smol'nikov A. V. [Application of the finite element method to calculate the energy coupling coefficients used in the statistical energy method, using the example of a corner connection of beams]. *Tekhnicheskaya akustika*. 2004, No. 6, P. 1–10 (In Russ.).

15. Hopkins C. Statistical energy analysis of coupled plate systems with low modal density and low modal overlap. *Journal of Sound and Vibration*. 2002, Vol. 251(2), P. 193–214.

© Кравчуновский А. П., 2024

---

**Кравчуновский Антон Павлович** – начальник группы; акционерное общество «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева». E-mail: anton.kravchunovsky@yandex.ru.

**Kravchunovsky Anton Pavlovich** – Head of Group; Joint-Stock Company “Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”. E-mail: anton.kravchunovsky@yandex.ru.

---