УДК 512.54
Doi: 10.31772/2712-8970-2024-25-2-176-181

Для цитирования: Сенашов В. И. *m*-апериодические слова над трехбуквенным алфавитом // Сибирский аэрокосмический журнал. 2024. Т. 25, № 2. С. 176–181. Doi: 10.31772/2712-8970-2024-25-2-176-181.

For citation: Senashov V. I. [*m*-aperiodic words on three-letter alphabet]. *Siberian Aerospace Journal.* 2024, Vol. 25, No. 2, P. 176–181. Doi: 10.31772/2712-8970-2024-25-2-176-181.

m-апериодические слова над трехбуквенным алфавитом

В. И. Сенашов

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, Красноярск, Академгородок, 50/44
E-mail: sen1112home@mail.ru

Работа посвящена изучению множеств апериодических слов над конечным алфавитом. Множество апериодических слов можно рассматривать как словарь некоторого конечного формального языка. Существование бесконечных слов в двухбуквенном или трехбуквенном алфавитах, которые не содержат подслов, являющихся третьими степенями или, соответственно, квадратами других слов, впервые получены более ста лет назад. С. И. Адян в 2010 г. построил пример бесконечной последовательности несократимых слов, каждое из которых является началом следующего и не содержит квадратов слов в алфавите из двух букв. С. Е. Аршон установил существование n-значной ассиметричной бесповторной последовательности для алфавита не менее чем из трех букв. В монографии С. И. Адяна доказано, что в алфавите из двух символов существуют бесконечные 3-апериодические последовательности. В работах других авторов рассматривались обобщения апериодичности, когда исключались не только степени некоторых подслов. В монографии А. Ю. Ольшанского доказана бесконечность множества 6-апериодических слов в двухбуквенном алфавите и получена оценка количества таких слов любой данной длины. Автором ранее случай трехбуквенного алфавита рассмотрен только в случае 6-апериодических слов. В данной статье доказана бесконечность множества m-апериодических слов в трехбуквенном алфавите при $m \geq 4$ *и получена оценка множества таких слов. Полученные результаты могут быть полезны при кодировании информации в сеансах космической связи.*

Ключевые слова: алфавит, бесповторная последовательность, слово, апериодичность, оценка, формальный язык.

m-aperiodic words on three-letter alphabet

V. I. Senashov

Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: sen1112home@mail.ru

The work is devoted to the study of sets of aperiodic words over a finite alphabet. The set of aperiodic words can be considered as a dictionary of some finite formal language. The existence of infinite words in two-letter or three-letter alphabets that do not contain subwords that are third powers or, respectively, squares of other words was first discovered more than a hundred years ago. S.I. Adyan in 2010 constructed an example of an infinite sequence of irreducible words, each of which is the beginning of the next and does not contain word squares in a two-letter alphabet. S.E. Arshon established the existence of an n-digit *asymmetric repetition-free sequence for an alphabet of at least three letters. In the monograph by S.I. Adyan proved that in an alphabet of two symbols there exist infinite 3-aperiodic sequences. In the works of other authors, generalizations of aperiodicity were considered, when not only the powers of some subwords were excluded. In the monograph by A.Yu. Olshansky proved the infinity of the set of 6-aperiodic words in a two-letter alphabet and obtained an estimate for the number of such words of any given length. The author previously considered the case of a three-letter alphabet only in the case of 6-aperiodic words. In this article, we prove the infinity of the set of m-aperiodic words in the three-letter alphabet at* $m \geq 4$ *and obtain an estimate for the set of such words. The results can be applied when encoding information in space communications.*

Keywords: alphabet, non-repetitive sequence, word, aperiodicity, estimate, formal language.

Введение

Работа посвящена изучению множеств апериодических слов над конечным алфавитом. Множество апериодических слов можно рассматривать как словарь некоторого конечного формального языка.

Данные о существовании бесконечного слова в двух- или трехбуквенном алфавите, которое не содержит подслов, являющихся кубами или, соответственно, квадратами, впервые получены А. Туэ в 1906 г. [1]. Пример бесконечной последовательности несократимых слов, каждое из которых является началом следующего и не содержит квадратов слов в алфавите из двух букв, построил С. И. Адян (лемма 1 из [2]). В статье С. Е. Аршона 1937 г. [3] доказано существование n-значной ассиметричной бесповторной последовательности для алфавита не менее чем из трех букв. В монографии С. И. Адяна [4] доказано, что в алфавите из двух символов существуют бесконечные 3-апериодические последовательности. Задача изучения таких последовательностей рассматривается С. И. Адяном в связи с его исследованием проблемы Бернсайда [5–7]. А. М. Шур выяснил, какие свойства обычных слов сохраняются при переходе к бесконечным, а какие видоизменяются, теряются либо заменяются новыми, и изучил множество всех бескубных Z-слов в двухбуквенном алфавите [8–10]. В монографии А. Ю. Ольшанского [11] доказана бесконечность множества 6-апериодических слов в двухбуквенном алфавите и получена оценка количества таких слов любой данной длины.

Нами была улучшена оценка А. Ю. Ольшанского [11] количества 6-апериодических слов в 2-буквенном алфавите [12], а также сделан доклад по теме апериодических слов [13]. Затем исследования по этому вопросу были продолжены.

В работе [14] доказана теорема о бесконечности множества m-апериодических слов для $m \geq 4$ в двухбуквенном алфавите и получена оценка количества таких слов. Случай трехбуквенного алфавита рассмотрен только в одном случае: в работе [15] получена оценка для количества 6-апериодических слов.

В данной статье будет изучено множество m-апериодических слов в трехбуквенном алфавите: доказана бесконечность множества m-апериодических слов для $m \geq 4$ в трехбуквенном алфавите и получена оценка количества таких слов. Результаты могут быть полезны при кодировании информации в сеансах космосвязи.

Обобщения апериодичности, когда исключаются не только степени некоторых подслов, исследовались в [16].

Основной результат

Напомним, что *периодическим словом с периодом H* называется любое подслово некоторого слова H^p, $p > 0$.

В качестве примера периодического слова с периодом *ab* можно рассмотреть слово *ababa.*

l-апериодическим словом называется слово X, в котором нет нетривиальных подслов вида Y^l.

С. И. Адян [4] доказал, что в алфавите из двух букв существует бесконечно много сколь угодно длинных 3-апериодических слов.

С. Е. Аршон установил существование слов любой длины, свободных от квадратов в трехбуквенном алфавите [3].

А. Ю. Ольшанский в работе [11] рассматривал множество 6-апериодических слов. Он доказал, что существуют такие слова любой длины, и получил оценку функции $f(n)$ – количества 6-апериодических слов длины n. Их оказалось больше, чем $\left(3/2\right)^n$. В работе [12] нами улучшена оценка А. Ю. Ольшанского количества 6-апериодических слов над 2-буквенным алфавитом.

В работе [15] нами доказана теорема о бесконечности множества m-апериодических слов при ограничении на период $m \geq 4$ в двухбуквенном алфавите и получена оценка снизу количества таких слов.

Для нас представляет интерес оценить количество m-апериодических слов в алфавите из трех букв.

При доказательстве теоремы мы будем применять метод, используемый А. Ю. Ольшанским [11].

Теорема. *В трехбуквенном алфавите существуют сколь угодно длинные m-апериодические слова для* $m \geq 4$ *и число* $f(n)$ *таких слов длины* n *больше, чем* $\left(5/2\right)^n$.

Доказательство. Рассмотрим трехбуквенный алфавит $\{a, b, c\}$. В этом алфавите будем изучать m-апериодические слова для $m \geq 4$. Будем исследовать функцию $f(n)$ количества m-апериодических слов длины n.

Сначала докажем неравенство $f(n+1) > (5/2) f(n)$ при помощи метода математической индукции.

Заметим, что имеется ровно три m-апериодических слова a, b, c длины один и девять m-апериодических слов aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc длины 2 в трехбуквенном алфавите для $m \geq 4$. Таким образом, в этом случае имеем $f(1) = 3$, $f(2) = 9$.

Тогда при $n = 1$ справедливо нервенство $f(2) > 5/2 \cdot f(1)$ и полученная оценка выступает в качестве базы индукции.

Теперь нужно сделать шаг индукции. Предположим, что неравенство $f(n) > (5/2) f(n-1)$ верно для всех значений, не превышающих n, и установим его справедливость в случае $f(n+1) > (5/2) f(n)$.

Любое m-апериодическое слово длины $n+1$ можно получить приписыванием справа букв *a*, *b* или *c* к m-апериодическому слову длины n. Так получается $3f(n)$ слов X длины $n+1$.

Некоторые из таких слов содержат степени A^m. Попробуем отбросить такие слова, содержащие подслова периода m.

При приписывании новой буквы справа может получиться только слово вида $X \equiv YA^m$, содержащее слово периода m, так как иначе начало длины n слова X длины $n+1$ содержит периодическое подслово периода m: A^m.

Для слов A длины 1 (существует всего три таких слова) имеется не больше, чем $3f(n-m+1)$ слов вида $X \equiv YA^m$, где слово Y m-апериодично и $|Y| = n-m+1$, A – одно из слов *a*, *b*, *c*.

Как показали выше, существует всего девять слов A длины 2. Тогда количество слов вида $X \equiv YA^m$ длины $n+1$ не больше, чем $9f(n-2m+1)$, где слово Y m-апериодично и имеет длину $n-2m+1$.

Рассуждаем далее таким же образом, получаем оценку количества слов длины n+1 (строгое неравенство, так как легко указать слова, которые при получении оценки количества слов вида $X \equiv YA^m$ уже при длине 1 слова A мы отбросили с избытком для получения оценки):

$$f(n+1) > 3f(n) - 3f(n-m+1) - 3^2 f(n-2m+1) - 3^3 f(n-3m+1) - \ldots$$

Так как по индуктивному предположению справедлива оценка $f(n) > \left(5/2\right)^k \cdot f(n-k)$, то применяя ее, видим:

$$f(n+1) > 3f(n) - \left(3\left(5/2\right)^{-m+1} f(n) + 3^2\left(5/2\right)^{-2m+1} f(n) + 3^3\left(5/2\right)^{-3m+1} f(n) + \ldots\right).$$

Преобразуем полученное неравенство:

$$f(n+1) > f(n)(3 - \left(3\left(5/2\right)^{-m+1} + 3^2\left(5/2\right)^{-2m+1} + 3^3\left(5/2\right)^{-3m+1} + \ldots\right).$$

Очевидно, $\sqrt[m]{3} < 5/2$, поэтому геометрическая прогрессия в скобках является убывающей со знаменателем $3\left(5/2\right)^{-m}$ при ограничении $m \geq 4$.

Для выражения S в скобках правой части применим формулу суммы убывающей геометрической прогрессии

$$S = 3 - \frac{3\left(5/2\right)^{-m+1}}{1 - 3\left(5/2\right)^{-m}}.$$

Для доказательства утверждения теоремы нам требуется оценка выражения в скобках правой части неравенства $S > 5/2$.

Подставим в неравенство полученное выше выражение для S и выполним элементарные преобразования:

$$\frac{3 - 9\left(5/2\right)^{-m} - 3\left(5/2\right)^{-m+1} + 3\left(5/2\right)^{-m+1} - 5/2}{1 - 3\left(5/2\right)^{-m}} > 0.$$

Упростим полученное неравенство:

$$\frac{3 - 9\left(5/2\right)^{-m} - 5/2}{1 - 3\left(5/2\right)^{-m}} > 0.$$

Так как неравенство $1 - 3\left(5/2\right)^{-m} > 0$ выполняется при $m \geq 4$, то остается проверить справедливость неравенства:

$$3 - 9\left(5/2\right)^{-m} - 5/2 > 0.$$

Справедливость этого неравенства устанавливается непосредственным вычислением при $m = 4$, а при $m \geq 4$ оно тем более верно, поскольку $\left(5/2\right)^{-m} < \left(5/2\right)^{-3}$ при таких m. Следовательно, доказано, что неравенство $f(n+1) > 5/2\, f(n)$ выполняется для любых натуральных значений числа n при условии $m \geq 4$.

Утверждение теоремы доказано.

Заключение

Продолжается изучение вопроса об оценке количества апериодических слов при различных условиях. Рассмотрено множество m-апериодических слов при $m \geq 4$ в трехбуквенном алфавите и получена оценка для функции количества таких слов любой данной длины.

Благодарности. Работа выполнена в рамках госзадания ИВМ СО РАН (базовый проект № 0287-2021-0002). Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

Acknowledgment. The work was performed in the framework of the state assignment of ICM SB RAS, project no. 0287-2021-0002. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2024-1429).

Библиографические ссылки

1. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih // Norcke Vid. Selsk. skr., I Mat. Nat. Kl. Christiania. 1906. Bd. 7. P. 1–22.

2. Адян С. И. Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65, вып. 5 (395). С. 5–60.

3. Аршон С. Е. Доказательство существования n-значных бесконечных асимметричных последовательностей // Мат. сб. 1937. № 4 (2 (44)). С. 769–779.

4. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М. : Наука. 1975. 336 с.

5. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. № 1 (32). С. 212–244.

6. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах II // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. № 2 (32). С. 251–524.

7. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах III // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. № 3 (32). С. 708–731.

8. Шур А. М. Структура множества бескубных Z-слов в двухбуквенном алфавите // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Вып. 4 (64). С. 201–224.

9. Shur A. M. Overlap-free words and Thue-Morse sequences // Int. J. Alg. and et al. 1996. Vol. 6. P. 353–367.

10. Shur A. M. Binary words avoided by the Thue-Morse sequence // Semigroup Forum. 1996. Vol. 53. P. 212–219.

11. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М. : Наука. 1989. 448 с.

12. Сенашов В. И. Улучшение оценки количества 6-апериодических слов фиксированной длины // Вестник СибГАУ. 2016. № 2 (17). С. 168–172.

13. Сенашов В. И. Апериодические слова // Решетневские чтения. 2015. Т. 2, № 19. С. 132–133.

14. Senashov V. I. Estimation of the number of aperiodic words // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. № 3 (23). С. 409–416 .

15. Senashov V. I. 6-aperiodic words over the three-letter alphabet // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. № 3 (21). С. 333–336.

16. Bean D. R., Ehrenfeucht A., McNulty G. F. Avoidable patterns in strings of symbols // Pacific J. Math. 1979. No. 2 (85). P. 261–295.

References

1. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih. Norcke Vid. Selsk. skr., I Mat. Nat. Kl. Christiania. 1906, bd. 7, p. 1–22.

2. Adyan S. I. [Burnside's problem and related questions]. *Uspekhi Mat. sciences*. 2010, Vol. 65, Is. 5 (395), P. 5–60. (In Russ.)

3. Arshon S. E. [Proof of existence of *n*-unit infinite asymmetric sequences]. *Mat. sb*. 1937, No. 4 (2 (44)), P. 769–779. (In Russ.)

4. Adyan S. I. *Problema Bernsayda i tozhdestva v gruppakh* [Bernside Problem and Identities in Groups]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 336 p.

5. Novikov P. S., Adyan S. I. [On infinite periodic groups. I]. *Izv. USSR Academy of Sciences, ser. math*. 1967, No. 1 (32), P. 212–244. (In Russ.)

6. Novikov P. S., Adyan S. I. [On infinite periodic groups II]. *Izv. USSR Academy of Sciences, ser. math.* 1967, No. 2 (32), P. 251–524. (In Russ.)

7. Novikov P. S., Adyan S. I. [On infinite periodic groups III]. *Izv. USSR Academy of Sciences, ser. math*. 1967, No. 3 (32), P. 708–731. (In Russ.)

8. Shur A. M. [Structure of the set of cubeless *Z*-words in a two-letter alphabet]. *Izv. RAS. Ser. Mat*. 2000, Vol. 64, Is. 4, P. 201–224. (In Russ.)

9. Shur A. M. Overlap-free words and Thue-Morse sequences. *Int. J. Alg. and et al.* 1996. Vol. 6. P. 353–367.

10. Shur A. M. Binary words avoided by the Thue-Morse sequence. *Semigroup Forum*. 1996. Vol. 53. P. 212–219.

11. Olshansky A. Yu. *Geometriya opredelyayushchikh sootnosheniy v gruppakh* [Geometry of defining relations in groups]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 448 p.

12. Senashov V. I. [Improved estimates of the number 6-aperiodic words of fixed length]. *Vestnik SibGAU*. 2016, No. 2 (17), P. 168–172 (In Russ.).

13. Senashov V. I. [Aperiodic words]. *Reshetnevskiye chteniya*. 2015, Vol. 2, No. 19, P. 132–133. (In Russ.)

14. Senashov V. I. [Estimation of the number of aperiodic words]. *Siberian Aerospace Journal.* 2022. No. 3 (23), P. 409–416. (In Russ.)

15. Senashov V. I. [6-aperiodic words over the three-letter alphabet]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2020, No. 3 (21), P. 333–336. (In Russ.)

16. Bean D. R., Ehrenfeucht A., McNulty G. F. Avoidable patterns in strings of symbols. *Pacific J. Math.* 1979, No. 2 (85), P. 261–295.

Сенашов Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник; Институт вычислительного моделирования СО РАН. E-mail: sen1112home@mail.ru.

Senashov Vladimir Ivanovich – doctor of physic and mathematic sciences, professor, leader researcher; Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS. E-mail: sen1112home@mail.ru.