УДК 539.374
Doi: 10.31772/2712-8970-2024-25-2-182-188

Для цитирования: Один класс решений уравнений идеальной пластичности / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова, О. Н. Черепанова, С. В. Лукьянов // Сибирский аэрокосмический журнал. 2024. Т. 25, № 2. С. 182–188. Doi: 10.31772/2712-8970-2024-25-2-182-188.

For citation: Senashov S. I., Savostyanova I. L., Cherepanova O. N., Lukyanov S. V. [One class of solutions to the equations of ideal plasticity]. *Siberian Aerospace Journal.* 2024, Vol. 25, No. 2, P. 182–188. Doi: 10.31772/2712-8970-2024-25-2-182-188.

Один класс решений уравнений идеальной пластичности

С. И. Сенашов[1], И. Л. Савостьянова[1*], О. Н. Черепанова[2], С. В. Лукьянов[1]

[1]Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
[2]Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660014, Красноярск, просп. Свободный, 79
[*]E-mail: ruppa@inbox.ru

Исследованию и решению нелинейных дифференциальных уравнений в современной математической литературе уделяется большое внимание. Несмотря на это, методов исследования и решения таких уравнений не так много. Это точечные и контактные преобразования уравнений, различные методы разделения переменных, метод дифференциальных связей, поиски различных симметрий и их использование для построения решений, а также законы сохранения. В работе рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее пластическое течение призматического стержня. Для этого уравнения найдена группа точечных симметрий. Вычислена оптимальная система одномерных подалгебр. Приведены законы сохранения, соответствующие нетеровским симметриям, а также показано, что законов сохранения не нетеровских бесконечно много. Построены несколько новых инвариантных решений ранга один, т. е. зависящих от одной независимой переменной. Показано, как из двух точных решений, переходя к линейному уравнению, можно построить классы новых решений. Таким образом, в данной работе используются практически все методы современного исследования нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение идеальной пластичности, точечные симметрии, точные решения.

One class of solutions to the equations of ideal plasticity

S. I. Senashov[1], I. L. Savostyanova[1*], O. N. Cherepanova[2], S. V. Lukyanov[1]

[1]Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
[2]Siberian Federal University
79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation
[*]E-mail: ruppa@inbox.ru

Much attention is given to the study and solution of nonlinear differential equations in the modern mathematical literature. Despite this, there are not many methods for researching and solving such equations. These are point and contact transformations of equations, various methods of separating variables, the method of differential connections, the search for various symmetries and their use to construct solutions, as well as conservation laws. The paper considers a nonlinear differential equation describing the plastic flow of a prismatic rod. A group of point symmetries is found for this equation. The *optimal system of one-dimensional subalgebras is calculated. Conservation laws corresponding to Noetherian symmetries are given, and it is also shown that there are infinitely many non-Noetherian conservation laws. Several new invariant solutions of rank one, i. e. depending on one independent variable, are constructed. It is shown how classes of new solutions can be constructed from two exact solutions, passing to a linear equation. Thus, in this short article, almost all methods of modern research of nonlinear differential equations are involved.*

Keywords: nonlinear differential equation of ideal plasticity, point symmetries, exact solutions.

Введение

Решение и исследование дифференциальных уравнений по-прежнему являются одной из важнейших задач современной математики. В линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях исследуются вопросы разрешимости смешанных нелокальных краевых и обратных задач, содержащие действительные параметры и дифференциальные операторы математической физики [1; 2].

Точные решения для нелинейных дифференциальных уравнений известны только в исключительных случаях. Для их поиска применяют методы обобщенного разделения переменных, методы группового анализа, метод дифференциальных связей и некоторые другие. Большой список решенных уравнений и обзор методов их решения приведен в фундаментальной работе [3]. В последнее время для решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений начали использоваться законы сохранения [4–7]. Ранее они чаще всего играли вспомогательную роль. Способы использования группового анализа к разнообразным уравнениям, которые возникают в физике и механике, можно увидеть в работах [8–15].

Постановка задачи

В работе [1] приведено решение, описывающее чисто пластическое напряженное состояние призматического стержня

$$\begin{gathered}
u=\frac{1}{4}A(y^2-x^2-2z^2)-\frac{1}{2}Bxy-\frac{1}{2}Cx+Dyz,\\
v=\frac{1}{4}B(-y^2+x^2-2z^2)-\frac{1}{2}Axy-\frac{1}{2}y+Dxz,\\
w=\psi(x,y)+Axz+Byz+Cz,
\end{gathered}\tag{1}$$

где A, B, C, D – постоянные, $\psi(x,y)$ – функция, определяемая из системы уравнений.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-Dy\mp\frac{\sqrt{3}(Ax+By+C)f_y}{\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=Dy\pm\frac{\sqrt{3}(Ax+By+C)f_x}{\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}}.\tag{2}$$

Условие совместности этих соотношений дает эллиптическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(Ax+By+C)f_x}{\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(Ax+By+C)f_y}{\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}}\right)\pm\frac{2D}{\sqrt{3}}=0.\tag{3}$$

При этом компоненты тензора напряжений $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ тождественно равны нулю, а

$$\sigma_z=\pm\sqrt{3}k\sqrt{1-f_x^2-f_y^2},\tau_{xz}=-kf_y,\tau_{yz}=kf_x,\tag{4}$$

где k – пластическая постоянная.

Целью работы является изучение некоторых свойств уравнения (3) и построение его решения при условии, что

$$A=B=0.$$

В этом случае получаем следующее нелинейное дифференциальное уравнение

$$\partial_x\left(\frac{f_x}{\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}}\right)+\partial_y\left(\frac{f_y}{\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}}\right)=K,\quad K=\mp\frac{2D}{\sqrt{3}}. \tag{5}$$

Индекс внизу означает дифференцирование по соответствующему аргументу; все функции предполагаются гладкими.

Некоторые свойства уравнения (5) при $K=0$.

1. Уравнение (5) можно вывести из вариационного принципа, и оно есть минимум функционала

$$Z(w)=\iint\sqrt{w_x^2+w_y^2}\,dxdy=\iint L\,dxdy.$$

2. Группа точечных симметрий уравнения (5) порождается следующими операторами:

$$X_1=\partial_x,\ \ X_2=\partial_y,\ \ X_3=\partial_f,\ \ X_4=x\partial_x+y\partial_y+f\partial_f,\ \ X_5=y\partial_x-x\partial_y. \tag{6}$$

Для построения различных инвариантных решений необходимо построить оптимальную систему подалгебр. Для алгебры Ли, порожденной операторами (6), она имеет вид

$$X_1+\alpha X_3,\quad \alpha X_3+X_5,\quad X_5+\alpha X_4, X_3, X_4, \tag{7}$$

где α – произвольная постоянная. Различным значениям этой постоянной соответствуют неподобные подалгебры.

Уравнение (5) приведем к виду

$$(1-f_y^2)f_{xx}+2f_xf_yf_{xy}+(1-f_x^2)f_{yy}=0. \tag{8}$$

3. *Определение.* Законом сохранения для уравнения (8) назовем выражение вида

$$A_x+B_y=\Delta[(1-f_y^2)f_{xx}+2f_xf_yf_{xy}+(1-f_x^2)f_{yy}]=0, \tag{9}$$

где Δ – линейный дифференциальный оператор, тождественно не равный нулю.

Для уравнений, выводимых из вариационного принципа, каждому оператору, допускаемому уравнением, соответствует, по теореме Нетер [3], некоторый закон сохранения. Используем эту теорему для уравнения (5). Получаем пять законов сохранения.

Оператору X_1 соответствует закон сохранения

$$D_x\left(L-f_x\frac{\partial L}{\partial f_x}\right)+D_y\left(-f_y\frac{\partial L}{\partial f_y}\right)=0\ .$$

Оператору X_2 соответствует закон сохранения

$$D_x\left(-f_y\frac{\partial L}{\partial f_x}\right)+D_y\left(L-f_y\frac{\partial L}{\partial f_y}\right)=0.$$

Оператору X_3 соответствует закон сохранения

$$D_x\left(\frac{f_x}{\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}}\right)+D_y\left(\frac{f_y}{\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}}\right)=0.$$

Оператору X_4 соответствует закон сохранения

$$D_x\left(Lx+(f-xf_x-yf_y)\frac{\partial L}{\partial f_x}\right)+D_y\left(Ly+(f-xf_x-yf_y)\frac{\partial L}{\partial f_y}\right)=0.$$

Оператору X_5 соответствует закон сохранения

$$D_x\left(Ly+(yf_x-xf_y)\frac{\partial L}{\partial f_x}\right)+D_y\left(-Lx+(yf_x-xf_y)\frac{\partial L}{\partial f_y}\right)=0.$$

Заметим, что уравнение (8) имеет и другие законы сохранения, которые отличны от предыдущих законов. Укажем некоторые. Пусть $A(f_x, f_y),\ B(f_x, f_y)$, тогда из (9) получаем

$$\frac{\partial A}{\partial f_x} f_{xx} + \frac{\partial A}{\partial f_y} f_{xy} + \frac{\partial B}{\partial f_x} f_{xy} + \frac{\partial B}{\partial f_y} f_{yy} = \Delta[(1-f_y^2)f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + (1-f_x^2)f_{yy}] = 0.$$

Отсюда без труда получаем два уравнения для определения сохраняющегося тока

$$(1-f_x^2)\frac{\partial A}{\partial f_x} = (1-f_y^2)\frac{\partial B}{\partial f_y}, \quad \frac{\partial A}{\partial f_y} + (1-f_x^2)\frac{\partial B}{\partial f_x} = 2f_x f_y \frac{\partial B}{\partial f_y}.$$

Отсюда следует, что уравнение (8) допускает бесконечную серию законов сохранения. Это следует, в частности, из линейности приведенной системы на сохраняющийся ток.

4. Преобразование Лежандра позволяет линеаризовать уравнение (8) и привести к виду

$$(1-\eta^2)w_{\eta\eta} - 2\xi\eta w_{\xi\eta} + (1-\xi^2)w_{\xi\xi} = 0.$$

Это преобразование определяется соотношениями

$$f_x = \xi, f_y = \eta, x = f_\xi, y = f_\eta, w + f = x\xi + y\eta.$$

Точные решения (5). Все эти решения являются инвариантным решениями, построенными на подалгебрах (7):

а) ищем решение уравнения (8) в виде

$$f = g(x) + h(y). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8), получим

$$(1-h'^2)g'' + (1-g'^2)h'' = 0. \tag{11}$$

Здесь штрих означает производную по соответствующему аргументу.

Из (11) получаем

$$\frac{h''}{1-h'^2} = -\frac{g''}{1-g'^2} = \lambda - \text{const}. \tag{12}$$

Интегрируя (12), получаем

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+h'}{1-h'}\right| = 2\lambda + \ln C_1, \quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+g'}{1-g'}\right| = -2\lambda + \ln C_2. \tag{13}$$

Из (13) получаем

$$h = -x + \frac{1}{\lambda}\ln(1 + C_1\exp 2\lambda x) + C_3, \quad g = -y - \frac{1}{\lambda}\ln(1 + C_2\exp(-2\lambda y)) + C_4. \tag{14}$$

При $C_1 = C_2 = 1$ решение (10) можно записать в более удобном виде

$$h' = th\lambda x,\ g' = th\lambda y,\ h = \ln ch\lambda x,\ g = -\ln ch\lambda y, \quad f = \ln\frac{ch\lambda x}{ch\lambda y};$$

б) запишем уравнение (5) при $K = 0$ в полярной системе координат r, θ. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2 f_r}{\sqrt{r^2 - r^2 f_r^2 - f_\theta^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{f_\theta}{\sqrt{r^2 - r^2 f_r^2 - f_\theta^2}}\right) = 0. \tag{15}$$

Ищем решение этого уравнения в виде $f = rf(t), t = r\exp(\alpha\theta), \alpha - \text{const}$.

Из (15) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое удалось проинтегрировать только в случае, когда $\alpha = 0$. В этом случае получаем

$$f = \ln\left|r + \sqrt{r^2 + c^2}\right| = \text{Arcsh}\frac{r}{c}, \quad c - \text{const}; \tag{16}$$

в) ищем решение уравнения (5) в виде

$$f = \alpha y + \varphi(x).$$

Подставляя это соотношение в (5) получаем

$$\varphi = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{K}\sqrt{1+(Kx+C)^2}\ ;$$

г) ищем решение уравнения (5) в виде

$$f = \alpha\theta + \varphi(r).$$

Подставляя это соотношение в (5), получаем

$$\varphi = K\int\sqrt{\frac{r^2-\alpha^2}{r^2+K^2}}\frac{dr}{r}\ ;$$

д) ищем решение уравнения (5) в виде

$$f = r\varphi(\theta).$$

Подставляя это соотношение в (5) получаем

$$f = r\sin\sqrt{1+K^2\theta^2}.$$

Гомотопия двух решений уравнения (5)

Покажем, как из двух решений (14) и (16) можно получить целую серию новых точных решений уравнения (5). Для этого применим к этим решениям преобразование Лежандра.

Решению (16) (обозначим его F) соответствует решение уравнения Лежандра U, которое определяется формулой

$$F_x = \xi,\ F_y = \eta,\ x = F_\xi,\ y = F_\eta,\ U + F = x\xi + y\eta.$$

Отсюда получаем

$$U = -F + x\xi + y\eta = -F + xF_x + yF_y = \ln(r + \sqrt{r^2+c^2}) + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{17}$$

Окончательно получаем

$$U = \ln(r + \sqrt{r^2+c^2}) + \sqrt{x^2+y^2}.$$

То же самое сделаем с решением (14), обозначив его через G, а его образ – через V. Имеем

$$\begin{gathered} V = -G + x\xi + y\eta = -G + xG_x + yG_y = -x - y + \\ + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{1+C_1\exp 2\lambda x}{1+C_2(-2\lambda y)} + x\frac{C_1\exp 2\lambda x - 1}{C_1\exp 2\lambda + 1} + y\frac{C_2\exp(-2\lambda y) - 1}{C_2\exp(-2\lambda y) + 1}. \end{gathered} \tag{18}$$

Уравнение Лежандра, соответствующее уравнению (7), линейно, поэтому для него имеем

$$w = aU + (1-a)V, \tag{19}$$

где a – произвольная постоянная, есть снова решение этого же уравнения. При этом при $a = 0$ решение совпадает с решением V, а при $a = 1$ – с решением U. Отсюда следует, что формула (19) позволяет непрерывно преобразовать решение (16) в решение (14) изменяя a от нуля до единицы. Алгоритм действия при этом такой: решения (17) и (18) записываем в переменных $\xi,\ \eta$, складываем их по формуле (19), а затем их линейную комбинацию записываем в терминах x, y. Тем самым получаем серию решений уравнения (7) для каждого фиксированного значения a.

Заключение

В работе найдена группа точечных преобразований, допускаемых уравнением (5) в смысле Ли – Овсянникова. Эта группа имеет размерность пять. Она порождается тремя переносами по пространственным переменным и искомой функции, растяжением по этим же переменным, круговому вращению в плоскости *OXY*. Найдены новые классы точных решений этого уравнения, зависящие от произвольных функций из класса C^2. На основе точечных симметрий найдены четыре закона сохранения уравнения (5). Приведена новая бесконечная серия законов сохранения, которая найдена прямым вычислением. Новые полученные решения дополняют другие инвариантные решения, приведенные в [1].

Все построенные в данной работе решения могут быть использованы для описания напряженно-деформированного состояния прямолинейного стержня, подвергнутого растяжению вдоль оси *OZ* и кручению вокруг этой оси парой сил.

Библиографические ссылки

1. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин и др. М. : Физматлит, 2008. 829 с.

2. Овсяников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с.

3. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. 2nd Edition, New York : Taylor&Francis Group, 2012. 1912 p.

4. Сенашов С. И., Черепанова О. Н. Новые классы решений уравнения минимальных поверхностей // Journal of Siberian Federal University. Math.&Phys. 2010. Vol. 3(2). P. 248–255.

5. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Intern. J Non. lin Mech. 2019. Vol. 108. P. 7–10.

6. Kaptsov E. I., Meleshko S. V. Conservation laws of the two-dimensional gas dynamics equations // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2019, Vol. 112. P. 126–132.

7. Nakpim W., Meleshko S. V. Conservation laws of the one-dimensional equations of relativistic gas dynamics in lagrangian coordinates // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2020. Vol. 124. P. 103496.

8. Vaneeva O. O., Popovich R.O., Sopocleus C. Extend group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities // J. Math. Anal. 2012. Vol. 396. P. 225–242.

9. Grigoriev Yu. N., Omel'aynchuk M. I. Qualitive properties of a certain kinetic problem of binary gas // Sib.Math. J. 2005. Vol. 46(5). P. 813–825.

10. Grigoriev Yu. N., Meleshko S. V., Suriyawichitseranee A. A. On group classification of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with source II // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. Vol. 61. P. 15–18.

11. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию // Сиб. журн. индуст. матем. 2019. Т. 22, № 3. С. 114–117.

12. Meleshko S. V. Complete group classification of the two-dimensional shallow water equations with constant coriolis parameter in lagrangian coordinates // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2020. Vol. 89. P. 105293.

13. Meleshko S. V., Samatova N. F. Group classification of the two-dimensional shallow water equations with the beta-plane approximation of coriolis parameter in lagrangian coordinates // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2020. Vol. 90. P. 105337.

14. Bobylev A. V., Meleshko S. V. Group analysis of the generalized burnett equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2020. Vol. 27, No. 3. P. 494–508.

15. Siriwat P., Grigoriev Y. N., Meleshko S. V. Invariant solutions of one-dimensional equations of two-temperature relaxation gas dynamics // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43, No. 5. P. 2444–2457.

References

1. Ivlev D. D. *Predel'noe sostoyanie deformiruemykh tel i gornykh porod* [The limiting state of deformable bodies and rocks]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 829 p.

2. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoy analiz differentsial'nykh uravneniy* [Group analysis of differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 400 p.

3. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. 2nd Edition, New York, Taylor&Francis Group, 2012, 1912 p.

4. Senashov S. I., Cherepanova O. N. [New classes of solutions to the equation of minimal surfaces]. *Journal of Siberian Federal University. Math.&Phys*. 2010, Vol. 3(2), P. 248–255.

5. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes. *Intern. J Non. lin Mech*. 2019, Vol. 108, P. 7–10.

6. Kaptsov E. I., Meleshko S. V. Conservation laws of the two-dimensional gas dynamics equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2019, Vol. 112, P. 126–132.

7. Nakpim W., Meleshko S. V. Conservation laws of the one-dimensional equations of relativistic gas dynamics in lagrangian coordinates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020, Vol. 124, P. 103496.

8. Vaneeva O. O., Popovich R. O., Sopocleus C. Extend group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal*. 2012, Vol. 396, P. 225–242.

9. Grigoriev Yu. N., Omel'aynchuk M. I. Qualitive properties of a certain kinetic problem of binary gasю *Sib.Math. J.* 2005, Vol. 46(5), P. 813–825.

10. Grigoriev Yu. N., Meleshko S. V., Suriyawichitseranee A. A. On group classification of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with source II. *Int. J. Non-Linear Mech*. 2014, Vol. 61, P. 15–18.

11. Senashov S. I., Savostyanova I. L. [New three-dimensional plastic flows corresponding to a homogeneous stress state] *Sib. zhurn. indust. matem*. 2019, Vol. 22, No. 3, P. 114–117. (In Russ.)

12. Meleshko S. V. Complete group classification of the two-dimensional shallow water equations with constant coriolis parameter in lagrangian coordinates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020, Vol. 89, P. 105293.

13. Meleshko S. V., Samatova N. F. Group classification of the two-dimensional shallow water equations with the beta-plane approximation of coriolis parameter in lagrangian coordinates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020, Vol. 90, P. 105337.

14. Bobylev A. V., Meleshko S. V. Group analysis of the generalized burnett equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. 2020, Vol. 27, No. 3, P. 494–508.

15. Siriwat P., Grigoriev Y. N., Meleshko S. V. Invariant solutions of one-dimensional equations of two-temperature relaxation gas dynamics. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020, Vol. 43, No. 5, P. 2444–2457.

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: sen@sibsau.ru.

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: ruppa@inbox.ru.

Черепанова Ольга Николаевна – кандидат физико-математических наук, директор института математики и фундаментальной информатики; Сибирский федеральный университет. E-mail: OCherepanova@sfu-kras.ru.

Лукьянов Сергей Владимирович – аспирант; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: lukyanovsv@sibsau.ru.

Senashov Sergey Ivanovich – Dr Sc., Professor, Professor of the IES Department; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: sen@sibsau.ru.

Savostyanova Irina Leonidovna – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of IES; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: ruppa@inbox.ru.

Cherepanova Olga Nikolaevna – Cand. Sc., Director of the Institute of Mathematics and Fundamental Informatics; Siberian Federal University. E-mail: OCherepanova@sfu-kras.ru.

Lukyanov Sergey Vladimirovich – post-graduate student; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: lukyanovsv@sibsau.ru.