УДК 629.783
Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-21-33

Для цитирования: Калибровка магнитометра космического аппарата с учетом характера температурной зависимости матрицы чувствительности и вектора смещений нуля / К. А. Кириллов, С. В. Кириллова, Д. О. Мелентьев и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 21–33. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-21-33.

For citation: Kirillov K. A., Kirillova S. V., Melent'ev D. O., Titov G. P., Gashin A. A. [Calibration of a spacecraft magnetometer taking into account the natureof the temperature dependence of the sensitivity matrix and the offset vector]. *Siberian Aerospace Journal.* 2025, Vol. 26, No. 1, P. 21–33. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-21-33.

Калибровка магнитометра космического аппарата с учетом характера температурной зависимости матрицы чувствительности и вектора смещений нуля

К. А. Кириллов[1*], С. В. Кириллова[2], Д. О. Мелентьев[2, 3], Г. П. Титов[3], А. А. Гашин[1]

[1]Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31
[2]Сибирский федеральный университет
660041, Российская Федерация, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
[3]Акционерное общество «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнёва»
Российская Федерация, 662972, г. Железногорск Красноярского края, ул. Ленина, 52
[*]E-mail: kkirillow@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе предложен аналитический метод решения задачи калибровки магнитометра для модели, учитывающей вектор температурной зависимости смещений нуля для каждой из измерительных осей блока магнитометра и матрицу линейной температурной зависимости каждого из членов матрицы чувствительности, масштабирующей сигнал на основе реальной чувствительности каждой оси и включающей линейные внеосевые эффекты. При решении задачи определения калибровочных параметров блока магнитометра учитывается, что для измерений с любой пространственной ориентацией блока магнитометра величина измеряемого вектора магнитной индукции сохраняется и является известной модельной величиной. Вводится в рассмотрение штрафная функция 24 переменных, равная сумме квадратов невязок. Алгоритм решения задачи калибровки измерительных осей блока магнитометра сводится к поиску методом наименьших квадратов таких значений переменных этой функции, которые при заданном наборе векторов измерений магнитометра доставляют ей минимум. С этой целью указанная функция исследуется на экстремум. Исходя из необходимого условия экстремума штрафной функции, формируется система 24 уравнений относительно 24 неизвестных, которая для удобства разбивается на три системы (каждая из них есть система 8 линейных алгебраических уравнений относительно 8 неизвестных). Доказывается, что основная матрица каждой из этих трех систем не вырождена, откуда следует, что каждая из них имеет решение, и притом только одно. Компоненты решений этих систем (координаты стационарной точки штрафной функции) находятся по правилу Крамера. Доказывается, что второй дифференциал штрафной функции в найденной стационарной точке положителен, откуда следует, что эта точка действительно доставляет минимум указанной функции.

Ключевые слова: калибровка магнитометра, вектор магнитной индукции, метод наименьших квадратов, матрица Грама, правило Крамера.

Calibration of a spacecraft magnetometer taking into account the nature of the temperature dependence of the sensitivity matrix and the offset vector

K. A. Kirillov[1*], S. V. Kirillova[2], D. O. Melent'ev[2, 3], G. P. Titov[3], A. A. Gashin[1]

[1]Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
[2]Siberian Federal University
79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
[3] JSC "Information Satellite Systems" Academician M. F. Reshetnev Company"
52, Lenin St., Zheleznogorsk, Krasnoyarsk region, 662972, Russian Federation
*E-mail: kkirillow@yandex.ru

Abstract. In this paper, an analytical method is proposed for solving the problem of magnetometer calibration for a model that takes into account the vector of temperature dependence of zero offsets for each of the measuring axes of the magnetometer unit and the matrix of linear temperature dependence of each of the members of the sensitivity matrix, scaling the signal based on the actual sensitivity of each axis and including linear off-axis effects. When solving the problem of determining the calibration parameters of the magnetometer unit, it is taken into account that for measurements with any spatial orientation of the magnetometer unit, the magnitude of the measured magnetic field strength vector is preserved and is a known model value. A penalty function of 24 variables equal to the sum of the squares of the residuals is introduced into consideration. The algorithm for solving the problem of calibrating the measuring axes of the magnetometer unit is reduced to searching by the method of least squares for such values of the variables of this function that, with a given set of vectors of magnetometer measurements, provide it with a minimum. For this purpose, the specified function is examined for an extremum. Based on the necessary condition for the extremum of the penalty function, a system of 24 equations in the 24 variables is formed, which, for convenience, is divided into three systems (each of them is a system of 8 linear algebraic equations in the 8 variables). It is proved that the main matrix of each of these three systems is an invertible, from which it follows that each of them has a solution, and only one. The components of the solutions of these systems (the coordinates of the stationary point of the penalty function) are found using Cramer's rule. It is proved that the second differential of the penalty function at the found stationary point is positive, from which it follows that this point really provides the minimum of the specified function.

Keywords: magnetometer calibration, the Earth's magnetic induction vector, the method of least squares, Gram matrix, Cramer's rule.

Введение

Магнитометры входят в состав системы ориентации и стабилизации (СОС) низкоорбитальных малогабаритных космических аппаратов (МКА), где являются основными источниками информации о положении МКА после отделения от разгонного блока. Магнитометры осуществляют измерение величины и направления вектора магнитной индукции магнитного поля Земли. Получаемые данные необходимы для формирования управляющих моментов МКА, при этом длительность режима успокоения во многом зависит от точности показаний прибора и шумовой составляющей.

Современные магнитометры СОС МКА разрабатываются на базе эффекта магнитосопротивления и вследствие физических особенностей чувствительного элемента требуют проведения математической калибровки прибора. На данный момент предложены различные методы калибровки магнитометров [1–16], в частности, статья [11], в которой приведен обзор различных способов проведения таких операций.

Ранее задача калибровки магнитометра космического аппарата решалась с применением численных методов. В настоящей работе предложен аналитический метод решения этой задачи для модели, учитывающей вектор температурной зависимости смещений нуля для каждой из измерительных осей блока магнитометра и матрицу линейной температурной зависимости каждого из членов матрицы чувствительности, масштабирующей сигнал на основе реальной чувствительности каждой оси и включающей линейные внеосевые эффекты.

1. Модель погрешностей измерений вектора магнитной индукции

Обозначим через $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)^{\mathrm{T}}$ значение измеренного вектора магнитной индукции при некотором пространственном положении блока магнитометра (БМ). Воспользуемся моделью измерений, рассмотренной в [1]:

$$\boldsymbol{B} = (S + \tau K_S)\,\boldsymbol{h} + \boldsymbol{b} + \tau\,\boldsymbol{k_b}, \tag{1}$$

В (1) использованы следующие обозначения:

$\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)^T$ – истинный вектор магнитной индукции;

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ – постоянный вектор, отвечающий смещениям нуля для каждой из измерительных осей БМ;

$\boldsymbol{k_b} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ – вектор температурной зависимости смещений нуля для каждой из измерительных осей БМ;

$S = \left(s_{ij}\right)_{i,j=1}^{3}$ – матрица чувствительности, которая масштабирует сигнал на основе реальной чувствительности каждой оси и включает линейные внеосевые эффекты;

$K_S = \left(t_{ij}\right)_{i,j=1}^{3}$ – матрица линейной температурной зависимости каждого из членов матрицы чувствительности;

τ – температура, передаваемая датчиком (скалярная величина).

При этом компоненты векторов $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{k_b}$ выражены в одинаковых единицах измерения.

Задача калибровки измерительных осей БМ сводится к нахождению элементов матриц S и K_S, а также компонент векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{k_b}$.

2. Разработка алгоритма определения калибровочных параметров БМ

При решении задачи определения калибровочных параметров БМ воспользуемся тем, что для измерений с любой пространственной ориентацией БМ величина измеряемого вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ сохраняется и является известной модельной величиной.

Пусть в результате измерений магнитометра в дискретные моменты времени получен набор векторов $\boldsymbol{h}^{(l)} = (h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, h_3^{(l)})^T$, а в результате измерений в те же дискретные моменты времени передающего температуру датчика получен набор значений $\tau^{(l)}$, $l = 1, 2,\ldots, N$. Без ограничения общности можно считать, что если $\left(\tau^{(l)}, h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, h_3^{(l)}, \tau^{(l)}h_1^{(l)}, \tau^{(l)}h_2^{(l)}, \tau^{(l)}h_3^{(l)}\right)$ $(l = 1, 2,\ldots, N)$ рассматривать как координаты точек 7-мерного аффинного пространства, то эти точки не лежат в одной гиперплоскости. Обозначим эти точки следующим образом:

$$U_l\left(\tau^{(l)}, h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, h_3^{(l)}, \tau^{(l)}h_1^{(l)}, \tau^{(l)}h_2^{(l)}, \tau^{(l)}h_3^{(l)}\right),\ l = 1, 2,\ \ldots,\ N. \tag{2}$$

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Если точки

$$V_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right),\ V_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right),\ \ldots,\ V_N\left(x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \ldots, x_n^{(N)}\right) \tag{3}$$

n-мерного аффинного пространства не лежат в одной гиперплоскости ($N \geq n$), то среди них найдутся n аффинно независимых точек.

Доказательство. Лемму докажем методом «от противного». Предположим, что любые n точек из набора (3) аффинно зависимы. Обозначим через m максимальное число аффинно независимых точек (3), $1 \le m < n$. Пусть $V_{i_1}\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_1)}, \ldots, x_n^{(i_1)}\right)$, $V_{i_2}\left(x_1^{(i_2)}, x_2^{(i_2)}, \ldots, x_n^{(i_2)}\right)$, …, $V_{i_m}\left(x_1^{(i_m)}, x_2^{(i_m)}, \ldots, x_n^{(i_m)}\right)$ – аффинно независимые точки, а Π_{n-1} – любая из гиперплоскостей, проходящих через эти точки. Выберем в гиперплоскости Π_{n-1} такие точки $W_1\left(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}\right)$, $W_2\left(y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}\right)$, …, $W_{n-m}\left(y_1^{(n-m)}, y_2^{(n-m)}, \ldots, y_n^{(n-m)}\right)$, что точки V_{i_1}, V_{i_2}, …, V_{i_m}, W_1, W_2, …, W_{n-m} аффинно независимы. Запишем уравнение гиперплоскости Π_{n-1} [17]:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^{(i_1)} & x_2 - x_2^{(i_1)} & \ldots & x_n - x_n^{(i_1)} \\ x_1^{(i_2)} - x_1^{(i_1)} & x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_1)} & \ldots & x_n^{(i_2)} - x_n^{(i_1)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(i_m)} - x_1^{(i_1)} & x_2^{(i_m)} - x_2^{(i_1)} & \ldots & x_n^{(i_m)} - x_n^{(i_1)} \\ y_1^{(1)} - x_1^{(i_1)} & y_2^{(1)} - x_2^{(i_1)} & \ldots & y_n^{(1)} - x_n^{(i_1)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-m)} - x_1^{(i_1)} & y_2^{(n-m)} - x_2^{(i_1)} & \ldots & y_n^{(n-m)} - x_n^{(i_1)} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Легко видеть, что любая из точек (3) удовлетворяет уравнению (4). Действительно, если в определитель, фигурирующий в левой части этого уравнения, вместо x_1, x_2, …, x_n подставить координаты любой из точек U_l ($l = 1, 2, \ldots, N$), то получим определитель

$$\begin{vmatrix} x_1^{(l)} - x_1^{(i_1)} & x_2^{(l)} - x_2^{(i_1)} & \ldots & x_n^{(l)} - x_n^{(i_1)} \\ x_1^{(i_2)} - x_1^{(i_1)} & x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_1)} & \ldots & x_n^{(i_2)} - x_n^{(i_1)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(i_m)} - x_1^{(i_1)} & x_2^{(i_m)} - x_2^{(i_1)} & \ldots & x_n^{(i_m)} - x_n^{(i_1)} \\ y_1^{(1)} - x_1^{(i_1)} & y_2^{(1)} - x_2^{(i_1)} & \ldots & y_n^{(1)} - x_n^{(i_1)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-m)} - x_1^{(i_1)} & y_2^{(n-m)} - x_2^{(i_1)} & \ldots & y_n^{(n-m)} - x_n^{(i_1)} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Если $l = i_1$, то первая строка определителя (5) нулевая, и поэтому он равен нулю. Если $l \in \{i_2, \ldots, i_m\}$, то определитель (5) равен нулю в силу того, что первая его строка совпадает с одной из строк с номерами 2, …, m. Если же $l \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, то в силу аффинной зависимости точек V_l, V_{i_1}, V_{i_2}, …, V_{i_m} векторы $\overrightarrow{V_{i_1}V_l}$, $\overrightarrow{V_{i_1}V_{i_2}}$, $\overrightarrow{V_{i_1}V_{i_3}}$, …, $\overrightarrow{V_{i_1}V_{i_m}}$ линейно зависимы, следовательно, линейно зависимы первые m строк определителя (5), а значит этот определитель и в данном случае равен нулю.

Таким образом, все N точек (3) принадлежат гиперплоскости Π_{n-1}, что противоречит условию леммы. Следовательно, наше предположение о том, что любые n точек из набора (3) аффинно зависимы, не верно, а значит, среди точек (3) действительно найдутся n аффинно независимых точек. Лемма 1 доказана.

Из (1) получаем:

$$\boldsymbol{B}^{(l)} = (S + \tau^{(l)} K_S)\,\boldsymbol{h}^{(l)} + \boldsymbol{b} + \tau^{(l)} \boldsymbol{k_b},\ l = 1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{B}^{(l)} = (B_1^{(l)}, B_2^{(l)}, B_3^{(l)})^T$ – истинный вектор магнитной индукции в той же точке пространства, что и измеренный вектор $\boldsymbol{h}^{(l)}$, $l = 1, 2, \ldots, N$.

Перепишем равенство (6) в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} s_{11}+\tau^{(l)}t_{11} & s_{12}+\tau^{(l)}t_{12} & s_{13}+\tau^{(l)}t_{13} \\ s_{21}+\tau^{(l)}t_{21} & s_{22}+\tau^{(l)}t_{22} & s_{23}+\tau^{(l)}t_{23} \\ s_{31}+\tau^{(l)}t_{31} & s_{32}+\tau^{(l)}t_{32} & s_{33}+\tau^{(l)}t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(l)} \\ h_2^{(l)} \\ h_3^{(l)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1+\tau^{(l)}\theta_1 \\ b_2+\tau^{(l)}\theta_2 \\ b_3+\tau^{(l)}\theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^{(l)} \\ B_2^{(l)} \\ B_3^{(l)} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$l = 1, 2, \ldots, N$. Каждое из N векторных равенств (7) запишем в виде системы трех скалярных равенств:

$$\left(s_{i1}+\tau^{(l)}t_{i1}\right)h_1^{(l)} + \left(s_{i2}+\tau^{(l)}t_{i2}\right)h_2^{(l)} + \left(s_{i3}+\tau^{(l)}t_{i3}\right)h_3^{(l)} + b_i + \tau^{(l)}\theta_i = B_i^{(l)}, \quad i = 1,2,3,$$

$l = 1, 2, \ldots, N$.

Введем в рассмотрение штрафную функцию 24 переменных s_{ij}, t_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), b_i, θ_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\Phi = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\left[B_i^{(l)} - \tau^{(l)}\theta_i - b_i - \left(s_{i1}+\tau^{(l)}t_{i1}\right)h_1^{(l)} - \left(s_{i2}+\tau^{(l)}t_{i2}\right)h_2^{(l)} - \left(s_{i3}+\tau^{(l)}t_{i3}\right)h_3^{(l)}\right]^2. \tag{8}$$

Алгоритм решения задачи калибровки измерительных осей БМ сводится к поиску методом наименьших квадратов [18] таких значений переменных s_{ij}, t_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), b_i, θ_i ($i = 1, 2, 3$), которые при заданном наборе векторов измерений $\{\boldsymbol{h}^{(l)}\}$ ($l = 1, 2, \ldots, N$) доставляют минимум функции Φ. С этой целью требуется исследовать функцию Φ на экстремум [19]. Запишем необходимое условие локального экстремума этой функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial b_i} = -2\sum\limits_{l=1}^{N}\left[B_i^{(l)} - \tau^{(l)}\theta_i - b_i - \left(s_{i1}+\tau^{(l)}t_{i1}\right)h_1^{(l)} - \left(s_{i2}+\tau^{(l)}t_{i2}\right)h_2^{(l)} - \left(s_{i3}+\tau^{(l)}t_{i3}\right)h_3^{(l)}\right] = 0, \ i = 1,2,3, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial \theta_i} = -2\sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)}\left[B_i^{(l)} - \tau^{(l)}\theta_i - b_i - \left(s_{i1}+\tau^{(l)}t_{i1}\right)h_1^{(l)} - \left(s_{i2}+\tau^{(l)}t_{i2}\right)h_2^{(l)} - \left(s_{i3}+\tau^{(l)}t_{i3}\right)h_3^{(l)}\right] = 0, \ i = 1,2,3, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial s_{ij}} = -2\sum\limits_{l=1}^{N}h_j^{(l)}\left[B_i^{(l)} - \tau^{(l)}\theta_i - b_i - \left(s_{i1}+\tau^{(l)}t_{i1}\right)h_1^{(l)} - \left(s_{i2}+\tau^{(l)}t_{i2}\right)h_2^{(l)} - \left(s_{i3}+\tau^{(l)}t_{i3}\right)h_3^{(l)}\right] = 0, \ i, j = 1,2,3, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial t_{ij}} = -2\sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)}h_j^{(l)}\left[B_i^{(l)} - \tau^{(l)}\theta_i - b_i - \left(s_{i1}+\tau^{(l)}t_{i1}\right)h_1^{(l)} - \left(s_{i2}+\tau^{(l)}t_{i2}\right)h_2^{(l)} - \left(s_{i3}+\tau^{(l)}t_{i3}\right)h_3^{(l)}\right] = 0, \ i, j = 1,2,3. \end{cases} \tag{9}$$

Требуется найти стационарные точки функции Φ, т. е. решение системы (9) – системы линейных алгебраических уравнений относительно 24 неизвестных s_{ij}, t_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), b_i, θ_i ($i = 1, 2, 3$).

Для удобства разобьем (9) на три системы

$$\begin{cases} Nb_i + \theta_i\sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)} + \sum\limits_{k=1}^{3}\left[s_{ik}\sum\limits_{l=1}^{N}h_k^{(l)}\right] + \sum\limits_{k=1}^{3}\left[t_{ik}\sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)}h_k^{(l)}\right] = \sum\limits_{l=1}^{N}B_i^{(l)}, \\ b_i\sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)} + \theta_i\sum\limits_{l=1}^{N}\left(\tau^{(l)}\right)^2 + \sum\limits_{k=1}^{3}\left[s_{ik}\sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)}h_k^{(l)}\right] + \sum\limits_{k=1}^{3}\left[t_{ik}\sum\limits_{l=1}^{N}\left(\tau^{(l)}\right)^2h_k^{(l)}\right] = \sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)}B_i^{(l)}, \\ b_i\sum\limits_{l=1}^{N}h_j^{(l)} + \theta_i\sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)}h_j^{(l)} + \sum\limits_{k=1}^{3}\left[s_{ik}\sum\limits_{l=1}^{N}h_k^{(l)}h_j^{(l)}\right] + \sum\limits_{k=1}^{3}\left[t_{ik}\sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)}h_k^{(l)}h_j^{(l)}\right] = \sum\limits_{l=1}^{N}h_j^{(l)}B_i^{(l)}, \quad j = 1,2,3, \\ b_i\sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)}h_j^{(l)} + \theta_i\sum\limits_{l=1}^{N}\left(\tau^{(l)}\right)^2h_j^{(l)} + \sum\limits_{k=1}^{3}\left[s_{ik}\sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)}h_k^{(l)}h_j^{(l)}\right] + \sum\limits_{k=1}^{3}\left[t_{ik}\sum\limits_{l=1}^{N}\left(\tau^{(l)}\right)^2h_k^{(l)}h_j^{(l)}\right] = \sum\limits_{l=1}^{N}\tau^{(l)}B_i^{(l)}h_j^{(l)}, \quad j = 1,2,3, \end{cases} \tag{10}$$

$i = 1, 2, 3$. Заметим, что i-я система (10) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно восьми неизвестных b_i, θ_i, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, $i = 1, 2, 3$.

Докажем, что каждая из трех систем уравнений (10) имеет решение, и притом только одно. Для этого достаточно показать, что основная матрица каждой из этих трех систем не вырождена. Основная матрица каждой из указанных систем – матрица Грама, составленная из скалярных произведений следующих восьми векторов:

$$(1,1,\ldots,1),\ \left(\tau^{(1)},\tau^{(2)},\ldots,\tau^{(N)}\right),\ \left(h_i^{(1)},h_i^{(2)},\ldots,h_i^{(N)}\right)\ (i=1,2,3),$$

$$\left(\tau^{(1)}h_i^{(1)},\tau^{(2)}h_i^{(2)},\ldots,\tau^{(N)}h_i^{(N)}\right)\ (i=1,2,3). \tag{11}$$

При этом скалярное произведение двух векторов определяется как сумма произведений их компонент с одинаковыми номерами.

Докажем, что система векторов (11) линейно независима, откуда будет следовать невырожденность матрицы Грама этой системы [20], т. е. основной матрицы каждой из этих трех систем уравнений (10). Доказательство проведем методом «от противного». Предположим, что система векторов (11) линейно зависима. Тогда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau^{(1)} & h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & h_3^{(1)} & \tau^{(1)}h_1^{(1)} & \tau^{(1)}h_2^{(1)} & \tau^{(1)}h_3^{(1)} \\ 1 & \tau^{(2)} & h_1^{(2)} & h_2^{(2)} & h_3^{(2)} & \tau^{(2)}h_1^{(2)} & \tau^{(2)}h_2^{(2)} & \tau^{(2)}h_3^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & \tau^{(N)} & h_1^{(N)} & h_2^{(N)} & h_3^{(N)} & \tau^{(N)}h_1^{(N)} & \tau^{(N)}h_2^{(N)} & \tau^{(N)}h_3^{(N)} \end{pmatrix},$$

столбцы которой составлены из компонент векторов (11), меньше 8. Следовательно, любой минор 8-го порядка этой матрицы равен нулю (считаем, что $N \geq 8$), откуда вытекает справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 1 & \tau^{(i_1)} & h_1^{(i_1)} & h_2^{(i_1)} & h_3^{(i_1)} & \tau^{(i_1)}h_1^{(i_1)} & \tau^{(i_1)}h_2^{(i_1)} & \tau^{(i_1)}h_3^{(i_1)} \\ 1 & \tau^{(i_2)} & h_1^{(i_2)} & h_2^{(i_2)} & h_3^{(i_2)} & \tau^{(i_2)}h_1^{(i_2)} & \tau^{(i_2)}h_2^{(i_2)} & \tau^{(i_2)}h_3^{(i_2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & \tau^{(i_7)} & h_1^{(i_7)} & h_2^{(i_7)} & h_3^{(i_7)} & \tau^{(i_7)}h_1^{(i_7)} & \tau^{(i_7)}h_2^{(i_7)} & \tau^{(i_7)}h_3^{(i_7)} \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

$1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_7 \leq N$, где $U_{i_l}\left(\tau^{(i_l)},h_1^{(i_l)},h_2^{(i_l)},h_3^{(i_l)},\tau^{(i_l)}h_1^{(i_l)},\tau^{(i_l)}h_2^{(i_l)},\tau^{(i_l)}h_3^{(i_l)}\right)$ – аффинно независимые точки из набора точек (2), $l = 1, 2,\ldots, 7$ (семь таких точек существуют в силу Леммы 1), а $\left(x_1,x_2,\ldots,x_7\right)$ – координаты любой из остальных $(N - 7)$ точек набора (2). Равенство (12) равносильно равенству

$$\begin{vmatrix} x_1-\tau^{(i_1)} & x_2-h_1^{(i_1)} & x_3-h_2^{(i_1)} & x_4-h_3^{(i_1)} & x_5-\tau^{(i_1)}h_1^{(i_1)} & x_6-\tau^{(i_1)}h_2^{(i_1)} & x_7-\tau^{(i_1)}h_3^{(i_1)} \\ \tau^{(i_2)}-\tau^{(i_1)} & h_1^{(i_2)}-h_1^{(i_1)} & h_2^{(i_2)}-h_2^{(i_1)} & h_3^{(i_2)}-h_3^{(i_1)} & \tau^{(i_2)}h_1^{(i_2)}-\tau^{(i_1)}h_1^{(i_1)} & \tau^{(i_2)}h_2^{(i_2)}-\tau^{(i_1)}h_2^{(i_1)} & \tau^{(i_2)}h_3^{(i_2)}-\tau^{(i_1)}h_3^{(i_1)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau^{(i_7)}-\tau^{(i_1)} & h_1^{(i_7)}-h_1^{(i_1)} & h_2^{(i_7)}-h_2^{(i_1)} & h_3^{(i_7)}-h_3^{(i_1)} & \tau^{(i_7)}h_1^{(i_7)}-\tau^{(i_1)}h_1^{(i_1)} & \tau^{(i_7)}h_2^{(i_7)}-\tau^{(i_1)}h_2^{(i_1)} & \tau^{(i_7)}h_3^{(i_7)}-\tau^{(i_1)}h_3^{(i_1)} \end{vmatrix} = 0,$$

которое представляет собой уравнение гиперплоскости, проходящей через аффинно независимые точки U_{i_1}, U_{i_2}, …, U_{i_7}. Из вышесказанного следует, что этому уравнению удовлетворяют координаты любой из N точек набора (2), а это противоречит тому, что N точек (2) не лежат в одной гиперплоскости.

Таким образом, система векторов (11) линейно независима, а значит основная матрица каждой из трех систем уравнений (10) не вырождена. Следовательно, каждая из этих систем имеет решение, и притом только одно, что и требовалось доказать.

Введем следующие обозначения:

$$A_i = \sum_{l=1}^{N} B_i^{(l)},\ C_i = \sum_{l=1}^{N} \tau^{(l)} B_i^{(l)},\ i = 1,2,3;\ G_j = \sum_{l=1}^{N} \tau^{(l)} h_j^{(l)},\ H_j = \sum_{l=1}^{N} h_j^{(l)},\ L_j = \sum_{l=1}^{N} \left(\tau^{(l)}\right)^2 h_j^{(l)},\ j = 1,2,3;$$

$$M_{kj} = M_{jk} = \sum_{l=1}^{N} h_k^{(l)} h_j^{(l)},\ P_{kj} = P_{jk} = \sum_{l=1}^{N} \tau^{(l)} h_k^{(l)} h_j^{(l)},\ Q_{kj} = Q_{jk} = \sum_{l=1}^{N} \left(\tau^{(l)}\right)^2 h_k^{(l)} h_j^{(l)},\ k, j = 1,2,3;$$

$$D_{ij} = \sum_{l=1}^{N} B_i^{(l)} h_j^{(l)},\ F_{ij} = \sum_{l=1}^{N} \tau^{(l)} B_i^{(l)} h_j^{(l)},\ i, j = 1,2,3;\ R = \sum_{l=1}^{N} \left(\tau^{(l)}\right)^2,\ T = \sum_{l=1}^{N} \tau^{(l)}.$$

Тогда каждую из трех систем уравнений (10) можно записать в виде

$$\begin{cases} Nb_i + T\theta_i + \sum_{k=1}^{3} H_k s_{ik} + \sum_{k=1}^{3} G_k t_{ik} = A_i, \\ Tb_i + R\theta_i + \sum_{k=1}^{3} G_k s_{ik} + \sum_{k=1}^{3} L_k t_{ik} = C_i, \\ H_j b_i + G_j \theta_i + \sum_{k=1}^{3} M_{kj} s_{ik} + \sum_{k=1}^{3} P_{kj} t_{ik} = D_{ij}, \quad j = 1,2,3, \\ G_j b_i + L_j \theta_i + \sum_{k=1}^{3} P_{kj} s_{ik} + \sum_{k=1}^{3} Q_{kj} t_{ik} = F_{ij}, \quad j = 1,2,3, \end{cases} \tag{13}$$

i = 1, 2, 3. В каждой из трех систем (13) выразим из первых двух уравнений b_i и θ_i через s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, затем исключим b_i и θ_i из остальных шести уравнений системы и умножим обе части каждого из последних шести уравнений на $(T^2 - NR)$:

$$\begin{cases} b_i = \left(T^2 - NR\right)^{-1} \left[TC_i - RA_i + \sum_{k=1}^{3} \left(RH_k - TG_k\right) s_{ik} + \sum_{k=1}^{3} \left(RG_k - TL_k\right) t_{ik} \right], \\ \theta_i = \left(T^2 - NR\right)^{-1} \left[TA_i - NC_i + \sum_{k=1}^{3} \left(NG_k - TH_k\right) s_{ik} + \sum_{k=1}^{3} \left(NL_k - TG_k\right) t_{ik} \right], \end{cases} \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{j,k} s_{ik} + \sum_{k=1}^{3} \beta_{j,k} t_{ik} = \gamma_{j,i}, \quad j = 1,2,\ldots,6, \tag{15}$$

i = 1, 2, 3, где коэффициенты при неизвестных и свободные члены определяются равенствами

$$\alpha_{j,k} = \left(T^2 - NR\right) M_{kj} + H_j \left(RH_k - TG_k\right) + G_j \left(NG_k - TH_k\right),$$

$$\alpha_{j+3,k} = \left(T^2 - NR\right) P_{kj} + G_j \left(RH_k - TG_k\right) + L_j \left(NG_k - TH_k\right),$$

$$\beta_{j,k} = \left(T^2 - NR\right) P_{kj} + H_j \left(RG_k - TL_k\right) + G_j \left(NL_k - TG_k\right),$$

$$\beta_{j+3,k} = \left(T^2 - NR\right) Q_{kj} + G_j \left(RG_k - TL_k\right) + L_j \left(NL_k - TG_k\right),$$

$$\gamma_{j,i} = \left(T^2 - NR\right) D_{ij} + H_j \left(RA_i - TC_i\right) + G_j \left(NC_i - TA_i\right),$$

$$\gamma_{j+3,i} = \left(T^2 - NR\right) F_{ij} + G_j \left(RA_i - TC_i\right) + L_j \left(NC_i - TA_i\right),$$

i, j, k = 1, 2, 3.

Заметим, что хотя бы один из миноров третьего порядка, расположенных в первых трех столбцах основной матрицы,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \beta_{61} & \beta_{62} & \beta_{63} \end{pmatrix} \tag{16}$$

каждой из трех систем уравнений (15), отличен от нуля. Действительно, в силу теоремы Лапласа, определитель матрицы (16) равен сумме произведений всех миноров третьего порядка, расположенных в первых трех столбцах этой матрицы, на их алгебраические дополнения, и если бы все указанные миноры равнялись нулю, то нулю равнялся бы и определитель матрицы (16), что противоречило бы необходимому и достаточному условию существования единственного решения каждой из трех систем уравнений (15), а значит и каждой из трех систем уравнений (10).

Пусть j_1, j_2, j_3 $(1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le 6)$ – номера строк матрицы (16), на пересечении которых с первыми тремя столбцами этой матрицы расположен отличный от нуля минор третьего порядка. Поменяем местами уравнения каждой из трех систем (15) так, чтобы уравнения с номерами j_1, j_2, j_3 оказались соответственно первым, вторым и третьим. Номера уравнений, оказавшихся при этом на четвертом, пятом и шестом местах, обозначим соответственно через j_4, j_5, j_6. Введем также следующие обозначения:

$$\Omega_{11} = \left(\alpha_{j_n,k}\right)_{n,k=1}^{3}, \quad \Omega_{12} = \left(\beta_{j_n,k}\right)_{n,k=1}^{3}, \quad \Omega_{21} = \left(\alpha_{j_{n+3},k}\right)_{n,k=1}^{3}, \quad \Omega_{22} = \left(\beta_{j_{n+3},k}\right)_{n,k=1}^{3},$$

$$\mathbf{\Gamma}_{1i} = \left(\gamma_{j_1,i}, \gamma_{j_2,i}, \gamma_{j_3,i}\right)^T, \quad \mathbf{\Gamma}_{2i} = \left(\gamma_{j_4,i}, \gamma_{j_5,i}, \gamma_{j_6,i}\right)^T,$$

$i = 1, 2, 3$. Тогда расширенная матрица системы, полученной из i-й системы (15) в результате указанной выше перестановки уравнений, примет вид

$$\left(\begin{array}{cc|c} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \mathbf{\Gamma}_{1i} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \mathbf{\Gamma}_{2i} \end{array}\right), \tag{17}$$

$i = 1, 2, 3$. При этом Ω_{11} – невырожденная матрица в силу ее определения и условия выбора номеров j_1, j_2, j_3 строк матрицы (16). Из второй строки i-й блочной матрицы (17) вычтем ее первую строку, умноженную слева на $\Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \mathbf{\Gamma}_{1i} \\ O & \Omega_{22} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12} & \mathbf{\Gamma}_{2i} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\mathbf{\Gamma}_{1i} \end{array}\right), \tag{18}$$

$i = 1, 2, 3$, где O – нулевая квадратная матрица третьего порядка. Полученная матрица (18) эквивалентна матрице (17) [21]. Для каждого $i = 1, 2, 3$ последние три уравнения системы, соответствующей расширенной матрице (18), образуют систему, матричная запись которой выглядит следующим образом:

$$\left(\Omega_{22} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}\right)\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{\Gamma}_{2i} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\mathbf{\Gamma}_{1i}, \tag{19}$$

где $\mathbf{\Lambda}_i = (t_{i1}, t_{i2}, t_{i3})^T$, $i = 1, 2, 3$.

Заметим, что основная матрица $\left(\Omega_{22} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}\right)$ каждой из трех систем уравнений (19) не вырождена, так как в противном случае нарушалось бы необходимое и достаточное условие существования единственного решения каждой из трех систем (19), а значит и каждой из трех систем (15) и, следовательно, каждой из трех систем (10).

Значения неизвестных t_{i1}, t_{i2}, t_{i3} для каждого i = 1, 2, 3 находим из системы уравнений (19) по формулам Крамера

$$t_{ik} = \frac{\Delta_{i,k}}{\Delta}, \quad i,k = 1,2,3, \tag{20}$$

где

$$\Delta = \det\left(\Omega_{22} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}\right),$$

а каждый из определителей $\Delta_{i,k}$ получаем из определителя Δ заменой его k-го столбца на столбец свободных членов

$$\mathbf{\Gamma}_{2i} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\mathbf{\Gamma}_{1i},$$

i, k = 1, 2, 3.

Подставляя для каждого i = 1, 2, 3 в первые три уравнения системы, соответствующей расширенной матрице (18), вместо t_{i1}, t_{i2}, t_{i3} значения этих неизвестных, вычисленные по формулам (20), получим систему трех уравнений относительно трех неизвестных s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, матричная запись которой имеет вид

$$\Omega_{11}\mathbf{\Sigma}_i = \mathbf{\Gamma}_{1i} - \Omega_{12}\tilde{\mathbf{\Lambda}}_i, \tag{21}$$

где $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_i$ – вектор-столбец решений системы уравнений (19), $\mathbf{\Sigma}_i = (s_{i1}, s_{i2}, s_{i3})^T$, i = 1, 2, 3. Значения неизвестных s_{i1}, s_{i2}, s_{i3} для каждого i = 1, 2, 3 находим из системы уравнений (21) по формулам Крамера

$$s_{ik} = \frac{\tilde{\Delta}_{i,k}}{\tilde{\Delta}}, \quad i,k = 1,2,3,$$

где

$$\tilde{\Delta} = \det\left(\Omega_{11}\right),$$

а каждый из определителей $\tilde{\Delta}_{i,k}$ получаем из определителя $\tilde{\Delta}$ заменой его k-го столбца на столбец свободных членов

$$\mathbf{\Gamma}_{1i} - \Omega_{12}\tilde{\mathbf{\Lambda}}_i,$$

i, k = 1, 2, 3.

После нахождения значений неизвестных t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3} находим значения неизвестных b_i и θ_i по формулам (14), i = 1, 2, 3.

Докажем, что найденная стационарная точка функции Φ, определенной равенством (8), т. е. решение системы уравнений (9), полученное изложенным выше способом, доставляет минимум функции Φ. Выведем выражение второго дифференциала $d^2\Phi$ функции Φ:

$$d^2\Phi = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial s_{ij}\partial s_{km}}ds_{ij}ds_{km} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial s_{ij}\partial t_{km}}ds_{ij}dt_{km} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t_{ij}\partial t_{km}}dt_{ij}dt_{km}\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\left[2\frac{\partial^2\Phi}{\partial b_i\partial\theta_m}db_i d\theta_m + \frac{\partial^2\Phi}{\partial b_i\partial b_m}db_i db_m + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_i\partial\theta_m}d\theta_i d\theta_m\right] +$$

$$+2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial s_{ij}\partial b_k}ds_{ij}db_k + \frac{\partial^2\Phi}{\partial s_{ij}\partial\theta_k}ds_{ij}d\theta_k + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t_{ij}\partial b_k}dt_{ij}db_k + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t_{ij}\partial\theta_k}dt_{ij}d\theta_k\right] =$$

$$= 2\left\{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{N}\left[h_j^{(l)}h_m^{(l)}\Delta s_{ij}\Delta s_{im} + 2\tau^{(l)}h_j^{(l)}h_m^{(l)}\Delta s_{ij}\Delta t_{im} + \left(\tau^{(l)}\right)^2 h_j^{(l)}h_m^{(l)}\Delta t_{ij}\Delta t_{im}\right] +\right.$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{N}\left[2\tau^{(l)}\Delta b_i\Delta\theta_i+\left(\Delta b_i\right)^2+\left(\tau^{(l)}\right)^2\left(\Delta\theta_i\right)^2\right]+$$

$$+2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{N}\left[h_j^{(l)}\Delta s_{ij}\Delta b_i+\tau^{(l)}h_j^{(l)}\Delta s_{ij}\Delta\theta_i+\tau^{(l)}h_j^{(l)}\Delta t_{ij}\Delta b_i+\left(\tau^{(l)}\right)^2 h_j^{(l)}\Delta t_{ij}\Delta\theta_i\right]\Bigg\}=$$

$$=2\sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{N}\left\{\Delta b_i+\tau^{(l)}\Delta\theta_i+\sum_{j=1}^{3}h_j^{(l)}\Delta s_{ij}+\sum_{j=1}^{3}\tau^{(l)}h_j^{(l)}\Delta t_{ij}\right\}^2,$$

где $\Delta s_{ij} = ds_{ij}$, $\Delta t_{ij} = dt_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, $\Delta b_i = db_i$, $\Delta\theta_i = d\theta_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Из полученного выражения для $d^2\Phi$ следует, что при условии неравенства нулю хотя бы одного из слагаемых

$$\left\{\Delta b_i+\tau^{(l)}\Delta\theta_i+\sum_{j=1}^{3}h_j^{(l)}\Delta s_{ij}+\sum_{j=1}^{3}\tau^{(l)}h_j^{(l)}\Delta t_{ij}\right\}^2 \quad \left(i=1,2,3,\ l=1,\ldots,N\right)$$

В последней двойной сумме (с физической точки зрения это вполне естественно) имеет место неравенство $d^2\Phi > 0$ в любой точке, а значит, и в найденной стационарной точке функции Ф. Следовательно, полученное решение системы уравнений (9) действительно доставляет минимум функции Ф [19].

Заключение

Итак, мы получили аналитическое решение задачи калибровки магнитометра космического аппарата для модели, учитывающей вектор температурной зависимости смещений нуля для каждой из измерительных осей блока магнитометра и матрицу линейной температурной зависимости каждого из членов матрицы чувствительности, масштабирующей сигнал на основе реальной чувствительности каждой оси и включающей линейные внеосевые эффекты.

Процедура вычисления калибровочных параметров БМ по выведенным формулам обладает следующими очевидными преимуществами по сравнению с численными методами решения этой задачи:

- существенно уменьшается число арифметических операций;
- исчезает проблема возможной неустойчивости метода.

Библиографические ссылки

1. Belsten N., Knapp M., Masterson R., Payne C., Ammons K., Lind F.D., Cahoy K. Verification and calibration of a commercial anisotropic magnetoresistive magnetometer by multivariate non-linear regression // Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems. 2023. Vol. 12, No. 2, P. 201–213. Doi: 10.5194/gi-12-201-2023.

2. Chen M., Liu K., Hu X., Li Y., Hao X., Pan Z. Ground calibration of the Mars orbiter magnetometer onboard Tianwen-1 // Earth and Planetary Physics. 2023. Vol. 7, No. 3. P. 371–377. Doi: 10.26464/epp2023004.

3. Cheng S., Wang G., Zhang T., Pan Z., Meng L., Yi Z. An optimal method for in-flight calibration of the fluxgate magnetometer when the total magnetic field of alfvén waves has a drift trend // Acta Geophysica Sinica. 2022. Vol. 65, No. 5. P. 1558–1570. Doi: 10.6038/cjg2022P0362.

4. Crassidis J. L., Cheng Ya. Three-axis magnetometer calibration using total least squares // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2021. Vol. 44, No. 8. P. 1410–1424. Doi: 10.2514/1.g005305.

5. Huang Yu., Wu L., Wang Ya., Xu Y. Scalar calibration of total instrument errors of tri-axial magnetometer using constrained optimization independent of magnetic field intensity // IEEE Sensors Journal. 2024. Vol. 24, No. 9. P. 14352–14360. Doi: 10.1109/jsen.2024.3370624.

6. Kim Ji. H., Lee Ch. Ju., Lee Ju. K. Effects of outlier elimination in magnetometer calibration data on the performance of ellipsoid fitting-based calibration // Journal of Institute of Control, Robotics and Systems. 2024. Vol. 30, No. 12. P. 1373–1379. Doi: 10.5302/j.icros.2024.24.0209.

7. Kinatas H., Hajiyev Ch. Triad-Aided Multiplicative EKF for Small Satellite Attitude Estimation and Magnetometer Calibration // IEEE Sensors Journal. 2023. Vol. 23, No. 22. P. 27161–27168. Doi: 10.1109/jsen.2023.3317969.

8. Liu J., Yan Y., Yan Sh., Li X. A hybrid calibration method for a three-axis magnetometer in limited-range attitudes // IEEE Sensors Journal. 2022. Vol. 22, No. 1. P. 203–210. Doi: 10.1109/jsen.2021.3123728.

9. Integrated calibration of strap-down geomagnetic vector measurement system / H. Pang, Ch. Wan, Sh. Mou et al. // IEEE Sensors Journal. 2022. Vol. 22, No. 11. P. 10476–10484. Doi: 10.1109/jsen.2022.3171325.

10. Particle swarm optimization for magnetometer calibration with rotation axis fitting using in-orbit data / B. A. Riwanto, P. Niemela, M. R. Mughal et al. // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2022. Vol. 58, No. 2. P. 1211–1223. Doi: 10.1109/TAES.2021.3122514.

11. Soken H. E. A survey of calibration algorithms for small satellite magnetometers // Measurement. 2018. Vol. 122. P. 417–423. Doi: 10.1016/j.measurement.2017.10.017.

12. Song H., Park Ja., Lee Ja. Magnetometer calibration based on the Chaos-7 model // Journal of Astronomy and Space Science. 2021. Vol. 38, No. 3. P. 157–164. Doi: 10.5140/jass.2021.38.3.157.

13. Wang Y., Yu X., Zong Q., Xiao Ch., Liu Si., Chen H., Zou H., Shi W. In-flight vector magnetometer calibration for FY-3E satellite // Science China Technological Sciences. 2023. Vol. 66, No. 6. P. 1867–1868. Doi: 10.1007/s11431-022-2338-1.

14. Withanage D. Ch., Teramoto M., Cho M. On-orbit magnetometer data calibration using genetic algorithm and interchangeability of the calibration parameters // Applied Sciences (Switzerland). 2023. Vol. 13, No. 11. P. 6742. Doi: 10.3390/app13116742.

15. Attitude-independent magnetometer calibration based on adaptive filtering / W. Zeng, Q. Bian, Ju. Gao et al. // IEEE Sensors Journal. 2022. Vol. 22, No. 1. P. 195–202. Doi: 10.1109/jsen.2021.3114347.

16. Калибровка магнитометра космического аппарата «Декарт» в полёте / П. Е. Розин, А. В. Симонов, Е. С. Гордиенко, Ю. К. Зайко // Труды МАИ. 2022. № 124. Doi: 10.34759/trd-2022-124-19.

17. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М. : Ленанд, 2021. 672 с.

18. Зоркальцев В. И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. Новосибирск : Наука, 1995. 220 с.

19. Цирлин А. М. Методы оптимизации для инженеров. Москва, Берлин : Директ-Медиа, 2015. 214 с.

20. Horn R. A., Johnson C.R. Matrix Analysis (2nd ed.). Cambridge University Press, 2012, 643 p.

21. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Физматлит, 2004. 560 с.

References

1. Belsten N., Knapp M., Masterson R., Payne C., Ammons K., Lind F.D., Cahoy K. Verification and calibration of a commercial anisotropic magnetoresistive magnetometer by multivariate non-linear regression. *Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems*. 2023, Vol. 12, No. 2, P. 201–213. Doi: 10.5194/gi-12-201-2023.

2. Chen M., Liu K., Hu X., Li Y., Hao X., Pan Z. Ground calibration of the Mars orbiter magnetometer onboard Tianwen-1. *Earth and Planetary Physics*. 2023, Vol. 7, No. 3, P. 371–377. Doi: 10.26464/epp2023004.

3. Cheng S., Wang G., Zhang T., Pan Z., Meng L., Yi Z. An optimal method for in-flight calibration of the fluxgate magnetometer when the total magnetic field of alfvén waves has a drift trend. *Acta Geophysica Sinica*. 2022, Vol. 65, No. 5, P. 1558–1570. Doi: 10.6038/cjg2022P0362.

4. Crassidis J.L., Cheng Ya. Three-axis magnetometer calibration using total least squares. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2021, Vol. 44, No. 8, P. 1410–1424. Doi: 10.2514/1.g005305.

5. Huang Yu., Wu L., Wang Ya., Xu Y. Scalar calibration of total instrument errors of tri-axial magnetometer using constrained optimization independent of magnetic field intensity. *IEEE Sensors Journal*. 2024, Vol. 24, No. 9, P. 14352–14360. Doi: 10.1109/jsen.2024.3370624.

6. Kim Ji.H., Lee Ch.Ju., Lee Ju.K. Effects of outlier elimination in magnetometer calibration data on the performance of ellipsoid fitting-based calibration. *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*. 2024, Vol. 30, No. 12, P. 1373–1379. Doi: 10.5302/j.icros.2024.24.0209.

7. Kinatas H., Hajiyev Ch. Triad-Aided Multiplicative EKF for Small Satellite Attitude Estimation and Magnetometer Calibration. *IEEE Sensors Journal*. 2023, Vol. 23, No. 22, P. 27161–27168. Doi: 10.1109/jsen.2023.3317969.

8. Liu J., Yan Y., Yan Sh., Li X. A hybrid calibration method for a three-axis magnetometer in limited-range attitudes. *IEEE Sensors Journal*. 2022, Vol. 22, No. 1, P. 203–210. Doi: 10.1109/jsen.2021.3123728.

9. Pang H., Wan Ch., Mou Sh., Wei Lu., Li H., Zhang Qi., Pan M., Yang D. Integrated calibration of strap-down geomagnetic vector measurement system. *IEEE Sensors Journal*. 2022, Vol. 22, No. 11, P. 10476–10484. Doi: 10.1109/jsen.2022.3171325.

10. Riwanto B.A., Niemela P., Mughal M.R., Praks J., Ehrpais H., Slavinskis A. Particle swarm optimization for magnetometer calibration with rotation axis fitting using in-orbit data. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2022, Vol. 58, No. 2, P. 1211–1223. Doi: 10.1109/TAES.2021.3122514.

11. Soken H. E. A survey of calibration algorithms for small satellite magnetometers. *Measurement*. 2018, Vol. 122, P. 417–423. Doi: 10.1016/j.measurement.2017.10.017.

12. Song H., Park Ja., Lee Ja. Magnetometer calibration based on the Chaos-7 model. *Journal of Astronomy and Space Science*. 2021, Vol. 38, No. 3, P. 157–164. Doi: 10.5140/jass.2021.38.3.157.

13. Wang Y., Yu X., Zong Q., Xiao Ch., Liu Si., Chen H., Zou H., Shi W. In-flight vector magnetometer calibration for FY-3E satellite. *Science China Technological Sciences*. 2023, Vol. 66, No. 6, P. 1867–1868. Doi: 10.1007/s11431-022-2338-1.

14. Withanage D. Ch., Teramoto M., Cho M. On-orbit magnetometer data calibration using genetic algorithm and interchangeability of the calibration parameters. *Applied Sciences (Switzerland)*. 2023, Vol. 13, No. 11, P. 6742. Doi: 10.3390/app13116742.

15. Zeng W., Bian Q., Gao Ju., Chang L., Tong Yu. Attitude-independent magnetometer calibration based on adaptive filtering. *IEEE Sensors Journal*. 2022, Vol. 22, No. 1, P. 195–202. Doi: 10.1109/jsen.2021.3114347.

16. Rozin P. E., Simonov A. V., Gordienko E. S., Zaiko Yu. K. [In-Flight Calibration of the “Dekart” Cubesat Magnetometer]. *Trudy MAI*. 2022, No. 124. Doi: 10.34759/trd-2022-124-19 (In Russ.).

17. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional spaces]. Moscow, Lenand Publ., 2021, 672 p.

18. Zorkal'tsev V. I. *Metod naimen'shikh kvadratov: geometricheskie svoystva, al'ternativnye podkhody, prilozheniya* [Least squares: geometric properties, alternative approaches, applications]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1995, 220 p.

19. Tsirlin A. M. *Metody optimizatsii dlya inzhenerov* [Optimization methods for engineers]. Moscow, Berlin: Direkt-Media Publ., 2015, 214 p.

20. Horn R. A., Johnson C.R. Matrix Analysis (2nd ed.). Cambridge University Press, 2012, 643 p.

21. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 560 p.

Кириллов Кирилл Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: kkirillow@yandex.ru. https://orcid.org/0000-0002-3763-1303.

Кириллова Светлана Владимировна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и анализа данных; Сибирский федеральный университет. E-mail: svkirillova2009@yandex.ru. https://orcid.org/0000-0003-3779-2825.

Мелентьев Денис Олегович – аспирант, Сибирский федеральный университет; инженер, АО «РЕШЕТНЁВ». E-mail: denes.2000@mail.ru. https://orcid.org/0009-0009-6187-4098.

Титов Геннадий Павлович – ведущий специалист; АО «РЕШЕТНЁВ». E-mail: titov@iss-reshetnev.ru. https://orcid.org/0009-0009-1223-9434.

Гашин Артем Александрович – аспирант кафедры прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: artem.gashin@gmail.com. https://orcid.org/0009-0000-7062-6285.

Kirillov Kirill Anatolievich – Dr. Sc. (Phys. and Math.), Associate Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: kkirillow@yandex.ru. https://orcid.org/0000-0002-3763-1303.

Kirillova Svetlana Vladimirovna – Cand. Sc. (Technical Sciences), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Data Analysis; Siberian Federal University. E-mail: svkirillova2009@yandex.ru. https://orcid.org/0000-0003-3779-2825.

Melent'ev Denis Olegovich – Graduate Student, Siberian Federal University; Engineer, JSC “RESHETNEV”. E-mail: denes.2000@mail.ru. https://orcid.org/0009-0009-6187-4098.

Titov Gennady Pavlovich – Leading Specialist; JSC “RESHETNEV”. E-mail: titov@iss-reshetnev.ru. https://orcid.org/0009-0009-1223-9434.

Gashin Artem Alexandrovich – Graduate student of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: artem.gashin@gmail.com. https://orcid.org/0009-0000-7062-6285.

Статья поступила в редакцию 14.01.2025; принята к публикации 04.02.2025; опубликована 11.04.2025
The article was submitted 14.01.2025; accepted for publication 04.02.2025; published 11.04.2025