

УДК 629.783

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-2-181-194

Для цитирования: Аналитическое решение задачи калибровки магнитометра космического аппарата с помощью метода наименьших квадратов / К. А. Кириллов, С. В. Кириллова, А. А. Кузнецов и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 2. С. 181–194. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-2-181-194.

For citation: Kirillov K. A., Kirillova S. V., Kuznetsov A. A., Melent'ev D. O., Safonov K. V. [Analytical solution of the spacecraft magnetometer calibration problem using the method of least squares]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 2, P. 181–194. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-2-181-194.

Аналитическое решение задачи калибровки магнитометра космического аппарата с помощью метода наименьших квадратов

К. А. Кириллов^{1*}, С. В. Кириллова², А. А. Кузнецов¹,
Д. О. Мелентьев^{2,3}, К. В. Сафонов¹

¹Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

²Сибирский федеральный университет
660041, Российская Федерация, г. Красноярск, просп. Свободный, 79

³Акционерное общество «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнёва
Российская Федерация, 662972, г. Железногорск Красноярского края, ул. Ленина, 52

*E-mail: kkirillow@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе предложен аналитический метод решения задачи калибровки магнитометра для модели, рассмотренной в [1]. При решении задачи определения калибровочных параметров блока магнитометра учитывается, что для измерений с любой пространственной ориентацией блока магнитометра величина измеряемого вектора магнитной индукции сохраняется и является известной модельной величиной. Вводится в рассмотрение штрафная функция 12 переменных, равная сумме квадратов невязок. Алгоритм решения задачи калибровки измерительных осей блока магнитометра сводится к поиску методом наименьших квадратов таких значений переменных этой функции, которые при заданном наборе векторов измерений магнитометра доставляют ей минимум. С этой целью указанная функция исследуется на условный экстремум при наличии трех уравнений связи. Составляется функция Лагранжа и, исходя из необходимого условия экстремума этой функции, формируется система 15 уравнений относительно 15 неизвестных. Доказывается, что эта система имеет четыре решения. Выведены формулы, позволяющие получить компоненты каждого из этих четырех решений. В качестве решения задачи калибровки магнитометра рекомендуется выбрать решение указанной системы, доставляющее минимум функции Лагранжа.

Ключевые слова: калибровка магнитометра, вектор магнитной индукции, метод наименьших квадратов, условный экстремум функции нескольких переменных, функция Лагранжа.

Analytical solution of the spacecraft magnetometer calibration problem using the method of least squares

K. A. Kirillov^{1*}, S. V. Kirillova², A. A. Kuznetsov¹, D. O. Melent'ev^{2,3}, K. V. Safonov¹

¹Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

²Siberian Federal University
79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation

³JSC "Information Satellite Systems" Academician M. F. Reshetnev Company"
52, Lenin St., Zheleznogorsk, Krasnoyarsk region, 662972, Russian Federation

*E-mail: kkirillow@yandex.ru

Abstract. In this paper, an analytical method is proposed for solving the problem of magnetometer calibration for the model considered in [1]. When solving the problem of determining the calibration parameters of the magnetometer unit, it is taken into account that for measurements with any spatial orientation of the magnetometer unit, the value of the measured magnetic induction vector is preserved and is a known model value. A penalty function of 12 variables equal to the sum of the squares of the residuals is introduced into consideration. The algorithm for solving the problem of calibrating the measuring axes of the magnetometer unit is reduced to searching, by the method of least squares, for such values of the variables of this function that, for a given set of magnetometer measurement vectors, provide it with a minimum. For this purpose, the specified function is examined for a conditional extremum in the presence of three equality constraints. The Lagrangian function is compiled and, based on the necessary condition for the extremum of this function, the system of 15 equations in the 15 variables is formed. It is proved that the system has four solutions. Formulas are derived that make it possible to obtain the components of each of these four solutions. As a solution to the magnetometer calibration problem, it is recommended to choose a solution to the specified system that provides a minimum of the Lagrangian function.

Keywords: magnetometer calibration, the Earth's magnetic induction vector, the method of least squares, constrained optimization, Lagrangian function.

Введение

Магнитометры входят в состав системы ориентации и стабилизации низкоорбитальных малогабаритных космических аппаратов. Они широко используются благодаря тому, что являются легкими, недорогими и надежными. Однако вследствие физических особенностей чувствительного элемента современные магнитометры требуют проведения математической калибровки. На данный момент предложены различные методы калибровки магнитометров, этим методам посвящено немалое количество научных работ [1–12], в частности, статья [9], в которой приведен обзор различных способов проведения таких операций.

В вышеупомянутых работах задача калибровки магнитометра космического аппарата решалась с применением численных методов. В настоящей статье предложен аналитический метод решения этой задачи для модели, рассмотренной в [1].

1. Модель погрешностей измерений вектора магнитной индукции

Обозначим через $\mathbf{h}$ значение измеренного вектора магнитной индукции при некотором пространственном положении блока магнитометра (БМ). Воспользуемся упрощенной моделью измерений, рассмотренной в [1]:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = QPB + \mathbf{b} + \mathbf{n}. \quad (1)$$

В (1) использованы следующие обозначения [1]:

$\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)^T$ – истинный вектор магнитной индукции;

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ – постоянный вектор, отвечающий смещениям нуля для каждой из измерительных осей БМ;

$\mathbf{n}$ – случайный вектор, отвечающий некоррелированному шуму для каждой из измерительных осей;

P – матрица, строки которой есть орты измерительных осей БМ, записанные в «базовой» системе БМ;

Q – диагональная матрица, содержащая на главной диагонали масштабные коэффициенты k_1, k_2, k_3 для измерительных осей БМ, т. е.

$$Q = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, матрица P описывает неортогональность измерительных осей БМ, а матрица Q отвечает масштабированию по этим осям.

Задача калибровки измерительных осей БМ сводится к нахождению элементов матриц P и Q , а также вектора смещений нуля $\mathbf{b}$.

2. Разработка алгоритма определения калибровочных параметров БМ

При решении задачи определения калибровочных параметров БМ воспользуемся тем, что для измерений с любой пространственной ориентацией БМ величина измеряемого вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ сохраняется и является известной модельной величиной.

Будем считать, что в полёте в результате измерений магнитометра в дискретные моменты времени получен набор векторов $\mathbf{h}^{(l)} = (h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, h_3^{(l)})^T$, $l = 1, \dots, N$. При условии отсутствия шумов измерений из формулы (1) получаем:

$$\mathbf{h}^{(l)} = QPB^{(l)} + \mathbf{b}, \quad l = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где $\mathbf{B}^{(l)} = (B_1^{(l)}, B_2^{(l)}, B_3^{(l)})^T$ – истинный вектор магнитной индукции в той же точке пространства, что и измеренный вектор $\mathbf{h}^{(l)}$, $l = 1, \dots, N$. Выразим векторы $\mathbf{B}^{(l)}$ ($l = 1, \dots, N$) из равенств (2):

$$\mathbf{B}^{(l)} = S(\mathbf{h}^{(l)} - \mathbf{b}), \quad (3)$$

$l = 1, \dots, N$, где

$$S = (QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}. \quad (4)$$

Как отмечено в [1], без ограничения общности матрицу неортогональности P можно представить с минимальным количеством неизвестных элементов следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin \varepsilon_1 & \cos \varepsilon_1 & 0 \\ \sin \varepsilon_2 & \cos \varepsilon_2 \sin \varepsilon_3 & \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – малые углы. Тогда обратная матрица P^{-1} примет вид

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \beta_3 & -\beta_1 \alpha_3 & \beta_2 \beta_3 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i = \tan \varepsilon_i$, $\beta_i = \sec \varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3$, а так как

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} k_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{-1} \end{pmatrix},$$

то в соответствии с (4) получаем:

$$S = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 \gamma_1 & \beta_1 \gamma_2 & 0 \\ (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \beta_3) \gamma_1 & -\beta_1 \alpha_3 \gamma_2 & \beta_2 \beta_3 \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\gamma_i = k_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3$.

Перепишем равенство (3) с учетом (5):

$$\begin{pmatrix} B_1^{(l)} \\ B_2^{(l)} \\ B_3^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 \gamma_1 & \beta_1 \gamma_2 & 0 \\ (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \beta_3) \gamma_1 & -\beta_1 \alpha_3 \gamma_2 & \beta_2 \beta_3 \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(l)} - b_1 \\ h_2^{(l)} - b_2 \\ h_3^{(l)} - b_3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$l = 1, \dots, N$. Каждое из N векторных равенств (6) запишем в виде системы трех скалярных равенств:

$$\begin{cases} \gamma_1(h_1^{(l)} - b_1) = B_1^{(l)}, \\ -\alpha_1\gamma_1(h_1^{(l)} - b_1) + \beta_1\gamma_2(h_2^{(l)} - b_2) = B_2^{(l)}, \\ (\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\beta_3)\gamma_1(h_1^{(l)} - b_1) - \beta_1\alpha_3\gamma_2(h_2^{(l)} - b_2) + \beta_2\beta_3\gamma_3(h_3^{(l)} - b_3) = B_3^{(l)}, \end{cases} \quad (7)$$

$l = 1, \dots, N$. В силу первого равенства системы (7) второе равенство этой системы перепишем в виде

$$-\alpha_1 B_1^{(l)} + \beta_1 \gamma_2 (h_2^{(l)} - b_2) = B_2^{(l)},$$

откуда получаем равенство

$$\beta_1 \gamma_2 (h_2^{(l)} - b_2) = \alpha_1 B_1^{(l)} + B_2^{(l)},$$

вследствие которого третье равенство системы (7) записывается следующим образом:

$$-\alpha_2 \beta_3 B_1^{(l)} - \alpha_3 B_2^{(l)} + \beta_2 \beta_3 \gamma_3 (h_3^{(l)} - b_3) = B_3^{(l)},$$

$l = 1, \dots, N$.

Введем в рассмотрение функцию двенадцати переменных $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, b_i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\Phi = \sum_{l=1}^N \left\{ \left[B_1^{(l)} - \gamma_1 (h_1^{(l)} - b_1) \right]^2 + \left[B_2^{(l)} + \alpha_1 B_1^{(l)} - \beta_1 \gamma_2 (h_2^{(l)} - b_2) \right]^2 + \left[B_3^{(l)} + \alpha_2 \beta_3 B_1^{(l)} + \alpha_3 B_2^{(l)} - \beta_2 \beta_3 \gamma_3 (h_3^{(l)} - b_3) \right]^2 \right\},$$

где переменные α_i и β_i в силу тригонометрического тождества

$$\operatorname{tg}^2 \varphi \equiv \sec^2 \varphi - 1$$

связаны равенствами

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 + 1 = 0, \quad (8)$$

$i = 1, 2, 3$.

Алгоритм решения задачи калибровки измерительных осей БМ сводится к поиску методом наименьших квадратов [13] с учетом (8) таких значений переменных $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, b_i$ ($i = 1, 2, 3$), которые при заданном наборе векторов измерений $\{\mathbf{h}^{(l)}\}$ ($l = 1, \dots, N$) доставляют минимум функции Φ . С этой целью требуется исследовать функцию Φ на условный экстремум [14] при наличии трех уравнений связи (8).

Составим функцию Лагранжа

$$F = \Phi + \sum_{i=1}^3 \lambda_i (\alpha_i^2 - \beta_i^2 + 1) \quad (9)$$

пятнадцати переменных $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, b_i, \lambda_i$ ($i = 1, 2, 3$) и запишем необходимое условие локального экстремума этой функции:

$$\begin{cases}
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \gamma_1} = -\sum_{l=1}^N [B_1^{(l)} - \gamma_1 (h_1^{(l)} - b_1)] (h_1^{(l)} - b_1) = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial b_1} = \gamma_1 \sum_{l=1}^N [B_1^{(l)} - \gamma_1 (h_1^{(l)} - b_1)] = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = \sum_{l=1}^N [B_2^{(l)} + \alpha_1 B_1^{(l)} - \beta_1 \gamma_2 (h_2^{(l)} - b_2)] B_1^{(l)} + \lambda_1 \alpha_1 = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \beta_1} = -\gamma_2 \sum_{l=1}^N [B_2^{(l)} + \alpha_1 B_1^{(l)} - \beta_1 \gamma_2 (h_2^{(l)} - b_2)] (h_2^{(l)} - b_2) - \lambda_1 \beta_1 = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \gamma_2} = -\beta_1 \sum_{l=1}^N [B_2^{(l)} + \alpha_1 B_1^{(l)} - \beta_1 \gamma_2 (h_2^{(l)} - b_2)] (h_2^{(l)} - b_2) = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial b_2} = \beta_1 \gamma_2 \sum_{l=1}^N [B_2^{(l)} + \alpha_1 B_1^{(l)} - \beta_1 \gamma_2 (h_2^{(l)} - b_2)] = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = \beta_3 \sum_{l=1}^N [B_3^{(l)} + \alpha_2 \beta_3 B_1^{(l)} + \alpha_3 B_2^{(l)} - \beta_2 \beta_3 \gamma_3 (h_3^{(l)} - b_3)] B_1^{(l)} + \lambda_2 \alpha_2 = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \beta_2} = -\beta_3 \gamma_3 \sum_{l=1}^N [B_3^{(l)} + \alpha_2 \beta_3 B_1^{(l)} + \alpha_3 B_2^{(l)} - \beta_2 \beta_3 \gamma_3 (h_3^{(l)} - b_3)] (h_3^{(l)} - b_3) - \lambda_2 \beta_2 = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \gamma_3} = -\beta_2 \beta_3 \sum_{l=1}^N [B_3^{(l)} + \alpha_2 \beta_3 B_1^{(l)} + \alpha_3 B_2^{(l)} - \beta_2 \beta_3 \gamma_3 (h_3^{(l)} - b_3)] (h_3^{(l)} - b_3) = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial b_3} = \beta_2 \beta_3 \gamma_3 \sum_{l=1}^N [B_3^{(l)} + \alpha_2 \beta_3 B_1^{(l)} + \alpha_3 B_2^{(l)} - \beta_2 \beta_3 \gamma_3 (h_3^{(l)} - b_3)] = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_3} = \sum_{l=1}^N [B_3^{(l)} + \alpha_2 \beta_3 B_1^{(l)} + \alpha_3 B_2^{(l)} - \beta_2 \beta_3 \gamma_3 (h_3^{(l)} - b_3)] B_2^{(l)} + \lambda_3 \alpha_3 = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \beta_3} = \sum_{l=1}^N [B_3^{(l)} + \alpha_2 \beta_3 B_1^{(l)} + \alpha_3 B_2^{(l)} - \beta_2 \beta_3 \gamma_3 (h_3^{(l)} - b_3)] [\alpha_2 B_1^{(l)} - \beta_2 \gamma_3 (h_3^{(l)} - b_3)] - \lambda_3 \beta_3 = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \alpha_i^2 - \beta_i^2 + 1 = 0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{cases} \quad (10)$$

Требуется найти стационарные точки функции F , т. е. решение системы уравнений (10).

Введем следующие обозначения:

$$C_i = \sum_{l=1}^N B_i^{(l)}, \quad H_i = \sum_{l=1}^N h_i^{(l)}, \quad F_i = \sum_{l=1}^N (h_i^{(l)})^2, \quad D_{ij} = \sum_{l=1}^N B_i^{(l)} h_j^{(l)}, \quad G_{ij} = G_{ji} = \sum_{l=1}^N B_i^{(l)} B_j^{(l)}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Учитывая эти обозначения, для удобства разобьем систему уравнений (10) на три нелинейные системы – систему уравнений относительно двух неизвестных b_1, γ_1 :

$$\begin{cases}
D_{11} - C_1 b_1 + (-F_1 + 2H_1 b_1 - N b_1^2) \gamma_1 = 0, \\
[C_1 + (N b_1 - H_1) \gamma_1] \gamma_1 = 0,
\end{cases} \quad (11)$$

систему уравнений относительно пяти неизвестных $b_2, \alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \lambda_1$:

$$\begin{cases}
(C_1 b_2 - D_{12}) \beta_1 \gamma_2 + (G_{11} + \lambda_1) \alpha_1 + G_{12} = 0, \\
[D_{22} - C_2 b_2 + (D_{12} - C_1 b_2) \alpha_1 + (-F_2 + 2H_2 b_2 - N b_2^2) \beta_1 \gamma_2] \gamma_2 + \lambda_1 \beta_1 = 0, \\
[D_{22} - C_2 b_2 + (D_{12} - C_1 b_2) \alpha_1 + (-F_2 + 2H_2 b_2 - N b_2^2) \beta_1 \gamma_2] \beta_1 = 0, \\
[C_2 + C_1 \alpha_1 + (N b_2 - H_2) \beta_1 \gamma_2] \beta_1 \gamma_2 = 0, \\
\beta_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + 1}
\end{cases} \quad (12)$$

и систему уравнений относительно восьми неизвестных $b_3, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, \gamma_3, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases} [G_{13} + G_{11}\alpha_2\beta_3 + G_{12}\alpha_3 + (C_1b_3 - D_{13})\beta_2\beta_3\gamma_3]\beta_3 + \lambda_2\alpha_2 = 0, \\ [D_{33} - C_3b_3 + (D_{13} - C_1b_3)\alpha_2\beta_3 + (D_{23} - C_2b_3)\alpha_3 + (-F_3 + 2H_3b_3 - Nb_3^2)\beta_2\beta_3\gamma_3]\beta_3\gamma_3 + \lambda_2\beta_2 = 0, \\ [D_{33} - C_3b_3 + (D_{13} - C_1b_3)\alpha_2\beta_3 + (D_{23} - C_2b_3)\alpha_3 + (-F_3 + 2H_3b_3 - Nb_3^2)\beta_2\beta_3\gamma_3]\beta_2\beta_3 = 0, \\ [C_3 + C_1\alpha_2\beta_3 + C_2\alpha_3 + (Nb_3 - H_3)\beta_2\beta_3\gamma_3]\beta_2\beta_3\gamma_3 = 0, \\ G_{23} + G_{12}\alpha_2\beta_3 + G_{22}\alpha_3 + (C_2b_3 - D_{23})\beta_2\beta_3\gamma_3 + \lambda_3\alpha_3 = 0, \\ [G_{13} + G_{11}\alpha_2\beta_3 + G_{12}\alpha_3 + (C_1b_3 - D_{13})\beta_2\beta_3\gamma_3]\alpha_2 - \lambda_3\beta_3 - \\ - [D_{33} - C_3b_3 + (D_{13} - C_1b_3)\alpha_2\beta_3 + (D_{23} - C_2b_3)\alpha_3 + (-F_3 + 2H_3b_3 - Nb_3^2)\beta_2\beta_3\gamma_3]\beta_2\gamma_3 = 0, \\ \beta_i = \sqrt{\alpha_i^2 + 1}, \quad i = 2, 3. \end{cases} \quad (13)$$

В записи выражений β_i через α_i в последних уравнениях систем (12) и (13) мы воспользовались тем, что $\beta_i = \sec \varepsilon_i > 0$ вследствие очевидных неравенств $-\pi/2 < \varepsilon_i < \pi/2$, $i = 1, 2, 3$. Решим каждую из систем уравнений (11), (12), (13).

Сначала заметим, что справедливо неравенство

$$-F_i + 2H_ib_i - Nb_i^2 \neq 0, \quad (14)$$

$i = 1, 2, 3$. Действительно, дискриминант квадратного уравнения $-F_i + 2H_ib_i - Nb_i^2 = 0$ относительно неизвестной b_i , будучи равным

$$\delta_i = 4H_i^2 - 4NF_i = 4 \left[\left(\sum_{l=1}^N h_i^{(l)} \right)^2 - N \sum_{l=1}^N (h_i^{(l)})^2 \right],$$

отрицателен в силу очевидного следствия

$$\left(\sum_{l=1}^N h_i^{(l)} \right)^2 < N \sum_{l=1}^N (h_i^{(l)})^2$$

неравенства Коши – Буняковского [15] (здесь поставлен знак « $<$ » вместо « $\leq$ », так как хотя бы одно из слагаемых $h_i^{(1)}, \dots, h_i^{(N)}$ заведомо не равно нулю), поэтому рассматриваемое квадратное уравнение не имеет вещественных корней, $i = 1, 2, 3$.

Решим систему уравнений (11). Учитывая неравенство (14), выражаем γ_1 через b_1 из первого уравнения этой системы:

$$\gamma_1 = \frac{D_{11} - C_1b_1}{F_1 - 2H_1b_1 + Nb_1^2}.$$

Подставляя вместо γ_1 полученное выражение во второе уравнение системы (11) и принимая во внимание неравенство $\gamma_1 = k_1^{-1} \neq 0$, после простейших преобразований приходим к равенству

$$b_1 = \frac{C_1F_1 - D_{11}H_1}{C_1H_1 - ND_{11}},$$

с учетом которого записанное выше равенство для γ_1 приводится к виду

$$\gamma_1 = \frac{C_1H_1 - ND_{11}}{H_1^2 - NF_1}.$$

Таким образом, решение системы уравнений (11) найдено.

Рассмотрим систему уравнений (12). Поскольку $\gamma_2 = k_2^{-1} \neq 0$, второе уравнение этой системы можно записать в виде

$$D_{22} - C_2 b_2 + (D_{12} - C_1 b_2) \alpha_1 + (-F_2 + 2H_2 b_2 - N b_2^2) \beta_1 \gamma_2 + \frac{\lambda_1 \beta_1}{\gamma_2} = 0, \quad (15)$$

а так как $\beta_1 = \sec \varepsilon_1 \neq 0$, третье уравнение системы (12) равносильно следующему уравнению:

$$D_{22} - C_2 b_2 + (D_{12} - C_1 b_2) \alpha_1 + (-F_2 + 2H_2 b_2 - N b_2^2) \beta_1 \gamma_2 = 0. \quad (16)$$

Из (15) с учетом (16) получаем, что $\lambda_1 \beta_1 \gamma_2^{-1} = 0$ и тогда в силу неравенства $\beta_1 \neq 0$ имеем

$$\lambda_1 = 0. \quad (17)$$

Имеет место неравенство $D_{12} - C_1 b_2 \neq 0$, так как непосредственная проверка показывает, что значение $b_2 = D_{12} C_1^{-1}$, являющееся корнем уравнения $D_{12} - C_1 b_2 = 0$, не удовлетворяет уравнениям системы (12).

Сначала рассмотрим случай $H_2 - N b_2 \neq 0$, т. е. $b_2 \neq H_2 N^{-1}$. Выразим $\beta_1 \gamma_2$ из (16), а также из первого (с учетом равенства (17)) и четвертого (с учетом неравенства $\beta_1 \gamma_2 \neq 0$) уравнений системы (12):

$$\beta_1 \gamma_2 = \frac{(D_{12} - C_1 b_2) \alpha_1 + D_{22} - C_2 b_2}{F_2 - 2H_2 b_2 + N b_2^2}, \quad \beta_1 \gamma_2 = \frac{G_{11} \alpha_1 + G_{12}}{D_{12} - C_1 b_2}, \quad \beta_1 \gamma_2 = \frac{C_1 \alpha_1 + C_2}{H_2 - N b_2}. \quad (18)$$

По доказанному знаменатель дроби во втором из равенств (18) не равен нулю, знаменатель дроби в первом из равенств (18) отличен от нуля в силу (14). Из первого и третьего равенств (18) следует уравнение

$$\frac{C_1 \alpha_1 + C_2}{H_2 - N b_2} = \frac{(D_{12} - C_1 b_2) \alpha_1 + D_{22} - C_2 b_2}{F_2 - 2H_2 b_2 + N b_2^2},$$

из которого выражаем b_2 через α_1 :

$$b_2 = \frac{(D_{12} H_2 - C_1 F_2) \alpha_1 + D_{22} H_2 - C_2 F_2}{(N D_{12} - C_1 H_2) \alpha_1 + N D_{22} - C_2 H_2}. \quad (19)$$

Аналогично, из второго и третьего равенств (18) следует уравнение

$$\frac{C_1 \alpha_1 + C_2}{H_2 - N b_2} = \frac{G_{11} \alpha_1 + G_{12}}{D_{12} - C_1 b_2},$$

из которого также выражаем b_2 через α_1 :

$$b_2 = \frac{(G_{11} H_2 - C_1 D_{12}) \alpha_1 + G_{12} H_2 - C_2 D_{12}}{(N G_{11} - C_1^2) \alpha_1 + N G_{12} - C_1 C_2}. \quad (20)$$

Приравнявая правые части равенств (19) и (20), после простейших преобразований получаем квадратное уравнение относительно α_1 :

$$\begin{aligned} & \left[C_1^2 (C_1 F_2 - D_{12} H_2) + C_1 G_{11} (H_2^2 - N F_2) + C_1 D_{12} (N D_{12} - C_1 H_2) \right] \alpha_1^2 + \\ & + \left[2C_1 C_2 (C_1 F_2 - D_{12} H_2) + (N D_{12} - C_1 H_2) (C_1 D_{22} + C_2 D_{12}) + (H_2^2 - N F_2) (C_1 G_{12} + C_2 G_{11}) \right] \alpha_1 + \\ & + C_2^2 (C_1 F_2 - D_{12} H_2) + C_2 G_{12} (H_2^2 - N F_2) + C_2 D_{22} (N D_{12} - C_1 H_2) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Дискриминант уравнения (21) равен

$$\Delta = \left[(ND_{12} - C_1H_2)(C_1D_{22} - C_2D_{12}) + (H_2^2 - NF_2)(C_1G_{12} - C_2G_{11}) \right]^2,$$

а корни этого уравнения вычисляются по формулам

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{C_2}{C_1}, \\ \alpha_1 = -\frac{C_2(C_1F_2 - D_{12}H_2) + G_{12}(H_2^2 - NF_2) + D_{22}(ND_{12} - C_1H_2)}{C_1(C_1F_2 - D_{12}H_2) + G_{11}(H_2^2 - NF_2) + D_{12}(ND_{12} - C_1H_2)}. \end{cases} \quad (22)$$

Заметим, что значения (22) неизвестной α_1 не являются корнями знаменателей дробей в равенствах (19) и (20). Подставляя первое из значений (22) неизвестной α_1 в четвертое уравнение системы (12), с учетом неравенства $\beta_1\gamma_2 \neq 0$ приходим к равенству $H_2 - Nb_2 = 0$, которое противоречит рассматриваемому случаю.

Пусть теперь $H_2 - Nb_2 = 0$, т. е. $b_2 = H_2N^{-1}$. Принимая во внимание неравенство $\beta_1\gamma_2 \neq 0$, из четвертого уравнения системы (12) получаем, что $\alpha_1 = -C_2C_1^{-1}$, т. е. найденное значение α_1 совпадает с первым из корней (22) уравнения (21). Несложно показать, что равенства (19) и (20), доказанные в предположении $b_2 \neq H_2N^{-1}$, справедливы и при $b_2 = H_2N^{-1}$. В случае $b_2 = H_2N^{-1}$ имеют место также и первые два равенства из (18), так как при их выводе никакие ограничения на значение неизвестной b_2 не учитывались.

Из проведенных рассуждений вытекает, что система уравнений (12) имеет два решения. Компоненты обоих решений указанной системы получаем в следующем порядке:

- значения неизвестной α_1 находим по формулам (22);
- значения β_1 , соответствующие найденным значениям α_1 , вычисляем по формуле, записанной в качестве последнего уравнения системы (12);
- значения b_2 – по любой из формул (19), (20);
- значения γ_2 – по любой из двух формул

$$\gamma_2 = \frac{(D_{12} - C_1b_2)\alpha_1 + D_{22} - C_2b_2}{\beta_1(F_2 - 2H_2b_2 + Nb_2^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{G_{11}\alpha_1 + G_{12}}{\beta_1(D_{12} - C_1b_2)},$$

которые вытекают соответственно из первого и второго равенств (18);

- значение неизвестной λ_1 в обоих решениях системы уравнений (12) в силу (17) принимаем равным нулю.

Перейдем к отысканию решений системы уравнений (13). В силу неравенств $\gamma_3 = k_3^{-1} \neq 0$, $\beta_2 = \sec \varepsilon_2 \neq 0$ и $\beta_3 = \sec \varepsilon_3 \neq 0$ второе и третье уравнения этой системы можно записать как

$$D_{33} - C_3b_3 + (D_{13} - C_1b_3)\alpha_2\beta_3 + (D_{23} - C_2b_3)\alpha_3 + (-F_3 + 2H_3b_3 - Nb_3^2)\beta_2\beta_3\gamma_3 + \frac{\lambda_2\beta_2}{\beta_3\gamma_3} = 0, \quad (23)$$

$$D_{33} - C_3b_3 + (D_{13} - C_1b_3)\alpha_2\beta_3 + (D_{23} - C_2b_3)\alpha_3 + (-F_3 + 2H_3b_3 - Nb_3^2)\beta_2\beta_3\gamma_3 = 0 \quad (24)$$

соответственно. Из (23) с учетом (24) получаем: $\lambda_2\beta_2(\beta_3\gamma_3)^{-1} = 0$. Следовательно, справедливо равенство

$$\lambda_2 = 0. \quad (25)$$

Тогда первое уравнение системы (13) с учетом неравенства $\beta_3 \neq 0$ запишется в виде

$$G_{13} + G_{11}\alpha_2\beta_3 + G_{12}\alpha_3 + (C_1b_3 - D_{13})\beta_2\beta_3\gamma_3 = 0. \quad (26)$$

Из шестого уравнения системы (13) с учетом (24) и (26) находим $-\lambda_3\beta_3 = 0$, откуда следует равенство

$$\lambda_3 = 0. \quad (27)$$

Имеют место неравенства $H_3 - Nb_3 \neq 0$, $D_{i3} - C_i b_3 \neq 0$, так как непосредственная проверка показывает, что ни корень $b_3 = H_3 N^{-1}$ уравнения $H_3 - Nb_3 = 0$, ни корни $b_3 = D_{i3} C_i^{-1}$ уравнений $D_{i3} - C_i b_3 = 0$ не удовлетворяют уравнениям системы (13), $i = 1, 2$.

С учетом равенств (25), (27) и неравенств $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$, $\gamma_3 \neq 0$ выразим $\beta_2\beta_3\gamma_3$ из первого, третьего, четвертого и пятого уравнений системы (13):

$$\begin{aligned} \beta_2\beta_3\gamma_3 &= \frac{G_{13} + G_{11}\alpha_2\beta_3 + G_{12}\alpha_3}{D_{13} - C_1 b_3}, \quad \beta_2\beta_3\gamma_3 = \frac{D_{33} - C_3 b_3 + (D_{13} - C_1 b_3)\alpha_2\beta_3 + (D_{23} - C_2 b_3)\alpha_3}{F_3 - 2H_3 b_3 + Nb_3^2}, \\ \beta_2\beta_3\gamma_3 &= \frac{C_3 + C_1\alpha_2\beta_3 + C_2\alpha_3}{H_3 - Nb_3}, \quad \beta_2\beta_3\gamma_3 = \frac{G_{23} + G_{12}\alpha_2\beta_3 + G_{22}\alpha_3}{D_{23} - C_2 b_3}. \end{aligned} \quad (28)$$

По доказанному знаменатели дробей в первом, третьем и четвертом из равенств (28) не равны нулю, знаменатель дроби во втором из равенств (28) отличен от нуля в силу (14). Из первого и третьего равенств (28) следует уравнение

$$\frac{G_{13} + G_{11}\alpha_2\beta_3 + G_{12}\alpha_3}{D_{13} - C_1 b_3} = \frac{C_3 + C_1\alpha_2\beta_3 + C_2\alpha_3}{H_3 - Nb_3},$$

из второго и третьего равенств (28) – уравнение

$$\frac{D_{33} - C_3 b_3 + (D_{13} - C_1 b_3)\alpha_2\beta_3 + (D_{23} - C_2 b_3)\alpha_3}{F_3 - 2H_3 b_3 + Nb_3^2} = \frac{C_3 + C_1\alpha_2\beta_3 + C_2\alpha_3}{H_3 - Nb_3},$$

из третьего и четвертого равенств (28) – уравнение

$$\frac{C_3 + C_1\alpha_2\beta_3 + C_2\alpha_3}{H_3 - Nb_3} = \frac{G_{23} + G_{12}\alpha_2\beta_3 + G_{22}\alpha_3}{D_{23} - C_2 b_3}.$$

Из последних трех уравнений выражаем $\alpha_2\beta_3$ через α_3 и b_3 :

$$\alpha_2\beta_3 = \frac{[G_{12}(H_3 - Nb_3) - C_2(D_{13} - C_1 b_3)]\alpha_3 + G_{13}(H_3 - Nb_3) - C_3(D_{13} - C_1 b_3)}{C_1(D_{13} - C_1 b_3) - G_{11}(H_3 - Nb_3)}, \quad (29)$$

$$\alpha_2\beta_3 = \frac{[(H_3 - Nb_3)(D_{23} - C_2 b_3) - C_2(Nb_3^2 - 2H_3 b_3 + F_3)]\alpha_3 + (H_3 - Nb_3)(D_{33} - C_3 b_3) - C_3(Nb_3^2 - 2H_3 b_3 + F_3)}{C_1(Nb_3^2 - 2H_3 b_3 + F_3) - (H_3 - Nb_3)(D_{13} - C_1 b_3)}, \quad (30)$$

$$\alpha_2\beta_3 = \frac{[C_2(D_{23} - C_2 b_3) - G_{22}(H_3 - Nb_3)]\alpha_3 + C_3(D_{23} - C_2 b_3) - G_{23}(H_3 - Nb_3)}{G_{12}(H_3 - Nb_3) - C_1(D_{23} - C_2 b_3)}. \quad (31)$$

Приравняв правую часть равенства (29) к правым частям равенств (30) и (31), после простейших преобразований получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\left\{ [C_2(C_1 b_3 - D_{13})^2 + G_{11}(Nb_3 - H_3)(C_2 b_3 - D_{23}) - G_{12}(Nb_3 - H_3)(C_1 b_3 - D_{13}) - C_1(C_1 b_3 - D_{13})(C_2 b_3 - D_{23}) + \right. \\ &+ (C_1 G_{12} - C_2 G_{11})(Nb_3^2 - 2H_3 b_3 + F_3)]\alpha_3 - (Nb_3^2 - 2H_3 b_3 + F_3)(C_3 G_{11} - C_1 G_{13}) - C_1(C_1 b_3 - D_{13})(C_3 b_3 - D_{33}) - \\ &\left. - G_{13}(Nb_3 - H_3)(C_1 b_3 - D_{13}) + G_{11}(Nb_3 - H_3)(C_3 b_3 - D_{33}) + C_3(C_1 b_3 - D_{13})^2 \right\} (H_3 - Nb_3) = 0, \end{aligned}$$

$$\left\{ \left[(C_2 G_{12} - C_1 G_{22})(C_1 b_3 - D_{13}) + (G_{11} G_{22} - G_{12}^2)(N b_3 - H_3) + (C_1 G_{12} - C_2 G_{11})(C_2 b_3 - D_{23}) \right] \alpha_3 + \right. \\ \left. + (C_3 G_{12} - C_1 G_{23})(C_1 b_3 - D_{13}) + (G_{11} G_{23} - G_{12} G_{13})(N b_3 - H_3) + (C_1 G_{13} - C_3 G_{11})(C_2 b_3 - D_{23}) \right\} (H_3 - N b_3) = 0,$$

из которых выражаем α_3 через b_3 , предварительно разделив обе части каждого из них на $(H_3 - N b_3)$:

$$\alpha_3 = \frac{(H_3 b_3 - F_3)(C_1 G_{13} - C_3 G_{11}) + (N b_3 - H_3)(D_{33} G_{11} - D_{13} G_{13}) + (C_1 b_3 - D_{13})(C_3 D_{13} - C_1 D_{33})}{(H_3 b_3 - F_3)(C_2 G_{11} - C_1 G_{12}) + (N b_3 - H_3)(D_{13} G_{12} - D_{23} G_{11}) + (C_1 b_3 - D_{13})(C_1 D_{23} - C_2 D_{13})}, \quad (32)$$

$$\alpha_3 = \frac{(D_{23} - C_2 b_3)(C_1 G_{13} - C_3 G_{11}) + (N b_3 - H_3)(G_{12} G_{13} - G_{11} G_{23}) + (C_1 b_3 - D_{13})(C_1 G_{23} - C_3 G_{12})}{(D_{23} - C_2 b_3)(C_2 G_{11} - C_1 G_{12}) + (N b_3 - H_3)(G_{11} G_{22} - G_{12}^2) + (C_1 b_3 - D_{13})(C_2 G_{12} - C_1 G_{22})}. \quad (33)$$

Приравняв правые части равенств (32) и (33), после простейших преобразований приходим к квадратному уравнению относительно b_3

$$\Gamma b_3^2 + \Lambda b_3 + \Omega = 0, \quad (34)$$

коэффициенты которого определяются следующим образом:

$$\Gamma = \left[G_{13}(C_1 H_3 - N D_{13}) + C_3(C_1 D_{13} - G_{11} H_3) + D_{33}(N G_{11} - C_1^2) \right] \left[G_{22}(N G_{11} - C_1^2) + G_{12}(C_1 C_2 - N G_{12}) + \right. \\ \left. + C_2(C_1 G_{12} - C_2 G_{11}) \right] + \left[G_{23}(N G_{11} - C_1^2) + C_3(C_1 G_{12} - C_2 G_{11}) + G_{13}(C_1 C_2 - N G_{12}) \right] \left[D_{23}(C_1^2 - N G_{11}) + \right. \\ \left. + C_2(G_{11} H_3 - C_1 D_{13}) + G_{12}(N D_{13} - C_1 H_3) \right],$$

$$\Lambda = \left[G_{13}(C_1 H_3 - N D_{13}) + C_3(C_1 D_{13} - G_{11} H_3) + D_{33}(N G_{11} - C_1^2) \right] \left[G_{22}(C_1 D_{13} - G_{11} H_3) + G_{12}(G_{12} H_3 - C_2 D_{13}) + \right. \\ \left. + D_{23}(C_2 G_{11} - C_1 G_{12}) \right] + \left[F_3(C_3 G_{11} - C_1 G_{13}) + D_{33}(C_1 D_{13} - G_{11} H_3) + D_{13}(G_{13} H_3 - C_3 D_{13}) \right] \left[G_{12}(C_1 C_2 - N G_{12}) + \right. \\ \left. + G_{22}(N G_{11} - C_1^2) + C_2(C_1 G_{12} - C_2 G_{11}) \right] + \left[G_{23}(N G_{11} - C_1^2) + C_3(C_1 G_{12} - C_2 G_{11}) + G_{13}(C_1 C_2 - N G_{12}) \right] \times \\ \times \left[F_3(C_1 G_{12} - C_2 G_{11}) + D_{13}(C_2 D_{13} - G_{12} H_3) + D_{23}(G_{11} H_3 - C_1 D_{13}) \right] + \left[G_{12}(G_{13} H_3 - C_3 D_{13}) + G_{23}(C_1 D_{13} - G_{11} H_3) + \right. \\ \left. + D_{23}(C_3 G_{11} - C_1 G_{13}) \right] \left[C_2(G_{11} H_3 - C_1 D_{13}) + G_{12}(N D_{13} - C_1 H_3) + D_{23}(C_1^2 - N G_{11}) \right],$$

$$\Omega = \left[F_3(C_3 G_{11} - C_1 G_{13}) + D_{33}(C_1 D_{13} - G_{11} H_3) + D_{13}(G_{13} H_3 - C_3 D_{13}) \right] \left[G_{22}(C_1 D_{13} - G_{11} H_3) + G_{12}(G_{12} H_3 - C_2 D_{13}) + \right. \\ \left. + D_{23}(C_2 G_{11} - C_1 G_{12}) \right] - \left[G_{12}(C_3 D_{13} - G_{13} H_3) + G_{23}(G_{11} H_3 - C_1 D_{13}) + D_{23}(C_1 G_{13} - C_3 G_{11}) \right] \left[F_3(C_1 G_{12} - C_2 G_{11}) + \right. \\ \left. + D_{13}(C_2 D_{13} - G_{12} H_3) + D_{23}(G_{11} H_3 - C_1 D_{13}) \right].$$

Дискриминант уравнения (34) равен

$$\tilde{\Delta} = \left\{ \left[C_2^2(D_{13} G_{13} - D_{33} G_{11}) + G_{12} H_3(C_3 G_{12} - C_1 G_{23}) + C_2 G_{11} G_{23} H_3 \right] (G_{11} H_3 - C_1 D_{13}) + [F_3 G_{11} \times \right. \\ \times (C_2 G_{23} - C_3 G_{22}) + F_3 G_{12}(C_3 G_{12} - C_1 G_{23}) + F_3 G_{13}(C_1 G_{22} - C_2 G_{12}) + C_1 D_{23}(D_{33} G_{12} - D_{23} G_{13}) + C_2 D_{23} \times \\ \times (D_{13} G_{13} - D_{33} G_{11}) + C_3 D_{23}(D_{23} G_{11} - D_{13} G_{12})] (C_1^2 - N G_{11}) + [C_2 H_3(D_{23} G_{11} - D_{13} G_{12}) + G_{22} H_3(C_1 D_{13} - G_{11} H_3) - \\ - C_1 C_2 D_{13} D_{23}] (C_3 G_{11} - C_1 G_{13}) + [C_2 G_{11}(D_{13} G_{23} - D_{33} G_{12}) + C_3 G_{11}(D_{23} G_{12} - D_{13} G_{22}) + C_1 G_{13}(D_{13} G_{22} - D_{23} G_{12}) + \\ \left. + C_1 G_{12}(D_{33} G_{12} - D_{13} G_{23})] (N D_{13} - C_1 H_3) + C_2 G_{12} [C_1 D_{13}(C_3 D_{13} - C_1 D_{33}) + G_{11} H_3(C_1 D_{33} - G_{13} H_3)] \right\}^2,$$

а корни этого уравнения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
b_3 &= \frac{C_1 D_{13} - G_{11} H_3}{C_1^2 - N G_{11}}, \\
b_3 &= \left[C_3 G_{11} (D_{23}^2 - F_3 G_{22}) + D_{33} G_{11} (G_{22} H_3 - C_2 D_{23}) + G_{11} G_{23} (C_2 F_3 - D_{23} H_3) + D_{13} G_{12} (G_{23} H_3 - C_3 D_{23}) + \right. \\
&+ D_{13} D_{23} (C_1 G_{23} - C_3 G_{12}) + G_{13} H_3 (D_{23} G_{12} - D_{13} G_{22}) + D_{13} D_{33} (C_2 G_{12} - C_1 G_{22}) + F_3 G_{12} (C_3 G_{12} - C_1 G_{23}) + \\
&+ D_{33} G_{12} (C_1 D_{23} - G_{12} H_3) + D_{23} G_{13} (C_2 D_{13} - C_1 D_{23}) + D_{13}^2 (C_3 G_{22} - C_2 G_{23}) + F_3 G_{13} (C_1 G_{22} - C_2 G_{12}) \Big] \times \\
&\times \left[N D_{23} (G_{12} G_{13} - G_{11} G_{23}) + N D_{33} (G_{11} G_{22} - G_{12}^2) + N D_{13} (G_{12} G_{23} - G_{13} G_{22}) + C_3 G_{11} (C_2 D_{23} - G_{22} H_3) + \right. \\
&+ C_2 G_{11} (G_{23} H_3 - C_2 D_{33}) + C_3 D_{13} (C_1 G_{22} - C_2 G_{12}) + C_3 G_{12} (G_{12} H_3 - C_1 D_{23}) + C_2 G_{13} (C_2 D_{13} - G_{12} H_3) + \\
&+ C_1 G_{23} (C_1 D_{23} - G_{12} H_3) + C_1 G_{13} (G_{22} H_3 - C_2 D_{23}) + C_1 D_{33} (C_2 G_{12} - C_1 G_{22}) + C_1 C_2 (D_{33} G_{12} - D_{13} G_{23}) \Big]^{-1}. \quad (35)
\end{aligned}$$

Так как уравнение (34) имеет два решения, то два решения имеет и система уравнений (13). Компоненты обоих решений этой системы получаем в следующем порядке:

- значения неизвестной b_3 находим по формулам (35);
- значения неизвестной α_3 , соответствующие найденным значениям b_3 , вычисляем по любой из формул (33), (34);
- значения β_3 – по формуле, записанной в качестве последнего уравнения системы (13);
- значения α_2 – по любой из трех формул

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{[G_{12} (H_3 - N b_3) - C_2 (D_{13} - C_1 b_3)] \alpha_3 + G_{13} (H_3 - N b_3) - C_3 (D_{13} - C_1 b_3)}{\beta_3 [C_1 (D_{13} - C_1 b_3) - G_{11} (H_3 - N b_3)]}, \\
\alpha_2 &= \frac{[(H_3 - N b_3) (D_{23} - C_2 b_3) - C_2 (N b_3^2 - 2 H_3 b_3 + F_3)] \alpha_3 + (H_3 - N b_3) (D_{33} - C_3 b_3) - C_3 (N b_3^2 - 2 H_3 b_3 + F_3)}{\beta_3 [C_1 (N b_3^2 - 2 H_3 b_3 + F_3) - (H_3 - N b_3) (D_{13} - C_1 b_3)]}, \\
\alpha_2 &= \frac{[C_2 (D_{23} - C_2 b_3) - G_{22} (H_3 - N b_3)] \alpha_3 + C_3 (D_{23} - C_2 b_3) - G_{23} (H_3 - N b_3)}{\beta_3 [G_{12} (H_3 - N b_3) - C_1 (D_{23} - C_2 b_3)]},
\end{aligned}$$

которые вытекают из равенств (29), (30) и (31) соответственно;

- значения β_2 – по формуле, записанной в качестве последнего уравнения системы (13);
- значения γ_3 – по любой из четырех формул

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= \frac{G_{13} + G_{11} \alpha_2 \beta_3 + G_{12} \alpha_3}{\beta_2 \beta_3 (D_{13} - C_1 b_3)}, \quad \gamma_3 = \frac{D_{33} - C_3 b_3 + (D_{13} - C_1 b_3) \alpha_2 \beta_3 + (D_{23} - C_2 b_3) \alpha_3}{\beta_2 \beta_3 (F_3 - 2 H_3 b_3 + N b_3^2)}, \\
\gamma_3 &= \frac{C_3 + C_1 \alpha_2 \beta_3 + C_2 \alpha_3}{\beta_2 \beta_3 (H_3 - N b_3)}, \quad \gamma_3 = \frac{G_{23} + G_{12} \alpha_2 \beta_3 + G_{22} \alpha_3}{\beta_2 \beta_3 (D_{23} - C_2 b_3)},
\end{aligned}$$

которые вытекают из (28);

- значения неизвестных λ_2 и λ_3 в обоих решениях системы уравнений (13) в силу равенств (25) и (27) принимаем равными нулю.

Итак, система уравнений (11) имеет единственное решение, а каждая из систем (12), (13) – два решения. Следовательно, число решений исходной системы уравнений (10), определяемое как произведение числа решений систем (11), (12) и (13), равно четырём. Из полученных четырех решений

$$(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_3^{(j)}, \gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \gamma_3^{(j)}, b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, b_3^{(j)}, \lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \lambda_3^{(j)}) \quad (36)$$

($j = 1, 2, 3, 4$) системы (10), которые также являются стационарными точками функции Лагранжа F , определенной равенством (9), нас интересует решение

$$(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3),$$

удовлетворяющее равенству

$$F(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3) = \\ = \min_{1 \leq j \leq 4} \left\{ F(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_3^{(j)}, \gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \gamma_3^{(j)}, b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, b_3^{(j)}, \lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \lambda_3^{(j)}) \right\}.$$

Так как в каждом из решений (36) системы уравнений (10) последние три компоненты равны нулю, т. е.

$$\lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)} = \lambda_3^{(j)} = 0,$$

$j = 1, 2, 3, 4$, то в силу (9) имеем:

$$F(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_3^{(j)}, \gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \gamma_3^{(j)}, b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, b_3^{(j)}, \lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \lambda_3^{(j)}) = \\ = \Phi(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_3^{(j)}, \gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \gamma_3^{(j)}, b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, b_3^{(j)}),$$

$j = 1, 2, 3, 4$, поэтому искомое решение $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$ определяем по формуле

$$\Phi(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) = \\ = \min_{1 \leq j \leq 4} \left\{ \Phi(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_3^{(j)}, \gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \gamma_3^{(j)}, b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, b_3^{(j)}) \right\}.$$

Искомые значения масштабных коэффициентов $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3$ для измерительных осей БМ вычисляем по формулам

$$\tilde{k}_i = \tilde{\gamma}_i^{-1},$$

$i = 1, 2, 3$, искомые значения углов $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_3$ – по формулам

$$\tilde{\varepsilon}_i = \arctg \tilde{\alpha}_i,$$

которые следуют из равенств

$$\tilde{\alpha}_i = \tg \tilde{\varepsilon}_i$$

и очевидных неравенств $-\pi/2 < \tilde{\varepsilon}_i < \pi/2$, $i = 1, 2, 3$.

Заключение

Итак, мы получили аналитическое решение задачи калибровки магнитометра космического аппарата для модели, рассмотренной в [1]. Процедура вычисления калибровочных параметров БМ по выведенным формулам обладает рядом очевидных преимуществ по сравнению с численными методами решения этой задачи:

- существенно уменьшается число арифметических операций;
- исчезает проблема возможной неустойчивости метода.

Библиографические ссылки

1. Калибровка магнитометра космического аппарата «Декарт» в полете / П. Е. Розин, А. В. Симонов, Е. С. Гордиенко, Ю. К. Зайко // Тр. МАИ. 2022. № 124. С. 1–20.

2. Методика калибровки магнитометра на этапе наземной диагностики систем космического аппарата / И. О. Акимов, С. Н. Илюхин, Н. А. Ивлев, Г. Е. Колосов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 5 (77). С. 1–18.
3. Баллистическое обеспечение разработки и полётов межорбитального космического буксира «Фрегат» / И. М. Морской, А. В. Симонов, В. И. Лясковская, А. С. Ежов // Вестник «НПО им. С. А. Лавочкина». 2014. № 1. С. 10–15.
4. Alonso R., Shuster M. D. TWOSTEP: A Fast Robust Algorithm for Attitude-Independent Magnetometer Bias Determination // *Journal of the Astronautical Sciences*. 2002. Vol. 50, No. 4. P. 433–451.
5. Verification and calibration of a commercial anisotropic magnetoresistive magnetometer by multivariate non-linear regression / N. Belsten, M. Knapp, R. Masterson et al. // *Geosci. Instrum. Method. Data Syst.* 2023. No. 12. P. 201–213.
6. High precision magnetometer for geomagnetic exploration onboard of the China Seismo-Electromagnetic Satellite / B. J. Cheng et al. // *Science China Technological Sciences*. 2018. Vol. 61, No. 5. P. 659–668.
7. Crassidis J. L., Kok-Lam Lai, Harman R. R. Real-Time Attitude-Independent Three-Axis Magnetometer Calibration // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2005. Vol. 28, No. 1. P. 115–120.
8. Calibration of strapdown magnetometers in magnetic field domain / D. Gebre-Egziabher, G. H. Elkaim, J. David Powell, B. W. Parkinson // *J. Aerospace Eng.* 2006. Vol. 19. P. 87–102.
9. Soken H. E. A Survey of Calibration Algorithms for Small Satellite Magnetometers // *Measurement*. October 2017. DOI:10.1016/j.measurement.2017.10.017.
10. Soken H. E., Sakai S. Attitude estimation and magnetometer calibration using reconfigurable TRIAD+ filtering approach // *Aerospace Science and Technology*. 2020. Vol. 99. P. 105754.
11. Springmann J. C., Cutler J. W. Attitude-independent magnetometer calibration with time-varying bias // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2012. Vol. 35, No. 4. P. 1080–1088.
12. Machine learning-based calibration of the GOCE satellite platform magnetometers // K. Styp-Rekowski, I. Michaelis, C. Stolle et al. // *Earth Planets Space*. 2022. Vol. 74. P. 138.
13. Бахвалов Н. С. Численные методы. М. : Наука, 1975. 632 с.
14. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М. : Факториал Пресс, 2002. 824 с.
15. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М. : Наука, 1984. 752 с.

References

1. Rozin P. E., Simonov A. V., Gordienko E. S., Zaiko Yu. K. [In-Flight Calibration of the “Dekart” Cubesat Magnetometer]. *Trudy MAI*. 2022, No. 124, P. 1–20 (In Russ.).
2. Akimov I. O., Ilyukhin S. N., Ivlev N. A., Kolosov G. E. [Magnetometer calibration technique for the ground-based stage of spacecraft system diagnostics]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii*. 2018, Vol. 77, No. 5, P. 1–18 (In Russ.).
3. Morskoy I. M., Simonov A. V., Lyaskovskaya V. I., Ezhov A. S. [Ballistic support for the development and flights of the interorbital space tug “Fregat”]. *Vestnik “NPO im. S. A. Lavochkina”*. 2014, No. 1, P. 10–15 (In Russ.).
4. Alonso R., Shuster M. D.: TWOSTEP: A Fast Robust Algorithm for Attitude-Independent Magnetometer Bias Determination. *Journal of the Astronautical Sciences*. 2002, Vol. 50, No. 4, P. 433–451.
5. Belsten N., Knapp M., Masterson R., Payne C., Ammons K., Lind F.D., Cahoy K. Verification and calibration of a commercial anisotropic magnetoresistive magnetometer by multivariate non-linear regression. *Geosci. Instrum. Method. Data Syst.* 2023, No. 12, P. 201–213.
6. Cheng B. J. et al. High precision magnetometer for geomagnetic exploration onboard of the China Seismo-Electromagnetic Satellite. *Science China Technological Sciences*. 2018, Vol. 61, No. 5, P. 659–668.
7. Crassidis J. L., Kok-Lam Lai, Harman R.R. Real-Time Attitude-Independent Three-Axis Magnetometer Calibration. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2005, Vol. 28, No. 1, P. 115–120.
8. Gebre-Egziabher D., Elkaim G. H., David Powell J., Parkinson B. W. Calibration of strapdown magnetometers in magnetic field domain. *J. Aerospace Eng.* 2006, Vol. 19, P. 87–102.

9. Soken H. E. A Survey of Calibration Algorithms for Small Satellite Magnetometers. *Measurement*. October 2017. DOI: 10.1016/j.measurement.2017.10.017.
10. Soken H. E., Sakai S. Attitude estimation and magnetometer calibration using reconfigurable TRIAD+ filtering approach. *Aerospace Science and Technology*. 2020, Vol. 99, 105754.
11. Springmann J. C., Cutler J. W. Attitude-independent magnetometer calibration with time-varying bias. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2012, Vol. 35, No. 4, P. 1080–1088.
12. Styp-Rekowski K., Michaelis I., Stolle C., Baerenzung J., Korte M., Kao O. Machine learning-based calibration of the GOCE satellite platform magnetometers. *Earth Planets Space*. 2022, Vol. 74, P. 138.
13. Bakhvalov N. S. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 632 p.
14. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Faktorial Press Publ., 2002, 824 p.
15. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 752 p.

© Кириллов К. А., Кириллова С. В., Кузнецов А. А., Мелентьев Д. О., Сафонов К. В., 2025

Кириллов Кирилл Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: kkirillow@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0002-3763-1303>.

Кириллова Светлана Владимировна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и анализа данных; Сибирский федеральный университет. E-mail: svkirillova2009@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0003-3779-2825>.

Кузнецов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, директор НОЦ «Институт космических исследований и высоких технологий»; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-0944-1817>.

Мелентьев Денис Олегович – аспирант, Сибирский федеральный университет; инженер, АО «РЕШЕТ-НЁВ». E-mail: denes.2000@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0009-6187-4098>.

Сафонов Константин Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института информатики и телекоммуникаций; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: safonovkv@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0405-3065>.

Kirillov Kirill Anatolievich – Dr. Sc. (Phys. and Math.), Associate Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: kkirillow@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0002-3763-1303>.

Kirillova Svetlana Vladimirovna – Cand. Sc. (Technical Sciences), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Data Analysis; Siberian Federal University. E-mail: svkirillova2009@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0003-3779-2825>.

Kuznetsov Alexander Alekseevich – Dr. Sc., Professor, Head of the Institute of Space Research and High Technologies; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0944-1817>.

Melent'ev Denis Olegovich – Graduate Student, Siberian Federal University; Engineer, JSC “RESHETNEV”. E-mail: denes.2000@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0009-6187-4098>.

Safonov Konstantin Vladimirovich – Dr. Sc. (Phys. and Math.), Professor, Head of the Institute of Informatics and Telecommunications; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: safonovkv@rambler.ru. <https://orcid.org/0000-0003-0405-3065>.

Статья поступила в редакцию 08.04.2025; принята к публикации 21.04.2025; опубликована 30.06.2025
The article was submitted 08.04.2025; accepted for publication 21.04.2025; published 30.06.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License