УДК 539.374
Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-2-195-201

Для цитирования: Пашковская О. В., Лукьянов С. В. Решение первой краевой задачи плоской теории упругости с помощью законов сохранения // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 2. С. 195–201. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-2-195-201.

For citation: Pashkovskaya O. V., Lukyanov S. V. [Solution of the first boundary value problem of plane elasticity theory using conservation laws]. *Siberian Aerospace Journal.* 2025, Vol. 26, No. 2, P. 195–201. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-2-195-201.

Решение первой краевой задачи плоской теории упругости с помощью законов сохранения

О. В. Пашковская*, С. В. Лукьянов

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
*E-mail: pashkovskaya@sibsau.ru

Аннотация. Решению краевых задач для уравнений плоской теории упругости посвящено огромное количество работ. Большинство исследований этого направления основывается на формуле, найденной Г. В. Колосовым. Ему первому удалось выразить общее решение задачи о плоской упругой деформации через нахождение двух независимых функций комплексного переменного. Это позволило применить для решения задач теории упругости хорошо разработанную теорию аналитических функций. Позднее метод решения, основанный на формуле Колосова, был развит его учеником Н. И. Мусхелишвили. Но описанный метод имеет существенные ограничения. Он применим только для тех областей, которые можно конформно отобразить на круг. Поэтому необходимы и другие способы решения задач теории упругости, поскольку большое количество практически важных задач решается для областей, которые не удовлетворяют этому условию. Развиваемый в работе метод основан на использовании законов сохранения, которые построены для уравнений, описывающих плоское деформируемое состояние. Сделанные в работе предположения позволяют построить решение первой краевой задачи для произвольных плоских областей, ограниченных кусочно-гладким контуром. При этом нахождение компонент тензора напряжений сводится к вычислению контурных интегралов по границе рассматриваемой области. Как и в случае, рассмотренном Г. В. Колосовым, решение задачи основывается на двух точных решениях уравнений Коши – Римана, имеющих особенности в произвольной точке рассматриваемой области.

Ключевые слова: теория упругости, законы сохранения, первая краевая задача, уравнения Коши – Римана, тензор деформации.

Solution of the first boundary value problem of plane elasticity theory using conservation laws

O. V. Pashkovskaya*, S. V. Lukyanov

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
* E-mail: pashkovskaya@sibsau.ru

Abstract. A huge number of works are devoted to solving boundary value problems for the equations of plane elasticity theory. The largest number of studies in this area are based on the formula found *by G. V. Kolosov. He was the first to express the general solution to the problem of plane elastic deformation by finding two independent functions of a complex variable. This made it possible to apply a well-developed theory of analytic functions to solving problems of elasticity theory. Later, the solution method based on Kolosov's formula was developed by his student N. I. Muskhelishvili. But the described method also has significant limitations. It is applicable only to those areas that can be conformally mapped onto a circle. Therefore, other methods for solving elasticity theory problems are also needed, since a large number of practically important problems are solved for areas that do not satisfy this condition. The method developed in the work is based on the use of conservation laws that are constructed for equations describing a plane deformable state. The assumptions made in the work make it possible to construct a solution to the first boundary value problem for arbitrary plane areas bounded by a piecewise smooth contour. In this case, finding the components of the stress tensor is reduced to calculating contour integrals along the boundary of the region under consideration. As in the case considered by G. V. Kolosov, the solution to the problem is based on two exact solutions of the Cauchy – Riemann equations, which have singularities at an arbitrary point in the region under consideration.*

Keywords: elasticity theory, conservation laws, first boundary value problem, Cauchy – Riemann equation, strain tensor.

Введение

Решение краевых задач для уравнений теории упругости в плоском стационарном случае изложено в огромном количестве статей и монографий. Классической работой в этом направлении служит книга, написанная учеником Г. В. Колосова [1]. Несмотря на большую историю решения таких задач, интерес к их решению не ослабевает. Это связано с тем, что классические формулы Г. В. Колосова позволяют решать уравнения теории упругости не для всех краевых задач, возникающих в науке и технике. Основное ограничение обусловлено гладкостью границы и некоторыми особенностями применения функций комплексного переменного. Другие способы, связанные с разложением искомых функций в ряды по различным видам специальных функций, тоже имеют естественные ограничения, которые сопряжены со сходимостью используемых рядов, а также громоздкостью полученных результатов.

Опишем некоторые результаты исследований теории упругости, полученные в последнее время. В работе [2] представлен краткий исторический обзор исследований, посвященных теории изгиба упругих пластин. В [3] рассматривается задача обнаружения и идентификации упругого включения в изотропной, линейно упругой плоскости. В статье [4] рассматривается усложнённый вариант известной задачи Ламе, поставленной в 1852 г., описывающей решение статического равновесия параллелепипеда со свободными боковыми поверхностями, подверженными действию противоположных торцевых усилий, а также для случая ударных воздействий торцевых сил. В [5] осуществляется построение фундаментальных решений для уравнений гармонических колебаний в теории упругости анизотропных упругих сред, построено фундаментальное решение уравнений колебаний для изотропной среды в замкнутом виде. В [6] приведено общее решение задач теории упругости для анизотропных полуплоскости и полосы с произвольными отверстиями и трещинами, использующее комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости анизотропного тела. Статья [7] посвящена исследованию функций напряжений, позволяющих тождественно удовлетворить уравнениям равновесия классической теории упругости и получить решение в напряжениях. Для получения зависимостей между напряжениями и функциями напряжений используется математический аппарат общей теории относительности. В [8] в терминах комплекснозначных перемещений выписывается система уравнений осесимметричной теории упругости, фундаментальное решение которой является общим представлением поля перемещений в осесимметричном случае, аналогично формулам Колосова – Мусхелишвили в плоской задаче. В [9] приводятся основные уравнения линейной моментной теории упругости. Определяющие соотношения записаны для случая произвольной анизотропии в виде линейных уравнений. Рассматриваются некоторые упрощённые варианты, в частности со стеснённым вращением, и плоская деформация при наличии только сдвиговых напряжений. Работа [10] посвящена анализу краевой задачи с неизвестной областью контакта, описывающей равновесие двумерных упругих тел с тонкой слабо искривлённой перемычкой. В [11] исследуется эволюция волновой картины в разномодульном упругом полупространстве при нестационарном одноосном кусочно-линейном движении его границы в режиме «растяжение – сжатие – останов».

В данной работе используются законы сохранений дифференциальных уравнений упругости. Приведены такие законы, которые позволяют свести нахождение компонент тензора напряжений в точке к контурному интегралу по границе рассматриваемой области. При этом от границы области требуется только кусочная гладкость. Заметим, что раннее некоторые законы сохранения были приведены в работах [12; 13], но они не были использованы для решений каких-либо задач.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнения, описывающие плоскую упругую деформацию.

Соотношения, связывающие компоненты тензора деформаций и компоненты вектора перемещений в случае малых деформаций, имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}. \tag{1}$$

Закон Гука запишется так:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \varepsilon_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau. \tag{2}$$

Условия совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{3}$$

Подставляя (2) в (3), получаем

$$\frac{\partial^2(\sigma_x - \nu\sigma_y)}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2(\sigma_y - \nu\sigma_x)}{\partial^2 x} = 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y}. \tag{4}$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial^2 x} = -2\frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Здесь $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ – компоненты тензора деформаций; σ_x, σ_y, τ – компоненты тензора напряжений; w_1, w_2 – компоненты вектора перемещений; E, ν – упругие постоянные.

Система окончательно имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \tag{6}$$

Поставим для системы (6) первую краевую задачу:

$$\sigma_x n_1 + \tau n_2 |_L = X(x, y), \quad \tau n_1 + \sigma_y n_2 |_L = Y(x, y). \tag{7}$$

Здесь n_1, n_2 – компоненты вектора внешней нормали к кусочно-гладкому контуру, ограничивающему конечную область S.

Будем искать решение задачи (6), (7) в виде

$$\sigma_x + \sigma_y = p - \text{const}\ , p \neq 0. \tag{8}$$

Введем новые переменные:

$$u = \sigma_x / p, v = \tau / p, \sigma'_y = \sigma_y / p, f = X / p, g = Y / p. \tag{9}$$

Тогда задача (6), (7) запишется в виде

$$F_1 = u_x + v_y = 0, F_2 = u_y - v_x = 0, \tag{10}$$

$$un_1 + vn_2 = f, vn_1 - un_2 = g - n_2, \tag{11}$$

здесь и далее индекс внизу означает производную по данной переменной.

Таким образом, необходимо решить краевую задачу (11) для системы уравнений (10) с помощью законов сохранения.

Законы сохранения системы уравнений (10)

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (10) назовем выражение вида

$$A_x + B_y = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \tag{12}$$

где ω_1, ω_2 – линейные дифференциальные операторы, одновременно не равные нулю тождественно,

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \tag{13}$$

$\alpha^1, \beta^1, \gamma^1, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ – некоторые гладкие функции, зависящие только от x, y.

Замечание. Более общее определение закона сохранения, подходящее для произвольных систем уравнений, можно найти в [14; 15].

Из (12) с учетом (13) получаем

$$\alpha^1_x u + \alpha^1 u_x + \beta^1{}_x v + \beta^1 v_x + \gamma^1{}_x + \alpha^2_y u + \alpha^2 u_y + \beta^2_y v + \beta^2 v_y + \gamma^2_y = \omega_1(u_x + v_y) + \omega_2(u_y - v_x) = 0. \tag{14}$$

Из (14) следует

$$\alpha^1_x + \alpha^2_y = 0, \beta^1_x + \beta^2_y = 0, \alpha^1 = \omega_1, \beta^1 = -\omega_2, \alpha^2 = \omega_2, \beta^2 = \omega_1, \gamma^1 + \gamma^2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1. \tag{15}$$

Поэтому

$$\alpha^1_x - \beta^1_y = 0, \alpha^1_y + \beta^1_x = 0. \tag{16}$$

Из приведённых формул следует, что система уравнений (10) допускает бесконечно много законов сохранения. Далее будут приведены только те, которые позволяют решить поставленную задачу.

Следовательно, сохраняющийся ток имеет вид:

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = -\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2.$$

Из (13) получаем

$$\iint_S (A_x + B_y)dxdy = \oint_L -Ady + Bdx = 0, \tag{17}$$

где S – область, ограниченная кривой L.

Решение задачи (10), (11)

Для нахождения значений u, v внутри области S, необходимо построить решения системы Коши – Римана (16), имеющие особенности в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$.

Первое из таких решений имеет вид:

$$\alpha^1 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \quad \beta^1 = -\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \quad \gamma^1 = \gamma^2 = 0. \tag{18}$$

Замечание. Если в уравнения равновесия включить массовые силы, то γ^1, γ^2 уже не будут равны нулю.

В точке $(x_0, y_0) \in S$ функции α^1, β^1 имеют особенности, поэтому окружим эту точку окружностью ε: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = \varepsilon^2$.

Тогда из формулы (17) получаем

$$\oint_L -Ady + Bdx + \oint_\varepsilon -Ady + Bdx = 0, \tag{19}$$

вычислим второй интеграл в формуле (19). Имеем

$$\oint -Ady + Bdx = \oint_\varepsilon -(\frac{u(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(x-x_0)^2} - \frac{v(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(x-x_0)^2})dy +$$

$$+\left(-\frac{u(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \frac{v(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)dx.$$

Введем новые координаты $x - x_0 = \varepsilon\cos\varphi, \quad y - y_0 = \varepsilon\sin\varphi,$ получаем

$$\oint_\varepsilon -Ady + Bdx = \int_0^{2\pi} [-(u\cos\varphi + v\sin\varphi)\cos\varphi - (u\sin\varphi + v\cos\varphi)s\text{in}\,\varphi]d\varphi =$$

$$= -\int_0^{2\pi} ud\varphi = -2\pi u(x_0, y_0). \tag{20}$$

Последнее равенство получено по теореме о среднем при $\varepsilon \to 0$.

Для окончательного построения решения найдем значения u, v на границе L. Из формулы (11) получаем

$$u = fn_1 - gn_2 + n_2^2, \quad v = fn_2 + gn_1 + n_1 n_2. \tag{21}$$

Подставим (21) в (20) и с учетом (19) получим

$$2\pi u(x_0, y_0) = 2\pi\sigma_x(x_0, y_0)\,/\,p =$$

$$= \oint_L -(\frac{(fn_1 - gn_2 + n_1^2)(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \frac{(fn_2 + gn_1 - n_1 n_2)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})dy +$$

$$-\left(\frac{(fn_1 - gn_2 + n_1^2)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + \frac{(fn_2 + gn_1 - n_1 n_2)(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)dx.$$

Второе решение системы уравнений (16) возьмем в виде

$$\alpha^1 = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \quad \beta^1 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \tag{22}$$

проделав выкладки аналогичные выкладкам, проделанным с решением (18), получаем

$$2\pi v(x_0, y_0) = 2\pi\tau(x_0, y_0) / p =$$

$$= \oint_L -\left(\frac{(fn_1 - gn_2 + n_1^2)(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{(fn_2 + gn_1 - n_1 n_2)(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)dy +$$

$$-\left(-\frac{(fn_1 - gn_2 + n_1^2)(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{(fn_2 + gn_1 - n_1 n_2)(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)dx.$$

Заключение

В работе предложен новый метод решения первой краевой задачи для уравнений плоской теории упругости в стационарном случае. Этот способ позволяет найти значение компонент тензора напряжений в каждой точке исследуемой области. При этом вычисления напряжений сводятся только к вычислению контурных интегралов по границам области.

Библиографические ссылки

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 708 с.
2. Васильев В. В. Теория тонких упругих пластин – история и современное состояние проблемы // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 2. С. 3–39.
3. Капцов А. В., Шифрин Е. И. Плоская задача теории упругости об идентификации узловых точек квадратурного включения // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 6. С. 47–68
4. Расулова Н. Б., Махмудзаде Т. М. Решение динамической задачи Ламе // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 5. С. 131–137
5. Ильяшенко А. В. Фундаментальные решения уравнений теории колебаний для анизотропных упругих сред // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 5. С. 138–146
6. Калоеров С. А., Глушанков Е. С., Мироненко А. Б. Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 4. С. 23–37.
7. Васильев В. В., Федоров Л. В. Функции напряжений в теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 4. С. 103–113.
8. Георгиевский Д. В., Стеценко Н. С. Комплексное представление Александровича решений в перемещениях в трехмерной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 3. С. 8–15.
9. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И. Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стеснённым вращением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26, № 1(93). С. 5–19.
10. Хлуднев А. М. О равновесии упругих тел со слабо искривлённой перемычкой // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26, № 3(95). С. 154–168.
11. Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е. Взаимодействие плоских волн деформаций в разномодульном упругом полупространстве на этапе принудительной остановки его границы после одноосного растяжения-сжатия. Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26, № 4(96). С. 32–48.
12. Olver P. Conservation laws in elasticity. I General result // Arch. Rat, Mech Anal. 1984. Vol. 85. P. 111–129.
13. Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Законы сохранения плоской теории упругости // Вестник СибГАУ. 2014. Вып. 1 (53). С. 79–81.
14. Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. 1984. No. 6. P. 56–64.
15. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and Conservation Laws of 2-Dimensional Ideal Plasticity – Proc. of Edinb. 1988. Math. Soc. 31. P. 415–439.

References

1. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 708 p.

2. Vasil'ev V. V. [Theory of thin elastic plates – history and current state of the problem]. *Izv. RAN. MTT*. 2024, No. 2, P. 3–39 (In Russ.).

3. Kaptsov A. V., Shifrin E. I. [Plane problem of elasticity theory on identification of nodal points of a quadrature inclusion]. *Izv. RAN. MTT*. 2023, No. 6, P. 47–68 (In Russ.).

4. Rasulova N. B., Makhmudzade T. M. [Solution of the dynamic Lame problem]. *Izv. RAN. MTT*. 2023, No 5, P. 131–137 (In Russ.).

5. Il'yashenko A. V. [Fundamental solutions of the equations of the theory of oscillations for anisotropic elastic media]. *Izv. RAN. MTT*. 2023, No. 5, P. 138–146 (In Russ.).

6. Kaloerov S. A., Glushankov E. S., Mironenko A. B. [Solution of elasticity theory problems for multiply connected half-planes and strips]. *Izv. RAN. MTT*. 2023, No. 4, P. 23–37 (In Russ.).

7. Vasil'ev V. V., Fedorov L. V. [Stress functions in elasticity theory]. *Izv. RAN. MTT*. 2022, No. 4, P. 103–113 (In Russ.).

8. Georgievskiy D. V., Stetsenko N. S. [Aleksandrovich's Complex Representation of Solutions in Displacements in Three-Dimensional Elasticity Theory]. *Izv. RAN. MTT*. 2022, No. 3, P. 8–15 (In Russ.).

9. Annin B. D., Ostrosablin N. I., Ugryumov R. I. [Constitutive equations of anisotropic linear moment theory of elasticity and a two-dimensional pure shear problem with constrained rotation]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2023, Vol. 26, No. 1(93), P. 5–19 (In Russ.).

10. Khludnev A. M. [On the equilibrium of elastic bodies with a slightly curved bridge]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2023, Vol. 26, No. 3(95), P. 154–168 (In Russ.).

11. Dudko O. V., Lapteva A. A., Ragozina V. E. [Interaction of plane deformation waves in a multimodular elastic half-space at the stage of forced stopping of its boundary after uniaxial tension-compression]. 2023, Vol. 26, No. 4(96), P. 32–48 (In Russ.).

12. Olver P. Conservation laws in elasticity. I General result. *Arch. Rat, Mech Anal*. 1984, No. 85, P. 111–129 (In Engl.).

13. Senashov S. I., Filyushina E. V. [Conservation laws of plane elasticity theory]. *Vestnik SibGAU*. 2014, Vol. 1 (53), P. 79–81 (In Russ.).

14. Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws. *Acta Appl. Math*. 1984, No. 6, P. 56–64.

15. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and Conservation Laws of 2-Dimensional Ideal Plasticity. *Proc. of Edinb. Math. Soc*. 1988, No. 31, P. 415–439.

Пашковская Ольга Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва. E-mail: pashkovskaya@sibsau.ru. https://orcid.org/0009-0003-2529-4105

Лукьянов Сергей Владимирович – аспирант; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва. E-mail: lukyanovsv@sibsau.ru.

Pashkovskaya Olga Vladimirovna – Cand. Sc., associate Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, pashkovskaya@sibsau.ru. https://orcid.org/0009-0003-2529-4105

Lukyanov Sergei Vladimirovich – postgraduate student; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: lukyanovsv@sibsau.ru.

Статья поступила в редакцию 04.04.2025; принята к публикации 14.04.2025; опубликована 30.06.2025
The article was submitted 04.04.2025; accepted for publication 14.04.2025; published 30.06.2025