УДК 539.374
Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-2-215-222

Для цитирования: Черепанова О. Н. Решение задачи о растяжении упругопластической полосы, ослабленной разрезами и отверстиями // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 2. С. 215–222. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-2-215-222.

For citation: Cherepanova O. N. [Solving the problem of stretching an elastic-plastic strip weakened by cuts and holes]. *Siberian Aerospace Journal.* 2025, Vol. 26, No. 2, P. 215–222. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-2-215-222.

Решение задачи о растяжении упругопластической полосы, ослабленной разрезами и отверстиями

О. Н. Черепанова

Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
E-mail: OCherepanova@sfu-kras.ru

Аннотация. В данной работе строится граница между упругой и пластической областями в растягиваемой полосе. Полоса ослаблена боковыми разрезами и отверстиями. Разрезы могут иметь произвольную форму, их количество не ограничено. Такие задачи являются актуальными до сих пор, поскольку их решение позволяет сделать оценку предельного состояния рассматриваемой конструкции. Для решения подобной задачи в настоящее время очень часто используются численные методы, к сожалению, часто без особого обоснования. Поэтому все более актуальными становятся аналитические методы решения подобных задач. В настоящей работе приведены законы сохранений дифференциальных уравнений. Сохраняющийся ток линеен по первым производным. Задача решается в два этапа. На первом этапе решается Дирихле для уравнения Лапласа, на втором – используется техника законов сохранения. Это позволяют свести нахождение компонент тензора напряжений в каждой точке к контурному интегралу по границам рассматриваемой области и дает возможность построить упругопластическую границу. Построенное решение позволяет написать программу для численного расчета задачи о растяжении полосы, ослабленной разрезами и отверстиями. При этом форма разрезов и отверстий не существенна, достаточна, чтобы границы были кусочно-гладкими.

Ключевые слова: законы сохранения, упругопластическая граница, кусочно-гладкая граница, уравнение Лапласа, уравнения равновесия, напряженное состояние, уравнения упругости.

Solving the problem of stretching an elastic-plastic strip weakened by cuts and holes

O. N. Cherepanova

Siberian Federal University
79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
E-mail: OCherepanova@sfu-kras.ru

Abstract. In this paper, the boundary between elastic and plastic regions in a stretchable strip is constructed. The band is weakened by side slits and holes. Such tasks are still relevant, since its solution allows us to make an assessment of the limiting state of the structure under consideration. Numerical methods are currently very often used to solve such a problem, unfortunately, often without much justification. Therefore, analytical methods for solving such problems are becoming more and more relevant. In this paper, the conservation laws of differential equations are used. The conserved current is linear in the first *derivatives. The task is solved in two stages. At the first stage, Dirichlet is solved for the Laplace equation, and at the second stage, the technique of conservation laws is used. Their use makes it possible to reduce the finding of the components of the stress tensor at each point to a contour integral along the boundaries of the region under consideration. And this makes it possible to build an elastic-plastic boundary.*

Keywords: conservation laws, elastic-plastic boundary, piecewise smooth boundary, Laplace equation, equilibrium equation.

Введение

Упругопластические задачи, в силу их практической важности, уже давно изучаются механиками. Основной проблемой, которая возникает при решении таких задач, является упругопластическая граница. Условие пластичности накладывает дополнительную связь, и это, по словам Г. П. Черепанова [1], упрощает задачу, с другой стороны, возникает новый неизвестный элемент – упругопластическая граница, затрудняющая решение. В настоящее время решения упругопластических задач продолжает оставаться в центре внимания исследователей. Появляются новые аналитические подходы к их решению, совершенствуются численные методы. Проведем краткий обзор таких работ. В [2] с помощью законов сохранения решена задача о кручении упругопластического стержня, армированного упругими волокнами. Для решения задачи используются законы сохранения. В [3] рассмотрен упругопластический коробчатый брус, который изгибается поперечной силой. Предполагается, что деформации в стержне упругопластические и боковая поверхность его свободна от напряжений. Центр тяжести поперечного сечения не совпадает с точкой приложения силы. С помощью законов сохранения построено точное решение, описывающее напряженное состояние этой конструкции. Напряженное состояние вычисляется в каждой точке рассмотренной фигуры с помощью интегралов по внешним контурам поперечного сечения. В [4] исследуется упругопластическое кручение многослойного стержня. Стержень состоит из нескольких слоев. Упругие свойства слоев различны, но коэффициент пластичности у всех слоев одинаков. В статье построены законы сохранения, которые позволили вычислить компоненты тензора напряжений с помощью контурных интегралов по границе слоев. В [5] рассматривается упругопластическое кручение анизотропного трехслойного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения. Внутренний слой стержня находится в упругопластическом состоянии, два внешних слоя полностью пластические. Предполагается пластическая анизотропия. Параметры анизотропии каждого слоя различны. В [6] определена глубина зарождения пластической области, позволяющая контролировать степень наклепа защитного покрытия детали, не допуская его переупрочнения. В [7] дано описание испытательного комплекса и методики проведения экспериментов для изучения сложного нагружения. Приведены некоторые вопросы исследования упругопластического деформирования материалов на автоматизированном комплексе СН-ЭВМ. В [8] рассмотрено решение задачи определения упругопластического состояния тяжелого пространства, ослабленного отверстием эллиптической формы. Материал среды обладает свойствами анизотропии. Решение задачи выполнялось методом малого параметра. Кручение двухслойного стержня коробчатого сечения рассмотрено в [9]. В [10] численными методами рассчитывается напряженно-деформированное состояние связующего композитных материалов. Расслоения стальных труб при сложном нагружении моделируются в [11]. Упругопластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку, проведен в [12]. В [13] изучается влияние типа плоской задачи для упругопластического адгезионного слоя на значение J-интегралов. Горячая посадка упруговязкопластического диска с некруговым включением описана в [14]. В [15] описываются явления уменьшения пластичности с увеличением предела текучести поликристалла.

В предлагаемой работе используются законы сохранений дифференциальных уравнений. Это позволяет свести нахождение компонент тензора напряжений в каждой точке к контурному интегралу по границе рассматриваемой области и дает возможность построить упругопластическую границу. При этом предполагается, что граница является кусочно-гладкой.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнения, описывающие плоскую упругую деформацию в стационарном случае. Они состоят из уравнений равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \tag{1}$$

и уравнения Лапласа, которое есть следствие совместности деформаций

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=0. \tag{2}$$

Здесь σ_x,σ_y,τ – компоненты тензора напряжений.

Систему (1), (2), следует решить со следующими граничными условиями

$$\sigma_x n_1+\tau n_2\,|_L=X(x,y),\quad \tau n_1+\sigma_y n_2\,|_L=Y(x,y),$$

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau^2=4k^2. \tag{3}$$

Здесь n_1,n_2 – компоненты вектора внешней нормали к кусочно-гладкому внешнему контуру и контурам отверстий, ограничивающему конечную область S. Область S приведена на рис. 1. $X,Y-$ компоненты вектора внешних сил.

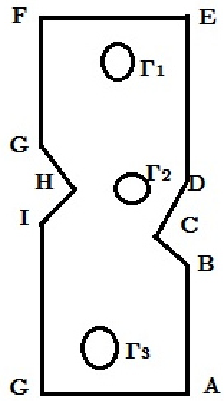

Рис. 1. Область S

Fig. 1. Region S

Далее предполагаем, что на боковой поверхности и контурах круглых отверстий материал находится в пластическом состоянии, поэтому соотношение Мизеса включено в (3). Здесь k – постоянная пластичности, равная пределу текучести при чистом сдвиге.

Предполагаем, что полоса растягивается усилиями

$$\sigma_y\,|_{y=l}=2k,\ \sigma_y\,|_{y=-l}=-2k, \tag{4}$$

а остальные границы внешнего контура и отверстий считаются свободными от напряжений.

Отсюда следует:

– на границах AB, DE из (3) получаем $\sigma_y=2k,\sigma_x=0,\tau=0;$

– на границах FG, IJ – $\sigma_y=-2k,\sigma_x=0,\tau=0;$

– на границах CB, GH и границах Гi – $\sigma_y=2kn_1^2,\sigma_x=2kn_2^2,\tau=-2kn_1n_2;$ (5)

– на границах CD, HI $\sigma_y=-2kn_1^2,\sigma_x=-2kn_2^2,\tau=2kn_1n_2.$

Будем искать решение задач (1)–(3) в два этапа. На первом этапе решается задача Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta p=0$, где

$$\sigma_x+\sigma_y=p(x,y). \tag{6}$$

Из (3) получаем

$p=2k$ на DEFGH и Гi

$p=-2k$ на HIJAB. (7)

Для решения этой задачи используются стандартные методы. В результате в области S найдена функция $p(x,y)$.

На втором этапе решаем задачу

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tau}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0, \tag{8}$$

со следующими граничными условиями, которые следуют из (3):

– на границах DE, FG, IJ, AB $\sigma_x = 0, \tau = 0$;

– на границах CD, GH и Γ_i $\sigma_x = 2kn_2^2,\ \tau = -2kn_1n_2$; (9)

– на границах BC, IH $\sigma_x = -2kn_2^2, \tau = 2kn_1n_2$.

Для удобства запишем уравнения (8) в виде

$$F_1 = u_x + v_y = 0, F_2 = -u_y + v_x + f = 0, \tag{10}$$

где $\sigma_x = u, \tau = v, \dfrac{\partial p}{\partial y} = f$, далее индекс внизу будет означать производную по соответствующему аргументу.

Для удобства перепишем в новых терминах и граничные условия

На границах DE, FG, IJ, AB $u = 0, v = 0$.

На границах CD, GH и Γ_i $u = 2kn_2^2, v = -2kn_1n_2$. (11)

На границах BC, IH $u = -2kn_2^2, v = 2kn_1n_2$.

Решим краевую задачу (10), (11) с помощью законов сохранения.

Законы сохранения системы уравнений (10)

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (10) назовем выражение вида

$$A_x + B_y = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \tag{12}$$

где ω_1, ω_2 – линейные дифференциальные операторы, одновременно не равные нулю тождественно,

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \tag{13}$$

$\alpha^1, \beta^1, \gamma^1, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ – некоторые гладкие функции, зависящие только от x, y.

Замечание. Более общее определение закона сохранения, подходящее для произвольных систем уравнений, можно найти в [16].

Из (12) с учетом (13) получаем

$$\alpha^1_x u + \alpha^1 u_x + \beta^1{}_x v + \beta^1 v_x + \gamma^1{}_x + \alpha^2_y u + \alpha^2 u_y + \beta^2_y v + \beta^2 v_y + \gamma^2_y =$$

$$= \omega_1 (u_x + v_y) + \omega_2 (-u_y + v_x + f) = 0. \tag{14}$$

Из (14) следует

$$\alpha^1_x + \alpha^2_y = 0, \beta^1_x + \beta^2_y = 0, \alpha^1 = \omega_1, \beta^1 = \omega_2, \alpha^2 = -\omega_2, \beta^2 = \omega_1, \gamma^1_x + \gamma^2_y = \omega_2 f.$$

Отсюда получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1. \tag{15}$$

Поэтому

$$\alpha^1_x - \beta^1_y = 0, \alpha^1_y + \beta^1_x = 0. \tag{16}$$

Из приведённых формул следует, что система уравнений (10) допускает бесконечно много законов сохранения; далее будут приведены только те, которые позволяют решить поставленную задачу.

Поскольку сохраняющийся ток имеет вид

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = -\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2.$$

Из (16) по формуле Грина получаем

$$\iint_S (A_x + B_y)dxdy = \oint_L -Ady + Bdx + \sum_i \oint_{\Gamma_i} -Ady + Bdx = 0, \tag{17}$$

где S – область, ограниченная кривой L и контурами Γ_i.

Решение задачи (10), (11)

Для нахождения значений u, v внутри области S, необходимо построить решения системы Коши – Римана (16), имеющие особенности в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$.

Первое из таких решений имеет вид

$$\alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \gamma^1 = \int \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} f dx, \gamma^2 = 0. \tag{18}$$

В точке $(x_0, y_0) \in S$ функции α^1, β^1 имеют особенности, поэтому окружим эту точку окружностью

$$\varepsilon: \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2.$$

Тогда из формулы (17) получаем

$$\sum_i \oint_{\Gamma_i} -Ady + Bdx + \oint_L -Ady + Bdx + \oint_\varepsilon -Ady + Bdx = 0, \tag{19}$$

Вычислим последний интеграл в формуле (19). Имеем

$$\oint_\varepsilon -Ady + Bdx = \oint_\varepsilon -\left(\frac{u(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2} - \frac{v(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2} + \gamma^1\right)dy +$$

$$+\left(-\frac{u(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \frac{v(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)dx.$$

Введем новые координаты $x - x_0 = \varepsilon\cos\varphi, \quad y - y_0 = \varepsilon\sin\varphi,$ получаем

$$\oint_\varepsilon -Ady + Bdx = \int_0^{2\pi} [-(u\cos\varphi + v\sin\varphi)\cos\varphi - (u\sin\varphi + v\cos\varphi)s\text{in}\,\varphi]d\varphi =$$

$$= -\int_0^{2\pi} u d\varphi = -2\pi u(x_0, y_0). \tag{20}$$

Последнее равенство получено по теореме о среднем при $\varepsilon \to 0$.

Для окончательного построения решения найдем значения u, v на границе L. Из формул (15) получаем

$$2\pi\sigma_x(x_0, y_0) = \int_{AB} \gamma^1 dy + \int_{BC} -(-2kn_2^2\alpha^1 + 2kn_1n_2\beta^1 + \gamma^1)dy + (2kn_2^2\beta^1 + 2kn_1n_2\alpha^1)dx +$$

$$-\int_{CD} (2kn_2^2\alpha^1 - 2kn_1n_2\beta^1 + \gamma^1)dy + (2kn_2^2\beta^1 + 2kn_1n_2\alpha^1)dx - \int_{DE} \gamma^1 dy - \int_{EF} \gamma^1 dy + \int_{FG} \gamma^1 dy +$$

$$+\int_{GH} -(2kn_2^2\alpha^1 - 2kn_1n_2\beta^1 + \gamma^1)dy - (2kn_2^2\beta^1 + 2kn_1n_2\alpha^1)dx +$$

$$+\int_{HI} -(-2kn_2^2\alpha^1 + 2kn_1n_2\beta^1 - \gamma^1)dy + (2kn_2^2\beta^1 + 2kn_1n_2\alpha^1)dx + \int_{IJ} \gamma^1 dy - \int_{JA} \gamma^1 dy +$$

$$+\sum_i \int_{\Gamma_i} (2kn_2^2\alpha^1 - 2kn_1n_2\beta^1 + \gamma^1)dy + (2kn_2^2\beta^1 + 2kn_1n_2\alpha^1)dx. \quad (21)$$

Второе решение системы уравнений (16) возьмем в виде

$$\alpha^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta^1 = -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\gamma^1 = -\int \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} f dx, \quad \gamma^2 = 0. \quad (22)$$

Проделав выкладки, аналогичные выкладкам, проделанным с решением (18), получаем

$$2\pi\tau(x_0, y_0) = \int_{AB} \gamma^1 dy + \int_{BC} -(-2kn_2^2\alpha^1 + 2kn_1n_2\beta^1 + \gamma^1)dy + (2kn_2^2\beta^1 + 2kn_1n_2\alpha^1)dx +$$

$$-\int_{CD} (2kn_2^2\alpha^1 - 2kn_1n_2\beta^1 + \gamma^1)dy + (2kn_2^2\beta^1 + 2kn_1n_2\alpha^1)dx - \int_{DE} \gamma^1 dy - \int_{EF} \gamma^1 dy + \int_{FG} \gamma^1 dy$$

$$+\int_{GH} -(2kn_2^2\alpha^1 - 2kn_1n_2\beta^1 + \gamma^1)dy - (2kn_2^2\beta^1 + 2kn_1n_2\alpha^1)dx +$$

$$+\int_{HI} -(-2kn_2^2\alpha^1 + 2kn_1n_2\beta^1 - \gamma^1)dy + (2kn_2^2\beta^1 + 2kn_1n_2\alpha^1)dx + \int_{IJ} \gamma^1 dy - \int_{JA} \gamma^1 dy +$$

$$+\sum_i \int_{\Gamma_i} (2kn_2^2\alpha^1 - 2kn_1n_2\beta^1 + \gamma^1)dy + (2kn_2^2\beta^1 + 2kn_1n_2\alpha^1)dx. \quad (23)$$

Заключение

В работе предложен метод решения краевой задачи, описывающей упругопластическое напряженное состояние полосы с боковыми разрезами и отверстиями. При этом вычисления напряжения σ_x, τ сводятся только к вычислению контурных интегралов по границам области, а напряжение σ_y определяется из решения задачи (11), (12) численным решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа. После определения всех компонент тензора напряжений необходимо найти точки области S, в которых достигается предел текучести. Это позволяет построить упругопластическую границу и тем самым оценить прочность рассматриваемой пластины. В настоящее время разрабатывается программа, позволяющая строить упругопластическую границу для растягиваемых пластин с разрезами и отверстиями.

Библиографические ссылки

1. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука. 1983. 238 с.

2. Евтихов Д. О. Упругопластическая граница скручиваемого стержня, армированного волокнами // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 53–62.

3. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Изгиб упругопластического бруса коробчатого сечения // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 107–115.

4. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Упруго-пластическое кручение многослойного стержня // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 28–36.

5. Щеглова Ю. Д. Метод возмущений при определении поля перемещений трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 5–14.

6. К вопросу зарождения пластической области в композиционных покрытиях / Н. А. Пеньков, О. А. Сидоркин, А. В. Бараненко, Д. В. Березин // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 81–86.

7. Гультяев В. И., Булгаков А. Н. Экспериментальное изучение упругопластического деформирования конструкционных материалов на автоматизированном испытательном комплексе сн-эвм // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 53–65.

8. Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Александров А. Х. Упругопластическое состояние анизотропной среды, ослабленной горизонтальной эллиптической полостью с учетом силы тяжести // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 46–52.

9. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Власов А. Ю. Кручение двухслойного стержня с коробчатым сечением // Прикладная механика и техническая физика. 2024. Т. 65, № 3. С. 161–168.

10. Ракин С. И. Расчет напряженно-деформированного состояния связующего композитных материалов // Прикладная механика и техническая физика. 2024. Т. 65, № 2. С. 127–137.

11. Кургузов В. Д. Моделирование расслоения стальных труб при сложном нагружении // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 6. С. 155–167.

12. Севастьянов Г. М. Упруго-пластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку. // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2024. № 3. С. 34–50.

13. Влияние типа плоской задачи для тонкого упругопластического адгезионного слоя на значение J-интегралов / В. Э. Богачева, В. В. Глаголева, Л. В. Глаголев, А. А. Маркин // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 6. С. 168–175.

14. Буренин А. А., Ткачева А. В. О сборке горячей посадкой упруговязкопластического диска с некруговым включением // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2024. № 5. С. 29–47.

15. Марина В. Ю. Описание явления уменьшения пластичности с увеличением предела текучести поликристалла // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2024. № 5. С. 138–163.

16. Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. 1984. № 6. P. 56–64.

References

1. Annin B. D., Cherepanov G. P. *Uprugo-plasticheskaya zadacha* [Elastic-plastic problem]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 238 p.

2. Evtikhov D. O. [Elastic-plastic boundary of a twisted rod reinforced with fibers]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya.* 2024, No. 4(62), P. 53–62 (In Russ.).

3. Senashov S. I., Savostyanova I. L. [Bending of an elastic-plastic box-shaped beam]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2024, No. 1(59), P. 107–115 (In Russ.).

4. Senashov S. I., Savostyanova I. L. [Elastic-plastic torsion of a multilayer rod]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023, No. 2(56), P. 28–36 (In Russ.).

5. Shcheglova Yu. D. [The perturbation method for determining the displacement field of a three-layer anisotropic cylindrical rod of non-circular cross-section during elastoplastic torsion]. *Vestnik*

Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023, No. 4(58), P. 5–14 (In Russ.).

6. Penkov N. A., Sidorkin O. A., Baranenko A. V., Berezin D. V. [On the issue of the origin of the plastic domain in composite coatings]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023, No. 4(58), P. 81–86 (In Russ.).

7. Gultyaev V. I., Bulgakov A. N. [Experimental study of elastic-plastic deformation of structural materials on an automated ch-computer test complex]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023, No. 2(56), P. 53–65 (In Russ.).

8. Matveev S. V., Matveeva A. N., Alexandrov A. H. [The elastic-plastic state of an anisotropic medium weakened by a horizontal elliptical cavity taking into account gravity]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023, No. 1(55), P. 46–52 (In Russ.).

9. Senashov S. I., Savostyanova I. L., Vlasov A. Yu. [Torsion of a two-layer rod with a box-shaped section] *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2024, Vol. 65, No. 3, P. 161–168 (In Russ.).

10. Rakin S. I. [Calculation of the stress–strain state of a binder of composite materials]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika.* 2024, Vol. 65, No. 2, P. 127–137 (In Russ.).

11. Kurguzov V. D. [Modeling of steel pipe stratification under complex loading]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2023, Vol. 64, No. 6, P. 155–167 (In Russ.).

12. Sevastyanov G. M. [Elastic – plastic analysis of a circular tube turned inside out]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2024, No. 3, P. 34–50 (In Russ.).

13. Bogacheva V. Sh., Glagoleva V. V., Glagolev L. V., Markin A. A. [The influence of the type of simplest service for fine management personnel on the value of J-integrals]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2023, Vol. 64, No. 6, P. 168–175 (In Russ.).

14. Burenin A. A., Tkacheva A. V. [On the hot-fit assembly of an elastic-viscous plastic disc with non-circular inclusion polycrystal]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2024, No. 5, P. 29–47 (In Russ.).

15. Marina V. Yu. [Description of the phenomenon of decreasing plasticity with an increase in the yield strength of a polycrystal]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2024, No. 5, P. 138–163 (In Russ.).

16. Vinogradov A. M. [Local symmetries and conservation laws]. *Acta Application. Mathematics*. 1984, No. 6, P. 56–64 (In Russ.).

Черепанова Ольга Николаевна – кандидат физико-математических наук, директор института математики и фундаментальной информатики; Сибирский федеральный университет. E-mail: OCherepanova@sfu-kras.ru.

Cherepanova Olga Nikolaevna – Cand. Sc., Director of the Institute of Mathematics and Fundamental Computer Science; Siberian Federal University. E-mail: OCherepanova@sfu-kras.ru.

Статья поступила в редакцию 14.05.2025; принята к публикации 20.05.2025; опубликована 30.06.2025
The article was submitted 14.05.2025; accepted for publication 20.05.2025; published 30.06.2025