

УДК 539.374

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-3-343-349

Для цитирования: Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Кручение упругопластического стержня, нагруженного давлением вдоль образующей // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 3. С. 343–349. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-3-343-349.

For citation: Senashov S. I., Savostyanova I. L. [Turn of an elastic-plastic rod under pressure that varies linearly along the forming]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 3, P. 343–349. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-3-343-349.

Кручение упругопластического стержня, нагруженного давлением вдоль образующей

С. И. Сенашов*, И. Л. Савостьянова

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

*E-mail: sen@sibsau.ru

Аннотация. Статья продолжает серию статей, посвященных использованию метода законов сохранения дифференциальных уравнений для решения задач механики деформируемого твердого тела.

Упругопластические задачи в механике деформируемого твердого тела учитывают нелинейную связь между напряжениями и деформациями под действием различных нагрузок. Такие задачи возникают в конструкциях, где материалы характеризуются различными физическими свойствами. Учет упругопластических деформаций важен для прогнозирования работы конструкций, а также для обеспечения их долговечности.

В настоящее время решение упругопластических задач продолжает оставаться в центре внимания исследователей. Появляются новые аналитические подходы к решению этих задач, совершенствуются численные методы. Авторы вносят свой вклад в решение задач механики деформируемого твердого тела с помощью законов сохранения. Использование законов сохранения позволяет свести нахождение компонент тензора напряжений в каждой точке к контурному интегралу по границе рассматриваемой области, что дает возможность построить ранее неизвестную упругопластическую границу.

В статье рассматривается упругопластический стержень постоянного поперечного сечения, который находится под действием линейного гидростатического давления и пары сил, которые скручивают его вокруг центральной оси, совпадающей с осью оз. Боковая поверхность стержня свободна от напряжений и находится в пластическом состоянии. Построенные законы сохранения позволяют найти компоненты тензора напряжений, которые, в свою очередь, позволяют определить упругопластическую границу в рассматриваемом стержне.

Ключевые слова: законы сохранения дифференциальных уравнений, упругопластичность, кручение.

Turn of an elastic-plastic rod under pressure that varies linearly along the forming

S. I. Senashov*, I. L. Savostyanova

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

*E-mail: sen@sibsau.ru

Abstract. The article continues a series of articles devoted to the use of the method of conservation laws of differential equations for solving problems in the mechanics of deformable solids.

Elastoplastic problems in the mechanics of a deformable solid take into account the nonlinear relationship between stresses and deformations under the influence of various loads. Such problems arise in structures where materials are characterized by different physical properties; taking into account elastic-plastic deformations is important for predicting the operation of structures, as well as for ensuring their durability.

Currently, solutions to elastoplastic problems continue to be the focus of researchers' attention. New analytical approaches to solving these problems are emerging, and numerical methods are being improved. The authors contribute to solving the problems of mechanics of deformable solids using conservation laws. The use of conservation laws makes it possible to reduce the finding of the stress tensor components at each point to a contour integral along the boundary of the region under consideration, which makes it possible to construct a previously unknown elastoplastic boundary.

The article considers an elastoplastic rod of constant cross-section, which is under the influence of linear hydrostatic pressure and a pair of forces that twist it around a central axis coinciding with the oz axis. The lateral surface of the rod is stress-free and in a plastic state. The constructed conservation laws allow us to find the components of the stress tensor. The components of the stress tensor make it possible to determine the elastoplastic boundary in the rod under consideration.

Keywords: conservation laws of differential equations, elastoplasticity, torsion.

Введение

В предлагаемой работе используются законы сохранения дифференциальных уравнений. Их использование позволяет свести нахождение компонент тензора напряжений в каждой точке к контурному интегралу по границе рассматриваемой области, а это дает возможность построить упругопластическую границу. При этом предполагается, что граница является кусочно-гладкой.

Упругопластические задачи, в силу их практической важности, уже давно изучаются механиками. Основной проблемой, которая возникает при решении таких задач, является определение упругопластической границы. Условие пластичности накладывает дополнительную связь, и это, по словам Г. П. Черепанова [1], упрощает задачу. С другой стороны, возникает новый неизвестный элемент: упругопластическая граница, затрудняющая решение.

В настоящее время решение упругопластических задач продолжает оставаться в центре внимания исследователей. Появляются новые аналитические подходы к их решению, совершенствуются численные методы. Проведем краткий обзор таких работ. В [2] с помощью законов сохранения решена задача о кручении упругопластического стержня, армированного упругими волокнами. Для решения задачи используются законы сохранения. В [3] рассмотрен упругопластический коробчатый брус, который изгибается поперечной силой. Предполагается, что деформации в стержне упругопластические и боковая поверхность его свободна от напряжений. Центр тяжести поперечного сечения не совпадает с точкой приложения силы. С помощью законов сохранения построено точное решение, описывающее напряженное состояние этой конструкции, которое вычисляется в каждой точке рассмотренной фигуры с помощью интегралов по внешним контурам поперечного сечения. В [4] исследуется упругопластическое кручение многослойного стержня, который состоит из нескольких слоев. Упругие свойства слоев различны, но коэффициент пластичности у всех слоев одинаков. В статье построены законы сохранения, позволившие вычислить компоненты тензора напряжений с помощью контурных интегралов по границе слоев. В [5] рассматривается упругопластическое кручение анизотропного трехслойного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения. Внутренний слой стержня находится в упругопластическом состоянии, два внешних слоя полностью пластические. Предполагается пластическая анизотропия. Параметры анизотропии каждого слоя

различны. В [6] рассмотрено решение задачи определения упругопластического состояния тяжелого пространства, ослабленного отверстием эллиптической формы. Материал среды обладает свойствами анизотропии. Решение задачи выполнялось методом малого параметра. Кручение двухслойного стержня коробчатого сечения рассмотрено в [7]. В [8] численными методами рассчитывается напряженно-деформированное состояние связующего композитных материалов. Расслоения стальных труб при сложном нагружении моделируются в [9]. Упругопластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку, проведен в [10]. В [11] изучается влияние типа плоской задачи для упругопластического адгезионного слоя на значение J -интегралов. В [12] в рамках одной модели больших упругопластических деформаций рассматривается нестационарная динамика среды, не связанная с дополнительным накоплением пластических деформаций к уже имеющимся. Показано, что в общем случае каждая из упругих волн может сопровождаться скачкообразным поворотом пластических деформаций. В [13] изучен процесс производства необратимых деформаций во вращающемся цилиндре, изготовленном из материала с упругими вязкими и пластическими свойствами.

Постановка задачи

Имеется упругопластический стержень постоянного поперечного сечения, который находится под действием линейного гидростатического давления и пары сил, которые скручивают его вокруг центральной оси, совпадающей с осью oz .

Предполагаем, что выполнены следующие условия

$$\begin{aligned}\sigma_x = -\lambda z + C, \sigma_y = -\lambda z + C, \sigma_z = -\lambda z + C, \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = u(x, y), \tau_{yz} = v(x, y),\end{aligned}\quad (1)$$

В этом случае уравнения, описывающие упругую деформацию в стационарном случае, имеют вид

$$u_x + v_y = \lambda, \quad v_x - u_y = -2\alpha. \quad (2)$$

Система (2) состоит из уравнения равновесия и уравнения совместности упругих деформаций.

В пластической области система имеет вид

$$u_x + v_y = \lambda, \quad u^2 + v^2 = k^2. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений; $\lambda, \alpha = G\theta, k$ – постоянные; G – модуль упругости; θ – угол кручения; k – постоянная пластичности, равная пределу текучести при чистом сдвиге.

Предполагается, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений и находится в пластическом состоянии, поэтому систему (1) следует решать со следующими граничными условиями

$$un_1 + vn_2|_L = 0, \quad u^2 + v^2 = k^2. \quad (4)$$

Здесь n_1, n_2 – компоненты вектора внешней нормали к кусочно-гладкому внешнему контуру L , ограничивающему конечную область S .

Замечание 1. Если $\alpha = 0$, задача (4) для системы уравнений (2) с точностью до обозначений совпадает с задачей [1]. В [1] показано, что в этом случае для задачи (2)–(4) решение существует и единственно, если стержень имеет овальное сечение и $-1/\lambda > k/GR_{\min}$, где $R_{\min}$ – минимальный радиус кривизны кривой L .

Замечание 2. Случай, когда $\lambda = 0, \alpha \neq 0$ соответствует классическому случаю упруго-пластического кручения, рассматриваться не будет. Рассмотрению его посвящена работа [1].

Для удобства запишем уравнения (2) в виде

$$F_1 = u_x + v_y - \lambda = 0, F_2 = -u_y + v_x + 2\alpha = 0, \quad (5)$$

решим краевую задачу (2), (4) с помощью законов сохранения.

Законы сохранения системы уравнений (2)

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (2) назовем выражение вида

$$A_x + B_y = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (6)$$

где ω_1, ω_2 – линейные дифференциальные операторы, одновременно не равные нулю тождественно.

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \quad B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (7)$$

$\alpha^1, \beta^1, \gamma^1, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ – некоторые гладкие функции, зависящие только от x, y .

Замечание 3. Более общее определение закона сохранения, подходящее для произвольных систем уравнений, можно найти в [14].

Из (6) с учетом (7) получаем

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 u + \alpha^1 u_x + \beta_x^1 v + \beta^1 v_x + \gamma_x^1 + \alpha_y^2 u + \alpha^2 u_y + \beta_y^2 v + \beta^2 v_y + \gamma_y^2 = \\ = \omega_1 (u_x + v_y - \lambda) + \omega_2 (-u_y + v_x + 2\alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует

$$\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \quad \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \quad \alpha^1 = \omega_1, \quad \beta^1 = \omega_2, \quad \alpha^2 = -\omega_2, \quad \beta^2 = \omega_1, \quad \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\lambda\omega_1 + 2\alpha\omega_2.$$

Отсюда получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \quad \alpha^2 = -\beta^1. \quad (9)$$

Поэтому

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \quad \alpha_y^1 + \beta_x^1 = 0, \quad \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\lambda\alpha^1 + 2\alpha\beta^1. \quad (10)$$

Из приведённых формул следует, что система уравнений (2) допускает бесконечно много законов сохранения; далее будут приведены только те, которые позволяют решить поставленную задачу.

Сохраняющийся ток имеет вид

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \quad B = -\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2.$$

Из (6) по формуле Грина получаем

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_L -A dy + B dx = 0, \quad (11)$$

где S – область, ограниченная кривой L .

Решение задачи (2), (4)

Для нахождения значений u, v внутри области S необходимо построить решения системы (10), имеющие особенности в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$.

Первое из таких решений имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \beta^1 = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \\ \gamma^1 &= 2\alpha \int \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dx = 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0}, \\ \gamma^2 &= -\lambda \int \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dy = -\lambda \operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}.\end{aligned}\quad (12)$$

В точке $(x_0, y_0) \in S$ функции α^1, β^1 имеют особенности, поэтому окружим эту точку окружностью

$$\varepsilon: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varepsilon^2.$$

Тогда из формулы (11) получаем

$$\oint_L -A dy + B dx + \oint_\varepsilon -A dy + B dx = 0, \quad (13)$$

вычислим последний интеграл в формуле (13). Имеем

$$\begin{aligned}\oint_\varepsilon -A dy + B dx &= \oint_\varepsilon \left(-\frac{u(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - \frac{v(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \gamma^1 \right) dy + \\ &+ \left(-\frac{u(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - \frac{v(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \gamma^2 \right) dx.\end{aligned}$$

Введем новые координаты $x-x_0 = \varepsilon \cos \varphi, \quad y-y_0 = \varepsilon \sin \varphi$. Получаем

$$\begin{aligned}\oint_\varepsilon -A dy + B dx &= \int_0^{2\pi} [-(u \cos \varphi + v \sin \varphi) \cos \varphi - (u \sin \varphi + v \cos \varphi) \sin \varphi] d\varphi = \\ &= -\int_0^{2\pi} u d\varphi = -2\pi u(x_0, y_0).\end{aligned}\quad (14)$$

Последнее равенство получено по теореме о среднем при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для окончательного построения решения найдем значения u, v на границе L . Из формулы (13) получаем

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_L (-\alpha^1 n_2 + \beta^1 n_1 + \gamma^1) dy + (\beta^1 n_2 + \alpha^1 n_1 + \gamma^2) dx. \quad (15)$$

Второе решение системы уравнений (10) возьмем в виде

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \beta^1 = -\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \\ \gamma^1 &= -\lambda \int \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dx = -\lambda \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0}, \\ \gamma^2 &= -2\alpha \int \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dy = -2\alpha \operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}.\end{aligned}\quad (16)$$

Проделив выкладки, аналогичные выкладкам, проданным с решением (12), получаем

$$2\pi\nu(x_0, y_0) = \oint_L (-\alpha^1 n_2 + \beta^1 n_1 + \gamma^1) dy + (\beta^1 n_2 + \alpha^1 n_1 + \gamma^2) dx. \quad (17)$$

Заключение

В работе построены законы сохранения для системы уравнений (2), описывающие кручение упругопластического стержня, находящегося под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей. Используя построенные законы сохранения, найдены компоненты тензора напряжений σ_{xz}, σ_{yz} по формулам (15) и (17), которые позволяют определить упругопластическую границу в рассматриваемом стержне.

Библиографические ссылки

1. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск : Наука, 1983. 238 с.
2. Евтихов Д. О. Упругопластическая граница скручиваемого стержня, армированного волокнами // Вестник ЧГПУ. 2024. № 4(62). С. 53–62.
3. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Изгиб упругопластического бруса коробчатого сечения // Вестник ЧГПУ. 2024. № 1 (59). С. 107–115.
4. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Упругопластическое кручение многослойного стержня // Вестник ЧГПУ. 2023. № 2 (56). С. 28–36.
5. Щеглова Ю. Д. Метод возмущений при определении поля перемещений трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении // Вестник ЧГПУ. 2023. № 4 (58). С. 5–14.
6. Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Александров А. Х. Упругопластическое состояние анизотропной среды, ослабленной горизонтальной эллиптической полостью с учетом силы тяжести // Вестник ЧГПУ. 2023. № 1 (55). С. 46–52.
7. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Власов А. Ю. Кручение двухслойного стержня с коробчатым сечением // ПМТФ. 2024. Т. 65, вып. 3. С. 161–168.
8. Ракин С. И. Расчет напряженно-деформированного состояния связующего композитных материалов // ПМТФ. 2024. Т. 65, вып. 2. С. 127–137.
9. Кургузов В. Д. Моделирование расслоения стальных труб при сложном нагружении // ПМТФ. 2023. Т. 64, вып. 6. С. 155–167.
10. Севастьянов Г. М. Упругопластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку // Изв. РАН МТТ. 2024. № 3. С. 34–50.
11. Влияние типа плоской задачи для тонкого упругопластического адгезионного слоя на значение J -интегралов / В. Э. Богачева, В. В. Глаголева, Л. В. Глаголев, А. А. Маркин // ПМТФ. 2023. Т. 64, вып. 6. С. 168–175.
12. Рагозина В. Е., Дудко О. В. Некоторые свойства упругой динамики среды с предварительными большими необратимыми деформациями // СибЖИМ. 2019. Т. 22, № 1 (77). С. 93–101.
13. Фирсов С. В., Прокудин А. Н., Буренин А. А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением // СибЖИМ. 2019. Т. 22, № 4 (80). С. 121–133.
14. Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. 1984. No. 6. P. 56–64.

References

1. Annin B.D., Cherepanov G.P. *Uprugo – plasticheskaya zadacha* [Elastic-plastic problem]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 238 p.
2. Evtikhov D. O. [Elastic-plastic boundary of a twisted rod reinforced with fiber]. *Vestnik ChSPU*. 2024, No. 4 (62), P. 53–62 (In Russ.).
3. Senashov S. I., Savostyanova I. L. [Flexure of an elastic-plastic box-section beam]. *Vestnik ChSPU*. 2024, No. 1 (59), P. 107–115 (In Russ.).

4. Senashov S. I., Savostyanova I. L. [Elastic-plastic torsion of a multilayer rod]. *Vestnik ChSPU*. 2023, No. 2(56), P. 28–36 (In Russ.).
5. Shcheglova Yu. D. [Method of perturbations in determining the displacement field of a three-layer anisotropic cylindrical rod of non-circular cross-section during elastoplastic torsion]. *Vestnik ChSPU*. 2023, No. 4 (58), P. 5–14 (In Russ.).
6. Matveev S. V., Matveeva A. N., Alexandrov A. H. [The elastic-plastic state of an anisotropic medium weakened by a horizontal elliptical cavity taking into account gravity]. *Vestnik ChSPU*. 2023, No. 1 (55), P. 46–52 (In Russ.).
7. Senashov S. I., Savostyanova I. L., Vlasov A. Yu. [Torsion of a two-layer rod with a box section]. *PMTF*. 2024, Vol. 65, No. 3, P. 161–168 (In Russ.).
8. Rakin S. I. [Calculation of the Stress-Strain State of the Binder of Composite Material]. *PMTF*. 2024, Vol. 65, No. 2, P. 127–137 (In Russ.).
9. Kurguzov V. D. [Modeling of Steel Pipe Delamination under Complex Loading]. *PMTF*. 2023, Vol. 64, No. 6, P. 155–167 (In Russ.).
10. Sevastyanov G. M. [Elastic – plastic analysis of a circular tube turned inside out] *Izv. RAS MTT*, 2024, No. 3, pp. 34–50 (In Russ.).
11. Bogacheva V. E., Glagoleva V. V., Glagolev L. V., Markin A. A. [Influence of type a planar problem for a thin elastic-plastic adhesive layer on the value of J-integrals]. *PMTF*. 2023, Vol. 64, No. 6, P. 168–175 (In Russ.).
12. Ragozina V. E., Dudko O. V. [Some properties of the elastic dynamics of a medium with preliminary large irreversible deformations]. *SibZHIM*. 2019, Vol. 22, No. 1 (77), P. 93–101 (In Russ.).
13. Firsov S. V., Prokudin A. N., Burenin A. A. [Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion]. *SibZHIM*. 2019, Vol. 22, No. 4 (80), P. 121–133 (In Russ.).
14. Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws. *Acta Appl. Math.* 1984. No. 6, P. 56–64.

© Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., 2025

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: sen@sibsau.ru. <https://orcid.org/0000-0001-5542-4781>.

Савостьянова Ирина Леонидовна – доктор физико-математических наук, заместитель директора научно-образовательного центра «Институт космических исследований и высоких технологий»; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: ruppa@inbox.ru. <https://orcid.org/0000-0002-9675-7109>.

Senashov Sergey Ivanovich – Dr. Sc., Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: sen@sibsau.ru. <https://orcid.org/0000-0001-5542-4781>.

Savostyanova Irina Leonidovna – Dr. Sc., Deputy Director of the Research and Education Center “Institute of Space Research and High Technologies”; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: ruppa@inbox.ru. <https://orcid.org/0000-0002-9675-7109>.

Статья поступила в редакцию 01.09.2025; принята к публикации 03.09.2025; опубликована 13.10.2025
The article was submitted 01.09.2025; accepted for publication 03.09.2025; published 13.10.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License

