УДК 621.391
Doi: 10.31772/2712-8970-2026-27-2-223-235

Для цитирования: Гибридные системы связи: формирование многоуровневой математической концепции маршрутизации / А. А. Кузнецов, А. Ю. Власов, К. Э. Гаипов, К. В. Сафонов // Сибирский аэрокосмический журнал. 2026. Т. 27, № 2. С. 223–235. Doi: 10.31772/2712-8970-2026-27-2-223-235

For citation: Kuznetsov A. A., Vlasov A. Yu., Gaipov K. E., Safonov K. V. [Hybrid communication systems: forming a multilevel mathematical concept of routing]. *Siberian Aerospace Journal.* 2026, Vol. 27, No. 2, P. 223–235. Doi: 10.31772/2712-8970-2026-27-2-223-235

Гибридные системы связи: формирование многоуровневой математической концепции маршрутизации

А. А. Кузнецов*, А. Ю. Власов, К. Э. Гаипов, К. В. Сафонов

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31
*E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru

Аннотация. Предметом исследования выступают математические модели маршрутизации в гибридных системах связи, объединяющих наземный, стратосферный и космический сегменты. Тема работы – построение единой концепции маршрутизации для сетей с одновременно изменяющимися топологией, матрицей требований, пропускными способностями, уровнями потерь и задержками каналов. Цель – формирование многоуровневой математической концепции маршрутизации, объединяющей три взаимосвязанные идеи: общий дробный многопродуктовый поток (multicommodity flow, MCF), ограничение числа маршрутов на одно требование и минимизацию задержки. Методологическую основу составляют модели MCF на ориентированных графах, маршрутные постановки с ограниченным числом путей, выпуклые функционалы задержки и анализ современных приближённых алгоритмов. Показано, что общий дробный MCF задаёт верхний уровень оценки достижимой пропускной способности, справедливости и приоритетного обслуживания; постановки с ограниченным числом путей обеспечивают переход к инженерно реализуемым решениям; модели минимизации задержки позволяют учитывать качество обслуживания и временную динамику гибридной сети. Предлагаемая концепция связывает маршрутизацию с задачами распределения радиоресурсов, адаптации структуры сети и распространения маршрутной информации. Полученные результаты указывают на целесообразность многоэтапной маршрутизации: сначала формируется теоретическая верхняя оценка в дробной постановке, затем она сжимается до ограниченного набора путей и после этого уточняется по критериям задержки. Область применения – проектирование и управление перспективными космическими, воздушными и наземными сегментами связи, а также разработка алгоритмов маршрутизации для систем ракетно-космического назначения. Предложенная концепция может служить теоретической основой для дальнейшего развития маршрутизации в гибридных системах связи, включая сети с потерями, динамические сети и задачи совместного управления сетью.

Ключевые слова: гибридные системы связи, многопродуктовый поток, конкурентный поток, маршрутизация с ограниченным числом путей, минимизация задержки.

Hybrid communication systems: forming a multilevel mathematical concept of routing

A. A. Kuznetsov*, A. Yu. Vlasov, K. E. Gaipov, K. V. Safonov

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii Rabochii Prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
*E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru

Abstract. This article develops mathematical routing models for hybrid communication systems that integrate ground, stratospheric, and space segments. The study addresses networks where topology, demand matrices, link capacities, loss levels, and delay characteristics vary at the same time. The paper aims to formulate a multilevel mathematical routing concept that combines three core ideas: fractional multicommodity flow, path-limited routing, and delay minimization. The study uses multicommodity flow models on directed graphs, path-based formulations with a bounded number of routes per demand, convex delay-aware objectives, and an analysis of modern approximation algorithms. The results show that fractional multicommodity flow defines the upper level for estimating throughput, fairness, and priority-aware service; path-limited formulations translate this solution into engineering policies that a routing plane can install and maintain; and delay-oriented models account for quality-of-service requirements and temporal dynamics. The paper also shows how this concept links routing with radio-resource allocation, structural adaptation of the network, and routing-information dissemination. The results support a multistage routing logic in which a fractional formulation estimates the theoretical upper bound, a path-limited model compresses this solution into an installable routing policy, and a delay-oriented stage refines the decision for hybrid-network operation. The proposed concept applies to the design and control of communication systems that link spacecraft, airborne platforms, and terrestrial infrastructure. The article concludes that this concept can provide a theoretical basis for routing in hybrid communication systems and can naturally extend to lossy transmission models, dynamic network scenarios, and integrated network-control problems.

Keywords: hybrid communication systems; multicommodity flow; concurrent flow; path-limited routing; delay minimization.

Введение

Переход от преимущественно наземных сетей связи к гибридным архитектурам, объединяющим наземный, стратосферный и космический сегменты, делает задачу маршрутизации одной из центральных задач современной телекоммуникационной инженерии. Если в традиционных магистральных IP-сетях значительная часть инфраструктуры опирается на сравнительно устойчивую топологию и долговременные проводные либо фиксированные радиорелейные соединения, то в гибридных системах сама сеть является гетерогенной, самоорганизующейся и существенно более изменчивой во времени [1].

Особенно остро эта проблема проявляется в архитектурах, где космический и стратосферный сегменты должны быть связаны между собой и с наземной инфраструктурой беспроводными каналами связи. В такой сети маршрут перестаёт быть почти неизменным путём через стабильный каркас и превращается в объект регулярного пересчёта: меняются взаимная видимость узлов, доступные каналы, пропускные способности, задержки, уровни интерференции и даже сам набор допустимых связей. Для сетей с воздушными и беспилотными платформами это дополняется необходимостью непрерывной топологической перестройки и адаптации маршрутов к движению узлов [2; 3].

Дополнительную сложность создаёт быстро растущая мобильность абонентов и промежуточных узлов доступа. Если в классическом Интернете значительная часть трафика порождается стационарными или слабо мобильными конечными системами, то в перспективных гибрид-

ных сетях всё более заметную роль играют беспилотные транспортные системы, мобильные ретрансляторы и распределённые воздушные платформы. В этом случае изменяется не только состояние каналов, но и сама матрица требований: источники и получатели трафика активно перемещаются, а допустимые маршруты и точки ретрансляции должны перестраиваться быстрее, чем это требуется в традиционных сценариях сетевой эксплуатации [2; 3].

Поэтому средства маршрутизации, приемлемые для сравнительно более стабильных сетей общего пользования, не могут без существенной модификации рассматриваться как достаточные для гибридной беспроводной архитектуры. Даже такие практически важные механизмы, как балансировка по равностоимостным маршрутам (Equal-Cost Multi-Path, ECMP) и сегментная маршрутизация, ориентированы на ограниченный набор путей и на сравнительно более устойчивую плоскость управления, тогда как в гибридной сети меняются и сама топология, и условия распространения, и состав доступных межсегментных каналов [4–6].

В этих условиях требуется математический аппарат, который позволял бы одновременно оценивать достижимую долю обслуживаемого спроса, суммарный объём пропускаемого трафика, влияние приоритетов, задержек и временной динамики, а также ограниченность числа практически реализуемых маршрутов. Именно поэтому задача многопродуктового потока (multicommodity flow, MCF) приобретает здесь особую актуальность: она задаёт естественную верхнеуровневую модель распределения множества требований по сети с ограниченными ресурсами, а её дальнейшие расширения позволяют перейти к моделям, минимизирующим задержку трафика, постановкам с ограниченным числом путей и потоков во времени [7–26].

При этом маршрутизацию в гибридной сети следует рассматривать не как изолированную задачу выбора путей, а как основу для более широкого класса связанных задач управления сетью. Маршрутные решения непосредственно влияют на алгоритмы частотного и канального планирования [27], синтез и перестройку самой структуры сети, включая выбор и размещение ретрансляторов [3], а также на методы распределения маршрутной информации [28]. Иными словами, недостаточно найти оптимальный набор маршрутов, необходимо ещё обеспечить согласованное распределение радиоресурсов, поддержание работоспособной топологии и своевременную доставку маршрутизирующей информации всем узлам, участвующим в пересылке трафика.

Цель настоящей статьи состоит не в простом обзоре известных результатов, а в формировании многоуровневой математической концепции маршрутизации для гибридных систем связи. Следуя этой логике, мы выстраиваем иерархию, объединяющую три уровня: дробное распределение трафика, дискретное ограничение числа маршрутов и нелинейную минимизацию задержки. Такое объединение порождает задачу, сочетающую свойства линейной, комбинаторной и выпуклой оптимизации. В отличие от существующих работ, где указанные направления анализируются раздельно, в настоящей статье они интегрированы в единую иерархическую систему, адаптированную к гибридным сетям с изменчивой топологией, ограниченными радиоресурсами и жёсткими требованиями к задержке. Известные результаты по каждому из этих направлений служат математическим фундаментом соответствующих уровней. Их объединение в целостную систему и составляет основной концептуальный результат работы.

1. Общая дробная постановка задачи MCF

Рассмотрим ориентированный граф

$$G=(V,E),$$

где V – множество вершин; E – множество дуг. Пусть $|V|=n$ и $|E|=m$. Для каждой дуги $e\in E$ задана пропускная способность $c_e>0$. Имеется множество требований $K=1,\ldots,k$. Для каждого требования $i\in K$ заданы источник s_i, сток t_i и спрос $d_i>0$.

В дуговой форме поток задаётся переменными x_e^i, обозначающими объём потока требования i, проходящий по дуге e. Пусть

$$y_e = \sum_{i \in K} x_e^i$$

– суммарная нагрузка на дугу *e*. Тогда ограничения пропускной способности имеют вид

$$y_e \le c_e, \text{ где } e \in E.$$

Ограничения сохранения потока с общей долей удовлетворения спроса λ записываются так:

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} x_e^i - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e^i = b_v^i,$$

где

$$b_v^i = \begin{cases} \lambda d_i, & v = s_i, \\ -\lambda d_i, & v = t_i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда задача конкурентного MCF принимает вид

$$\max \lambda$$

при выполнении ограничений сохранения потока и пропускной способности. В маршрутной записи эквивалентная модель записывается как

$$\max \lambda,$$

$$\sum_{p \in P_i} f_p^i = \lambda d_i, \text{ где } i \in K,$$

$$\sum_{i \in K} \sum_{p \in P_i : e \in p} f_p^i \le c_e, \text{ где } e \in E,$$

$$f_p^i \ge 0.$$

Именно эта запись удобна при обсуждении маршрутной формы с ограниченным числом путей. С теоретической точки зрения данная проблема относится к классу задач линейного программирования (LP). На практике же решающим фактором становится масштаб сети, число требований, необходимость многократной оптимизации для различных критериев и требование к интерпретируемости решения. Поэтому, начиная с 1990-х гг., основной акцент постепенно смещается от прямого решения LP к быстрым схемам приближённого решения [7–13].

2. Три канонические постановки общего дробного MCF

Выше была приведена формулировка задачи конкурентного потока, однако она не является единственной. В работе [13] представлены три канонических задачи общего дробного MCF. Во всех трёх постановках используются те же переменные x_e^i и y_e, что и выше, а также те же ограничения сохранения потока и пропускной способности дуг. Различие состоит в том, каким образом задаётся обслуживаемый объём каждого требования и какой вид имеет целевая функция.

1. Конкурентный MCF. В этой задаче (рассмотренной ранее) для всех требований вводится один и тот же коэффициент λ, задающий общую долю удовлетворения спроса. Это означает, что в уравнениях сохранения потока для каждого требования i в источнике s_i в сеть вводится объём λd_i, в стоке t_i из сети выводится тот же объём, а на промежуточных вершинах сохраняется баланс потока. Целевая функция имеет вид

$$\max \lambda.$$

Тем самым задача направлена на максимально возможное равномерное обслуживание всех требований и естественно интерпретируется как постановка справедливого распределения ресурсов сети.

2. Максимальный MCF. Здесь для каждого требования i вводится собственный коэффициент β_i, определяющий обслуживаемый объём $\beta_i d_i$, а также следующая целевая функция:

$$\max \sum_{i \in K} \beta_i .$$

В уравнениях сохранения потока для требования i вместо общей величины λ используется индивидуальный коэффициент β_i. Таким образом, задача ориентирована уже не на равномерность, а на максимизацию суммарного объёма пропускаемого трафика. Если d_i трактуется как верхняя граница спроса, то в прикладных моделях нередко дополнительно вводят ограничение $\beta_i \le 1$.

3. Максимальный взвешенный MCF. Эта постановка сохраняет индивидуальные коэффициенты β_i, но дополняет их положительными весами $w_i > 0$, отражающими приоритет требований. Целевая функция имеет вид

$$\max \sum_{i \in K} w_i \beta_i .$$

В результате требования с большим весом получают больший вклад в целевую функцию. Такая модель особенно полезна для инженерии трафика, если необходимо различать классы сервиса, критический и фоновый трафик, а также требования с разной эксплуатационной важностью.

Далее в статье основной акцент сохраняется на постановке задачи конкурентного потока (она уже сформулирована в явном виде). Эта задача особенно удобна для обсуждения справедливости распределения ресурсов сети. Однако при интерпретации результатов прикладных задач маршрутизации следует иметь в виду всё семейство из трёх базовых целевых функций.

3. Эволюция приближённых алгоритмов MCF на ориентированных графах

Ранние комбинаторные приближения

Значительный шаг вперёд был сделан в работе [7], где показано, что многопродуктовые потоки можно приближённо решать существенно быстрее, чем это ожидалось при прямом использовании больших LP-моделей. Дальнейшее развитие связано с идеями лагранжевой релаксации и дробной упаковки. В работе Гарга и Кёнеманна [8] был предложен один из наиболее влиятельных алгоритмических каркасов: поток строится итеративно, а длины дуг в двойственной задаче обновляются в зависимости от их загрузки. Затем Флейшеру [9] удалось существенно ослабить зависимость времени работы от числа требований, что стало важной вехой для разреженных графов и задач с большим количеством пар «источник – сток».

Результаты Каракостаса и развитие методов в 2000–2010 гг.

Существенный прогресс для задачи конкурентного потока был достигнут Каракостасом. Его схема позволяет снизить зависимость от числа требований и различает неявное и явное представления решения. Для задачи конкурентного потока им получено время порядка

$$\tilde{O}\left(\varepsilon^{-2} m^2\right)$$

для неявного представления потоков в решении и

$$\tilde{O}\left(\varepsilon^{-2}\left(m^2 + kn\right)\right)$$

для явного представления [10]. Следующее существенное ускорение связано с использованием динамических графовых структур данных. В частности, в работе Мэдри показано, что многие

постановки дробного MCF можно решать быстрее за счёт интеграции таких структур со схемами приближённой оптимизации [11].

Современное состояние: почти-линейные алгоритмы для ориентированных графов

В 2024 г. Чэнь и Е предложили итеративную схему для высокоточного решения широкого семейства задач многопродуктового потока на неориентированных графах [12]. В контексте настоящей работы ключевое значение имеет ориентированный случай. По состоянию на 2025 г. наиболее сильный известный результат именно для общего дробного приближённого MCF на ориентированных графах принадлежит Чэнь, Грауру и Сидфорду [13], которые получили алгоритмы с временем работы

$$m^{1+o(1)}k\varepsilon^{-1}$$

для нахождения $(1-\varepsilon)$ приближённых решений трёх базовых задач MCF на ориентированных графах. Данный результат по асимптотике значительно превосходит классические приближённые схемы предыдущих поколений. Из этого следует важный методологический вывод. Если говорить только об общем приближённом MCF на ориентированных графах, то классический подход Гарга – Кёнеманна (упаковка маршрутов) уже не является лучшим по асимптотике. Тем не менее он сохраняет ценность по двум причинам. Во-первых, такие схемы проще для практической реализации и объяснения результатов. Во-вторых, именно они естественным образом стыкуются с маршрутной формой записи решения, а значит, легче переносятся в постановки задач с ограниченным числом путей, а также в нелинейные задачи, ориентированные на минимизацию задержки трафика. Хотя результаты 2024–2025 гг. улучшают асимптотические оценки, их алгоритмическая конструкция основана на существенно более сложной цепочке редукций и высокоточных вспомогательных подзадачах. Поэтому для инженерных задач и практической программной реализации более простые алгоритмы из семейства Гарга – Кёнемана, Флейшер и Каракостаса во многих случаях остаются более практичным инструментом [8–10; 13].

4. Классическая модель задержки Клейнрока

Для телекоммуникационных сетей одной лишь максимизации потока недостаточно. Даже если ограничение $y_e \le c_e$ не нарушается, эксплуатационные свойства сети могут резко деградировать при работе вблизи насыщения. Именно поэтому задержка стала естественным вторым критерием проектирования гибридной сети.

В классических работах Клейнрока сеть рассматривается как совокупность каналов и узлов обслуживания, а основная метрика качества задаётся средней задержкой сообщений [14]. В частности, в статье Фратты, Джерлы и Клейнрока 1973 г. задача MCF формулируется в нелинейной форме, а для её решения вводится метод отклонения потока, аналогичный градиентному спуску, где роль направления улучшения играет «кратчайший маршрут» в заранее заданной метрике [15]. Обзор 2014 г. подчёркивает, что этот метод использовался от ARPANET до более поздних транспортных и SDN-приложений [16]. При этом модель Клейнрока опирается на стационарные пуассоновские потоки и экспоненциальное обслуживание; для гибридных беспроводных сетей с переменной пропускной способностью это является приближением, однако оно по-прежнему даёт полезную оценку средней задержки и широко используется при синтезе сетей.

Если для дуги e принять интенсивность прихода трафика равной y_e, а интенсивность обслуживания – c_e, то для модели M/M/1 среднее время пребывания пакета в системе записывается как

$$W_e(y_e) = \frac{1}{c_e - y_e}, \text{ где } 0 \le y_e < c_e.$$

Умножая это время на интенсивность потока, получаем вклад дуги в суммарную задержку сети:

$$y_e W_e(y_e) = \frac{y_e}{c_e - y_e}.$$

Суммирование по всем дугам даёт классический функционал

$$J(x) = \sum_{e \in E} \frac{y_e}{c_e - y_e}.$$

С математической точки зрения функция

$$\phi_e(y_e) = \frac{y_e}{c_e - y_e}$$

выпукла на интервале $[0, c_e)$. Следовательно, минимизация совокупной задержки естественным образом приводит к задаче выпуклой оптимизации, а возможность дробления потока является важным условием: она позволяет распределять трафик между альтернативными маршрутами и тем самым избегать резкого роста задержки на узких дугах. Выпуклость $\phi_e(y_e)$ гарантирует, что задача минимизации задержки может быть решена методами выпуклой оптимизации, например, градиентного спуска или метода отклонения потока [15; 16].

В более поздних исследованиях для каждой дуги вводят функцию латентности $\tau_e(y_e)$, которая описывает зависимость времени прохождения дуги от её загрузки. Тогда оптимальная маршрутизация при стандартных ограничениях многопродуктового потока формулируется следующим образом:

$$\min_x \Phi(x) = \sum_{e \in E} y_e \tau_e(y_e).$$

При выборе

$$\tau_e(y_e) = \frac{1}{c_e - y_e}$$

получаем модель Клейнрока как частный случай.

В более реалистичную постановку задачи включается фиксированная составляющая задержки a_e:

$$\tau_e(y_e) = a_e + \frac{1}{c_e - y_e}, \text{ где } a_e \geq 0,$$

что даёт целевую функцию

$$\Phi(x) = \sum_{e \in E} y_e \left(a_e + \frac{1}{c_e - y_e} \right).$$

В обзоре [25] показано, что подобные выпуклые формулировки многопродуктового потока давно стали самостоятельным направлением исследований. Временная динамика, в свою очередь, приводит к задачам потоков во времени, где у дуг имеются времена прохождения, а сам поток зависит от дискретного или непрерывного времени [26].

Если τ_e – время прохождения дуги e, а $x^i_{e,\tau}$ – объём потока требования i, запускаемый по дуге e в момент времени τ, то динамический закон сохранения можно записать как

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} x^i_{e,\tau} - \sum_{e=(u,v) \in E} x^i_{e,\tau-\tau_e} = b^i_{v,\tau}.$$

Для требований с дедлайнами естественное ограничение принимает вид

$$\sum_{\tau \le T_i} \sum_{e \in \delta^-(t_i)} x_{e,\tau}^i \ge d_i,$$

где T_i – допустимый срок доставки требования i. Именно так формулируются задачи в современных работах по MCF с ограничениями по сроку доставки, особенно для спутниковых и гибридных сетей, где задержкой распространения уже нельзя пренебречь [24].

Следовательно, современные постановки, ориентированные на минимизацию задержки, можно разделить на три уровня:

1. Статический выпуклый MCF, где задержка задаётся выпуклой функцией загрузки дуги.
2. Квазистатический уровень, где задержка трафика состоит из двух компонент: постоянной составляющей и переменной, зависящей от загрузки дуги.
3. Динамический уровень, где появляются времена прохождения, развёрнутые во времени сети, а также совместная маршрутно-календарная оптимизация.

5. Маршрутизация с ограниченным числом путей (к-разделимая маршрутизация)

В общем дробном MCF поток требования i может быть разложен по произвольному числу маршрутов. Для реальных сетей это часто неудобно: большое число путей повышает сложность конфигурирования, мониторинга и контроля качества обслуживания. Поэтому в литературе вводят ограничение на мощность носителя потока: каждое требование может использовать не более к путей [17].

Если P_i – множество путей для требования i, а f_p^i – поток по пути p, тогда к-разделимая постановка конкурентного потока (к-splittable problem) принимает вид

$$\max \lambda,$$

$$\sum_{p \in P_i} f_p^i = \lambda d_i, \text{ где } i \in K,$$

$$\sum_{i \in K} \sum_{p \in P_i : e \in p} f_p^i \le c_e, \text{ где } e \in E,$$

$$\left| p \in P_i : f_p^i > 0 \right| \le \text{к},$$

$$f_p^i \ge 0.$$

Это ограничение кажется «небольшим» по сравнению с общей дробной моделью, но именно оно переводит задачу из мира чистых выпуклых релаксаций в существенно более трудный класс задач комбинаторной оптимизации.

Как показано в работах Байера, Кёлера и Скутеллы [17], различные постановки задач к-разделимого потока являются NP-трудными; для их решения применяются метод ветвей и цен [18; 19], эвристики [20; 22] и рандомизированные алгоритмы округления [21].

С практической точки зрения ограничение на число путей хорошо согласуется с сетями MPLS, SDN, радиосетями и гибридными телекоммуникационными архитектурами, что упрощает мониторинг, диагностику и политику отказоустойчивости, а также помогает избежать чрезмерного дробления трафика на множество малых подпотоков. На практике параметр κ обычно выбирают малой константой (как правило, 2–4), что обусловлено ограничениями на размер таблиц пересылки, сложность балансировки нагрузки и риск переупорядочения пакетов [4–6; 29–31].

Именно поэтому постановка с ограниченным числом путей не является «частным техническим случаем» общего MCF. Наоборот, она выступает одной из наиболее реалистичных моделей для сетевой инженерии.

6. Современное представление задачи: от общего MCF к гибридной архитектуре

Рассмотренные выше результаты позволяют выделить три разных уровня алгоритмической архитектуры.

Уровень 1: быстрое приближение общего дробного MCF

Если задача состоит в оценке достижимой доли спроса, суммарного объёма пропускаемого трафика или приоритетно-взвешенного обслуживания на очень больших ориентированных графах, то наиболее естественным выбором является общий приближённый MCF. Здесь главную роль играют асимптотически эффективные приближённые алгоритмы, поскольку они дают первый ответ на вопросы «какую долю требований сеть способна обслужить?», «какой общий объём трафика можно провести?» и «как учесть приоритеты между требованиями?» [7–13].

Уровень 2: ограничение числа маршрутов

Если далее требуется технически реализуемое решение, необходимо перейти от общего дробного потока к модели с ограниченным числом путей или к-разделимой модели. На этом шаге возникает дискретный структурный выбор: какие именно маршруты оставить для каждого требования и какие потоки по ним направить [17–23].

Уровень 3: повторная оптимизация по задержке и времени

После того как выбран ограниченный набор маршрутов, задача естественным образом превращается либо в выпуклую оптимизацию с функциями латентности, либо в задачу потоков во времени и планирования с ограничениями по сроку доставки, если временная структура принципиальна [14–16; 24–26].

Именно эта архитектура представляется наиболее разумной для решения задач маршрутизации в гибридных системах связи. Она не пытается решать всю задачу «одним выстрелом», а использует сильные стороны разных классов методов на разных этапах.

Для наглядного сопоставления уровней предлагаемой концепции в таблице сведены их математическое содержание и инженерный смысл.

Трёхуровневая математическая концепция маршрутизации в гибридных системах связи

Уровень	Математическая модель	Критерий оптимизации	Результат	Инженерный смысл
1	Общий дробный MCF	Доля спроса, суммарный или взвешенный трафик	Дробное распределение потоков	Верхняя оценка пропускной способности
2	к-разделимая маршрутизация	Число маршрутов на требование	Малый набор реализуемых маршрутов	Формирование устанавливаемой маршрутной политики
3	Выпуклый MCF	Средняя задержка, дедлайны, время завершения передачи	Уточнённое распределение трафика во времени и по путям	Учёт качества обслуживания и временной динамики сети

Принципиальная необходимость такой декомпозиции обусловлена тем, что объединение дробного распределения трафика, дискретного ограничения на число маршрутов и нелинейной минимизации задержки в одной постановке приводит к существенно более сложной задаче, сочетающей свойства линейной, комбинаторной и выпуклой оптимизации. Поэтому переход от теоретической верхней оценки к инженерно реализуемой политике маршрутизации естественно требует последовательной декомпозиции задачи на уровни.

7. Связь теоретических моделей с реальной маршрутизацией в телекоммуникациях

Рассмотренные выше модели показывают, что общий дробный MCF, постановки с ограниченным числом путей и модели, минимизирующие задержку, удобно рассматривать как последовательное усложнение базовой теории. Однако для телекоммуникационной практики необ-

ходимо ещё одно пояснение. Даже если математическая модель допускает разбиение одного требования на произвольное число маршрутов, реальный маршрутизатор или коммутатор обычно не реализует такое дробление на уровне передачи данных. Ограничения состояния таблиц пересылки и меток, требования к стабильности набора следующих переходов, риск переупорядочения пакетов и эксплуатационные соображения заставляют использовать либо один путь, либо малое число путей с явно заданной политикой распределения [4–6; 29; 30].

Для пересылки пакетов и инженерии трафика реальная картина обычно иная. В механизмах ECMP маршрутизатор выбирает следующий переход из конечного множества равностоимостных альтернатив, как правило, на основе хеширования полей потока; тем самым один микропоток прикрепляется к одному пути из небольшого набора, а не размазывается произвольным образом по всем допустимым маршрутам [4; 30; 31]. В многопутевом режиме BGP и вендорских реализациях многопутевой пересылки также речь идёт о распределении нагрузки между несколькими путями, но в рамках ограниченного множества кандидатов, прошедших отбор по заданным правилам [29].

Аналогичная идея проявляется и в сегментной маршрутизации (Segment Routing, SR). Архитектура сегментной маршрутизации позволяет на входном узле направлять поток вдоль заданного топологического маршрута при сохранении состояния на поток только на граничном узле [5]. В модели политик сегментной маршрутизации политика связывается с одним или несколькими кандидатными путями; при этом для эксплуатации существенны понятия активного пути-кандидата, приоритета и списка сегментов, а значит, реализуемая маршрутизация опять работает на ограниченном наборе путей [6].

Из этого вытекает важный методологический вывод. Общий дробный MCF в телекоммуникациях следует трактовать не как точную модель того, как маршрутизатор направляет каждый пакет, а как верхнеуровневую модель внеоперативной оптимизации, планирования ёмкости и оценки достижимой доли спроса. Далее из его решения может строиться инженерная политика маршрутизации, например через ограничение числа путей, аппроксимацию весами ECMP, выбор BGP/SR-кандидатов или проектирование резервных сценариев.

Заключение

В статье предложена трёхуровневая математическая концепция маршрутизации для гибридных систем связи, объединяющая общий дробный многопродуктовый поток (MCF), ограничение числа маршрутов и минимизацию задержки. Проведённый анализ показывает, что современные исследования многопродуктовой маршрутизации нельзя адекватно описать одной-единственной моделью. Постановочная картина включает, по меньшей мере, три канонические целевые задачи – конкурентный поток, максимальный многопродуктовый поток и максимальный взвешенный многопродуктовый поток, каждая из которых отвечает собственной инженерной цели.

Классический подход Клейнрока и метод отклонения потока сохраняют методологическую актуальность, поскольку показывают, как многопродуктовые потоки естественно переходят в нелинейные задачи минимизации задержки трафика [14–16]. В то же время постановки с ограниченным числом путей демонстрируют, что такая структурная связь не является декоративной: она существенно меняет вычислительную природу задачи и требует применения методов ветвей и цен, а также эвристических подходов.

Для практических телекоммуникационных приложений наиболее перспективной представляется не одна «универсальная» модель, а последовательная архитектура из трёх шагов: быстрое приближение общего дробного MCF (с использованием простых, инженерно-реализуемых алгоритмов), последующее сокращение числа маршрутов в постановке с ограниченным числом путей и завершающая модель, ориентированная на минимизацию задержки либо дедлайн-ограниченную оптимизацию. При этом уже на верхнем уровне полезно различать цели справедливого обслуживания, максимизации суммарного трафика и приоритетной под-

держки критических требований. Именно такая конструкция позволяет объединить современную теорию приближённого MCF с инженерными требованиями к маршрутизации в реальных сетях.

Наиболее практико-ориентированная интерпретация многопродуктовой маршрутизации для телекоммуникаций состоит в следующем: общий дробный MCF задаёт теоретический предел и базовое решение для нескольких целей оптимизации, а уровень внедрения должен строиться на ограниченном наборе путей и моделях, учитывающих стабильность передачи, приоритеты трафика и эксплуатационные ограничения.

Предлагаемая концепция естественным образом расширяется на сети с потерями (с коэффициентами усиления или потерь на дугах и моделями обобщённых потоков), а также на динамические сети и потоки во времени. В итоге работа задаёт не частный алгоритм маршрутизации, а общую математическую основу, в которой задачи пропускной способности, ограничения числа маршрутов, задержки, потерь и временной динамики рассматриваются как согласованные уровни единой концепции маршрутизации в гибридных системах связи.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда НТИ в рамках Договора №70-2025-000804 от 26.05.2025.

Авторы благодарят ректора Университета Решетнева Э. Ш. Акбулатова за помощь в организации исследования и всестороннюю поддержку работы.

Acknowledgements

The study was carried out with the financial support of the NTI Foundation under Agreement No.70-2025-000804 dated May 26, 2025.

The authors thank the Rector of Reshetnev University, E. Sh. Akbulatov, for his assistance in organizing the research and his comprehensive support of the work.

References

1. Liu J., Shi Y., Fadlullah Z. M., Kato N. Space-Air-Ground Integrated Network: A Survey. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 2018, Vol. 20, No. 4, P. 2714–2741. DOI: 10.1109/COMST.2018.2841996

2. Lu Y., Wen W., Kostromitin K. I., Ren P., Zhang H., Duan Y., Zhu H., Zhang P. UAV Ad Hoc Network Routing Algorithms in Space–Air–Ground Integrated Networks: Challenges and Directions. *Drones*. 2023, Vol. 7, No. 7, Art. 448. DOI: 10.3390/drones7070448

3. Liu Y., Xie J., Xing C., Xie S. Topology construction and topology adjustment in flying Ad hoc networks for relay transmission. *Computer Networks*. 2023, Vol. 228, Art. 109753. DOI: 10.1016/j.comnet.2023.109753

4. Hopps C. Analysis of an Equal-Cost Multi-Path Algorithm. RFC 2992. November 2000. Available at: https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc2992 (accessed: 03.04.2026). DOI: 10.17487/RFC2992

5. Filsfils C., Previdi S., Ginsberg L., Decraene B., Litkowski S., Shakir R. Segment Routing Architecture. RFC 8402. July 2018. Available at: https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc8402 (accessed: 03.04.2026). DOI: 10.17487/RFC8402

6. Filsfils C., Talaulikar K., Voyer D., Bogdanov A., Mattes P. Segment Routing Policy Architecture. RFC 9256. July 2022. Available at: https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc9256 (accessed: 03.04.2026).

7. Leighton T., Makedon F., Plotkin S., Stein C., Tardos É., Tragoudas S. Fast Approximation Algorithms for Multicommodity Flow Problems. *Journal of Computer and System Sciences*. 1995, Vol. 50, No. 2, P. 228–243. DOI: 10.1006/jcss.1995.1020

8. Garg N., Könemann J. Faster and Simpler Algorithms for Multicommodity Flow and Other Fractional Packing Problems. *SIAM Journal on Computing*. 2007, Vol. 37, No. 2, P. 630–652. DOI: 10.1137/S0097539704446232

9. Fleischer L. Approximating Fractional Multicommodity Flow Independent of the Number of Commodities. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. 2000, Vol. 13, No. 4, P. 505–520. DOI: 10.1137/S0895480199355754

10. Karakostas G. Faster Approximation Schemes for Fractional Multicommodity Flow Problems. *ACM Transactions on Algorithms*. 2008, Vol. 4, No. 1, Art. 13. DOI: 10.1145/1328911.1328924

11. Mądry A. Faster Approximation Schemes for Fractional Multicommodity Flow Problems via Dynamic Graph Algorithms. *Proceedings of the 42nd ACM Sympsium on Theory of Computing (STOC 2010)*. New York: ACM, 2010, P. 121–130.

12. Chen L., Ye M. High-Accuracy Multicommodity Flows via Iterative Refinement. *51st International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2024). Leibniz International Proceedings in Informatics*. 2024. Art. 45. DOI: 10.4230/LIPIcs.ICALP.2024.45

13. Chen L., Graur A., Sidford A. Accelerated Approximate Optimization of Multi-Commodity Flows on Directed Graphs. arXiv:2503.24373, 2025.

14. Kleinrock L. Communication Nets: Stochastic Message Flow and Delay. New York: Dover Publications, 1973, 209 p.

15. Fratta L., Gerla M., Kleinrock L. The Flow Deviation Method: An Approach to Store-and-Forward Communication Network Design. *Networks.* 1973, Vol. 3, No. 2, P. 97–133.

16. Fratta L., Gerla M., Kleinrock L. Flow Deviation: 40 years of incremental flows for packets, waves, cars and tunnels. *Computer Networks*. 2014, Vol. 66, P. 18–31. DOI: 10.1016/j.comnet.2014.04.001

17. Baier G., Köhler E., Skutella M. The k-Splittable Flow Problem. *Algorithmica*. 2005, Vol. 42, P. 231–248. DOI: 10.1007/s00453-005-1167-9

18. Gamst M., Jensen P. N., Pisinger D., Plum C. E. M. Two- and Three-Index Formulations of the Minimum Cost Multicommodity k-Splittable Flow Problem. *European Journal of Operational Research.* 2010, Vol. 202, No. 1, P. 82–89. DOI: 10.1016/j.ejor.2009.05.014

19. Gamst M., Petersen B. Comparing Branch-and-Price Algorithms for the Multi-Commodity k-Splittable Maximum Flow Problem. *European Journal of Operational Research*. 2012, Vol. 217, No. 2, P. 278–286. DOI: 10.1016/j.ejor.2011.10.001

20. Caramia M., Sgalambro A. A Fast Heuristic Algorithm for the Maximum Concurrent k-Splittable Flow Problem. *Optimization Letters*. 2010, Vol. 4, No. 1, P. 37–55. DOI: 10.1007/s11590-009-0147-4

21. Białoń P. M. A Randomized Rounding Approach to a k-Splittable Multicommodity Flow Problem with Lower Path Flow Bounds Affording Solution Quality Guarantees. *Telecommunication Systems*. 2017, Vol. 64, P. 525–542. DOI: 10.1007/s11235-016-0190-2

22. Melchiori A., Sgalambro A. A Matheuristic Approach for the Quickest Multicommodity k-Splittable Flow Problem. *Computers & Operations Research*. 2018, Vol. 92, P. 111–129. DOI: 10.1016/j.cor.2017.12.012

23. Melchiori A., Sgalambro A. A Branch and Price Algorithm to Solve the Quickest Multicommodity k-Splittable Flow Problem. *European Journal of Operational Research*. 2020, Vol. 282, No. 3, P. 846–857. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.10.016

24. Wang Y., Kang R., Guo L., Zhang C., Deng J., Liu P., Wen M. Deadline-Constrained Multi-Commodity Flow Routing and Scheduling Optimization with Consideration of Edge Lengths and Capacities. *Computers & Industrial Engineering*. 2024, Vol. 192, Art. 110193. DOI: 10.1016/j.cie.2024.110193

25. Ouorou A., Mahey P., Vial J.-Ph. A Survey of Algorithms for Convex Multicommodity Flow Problems. *Management Science.* 2000, Vol. 46, No. 1, P. 126–147.

26. Fleischer L., Skutella M. Multicommodity Flows over Time: Efficient Algorithms and Complexity. *Theoretical Computer Science*. 2007, Vol. 379, No. 3, P. 387–404. DOI: 10.1016/j.tcs.2007.02.046

27. Wang X., Garcia-Luna-Aceves J. J. Collaborative routing, scheduling and frequency assignment for wireless Ad Hoc networks using spectrum-agile radios. *Wireless Networks*. 2011, Vol. 17, P. 167–181. DOI: 10.1007/s11276-010-0271-1

28. Clausen T., Jacquet P. Optimized Link State Routing Protocol (OLSR). RFC 3626. October 2003. Available at: https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc3626 (accessed: 05.04.2026). DOI: 10.17487/RFC3626

29. Juniper Networks. multipath (Protocols BGP). Available at: https://www.juniper.net/ documentation/us/en/software/junos/cli-reference/topics/ref/statement/multipath-edit-protocols-bgp.html (accessed: 03.04.2026).

30. Juniper Networks. load-balance (ecmp). Available at: https://www.juniper.net/documentation/us/en/software/junos/cli-reference/topics/ref/statement/load-balance-edit-policy-options-policy-statement-then.html (accessed: 03.04.2026).

31. Juniper Networks. ECMP Flow-Based Forwarding on ACX Series Routers. Available at: https://www.juniper.net/documentation/us/en/software/junos/sampling-forwarding-monitoring/topics/concept/ecmp-flow-based-forwarding-overview-acx-series.html (accessed: 03.04.2026).

32. Fleischer L. K., Wayne K. D. Fast and simple approximation schemes for generalized flow. *Mathematical Programming*. 2002, Vol. 91, No. 2, P. 215–238. DOI: 10.1007/s101070100238

© Кузнецов А. А., Власов А. Ю., Гаипов К. Э., Сафонов К. В., 2026

Кузнецов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, директор НОЦ «Институт космических исследований и высоких технологий»; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru. https://orcid.org/0000-0003-0944-1817

Власов Антон Юрьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научной лаборатории «Спутниковые телекоммуникационные системы»; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: vlasov@sibsau.ru. https://orcid.org/0000-0002-6360-7382

Гаипов Константин Эдуардович – кандидат технических наук, доцент кафедры электронной техники и телекоммуникаций; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: gaipovke@yandex.ru. https://orcid.org/0000-0003-4146-5763

Сафонов Константин Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института информатики и телекоммуникаций; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: safonovkv@rambler.ru. https://orcid.org/0000-0003-0405-3065

Kuznetsov Aleksandr Alekseevich – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Director of the Research and Education Center “Institute of Space Research and High Technologies”; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru. https://orcid.org/0000-0003-0944-1817

Vlasov Anton Yurievich – Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Leading Researcher at the Scientific Laboratory “Satellite Telecommunication Systems”; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: vlasov@sibsau.ru. https://orcid.org/0000-0002-6360-7382

Gaipov Konstantin Eduardovich – Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor of the Department of Electronic Engineering and Telecommunications; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: gaipovke@yandex.ru. https://orcid.org/0000-0003-4146-5763

Safonov Konstantin Vladimirovich – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Director of Institute of Informatics and Telecommunications; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: safonovkv@rambler.ru. https://orcid.org/0000-0003-0405-3065

Статья поступила в редакцию 17.04.2026; принята к публикации 29.05.2026; опубликована 30.06.2026
The article was submitted 17.04.2026; accepted for publication 29.05.2026; published 30.06.2026

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License