

ISSN 2712-8970



# СИБИРСКИЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

## SIBERIAN AEROSPACE JOURNAL

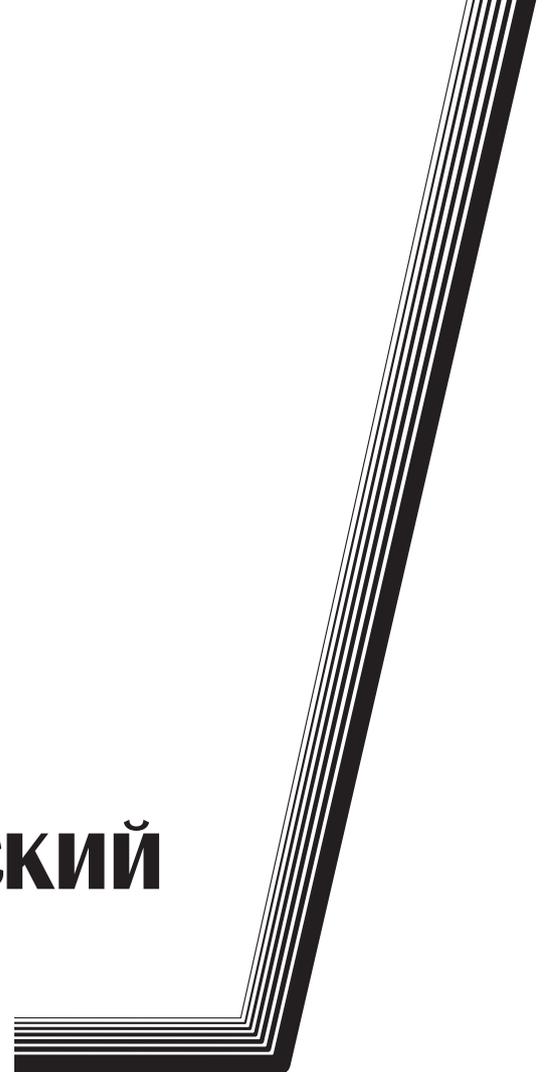
Том  
Vol. 26, № 1

КРАСНОЯРСК 2025

# **СИБИРСКИЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ**

Том 26, № 1

Красноярск 2025



# СИБИРСКИЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 26, № 1

*Главный редактор*

**Аплеснин Сергей Степанович**, доктор физико-математических наук, профессор  
(СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

*Заместители главного редактора*

**Логинов Юрий Юрьевич**, доктор физико-математических наук, профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Мурыгин Александр Владимирович**, доктор технических наук, профессор, ответственный  
за подготовку выпусков журнала, содержащих секретные сведения (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Сенашов Сергей Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

*Российские члены редакционной коллегии:*

**Галеев Р. Г.**, доктор технических наук  
(АО «НПП «Радиосвязь»)

**Головенкин Е. Н.**, доктор технических наук,  
профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Казаковцев Л. А.**, доктор технических наук,  
профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Левко В. А.**, доктор технических наук, доцент  
(СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Лившиц А. В.**, доктор технических наук,  
профессор (ИрГУПС)

**Максимов И. А.**, доктор технических наук  
(АО «РЕШЕТНЕВ»)

**Михеев А. Е.**, доктор технических наук,  
профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Москвичев В. В.**, доктор технических наук,  
профессор (СКТБ «Наука» ИВТ СО РАН)

**Садовский В. М.**, член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук, профессор  
(ИВМ СО РАН)

**Сафонов К. В.**, доктор физико-математических  
наук, профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Сильченко П. Н.**, доктор технических наук,  
профессор (СФУ)

**Смирнов Н. А.**, доктор технических наук,  
профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Терсков В. А.**, доктор технических наук,  
профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Чеботарев В. Е.**, доктор технических наук,  
доцент (АО «РЕШЕТНЕВ»)

**Шайдуров В. В.**, член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук, профессор  
(ИВМ СО РАН)

*Иностранные члены редакционной коллегии:*

**Станимирович Предраг**, Ph.D., профессор  
(Нишский Университет, Сербия)

**Яхно А. Н.**, кандидат физико-математических наук,  
профессор (Университет Гвадалахары, Мексика)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Васильев С. Н.**, академик РАН, доктор физико-  
математических наук, профессор (Москва)

**Дегерменджи А. Г.**, академик РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (Красноярск)

**Дегтерев А. С.**, доктор технических наук,  
профессор (Красноярск)

**Семенкин Е. С.**, доктор технических наук,  
профессор (Красноярск)

**Тестоедов Н. А.**, академик РАН,  
доктор технических наук, профессор  
(Красноярск)

**Шабанов В. Ф.**, академик РАН, доктор физико-  
математических наук, профессор (Красноярск)

# SIBERIAN AEROSPACE JOURNAL

Vol. 26, No 1

---

*Chief Editor:*

**Aplesnin S. S.**, Dr.Sc., Professor (Reshetnev University)

*Deputy Chief Editors*

**Loginov Y. Y.**, Dr.Sc., Professor (Reshetnev University)

**Murygin A. V.**, Dr.Sc., Professor (Reshetnev University)

**Senashov S. I.**, Dr.Sc., Professor (Reshetnev University)

---

## EDITORIAL BOARD

*Russian members of the editorial board:*

**Galeev R. G.**, Dr.Sc.

(JSC "NPP "Radiosvyaz")

**Golovenkin E. N.**, Dr.Sc., Professor  
(Reshetnev University)

**Kazakovtsev L. A.**, Dr.Sc., Professor  
(Reshetnev University)

**Levko V. A.**, Dr.Sc., Professor  
(Reshetnev University)

**Livshits A. V.**, Dr.Sc., Professor  
(Irkutsk State Transport University)

**Maksimov I. A.**, Dr.Sc.  
(JSC RESHETNEV)

**Mikheev A. E.**, Dr.Sc., Professor  
(Reshetnev University)

**Moskvichev V. V.**, Dr.Sc., Professor  
(SDTB Nauka KSC SB RAS)

**Sadovsky V. M.**, Corresponding Member  
of the Russian Academy of Sciences,  
Dr.Sc., Professor (ICM SB RAS)

**Safonov K. V.**, Dr.Sc., Professor  
(Reshetnev University)

**Silchenko P. N.**, Doctor of Technical  
Sciences, Professor (SibFU)

**Smirnov N. A.**, Dr.Sc., Professor  
(Reshetnev University)

**Terskov V. A.**, Dr.Sc., Professor  
(Reshetnev University)

**Chebotarev V. Y.**, Dr.Sc., Professor  
(JSC RESHETNEV)

**Shaidurov V. V.**, Corresponding Member  
of the Russian Academy of Sciences,  
Dr.Sc., Professor (ICM SB RAS)

*Foreign members of the editorial board:*

**Stanimirovic Predrag**, Ph.D., professor  
(University of Nis, Serbia)

**Yakhno A. N.**, Cand. Sc. professor  
(University of Guadalajara, Mexico)

## EDITORIAL COUNCIL

**Vasiliev S. N.**, Academician of the Russian  
Academy of Sciences, Dr.Sc., Professor (Moscow)

**Degermendzhi A. G.**, Academician  
of the Russian Academy of Sciences, Dr.Sc.,  
Professor (Krasnoyarsk)

**Degterev A. S.**, Dr.Sc., Professor (Krasnoyarsk)

**Semenkin E. S.**, Dr.Sc., Professor (Krasnoyarsk)

**Testoedov N. A.**, Academician of the Russian  
Academy of Sciences, Dr.Sc., Professor  
(Krasnoyarsk)

**Shabanov V. F.**, Academician of the Russian  
Academy of Sciences, Dr.Sc., Professor (Krasnoyarsk)

«Сибирский аэрокосмический журнал» является научным, производственно-практическим рецензируемым изданием. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77-80539 от 01.03.2021 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).  
ISSN 2712-8970

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» — 39263.

Зарегистрирован в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Включен в базу данных Ulrich's Periodicals Directory американского издательства Bowker.

Входит в перечень журналов ВАК по следующим научным специальностям:

1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки);

1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

2.3.1 Системный анализ, управление и обработка информации (технические науки);

2.3.5 Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей (физико-математические науки);

2.3.7 Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования (физико-математические науки);

2.3.7 Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования (технические науки);

2.5.13 Проектирование, конструкция, производство, испытания и эксплуатация летательных аппаратов;

2.5.15 Тепловые, электроракетные двигатели и энергоустановки летательных аппаратов (технические науки).

Издается с 2000 года. 2000 — «Вестник Сибирской аэрокосмической академии имени академика М. Ф. Решетнева» (Вестник САА); 2002 — «Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева» (Вестник СибГАУ); 2017 — «Сибирский журнал науки и технологий» (СибЖНТ); с 01.03.2021 — «Сибирский аэрокосмический журнал» (САЖ).

Каждый выпуск журнала включает три раздела:

1 раздел. Информатика, вычислительная техника и управление.

2 раздел. Авиационная и ракетно-космическая техника.

3 раздел. Технологические процессы и материалы.

Статьи публикуются бесплатно после обязательного рецензирования и при оформлении их в соответствии с требованиями редакции ([www.vestnik.sibsau.ru](http://www.vestnik.sibsau.ru)). Журнал выходит 4 раза в год. Электронная версия журнала представлена на сайте Научной электронной библиотеки (<http://www.elibrary.ru>) и сайте журнала ([www.vestnik.sibsau.ru](http://www.vestnik.sibsau.ru))

При перепечатке или цитировании материалов из журнала «Сибирский аэрокосмический журнал» ссылка обязательна.

#### Учредитель и издатель

ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева» (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

АДРЕС РЕДАКЦИИ, УЧРЕДИТЕЛЯ И ИЗДАТЕЛЯ:

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, проспект имени газеты «Красноярский Рабочий», 31.

Тел. (391) 290-42-31. E-mail: [vestnik@sibsau.ru](mailto:vestnik@sibsau.ru)

*Редактор* Н. Н. ГОЛОСКОКОВА  
*Ответственный редактор английского текста*  
Н. А. ШУМАКОВА

*Оригинал-макет и верстка* О. А. ПЛЕХОВОЙ

Подписано в печать 25.03.2025. Формат 70×108/16.

Бумага офсетная. Печать плоская. Усл. печ. л. 17,67.

Уч.-изд. л. 16,3. Тираж 100 экз. Заказ 3552. С 1075/25.

Редакционно-издательский отдел СибГУ им. М.Ф. Решетнева.

Отпечатано в редакционно-издательском центре  
СибГУ им. М.Ф. Решетнева.

Российская Федерация, 660037, г. Красноярск,  
просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31.

Дата выхода в свет: 11.04.2025. Свободная цена

*Siberian Aerospace Journal* is a research, production and practical peer-reviewed journal. Included by the Higher Attestation Commission of the Russian Federation in the Index of Leading Russian Peer-Reviewed Journals and Periodicals, in which significant scientific dissertation results should be published when applying for a Dr.Sc. degree.

The journal is the official periodical of Reshetnev Siberian State University of Science and Technology.

Certificate of Registration as a Mass Media Resource. Certificate: PI No. FC 77-80539, dated 01 March 2021, given by Federal Supervision Agency for Information Technology, Communications and Mass Media. ISSN 2712-8970.

The Journal is included in the following subscription catalogue 39263 — Pressa Rossii.

The journal is registered in the Russian Science Citation Index (RSCI).

The journal is indexed in the database of Ulrich's Periodicals Directory.

The journal was first published in 2000. 2000 — Vestnik Sibirskoy aerokosmicheskoy akademii imeni akademika M. F. Reshetneva (Vestnik SAA); 2002 — Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni akademika M. F. Reshetneva (Vestnik SibGAU); 2017 — Siberian Journal of Science and Technology (SZHT); from 01.03.2021 — Siberian Aerospace Journal (SAJ). The Journal is recommended for publishing the main results of research when applying for Cand. Sc. degree and Dr. Sc. degree upon the following specialties:

1.2.2 Mathematical modeling, numerical methods and software packages (technical sciences);

1.2.2 Mathematical modeling, numerical methods and software packages (physical and mathematical sciences);

2.3.1 System analysis, management and information processing (technical sciences);

2.3.5 Mathematical and software support of computer systems, complexes and computer networks (physical and mathematical sciences);

2.3.7 Computer modeling and design automation (physical and mathematical sciences);

2.3.7 Computer modeling and design automation (technical sciences);

2.5.13 Design, Construction, Production, Testing and Operation of Aircraft;

2.5.15 Thermal, electric rocket engines and power installations of aircraft (technical sciences).

Each issue consists of three parts:

Part 1. Informatics, computer technology and management.

Part 2. Aviation and Spacecraft Engineering.

Part 3. Technological Processes and Material Science.

Papers prepared in accordance with the editorial guidelines ([www.vestnik.sibsau.ru](http://www.vestnik.sibsau.ru)) are published free of charge after being peer reviewed.

The journal is published four times a year.

An online version can be viewed at <http://www.elibrary.ru>

*Siberian Aerospace Journal* should be cited when reprinting or citing materials from the journal.

CONTACTS. Website: [www.vestnik.sibsau.ru](http://www.vestnik.sibsau.ru)

Address: Reshetnev Siberian State University of Science and Technology.

31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation.

Tel. (391) 290-42-31; e-mail: [vestnik@sibsau.ru](mailto:vestnik@sibsau.ru)

*Editor* N. N. GOLOSOKOVA  
*Executive editor (English Language)* N. A. SHUMAKOVA  
*Layout original* O. A. PLEKHOVA

Signed (for printing): 25.03.2025. Format 70×108/16.

Offset Paper. Print flat. 17,67. Published sheets 16,3.

100 copies. Order 3552. С 1075/25.

Printing and Publication Department

Reshetnev University.

Printed in the Department of copying and duplicating  
equipment Reshetnev University.

31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk,  
660037, Russian Federation.

Date of publication: 11.04.2025. Free price

# СОДЕРЖАНИЕ

## ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

<b>Исаева О. С., Кулясов Н. В., Исаев С. В.</b> Инфраструктура сбора данных и имитации угроз безопасности сети интернета вещей .....	8
<b>Кириллов К. А., Кириллова С. В., Мелентьев Д. О., Титов Г. П., Гашин А. А.</b> Калибровка магнитометра космического аппарата с учетом характера температурной зависимости матрицы чувствительности и вектора смещений нуля .....	21
<b>Лелеков А. Т.</b> Динамическое моделирование технических систем на Python .....	34
<b>Шаруева А. В.</b> Непараметрическая методика проверки гипотезы о независимости случайных величин и ее применение при анализе данных дистанционного зондирования .....	48
<b>Шерстнев П. А., Семенкин Е. С.</b> Самоконфигурируемые алгоритмы генетического программирования с адаптацией на основе истории успеха .....	60

## АВИАЦИОННАЯ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА

<b>Гусев Е. В., Заговорчев В. А., Родченко В. В., Садретдинова Э. Р., Шипневская Е. А.</b> Выбор проектных параметров снарядов-пробойников активно-реактивного типа для движения в грунте .....	72
<b>Журавлев В. Ю., Манохина Э. С., Толстопятов М. И.</b> Проектирование и испытания форсунок, изготовленных методами аддитивных технологий, для жидкостного ракетного двигателя малой тяги .....	83
<b>Нестеров В. А., Никишев А. А.</b> Анализ устойчивости и жесткости композитной сетчатой конической оболочки с закрепленным малым основанием .....	94
<b>Соколов И. А., Цеханович Г. С.</b> Анализ модели движения космического аппарата на околоземной орбите .....	107
<b>Шоронов С. В., Тимушев С. Ф.</b> Сравнительный анализ методов увеличения напора осевых насосов низкой быстроходности систем питания двигателей летательных аппаратов .....	126

## ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И МАТЕРИАЛЫ

<b>Левко В. А., Литовка О. В., Петецкая А. Е., Иванов П. А., Снетков П. А.</b> Влияние обработки абразивным потоком на шероховатость и микротвердость поверхности малых каналов (отверстий) в образцах заготовок из стали 12Х18Н10Т .....	140
---	-----

# CONTENTS

## INFORMATICS, COMPUTER TECHNOLOGY AND MANAGEMENT

<b>Isaeva O. S., Kulyasov N. V., Isaev S. V.</b> Infrastructure for collecting data and simulating security threats in the internet of things network .....	8
<b>Kirillov K. A., Kirillova S. V., Melent'ev D. O., Titov G. P., Gashin A. A.</b> Calibration of a spacecraft magnetometer taking into account the nature of the temperature dependence of the sensitivity matrix and the offset vector .....	21
<b>Lelekov A. T.</b> Technical system simulation with Python .....	34
<b>Sharueva A. V.</b> Nonparametric method for testing the hypothesis of independence of random variables and its application in the analysis of remote sensing data .....	48
<b>Sherstnev P. A., Semengin E. S.</b> Self-Configuring Genetic Programming Algorithms with Success History-Based Adaptation .....	60

## AVIATION AND SPACECRAFT ENGINEERING

<b>Gusev E. V., Zagovorchev V. A., Rodchenko V. V., Sadretdinova E. R., Shipnevskaya E. A.</b> Selection of design parameters of active-reactive type penetrating projectiles for movement in the ground .....	72
<b>Zhuravlev V. Y., Manokhina E. S., Tolstopyatov M. I.</b> Design and testing of injectors manufactured using additive technologies for a low-thrust liquid rocket engine .....	83
<b>Nesterov V. A., Nikishev A. A.</b> Buckling and stiffness analysis of a composite anisogrid conical shell with a fixed small base .....	94
<b>Sokolov I. A., Tsekhanovich G. S.</b> Analysis of the movement model of a spacecraft in earth orbit .....	107
<b>Shoronov S. V., Timushev S. F.</b> Comparative analysis of methods for increasing the pressure of low-speed axial pumps in power supply systems for aircraft engines .....	126

## TECHNOLOGICAL PROCESSES AND MATERIAL SCIENCE

<b>Levko V. A., Litovka O. V., Petetskaya A. E., Ivanov P. A., Snetkov P. A.</b> Effect of abrasive flow machining on the roughness and microhardness the small channels (holes) surface in samples of 12X18N10T steel workpieces .....	140
---	-----



ИНФОРМАТИКА,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ  
ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,  
COMPUTER TECHNOLOGY  
AND MANAGEMENT



УДК 004.738

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-8-20

---

**Для цитирования:** Исаева О. С., Кулясов Н. В., Исаев С. В. Инфраструктура сбора данных и имитации угроз безопасности сети интернета вещей // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 8–20. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-8-20.

**For citation:** Isaeva O. S., Kulyasov N. V., Isaev S. V. [Infrastructure for collecting data and simulating security threats in the internet of things network]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 8–20. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-8-20.

---

## Инфраструктура сбора данных и имитации угроз безопасности сети интернета вещей

О. С. Исаева<sup>\*</sup>, Н. В. Кулясов, С. В. Исаев

Институт вычислительного моделирования СО РАН –  
обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН  
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, ул. Академгородок, 50/44  
<sup>\*</sup>E-mail: isaeva@icm.krasn.ru

*Аннотация. Внедрение технологии интернета вещей (internet of things, IoT) на предприятиях ракетно-космической отрасли требует обеспечения повышенных мер безопасности информационно-коммуникационных процессов. Существующие системы обнаружения вторжений не способны учитывать гетерогенность структуры сети и масштабность циркулирующей между устройствами информации. Для решения этой проблемы системы обнаружения вторжений используют метод аномалий, для применения которого требуется большое число репрезентативных данных. Авторами выполнен обзор публичных наборов данных, на основе которых может быть построена система выявления аномалий. Они содержат информацию из искусственных имитационных сред или изолированных окружений с имитацией устройств, включают примеры, которые напрямую не связаны с интернетом вещей, и не учитывают динамический характер изменения трафика.*

*В данной статье мы представляем новую инфраструктуру, которая позволит избежать указанных недостатков. Она собирает данные функционирования реальной сети интернета вещей и позволяет выполнять её тестирование на устойчивость к характерным атакам. Мы используем прикладной протокол MQTT (message queuing telemetry transport) и программные платформы, поддерживающие информационное взаимодействие на основе шаблона «издатель – подписчик». Инфраструктура содержит устройства, осуществляющие мониторинг технологических помещений с телекоммуникационным оборудованием, сервера с различными настройками политик безопасности, приложения для контроля и анализа данных, программные агенты сбора сетевого трафика и имитаторы угроз, выполняющие атаки на узлы сети с одиночных источников или в распределённой среде. Исследователи смогут, применяя собираемые в инфраструктуре данные для анализа кибербезопасности, создавать надёжные решения на базе интернета вещей, необходимые для внедрения этой технологии в наукоемкие производства космических систем.*

*Ключевые слова:* кибербезопасность, интернет вещей, протокол MQTT, брокер данных, базы данных вторжений, имитация угроз безопасности.

## Infrastructure for collecting data and simulating security threats in the internet of things network

O. S. Isaeva<sup>\*</sup>, N. V. Kulyasov, S. V. Isaev

Institute of Computational Modelling of the Siberian Branch of the SB RAS – subdivision Federal Research Center “Krasnoyarsk Scientific Center of the SB RAS”  
50/44, Akademgorodok St., Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation  
<sup>\*</sup>E-mail: isaeva@icm.krasn.ru

*Abstract. The implementation of the internet of things technologies in the rocket-space industry requires increased security measures for information and communication processes. Existing intrusion detection systems are unable to take into account the heterogeneity of the network structure and the scale of information circulating between devices. To solve this problem, intrusion detection systems use an anomaly method, which requires a large number of representative data sets. The authors have reviewed public datasets that can be used to build an anomaly detection system. They contain information from artificial simulation medium or isolated environments with simulated devices, include examples that are not directly related to the internet of things, and do not take into account the dynamic nature of traffic changes.*

*In this paper, we present a new infrastructure that will avoid these drawbacks. It collects data on the functioning of a real Internet of Things network and allows testing its stability to typical attacks. We use the MQTT (message queuing telemetry transport) application protocol and software platforms that support information interaction based on the publisher-subscriber pattern. The infrastructure contains devices that monitor technological rooms with telecommunications equipment, brokers with various security policy settings, applications for data control and analysis, software agents for collecting network traffic and threat simulators that perform attacks on network nodes from single sources or in a distributed environment. Researchers will be able to use the data collected in the infrastructure for cybersecurity analysis to create reliable IoT-based solutions needed to implement this technology in knowledge-intensive space systems production.*

*Keywords: cybersecurity, internet of things, protocol MQTT, data broker, intrusion databases, simulated security threats.*

### Введение

Инновации, определяемые концепцией интернета вещей, согласно рекомендациям Международного союза электросвязи [1], отражают современные тренды, направленные на построение инфраструктур, объединяющих физические и виртуальные объекты на основе функционально-совместимых информационно-коммуникационных технологий. Потребность предприятий ракетно-космической отрасли в подобных решениях определяется не только современными требованиями к цифровизации производств, но и необходимостью их оперативной трансформации, отвечающей запросам потребителей продукции, а также ресурсным и технологическим возможностям [2]. Внедрение цифровых технологий позволяет осуществлять постоянный контроль качества выпускаемой продукции, выявлять эксплуатационные риски, прогнозировать отказы технических систем, обеспечивая повышение эффективности производственных процессов [3]. Однако неоспоримые преимущества от применения технологий интернета вещей на предприятиях ракетно-космической отрасли нивелируются необходимостью обеспечения повышенных мер безопасности и надёжности всех информационно-коммуникационных процессов.

Сети интернета вещей вызывают интерес для киберпреступников как из-за характера устройств, облегчённости протоколов их подключения, так и из-за ценности и масштабности информации, которую можно получить при получении к ним доступа. Основной целью кибератак является искажение генерируемых данных, определяющих действия пользователей или автоматизированных систем, нарушение текущих процессов (отказ в обслуживании), раскрытие информации, которая может быть использована с целью получения конкурентных преимуществ [4].

Компрометация любого отдельного устройства может распространиться на все системы предприятия и нарушить его критические функции [5]. Сообщения о взломах устройств интернета вещей, позволяющих перехватывать удалённое управление и выполнять проникновение в корпоративные сети, или объединении таких устройств в ботнеты появляются регулярно [6].

Системы обнаружения вторжений, согласно методикам проведения исследований, делятся на сигнатурные (позволяют идентифицировать атаки, эксплуатирующие сетевые уязвимости), основанные на правилах (выявляют действия, несоответствующие легитимным пользователям), и исследующие аномалии (применяют методы машинного обучения для обнаружения нетипичного поведения или статистических расхождений) [7]. Сигнатурные и основанные на правилах решения по безопасности не предназначены для поддержки сетей интернета вещей, которые отличаются гетерогенностью структуры, ограниченной вычислительной мощностью взаимосвязанных устройств, многоплатформенностью используемых протоколов подключения, большим объёмом сетевого трафика, разнородностью событий безопасности и нехваткой точных данных о поведении атак [8]. Для интернета вещей предпочтительным является подход на основе аномалий. Но его применение требует создания репрезентативных наборов данных и надёжных методов оценки, учитывающих свойства реальных сетей.

Методы машинного обучения позволяют формировать шаблоны на основе вредоносного сетевого трафика, полученного во время заражения, которые используют для выявления подобных атак в будущем [9]. В отличие от других областей, где широко используется машинное обучение, область обнаружения вторжений предполагает постоянное изменение в характеристиках трафика открытого мира с точки зрения его содержимого, методов обслуживания, сценариев атак и их результатов, меняющихся в зависимости от развития средств уклонения [10]. Вследствие этого нельзя ожидать, что поведение сетевого трафика, продемонстрированное в обучающем наборе данных, с течением времени будет в какой-либо степени соответствовать его поведению в производственной среде [11]. Системы на основе аномалий, использующие методы машинного обучения, должны иметь значительное количество примеров реального сетевого трафика со всеми видами атак и обычным поведением пользователей, а также полезной нагрузкой, которые будут актуальными и охватывающими длительные периоды наблюдения [12].

В данной статье мы представляем новую инфраструктуру сбора данных интернета вещей, предназначенную для накопления информации о сетевом трафике и имитации угроз безопасности. Исследование выполнено в корпоративной сети Красноярского научного центра СО РАН, включающей устройства интернета вещей и программное обеспечение, выполняющее сбор и анализ данных [13]. Для выделения параметров, характеризующих состояние сети и процессы, происходящие в ней, используется построенная в [14] онтология. Предложена концепция организации инфраструктуры сбора данных, которая позволит выделять особенности среды функционирования интернета вещей и учитывать динамический характер событий безопасности, что расширит область применения методов машинного обучения в системе обнаружения вторжений.

### **Обзор публичных наборов данных**

Для разработки и тестирования решений по информационной безопасности и сетевому взаимодействию устройств интернета вещей создаются публичные наборы данных, описывающие различные инфраструктуры киберпространства и сценарии, нарушающие их надёжность и производительность. Для того чтобы определить функции создаваемой инфраструктуры, состав показателей для анализа безопасности были рассмотрены популярные наборы данных (dataset), широко применяемые при построении систем обнаружения вторжений.

Наборы данных KDD99 [15] и NSL-KDD [16] являются одними из наиболее часто упоминаемых, которые содержат нормальные и агрессивные сценарии трафика, полученного на испытательном стенде, созданном в лаборатории Массачусетского технологического института. Исследователи, применяющие эти данные, столкнулись с их избыточностью и недостаточной

балансировкой выборок для обучения. К настоящему времени эти наборы устарели и не отражают динамики современных сетевых систем.

Ещё один широко используемый набор данных – CICIDS2017 Intrusion Detection Evaluation Dataset [17], разработанный Канадским институтом кибербезопасности (CIC), представляет сетевой трафик, формируемый в изолированной среде путём моделирования действий легальных пользователей и нарушителей. Набор содержит более 50 Гб исходных данных и файлов с размеченными сессиями и выделенными признаками в разные дни наблюдений. Популярность этого набора позволила исследователям получить исчерпывающие данные о содержащихся в нём ошибках. В [18] выполнен анализ признаков сетевых сессий из исходных файлов и их сопоставление с размеченными данными. Выявлены значительные расхождения при выделении сессий, ошибки при расчётах значений признаков и их дублирование, некорректное завершение сессий, отнесение граничных пакетов к следующей сессии, неверный расчёт длин пакетов, которые могут оказать существенное влияние на результаты машинного обучения. Наш опыт применения инструмента обработки пакетов CICFlowMeter [19], на котором построен CICIDS2017, к собственным сырым данным подтвердил вышеуказанные проблемы. В NTLFlowLyzer [20] эти проблемы исправлены.

Перечисленные наборы данных не учитывают специфику сетей и протоколов интернета вещей. В нашем исследовании для выявления аномалий мы объединяем характеристики трафика транспортного уровня с показателями, описывающими прикладные протоколы интернета вещей. Для их выявления рассмотрены наборы данных, получаемые в рамках реализации такого рода сетей.

Комплексный набор данных TON IoT 2021 [21] включает информацию систем интернета вещей, собранную в виде файлов журналов от 10 датчиков телеметрии. Предобработка сырых данных выполнялась с помощью инструмента ZEEK (Bro). Для операционной системы Linux данные собирались с помощью входящего в неё инструмента трассировки, выполняющего мониторинг активности процессора, памяти и сети. В Windows использовался сборщик данных производительности операционной системы. Набор включает 9 различных угроз безопасности.

Набор данных UQ-IOT-IDS-2021 [22] получен в реальной среде разнородной сети Интернета вещей, включающей различные устройства, такие как смартфоны, смарт-телевизоры, IP-камеры, смарт-колонки и т. п.

В наборе MQTT-IoT-IDS-2020 [23] содержится трафик имитируемой сети, состоящей из 12 датчиков и брокера, взаимодействующих между собой по протоколу MQTT (Message Queuing Telemetry Transport) и источников угроз (4-х типов). В данные включены флаги протокола, описывающие состояние сессии и уровень качества обслуживания. В своё исследование мы включили аналогичные флаги и показатели, обобщающие характеристики сессий протокола MQTT.

CIC EVSE2024 [24] содержит безопасный трафик, сетевые атаки и атаки, направленные на зарядное устройство электромобилей. Аномальный трафик представляет атаки сбора данных (Reconnaissance) и отказ в обслуживании (DoS), направленные атаки типа Backdoor и Cryptojacking. Эти наборы данных демонстрируют возможности использования полезной нагрузки для выявления аномального поведения устройств интернета вещей.

Особенности публичных наборов состоят в неоднородности предоставляемых данных, различиях в способах имитации событий безопасности и подходов к сбору и предобработке информации, что может оказывать огромное влияние на эффективность обнаружения аномалий. Назначение, функции и вид устройств определяют допустимые границы измерений, получаемые от них в качестве полезной нагрузки. Для выявления аномалий в трафике необходимо исследовать результаты функционирования именно тех устройств, безопасность которых мы планируем обеспечивать. Большая часть наборов включает не только сетевой трафик, связанный с интернетом вещей, но и данные сторонних служб, систем и протоколов, что затрудняет их применение для локализации угроз, направленных на функционирование устройств интернета

вещей. Кроме того, практически все наборы данных получены в искусственной имитационной среде или изолированных окружениях с имитацией устройств. В них рассматриваются угрозы, характерные не только для систем интернета вещей, но и любых других информационных систем, перегружая тем самым источники данных для машинного обучения лишними, не встречаемыми в исследуемых сетях примерами. В таких условиях оправданным является разработка собственной инфраструктуры сбора и накопления данных, учитывающей существующий опыт создания публичных данных и позволяющей актуализировать данные при изменении условий функционирования сети.

### Структура корпоративной сети интернета вещей

В Красноярском научном центре технология интернета вещей применяется для контроля показателей температуры и влажности помещений, в которых расположены сервера, поддерживающие работу сетевых и почтовых служб [25]. Структура сети приведена на рис. 1.

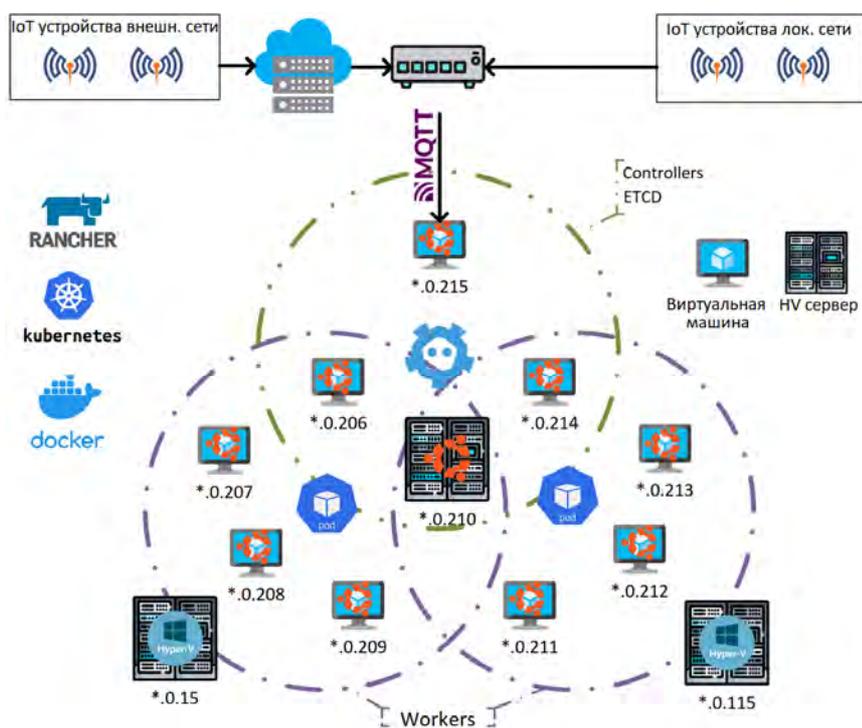


Рис. 1. Структура сети интернета вещей

Fig. 1. Structure of the internet of things network

При построении наборов данных для анализа аномалий необходимо учитывать не только структуру сети, но и свойства протоколов, используемых на отдельных уровнях межмашинного взаимодействия. В табл. 1 приведены примеры протоколов, распределённые по уровням сети (в контексте стека протоколов TCP/IP и эталонной сетевой модели OSI).

При построении сети интернета вещей необходимо выбрать, какие протоколы будут работать на канальном уровне, а какие будут выполнять обмен данными между устройствами и приложениями на прикладном уровне. Требования к этим протоколам заключаются в обеспечении надёжной и эффективной связи между распределёнными устройствами, синхронизации данных в режиме реального времени, возможности асинхронной передачи при нестабильном соединении и в условиях низкой пропускной способности сети [26].

Например, к протоколам канального уровня относятся Ethernet, Modbus, Zigbee, WiFi, LoRaWAN. В нашем случае используются протоколы Ethernet, WiFi, что определяется функ-

циональными возможностями корпоративной сети, в которую встраиваются устройства интернета вещей. Протоколы прикладного уровня выполняют функции по упаковке, форматированию и доставке данных, обеспечивая контроль их целостности и качество обслуживания. К протоколам прикладного уровня относятся MQTT, CoAP, AMQP. В построенной сети для прикладного уровня выбран протокол MQTT – открытый стандарт, разработанный специально для малых вычислительных возможностей устройств [27] и являющийся на сегодняшний день одним из наиболее часто используемых протоколов межмашинного взаимодействия интернета вещей. Его работа основана на шаблоне «издатель – подписчик» (рис. 2).

Таблица 1

Распределение сетевых протоколов по уровням моделей OSI и TCP/IP

OSI модель	TCP/IP	Примеры
Прикладной	Прикладной	HTTP, HTTPS, FTP, MQTT, CoAP, AMQP
Представления		
Сеансовый		
Транспортный	Транспортный	TCP, UDP
Сетевой	Межсетевой	IPv4, IPv6, ICMP
Канальный	Канальный	Ethernet, Wi-Fi, BLE, Zigbee, Z-Wave
Физический		LoRaWan

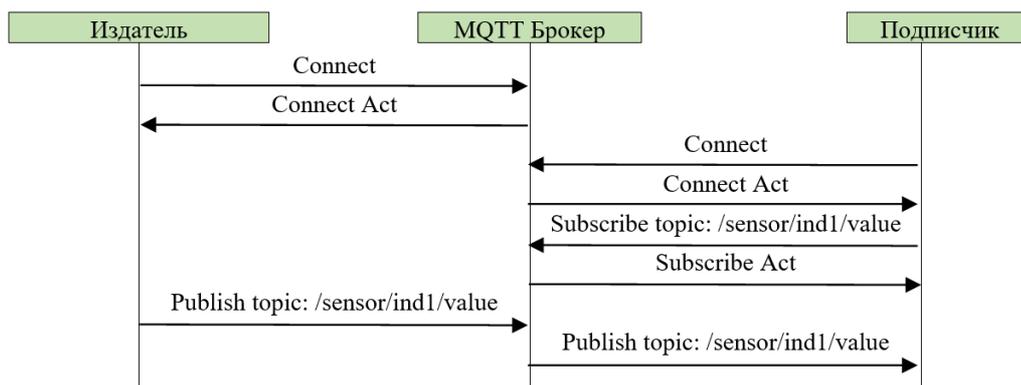


Рис. 2. Шаблон «издатель – подписчик»

Fig. 2. Template “publish – subscribe”

В обмене данными участвуют: издатель (Publisher) – устройство, собирающее информацию или выполняющее измерения; подписчик (Subscriber) – клиент, который в процессе своей работы получает и использует эту информацию; брокер (Broker) – посредник, который получает данные от издателя и раздает их по подпискам на темы, определяющие вид и источник информации. Механизмы информационного взаимодействия в разработанной сети интернета вещей учитывают цикличность анализируемых процессов, что позволяет сокращать нагрузку на потребителей информации и используемые сети [28].

Несмотря на то, что подключение устройств интернета вещей к корпоративной сети не было анонсировано в публичном пространстве, наблюдается неуклонный рост нелегитимных запросов соединений. Происходит постоянное сканирование различных сервисов по портам протокола MQTT.

На рис. 3 приведён пример распределения запросов по странам-источникам. Показатели, характеризующие динамику роста запросов к устройствам корпоративной сети интернета вещей рассмотрены в [29].

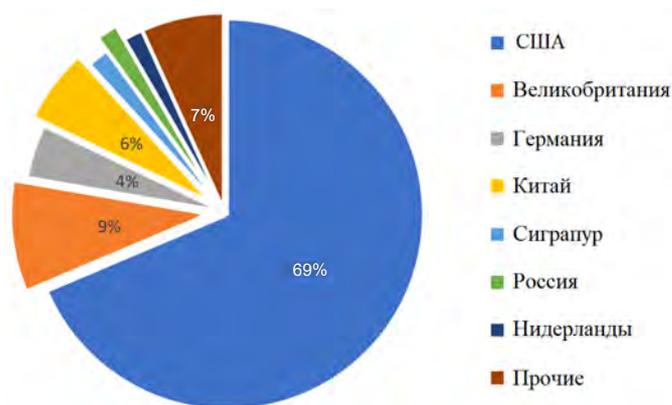


Рис. 3. Распределение запросов по странам (статистика за 6 месяцев)

Fig. 3. Distribution of requests by country (6 months statistics)

Рост интереса к устройствам интернета вещей со стороны нелегитимных пользователей и сканирование сетевых портов протокола MQTT показывают актуальность контроля безопасности построенной структуры и создания инструментов обнаружения сетевых аномалий. Для исследования разработана инфраструктура, обеспечивающая сбор и актуализацию данных.

### Построение инфраструктуры сбора данных

Инфраструктура сбора данных и имитации угроз безопасности размещается в рамках существующей сети организации, без дополнительной оптимизации и изоляции. Показанная ранее структура сети интернета вещей дополнена различными реализациями брокеров данных, программными агентами, собирающими информацию на ключевых точках корпоративной сети, и имитаторами угроз, характерными для интернета вещей.

Выбор программной платформы для реализации брокеров определяется требованиями обеспечения производительности, уменьшения задержек передачи данных, поддержки кластеризации, ограничения потребления ресурсов и пр. Как правило, публичные наборы данных не акцентируют внимание на используемых брокерах и их конфигурации, что не позволяет выявить возможные особенности функционирования реализующих их функции программных платформ. Для учёта особенностей различных брокеров в дополнение Eclipse Mosquitto установлены брокеры EMQX, NanoMQ, VerneMQ [30]. Настроены конфигурации брокеров, которые различаются используемыми программными платформами и настройками способа авторизации, шифрования (протокол TLS – Transport Layer Security или без шифрования) и доступа (из внутренней или внешней сети). Примеры условных обозначений брокеров приведены в табл. 2.

Таблица 2

### Конфигурация параметров безопасности

Обозначение на схеме	Авторизация	Шифрование
auth_priv	Логин/Пароль	Без шифрования
anon_priv	Без авторизации	Без шифрования
auth_priv_tls	Логин/Пароль	TLS
anon_priv_tls	Без авторизации	TLS

Концептуальная схема инфраструктуры сбора данных и имитации угроз безопасности приведена на рис. 4. В инфраструктуру входят 16 независимых брокеров и реплицирующий брокер для распределения данных с издателей, а также программные агенты, которые собирают информацию о взаимодействии устройств интернета вещей с внешним миром и внутри сети.

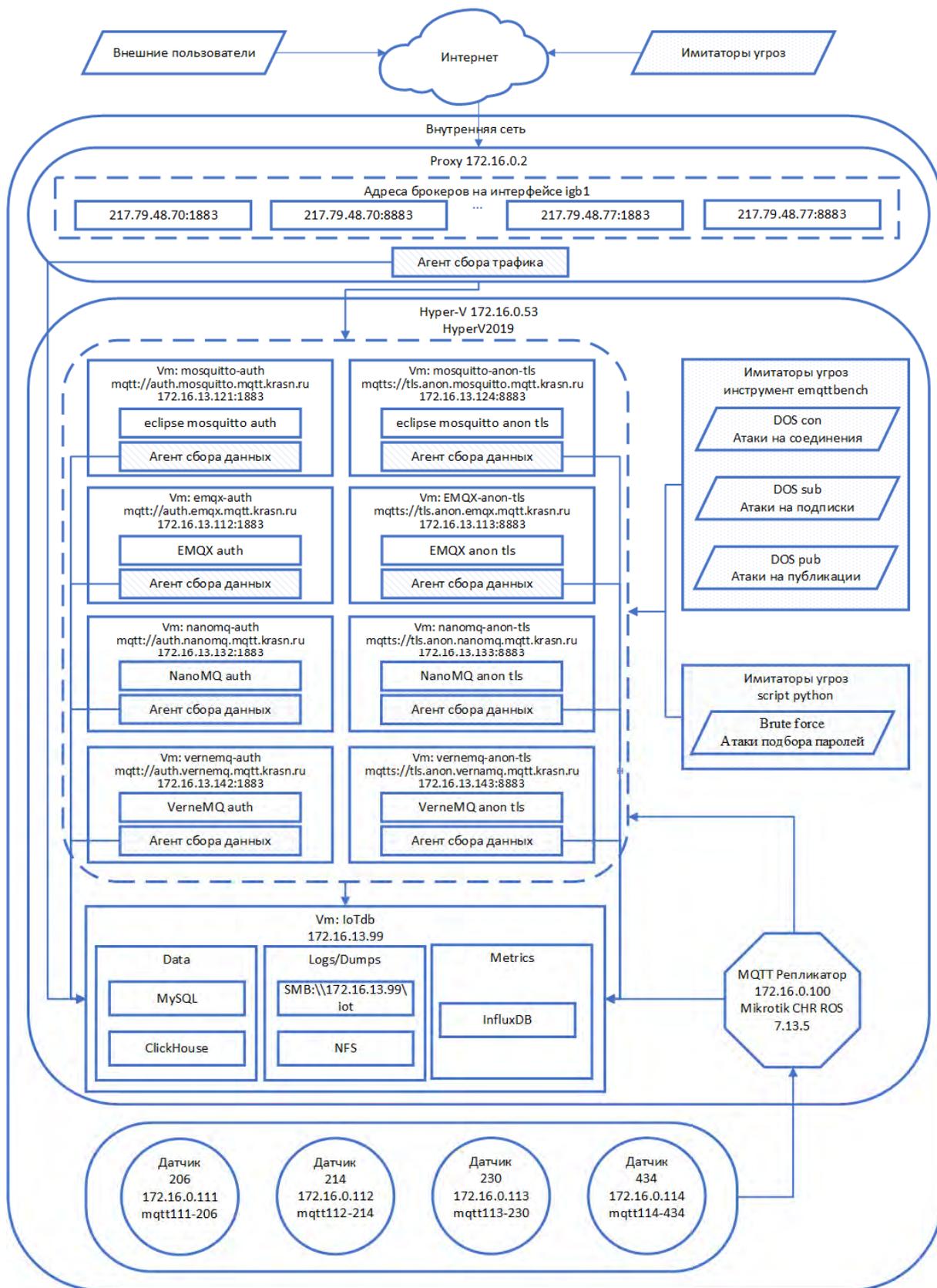


Рис. 4. Схема инфраструктуры сбора данных

Fig. 4. Scheme of the data collection infrastructure

Программные агенты, работающие на брокерах, собирают как внешний, так и внутренний сетевой трафик, приходящий на стандартные и шифрованные порты протокола MQTT. Кроме того, собираются метрики серверов и показатели, предоставляемые программным обеспечением брокера. От серверов получаем процентные характеристики ресурсов системы (процессора, памяти, загруженности сетевого канала), необходимых для выполнения работы, количество выполняемых операций ввода/вывода и другие. От брокеров – количество активных клиентов, полученных и отправленных сообщений, их объём, статические показатели, полученные после анализа сетевого трафика. Исследование данных позволит выбирать брокера и его параметры так, чтобы сохранить баланс между доступностью сервисов и целостностью информации при одинаковых сценариях использования без потери функциональности и в условиях ограниченности потребления ресурсов.

Агенты сбора сетевого трафика расположены также и на Proxu-сервере (устройстве, обслуживающем информационные потоки между пользователями и веб-ресурсами). Собираемые там данные содержат сведения обо всех внешних источниках угроз.

Для сбора данных, возникающих во время сетевых атак на ресурсы интернета вещей, настроены имитаторы угроз безопасности (применяется инструмент для тестирования производительности eMQTT-Bench). На текущий момент собирается трафик с имитацией следующих угроз:

- DOS con, выполняется большое количество запросов к брокеру на подключение за короткий промежуток времени;
- DOS sub, выполняется большое количество запросов к брокеру на подписки за короткий промежуток времени;
- DOS pub, выполняется большое количество запросов к брокеру на публикацию сообщений за короткий промежуток времени.

Перечисленные атаки выполняются как с одного источника, так и имитируются распределённые варианты угроз из многих источников. Дополнительно реализована атака на пароли, выполняющая подбор пары логин/пароль для брокеров с настроенной аутентификацией. Собираемые агентами данные в большой степени не структурированы и для их использования необходима предобработка, выполняющая деление трафика на сессии и расчёт параметров полученных сессий.

Выбор состава анализируемых показателей основан на проведённом обзоре популярных наборов данных. Мы объединили показатели, аналогичные используемым в публичных источниках, характеризующие различные уровни сети. По аналогии с CICIDS2017 мы рассчитываем характеристики сессий: дата – время, идентификатор потока, IP источника и приёмника, протокол, продолжительность потока, его скорость, среднее значение межпакетного интервала, суммарная длина пакетов, переданных в прямом и обратном направлении и другие. Дополняем их показателями, формируемыми в CIC EVSE2024 и не входящими в первый источник данных, например, количество флагов SYN (ACK, FIN и др.) в прямом или обратном направлении. Для исследования особенностей работы протокола MQTT рассчитываем характеристики, обобщающие флаги его сессий, аналогичные используемым в наборе MQTT-IoT-IDS-2020, например, флаг текущей сессии, соединения, удержания, очистки сеанса, уровень качества обслуживания (запрошенный и предоставленный), тип сообщения, его длина и прочее. Таким образом, структурные элементы публичных источников данных используются нами в качестве словарей, что обеспечивает сопоставимость с ними наших метаданных и позволяет выполнять сравнение результатов работы методов машинного обучения, настроенных на наших данных, с другими работами, использующими публичные наборы.

Построенная инфраструктура позволяет собирать трафик интернета вещей и выполнять тестирование сети на устойчивость к нескольким видам атак, характерным для таких сетей. Имитация атак инструментами, входящими в брокер данных, обеспечит их соответствие принятым стандартам.

## Заключение

В работе описана инфраструктура сбора данных сетевой активности и имитации угроз безопасности интернета вещей, развёрнутая в рамках корпоративной сети Красноярского научного центра. В нее включены: датчики, выполняющие измерение температуры, влажности и т. д.; брокеры, работающие по протоколу MQTT; подписчики, расположенные в локальной сети или осуществляющие доступ к данным через интернет; агенты, собирающие информацию; имитаторы угроз, позволяющие выполнять атаки, характерные для интернета вещей и используемых сетевых протоколов.

Сбор информации производится в распределённой среде, учитывающей особенности используемых протоколов взаимодействия со всеми устройствами на различных участках сети. Выполняется упорядоченная обработка и перенос собираемых данных к информационным системам внутри сети, а также обеспечивается доступ пользователям, расположенным вне локальной сети.

Инфраструктура позволяет оперативно получать новые наборы данных с актуализированными сценариями атак, учитывая влияние дрейфа атакующих концепций. Её применение позволяет сформировать набор данных для создания и верификации новых методов и инструментов обнаружения угроз информационной безопасности, направленных на работу в реальных сетях интернета вещей. Дальнейшее развитие темы исследования заключается в построении системы идентификации и блокирования киберугроз на основе анализа сетевых аномалий.

## Библиографические ссылки

1. Recommendation ITU-T Y.2060. Series Y: Global information infrastructure, internet protocol aspects and next-generation networks. Next generation networks – Frameworks and functional architecture models. Overview of the Internet of things – Switzerland, Geneva: International telecommunication union, 2013. 22 p. [Электронный ресурс]. URL: <https://handle.itu.int/11.1002/1000/11559> (дата обращения: 10.01.2025).
2. Абрашкин М. С., Афанасьев В. Я., Бускин Н. С. Цифровизация предприятий ракетно-космической промышленности в условиях новой промышленной революции // *Russian journal of management*. 2024. № 12(2). С. 369–389.
3. Internet of things: Vision, applications and research challenges / D. Miorandi, S. Sicari, F. Pellegrini, I. Chlamtac // *Ad Hoc Networks*, 2012. Vol. 10(7). P. 1497–1516.
4. A survey of network-based intrusion detection data sets / M. Ring, S. Wunderlich, D. Scheuring, D. Landes, A. Hotho // *Computers & Security*, 2019. Vol. 86. P. 147–167.
5. Al-Hawawreh M., Sitnikova E., Aboutorab N. X-IoTID: A Connectivity- and Device-agnostic Intrusion Dataset for Industrial Internet of Things // *IEEE Internet of Things Journal*. 2021. No. 99. P. 1-1. DOI: 10.1109/IJOT.2021.3102056.
6. Шмелев Я., Моргунов В. Обзор угроз для IoT-устройств в 2023 году [Электронный ресурс]. URL: <https://securelist.ru/iot-threat-report-2023/108088/> (дата обращения: 30.09.2024).
7. Jabez J., Muthukumar B. Intrusion Detection System (IDS): Anomaly Detection Using Outlier Detection Approach // *Procedia Computer Science*, 2015. Vol. 48. P. 338–346.
8. Security, privacy and trust in Internet of Things: The road ahead / S. Sicari, A. Rizzardi, L.A. Grieco, A. Coen-Porisini // *Computer Networks*, 2015. Vol. 76. P. 146–164.
9. Botnet attacks detection in IoT environment using machine learning techniques / M. AL-Akhresa, A. Alshunaybirb, H. Omar, S. Alhazmib // *International Journal of Data and Network Science*, 2023. Vol. 7. P. 1683–1706.
10. Paxson V., Floyd S. Wide area traffic: the failure of Poisson modeling // *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1995. Vol. 3(3). P. 226–244.
11. Viegas E. K., Santin A. O., Oliveira L. S. Toward a reliable anomaly-based intrusion detection in real-world environments // *Computer Networks*, 2017. Vol. 127. P. 200–216.

12. Generating realistic intrusion detection system dataset based on fuzzy qualitative modeling / W. Haider, J. Hu, J. Slay, B. P. Turnbull, Y. Xie // *Journal of Network and Computer Applications*, 2017. Vol. 87. P. 185–192.
13. Исаева О. С. Построение цифрового профиля устройств Интернета вещей // *Информационные и математические технологии в науке и управлении*, 2023. № 2(30). С. 36–44.
14. Исаева О. С. Построение онтологии для систематизации характеристик сети Интернета вещей // *Онтология проектирования*, 2024. Т. 14, № 2(52). С. 243–255.
15. KDD Cup 1999 Data [Электронный ресурс]. URL: <https://kdd.ics.uci.edu/databases/kddcup99/kddcup99.html> (дата обращения: 20.01.2025).
16. Mohi-ud-din G. NSL-KDD // *IEEE Dataport*, 2018. doi: 10.21227/425a-3e55.
17. Xinpeng C. CICIDS2017 and UNBSW-NB15 // *IEEE Dataport*, 2023. DOI: 10.21227/ykpn-jx78.
18. Moustafa N. A new distributed architecture for evaluating AI-based security systems at the edge: Network TON\_IoT datasets // *Sustainable Cities and Society*, 2021, Vol. 72. P. 102994.
19. Lashkari A. H. CICFlowmeter-V4.0 (formerly known as ISCXFlowMeter) is a network traffic Bi-flow generator and analyser for anomaly detection. [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/ISCX/CICFlowMeter.10.13140/RG.2.2.13827.20003> (дата обращения: 20.01.2025).
20. Методика сбора обучающего набора данных для модели обнаружения компьютерных атак / А. И. Гетьман, М. Н. Горюнов, А. Г. Мацкевич, Д. А. Рыболовлев // *Труды ИСП РАН*, 2021. № 33(5). С. 83–104.
21. Shafi M. M., Lashkari A. H., Roudsari A. H. NLFlowLyzer: Toward generating an intrusion detection dataset and intruders behavior profiling through network layer traffic analysis and pattern extraction // *Computers & Security*. 2024. Vol. 148, No. 1. P. 104160. DOI:10.1016/j.cose.2024.104160.
22. UQ IoT IDS dataset / H. Ke, K. Dan, Z. Zhien, G. Mengmeng, L. Ulysses, Y. Jiaqi // *The University of Queensland. Data Collection*, 2022.
23. MQTT-IoT-IDS2020: MQTT Internet of Things Intrusion Detection Dataset / H. Hindy, C. Tachtatzis, R. Atkinson, E. Bayne, X. Bellekens // *IEEE Dataport*, 2020.
24. CIC EV charger attack dataset 2024 (CICEVSE2024) [Электронный ресурс]. URL: <https://www.unb.ca/cic/datasets/evse-dataset-2024.html> (дата обращения: 15.10.2024).
25. Isaeva O. S., Kulyasov N. V., Isaev S. V. Creation of a simulation stand for studying of the internet of things' technologies // *AIP Conference Proceedings*, 2022. № 2647. P. 040030-1–040030-5.
26. A survey of intrusion detection in Internet of Things / B. B. Zarpelão, R. S. Miani, C. T. Kawakani, S. C. de Alvarenga // *Journal of Network and Computer Applications*, 2017. Vol. 84. P. 25–37.
27. MQTT: The Standard for IoT Messaging [Электронный ресурс]. URL: <https://mqtt.org/> (дата обращения: 14.08.2024).
28. Исаева О. С., Исаев С. В., Кулясов Н. В. Формирование адаптивных рассылок брокера данных интернета вещей // *Информационно-управляющие системы*, 2022. № 5(120). С. 23–31.
29. Исаева О. С., Кулясов Н. В., Исаев С. В. Создание инструментов сбора данных для анализа аспектов безопасности Интернета вещей // *Информационные и математические технологии в науке и управлении*, 2022. № 3(27). С.113–125.
30. A scalable and low-cost MQTT broker clustering system / P. Jutadhamakorn, T. Pillavas, V. Visoottiviseth, R. Takano, J. Haga, D. Kobayashi // *2nd International Conference on Information Technology (November 2017, Thailand)*. IEEE. 2017. P. 1–5.

## References

1. Recommendation ITU-T Y.2060. Series Y: Global information infrastructure, internet protocol aspects and next-generation networks. Next generation networks – Frameworks and functional archi-

ecture models. Overview of the Internet of things. *International telecommunication union*. 2013. 22 p. Available at: <https://handle.itu.int/11.1002/1000/11559> (accessed: 10.01.2025).

2. Abrashkin M. S., Afanas'ev V. Ya., Buskin N. S. [Digitalization of rocket-space industry enterprises in the context of the new industrial revolution]. *Russian journal of management*. 2024, No. 12(2), P. 369–389 (In Russ.).

3. Miorandi D., Sicari S., Pellegrini F., Chlamtac I. Internet of things: Vision, applications and research challenges. *Ad Hoc Networks*, 2012, Vol. 10(7), P. 1497–1516.

4. Ring M., Wunderlich S., Scheuring D., Landes D., Hotho A. A survey of network-based intrusion detection data sets. *Computers & Security*, 2019, Vol. 86, P. 147–167.

5. Al-Hawawreh M., Sitnikova E., Aboutorab N. X-IIoTID: A connectivity and device agnostic intrusion dataset for industrial Internet of Things. *IEEE Internet of Things Journal*. 2021, No. 99, P. 1-1. DOI:10.1109/JIOT.2021.3102056.

6. Shmelev Ya., Morgunov V. [IoT threat landscape in 2023]. (In Russ.). Available at: <https://securelist.ru/iot-threat-report-2023/108088/> (accessed 30.09.2024).

7. Jabez J., Muthukumar B. Intrusion detection system (IDS): anomaly detection using outlier detection approach. *Procedia Computer Science*, 2015, Vol. 48, P. 338–346.

8. Sicari S., Rizzardi A., Grieco L.A., Coen-Porisini A. Security, privacy and trust in Internet of Things: the road ahead. *Computer Networks*, 2015, Vol. 76, P. 146–164.

9. AL-Akhrasa M., Alshunaybirb A., Omara H., Alhazmib S. Botnet attacks detection in IoT environment using machine learning techniques. *International Journal of Data and Network Science*, 2023, Vol. 7, P. 1683–1706.

10. Paxson V., Floyd S. Wide area traffic: the failure of Poisson modeling. *IEEE ACM Transactions on Networking*, 1995, Vol. 3(3), P. 226–244.

11. Viegas E. K., Santin A. O., Oliveira L. S. Toward a reliable anomaly-based intrusion detection in real-world environments. *Computer Networks*, 2017, Vol. 127, P. 200–216.

12. Haider W., Hu J., Slay J., Turnbull B. P., Xie Y. Generating realistic intrusion detection system dataset based on fuzzy qualitative modeling. *Journal of Network and Computer Applications*, 2017, Vol. 87, P. 185–192.

13. Isaeva O. S. [Building a digital profile of IoT devices]. *Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii*, 2023, No. 2(30), P. 36–44 (In Russ.).

14. Isaeva O. S. [Building an ontology to systematize the characteristics of the Internet of Things network], 2024, Vol. 14, No. 2(52), P. 243–255 (In Russ.).

15. KDD Cup 1999 Data. Available at: <https://kdd.ics.uci.edu/databases/kddcup99/kddcup99.html> (accessed 20.01.2025).

16. Mohi-ud-din G. NSL-KDD. *IEEE Dataport*, 2018. doi: 10.21227/425a-3e55.

17. Xinpeng C. CICIDS2017 and UNBSW-NB15. *IEEE Dataport*, 2023. doi: 10.21227/ykpn-jx78.

18. Moustafa N. A new distributed architecture for evaluating AI-based security systems at the edge: Network TON\_IoT datasets. *Sustainable Cities and Society*, 2021, Vol. 72, P. 102994.

19. Lashkari A. H. CICFlowmeter-V4.0 (formerly known as ISCXFlowMeter) is a network traffic Bi-flow generator and analyser for anomaly detection. Available at: <https://github.com/ISCX/CICFlowMeter.10.13140/RG.2.2.13827.20003> (accessed 20.01.2025).

20. Getman A. I., Goryunov M. N., Matskevich A. G., Rybolovlev D. A. [Methodology for collecting training dataset for computer intrusion detection model]. *Trudy ISP RAN*, 2021, No. 33(5), P. 83–104 (In Russ.).

21. Shafi M. M., Lashkari A. H., Roudsari A. H. NLFlowLyzer: Toward generating an intrusion detection dataset and intruders behavior profiling through network layer traffic analysis and pattern extraction. *Computers & Security*. 2024, Vol. 148, No. 1, P. 104160. DOI:10.1016/j.cose.2024.104160.

22. Ke H., Dan K., Zhien Z., Mengmeng G., Ulysses L., Jiaqi Y. UQ IoT IDS dataset. *The University of Queensland. Data Collection*, 2022.

23. Hindy H., Tachtatzis C., Atkinson R., Bayne E., Bellekens X. MQTT-IoT-IDS2020: MQTT Internet of Things intrusion detection dataset. *IEEE Dataport*, 2020.
24. CIC EV charger attack dataset 2024 (CICEVSE2024) Available at: <https://www.unb.ca/cic/datasets/evse-dataset-2024.html> (accessed 15.10.2024).
25. Isaeva O. S., Kulyasov N. V., Isaev S. V. Creation of a simulation stand for studying of the internet of things' technologies. *AIP Conference Proceedings*, 2022, No. 2647, P. 040030-1–040030-5.
26. Zarpelão B. B., Miani R. S., Kawakani C. T., Alvarenga S. C. A survey of intrusion detection in Internet of Things. *Journal of Network and Computer Applications*, 2017, Vol. 84, P. 25–37.
27. MQTT: The Standard for IoT Messaging [Электронный ресурс]. URL: <https://mqtt.org/> (дата обращения: 14.08.2024).
28. Isaeva O. S., Isaev S. V., Kulyasov N. V. [Formation of adaptive publications from the Internet of Things data broker]. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2022, No. 5(120), P. 23–31 (In Russ.).
29. Isaeva O. S., Kulyasov N. V., Isaev S. V. [Creating data collection tools to analyze security aspects Internet of Things]. *Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii*, 2022, No. 3(27), P. 113–125 (In Russ.).
30. Jutadhamakorn P., Pillavas T., Visoottiviset V., Takano R., Haga J., Kobayashi D. A scalable and low-cost MQTT broker clustering system. *2nd International Conference on Information Technology*, IEEE, 2017, P. 1–5.

© Исаева О. С., Кулясов Н. В., Исаев С. В., 2025

---

**Исаева Ольга Сергеевна** – доктор технических наук, старший научный сотрудник; Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН. E-mail: [isaeva@icm.krasn.ru](mailto:isaeva@icm.krasn.ru). <https://orcid.org/0000-0002-5061-6765>.

**Кулясов Никита Владимирович** – программист; Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН. E-mail: [razor@icm.krasn.ru](mailto:razor@icm.krasn.ru).

**Исаев Сергей Владиславович** – кандидат технических наук, доцент, заместитель директора по научной работе; Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН. E-mail: [si@icm.krasn.ru](mailto:si@icm.krasn.ru). <https://orcid.org/0000-0002-6678-0084>.

**Isaeva Olga Sergeevna** – Doct. Sc., Senior Researcher; Institute of Computational Modelling of the Siberian Branch of the SB RAS – subdivision Federal Research Center “Krasnoyarsk Scientific Center of the SB RAS”. E-mail: [isaeva@icm.krasn.ru](mailto:isaeva@icm.krasn.ru). <https://orcid.org/0000-0002-5061-6765>.

**Kulyasov Nikita Vladimirovich** – programmer; Institute of Computational Modelling of the Siberian Branch of the SB RAS – subdivision Federal Research Center “Krasnoyarsk Scientific Center of the SB RAS”. E-mail: [razor@icm.krasn.ru](mailto:razor@icm.krasn.ru).

**Isaev Sergey Vladislavovich** – Cand. Sc., Associate Professor, Deputy Director for Research; Institute of Computational Modelling of the Siberian Branch of the SB RAS – subdivision Federal Research Center “Krasnoyarsk Scientific Center of the SB RAS”. E-mail: [si@icm.krasn.ru](mailto:si@icm.krasn.ru). <https://orcid.org/0000-0002-6678-0084>.

---

Статья поступила в редакцию 09.12.2024; принята к публикации 16.01.2025; опубликована 11.04.2025  
The article was submitted 09.12.2024; accepted for publication 16.01.2025; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License

УДК 629.783

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-21-33

**Для цитирования:** Калибровка магнитометра космического аппарата с учетом характера температурной зависимости матрицы чувствительности и вектора смещений нуля / К. А. Кириллов, С. В. Кириллова, Д. О. Мелентьев и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 21–33. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-21-33.

**For citation:** Kirillov K. A., Kirillova S. V., Melent'ev D. O., Titov G. P., Gashin A. A. [Calibration of a spacecraft magnetometer taking into account the nature of the temperature dependence of the sensitivity matrix and the offset vector]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 21–33. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-21-33.

## Калибровка магнитометра космического аппарата с учетом характера температурной зависимости матрицы чувствительности и вектора смещений нуля

К. А. Кириллов<sup>1\*</sup>, С. В. Кириллова<sup>2</sup>, Д. О. Мелентьев<sup>2,3</sup>,  
Г. П. Титов<sup>3</sup>, А. А. Гашин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет

660041, Российская Федерация, г. Красноярск, просп. Свободный, 79

<sup>3</sup>Акционерное общество «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнёва»  
Российская Федерация, 662972, г. Железногорск Красноярского края, ул. Ленина, 52

\*E-mail: kkirillow@yandex.ru

*Аннотация. В настоящей работе предложен аналитический метод решения задачи калибровки магнитометра для модели, учитывающей вектор температурной зависимости смещений нуля для каждой из измерительных осей блока магнитометра и матрицу линейной температурной зависимости каждого из членов матрицы чувствительности, масштабирующей сигнал на основе реальной чувствительности каждой оси и включающей линейные внеосевые эффекты. При решении задачи определения калибровочных параметров блока магнитометра учитывается, что для измерений с любой пространственной ориентацией блока магнитометра величина измеряемого вектора магнитной индукции сохраняется и является известной модельной величиной. Вводится в рассмотрение штрафная функция 24 переменных, равная сумме квадратов невязок. Алгоритм решения задачи калибровки измерительных осей блока магнитометра сводится к поиску методом наименьших квадратов таких значений переменных этой функции, которые при заданном наборе векторов измерений магнитометра доставляют ей минимум. С этой целью указанная функция исследуется на экстремум. Исходя из необходимого условия экстремума штрафной функции, формируется система 24 уравнений относительно 24 неизвестных, которая для удобства разбивается на три системы (каждая из них есть система 8 линейных алгебраических уравнений относительно 8 неизвестных). Доказывается, что основная матрица каждой из этих трех систем не вырождена, откуда следует, что каждая из них имеет решение, и притом только одно. Компоненты решений этих систем (координаты стационарной точки штрафной функции) находятся по правилу Крамера. Доказывается, что второй дифференциал штрафной функции в найденной стационарной точке положителен, откуда следует, что эта точка действительно доставляет минимум указанной функции.*

*Ключевые слова:* калибровка магнитометра, вектор магнитной индукции, метод наименьших квадратов, матрица Грама, правило Крамера.

## Calibration of a spacecraft magnetometer taking into account the nature of the temperature dependence of the sensitivity matrix and the offset vector

K. A. Kirillov<sup>1\*</sup>, S. V. Kirillova<sup>2</sup>, D. O. Melent'ev<sup>2, 3</sup>,  
G. P. Titov<sup>3</sup>, A. A. Gashin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

<sup>2</sup>Siberian Federal University

79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation

<sup>3</sup>JSC "Information Satellite Systems" Academician M. F. Reshetnev Company"

52, Lenin St., Zheleznogorsk, Krasnoyarsk region, 662972, Russian Federation

\*E-mail: kkirillow@yandex.ru

*Abstract. In this paper, an analytical method is proposed for solving the problem of magnetometer calibration for a model that takes into account the vector of temperature dependence of zero offsets for each of the measuring axes of the magnetometer unit and the matrix of linear temperature dependence of each of the members of the sensitivity matrix, scaling the signal based on the actual sensitivity of each axis and including linear off-axis effects. When solving the problem of determining the calibration parameters of the magnetometer unit, it is taken into account that for measurements with any spatial orientation of the magnetometer unit, the magnitude of the measured magnetic field strength vector is preserved and is a known model value. A penalty function of 24 variables equal to the sum of the squares of the residuals is introduced into consideration. The algorithm for solving the problem of calibrating the measuring axes of the magnetometer unit is reduced to searching by the method of least squares for such values of the variables of this function that, with a given set of vectors of magnetometer measurements, provide it with a minimum. For this purpose, the specified function is examined for an extremum. Based on the necessary condition for the extremum of the penalty function, a system of 24 equations in the 24 variables is formed, which, for convenience, is divided into three systems (each of them is a system of 8 linear algebraic equations in the 8 variables). It is proved that the main matrix of each of these three systems is an invertible, from which it follows that each of them has a solution, and only one. The components of the solutions of these systems (the coordinates of the stationary point of the penalty function) are found using Cramer's rule. It is proved that the second differential of the penalty function at the found stationary point is positive, from which it follows that this point really provides the minimum of the specified function.*

*Keywords: magnetometer calibration, the Earth's magnetic induction vector, the method of least squares, Gram matrix, Cramer's rule.*

### Введение

Магнитометры входят в состав системы ориентации и стабилизации (СОС) низкоорбитальных малогабаритных космических аппаратов (МКА), где являются основными источниками информации о положении МКА после отделения от разгонного блока. Магнитометры осуществляют измерение величины и направления вектора магнитной индукции магнитного поля Земли. Получаемые данные необходимы для формирования управляющих моментов МКА, при этом длительность режима успокоения во многом зависит от точности показаний прибора и шумовой составляющей.

Современные магнитометры СОС МКА разрабатываются на базе эффекта магнитосопротивления и вследствие физических особенностей чувствительного элемента требуют проведения математической калибровки прибора. На данный момент предложены различные методы калибровки магнитометров [1–16], в частности, статья [11], в которой приведен обзор различных способов проведения таких операций.

Ранее задача калибровки магнитометра космического аппарата решалась с применением численных методов. В настоящей работе предложен аналитический метод решения этой задачи для модели, учитывающей вектор температурной зависимости смещений нуля для каждой из измерительных осей блока магнитометра и матрицу линейной температурной зависимости каждого из членов матрицы чувствительности, масштабирующей сигнал на основе реальной чувствительности каждой оси и включающей линейные внеосевые эффекты.

### 1. Модель погрешностей измерений вектора магнитной индукции

Обозначим через  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)^T$  значение измеренного вектора магнитной индукции при некотором пространственном положении блока магнитометра (БМ). Воспользуемся моделью измерений, рассмотренной в [1]:

$$\mathbf{B} = (S + \tau K_S) \mathbf{h} + \mathbf{b} + \tau \mathbf{k}_b, \quad (1)$$

В (1) использованы следующие обозначения:

$\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)^T$  – истинный вектор магнитной индукции;

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$  – постоянный вектор, отвечающий смещениям нуля для каждой из измерительных осей БМ;

$\mathbf{k}_b = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$  – вектор температурной зависимости смещений нуля для каждой из измерительных осей БМ;

$S = (s_{ij})_{i,j=1}^3$  – матрица чувствительности, которая масштабирует сигнал на основе реальной чувствительности каждой оси и включает линейные внеосевые эффекты;

$K_S = (t_{ij})_{i,j=1}^3$  – матрица линейной температурной зависимости каждого из членов матрицы чувствительности;

$\tau$  – температура, передаваемая датчиком (скалярная величина).

При этом компоненты векторов  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{k}_b$  выражены в одинаковых единицах измерения.

Задача калибровки измерительных осей БМ сводится к нахождению элементов матриц  $S$  и  $K_S$ , а также компонент векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{k}_b$ .

### 2. Разработка алгоритма определения калибровочных параметров БМ

При решении задачи определения калибровочных параметров БМ воспользуемся тем, что для измерений с любой пространственной ориентацией БМ величина измеряемого вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  сохраняется и является известной модельной величиной.

Пусть в результате измерений магнитометра в дискретные моменты времени получен набор векторов  $\mathbf{h}^{(l)} = (h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, h_3^{(l)})^T$ , а в результате измерений в те же дискретные моменты времени передающего температуру датчика получен набор значений  $\tau^{(l)}$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$ . Без ограничения общности можно считать, что если  $(\tau^{(l)}, h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, h_3^{(l)}, \tau^{(l)} h_1^{(l)}, \tau^{(l)} h_2^{(l)}, \tau^{(l)} h_3^{(l)})$  ( $l = 1, 2, \dots, N$ ) рассматривать как координаты точек 7-мерного аффинного пространства, то эти точки не лежат в одной гиперплоскости. Обозначим эти точки следующим образом:

$$U_l \left( \tau^{(l)}, h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, h_3^{(l)}, \tau^{(l)} h_1^{(l)}, \tau^{(l)} h_2^{(l)}, \tau^{(l)} h_3^{(l)} \right), \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** Если точки

$$V_1 \left( x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} \right), V_2 \left( x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)} \right), \dots, V_N \left( x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \dots, x_n^{(N)} \right) \quad (3)$$

$n$ -мерного аффинного пространства не лежат в одной гиперплоскости ( $N \geq n$ ), то среди них найдутся  $n$  аффинно независимых точек.

**Доказательство.** Лемму докажем методом «от противного». Предположим, что любые  $n$  точек из набора (3) аффинно зависимы. Обозначим через  $m$  максимальное число аффинно независимых точек (3),  $1 \leq m < n$ . Пусть  $V_{i_1}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_1)}, \dots, x_n^{(i_1)})$ ,  $V_{i_2}(x_1^{(i_2)}, x_2^{(i_2)}, \dots, x_n^{(i_2)})$ , ...,  $V_{i_m}(x_1^{(i_m)}, x_2^{(i_m)}, \dots, x_n^{(i_m)})$  – аффинно независимые точки, а  $\Pi_{n-1}$  – любая из гиперплоскостей, проходящих через эти точки. Выберем в гиперплоскости  $\Pi_{n-1}$  такие точки  $W_1(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_n^{(1)})$ ,  $W_2(y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \dots, y_n^{(2)})$ , ...,  $W_{n-m}(y_1^{(n-m)}, y_2^{(n-m)}, \dots, y_n^{(n-m)})$ , что точки  $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_m}, W_1, W_2, \dots, W_{n-m}$  аффинно независимы. Запишем уравнение гиперплоскости  $\Pi_{n-1}$  [17]:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^{(i_1)} & x_2 - x_2^{(i_1)} & \dots & x_n - x_n^{(i_1)} \\ x_1^{(i_2)} - x_1^{(i_1)} & x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_1)} & \dots & x_n^{(i_2)} - x_n^{(i_1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(i_m)} - x_1^{(i_1)} & x_2^{(i_m)} - x_2^{(i_1)} & \dots & x_n^{(i_m)} - x_n^{(i_1)} \\ y_1^{(1)} - x_1^{(i_1)} & y_2^{(1)} - x_2^{(i_1)} & \dots & y_n^{(1)} - x_n^{(i_1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-m)} - x_1^{(i_1)} & y_2^{(n-m)} - x_2^{(i_1)} & \dots & y_n^{(n-m)} - x_n^{(i_1)} \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Легко видеть, что любая из точек (3) удовлетворяет уравнению (4). Действительно, если в определитель, фигурирующий в левой части этого уравнения, вместо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  подставить координаты любой из точек  $U_l (l = 1, 2, \dots, N)$ , то получим определитель

$$\begin{vmatrix} x_1^{(l)} - x_1^{(i_1)} & x_2^{(l)} - x_2^{(i_1)} & \dots & x_n^{(l)} - x_n^{(i_1)} \\ x_1^{(i_2)} - x_1^{(i_1)} & x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_1)} & \dots & x_n^{(i_2)} - x_n^{(i_1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(i_m)} - x_1^{(i_1)} & x_2^{(i_m)} - x_2^{(i_1)} & \dots & x_n^{(i_m)} - x_n^{(i_1)} \\ y_1^{(1)} - x_1^{(i_1)} & y_2^{(1)} - x_2^{(i_1)} & \dots & y_n^{(1)} - x_n^{(i_1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-m)} - x_1^{(i_1)} & y_2^{(n-m)} - x_2^{(i_1)} & \dots & y_n^{(n-m)} - x_n^{(i_1)} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Если  $l = i_1$ , то первая строка определителя (5) нулевая, и поэтому он равен нулю. Если  $l \in \{i_2, \dots, i_m\}$ , то определитель (5) равен нулю в силу того, что первая его строка совпадает с одной из строк с номерами 2, ...,  $m$ . Если же  $l \notin \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ , то в силу аффинной зависимости точек  $V_l, V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_m}$  векторы  $\overline{V_{i_1}V_l}, \overline{V_{i_1}V_{i_2}}, \overline{V_{i_1}V_{i_3}}, \dots, \overline{V_{i_1}V_{i_m}}$  линейно зависимы, следовательно, линейно зависимы первые  $m$  строк определителя (5), а значит этот определитель и в данном случае равен нулю.

Таким образом, все  $N$  точек (3) принадлежат гиперплоскости  $\Pi_{n-1}$ , что противоречит условию леммы. Следовательно, наше предположение о том, что любые  $n$  точек из набора (3) аффинно зависимы, не верно, а значит, среди точек (3) действительно найдутся  $n$  аффинно независимых точек. Лемма 1 доказана.

Из (1) получаем:

$$\mathbf{B}^{(l)} = (S + \tau^{(l)} K_S) \mathbf{h}^{(l)} + \mathbf{b} + \tau^{(l)} \mathbf{k}_b, l = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

где  $\mathbf{B}^{(l)} = (B_1^{(l)}, B_2^{(l)}, B_3^{(l)})^T$  – истинный вектор магнитной индукции в той же точке пространства, что и измеренный вектор  $\mathbf{h}^{(l)}$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$ .

Перепишем равенство (6) в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} s_{11} + \tau^{(l)} t_{11} & s_{12} + \tau^{(l)} t_{12} & s_{13} + \tau^{(l)} t_{13} \\ s_{21} + \tau^{(l)} t_{21} & s_{22} + \tau^{(l)} t_{22} & s_{23} + \tau^{(l)} t_{23} \\ s_{31} + \tau^{(l)} t_{31} & s_{32} + \tau^{(l)} t_{32} & s_{33} + \tau^{(l)} t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(l)} \\ h_2^{(l)} \\ h_3^{(l)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + \tau^{(l)} \theta_1 \\ b_2 + \tau^{(l)} \theta_2 \\ b_3 + \tau^{(l)} \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^{(l)} \\ B_2^{(l)} \\ B_3^{(l)} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$l = 1, 2, \dots, N$ . Каждое из  $N$  векторных равенств (7) запишем в виде системы трех скалярных равенств:

$$(s_{i1} + \tau^{(l)} t_{i1}) h_1^{(l)} + (s_{i2} + \tau^{(l)} t_{i2}) h_2^{(l)} + (s_{i3} + \tau^{(l)} t_{i3}) h_3^{(l)} + b_i + \tau^{(l)} \theta_i = B_i^{(l)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$l = 1, 2, \dots, N$ .

Введем в рассмотрение штрафную функцию 24 переменных  $s_{ij}$ ,  $t_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $b_i$ ,  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\Phi = \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^3 \left[ B_i^{(l)} - \tau^{(l)} \theta_i - b_i - (s_{i1} + \tau^{(l)} t_{i1}) h_1^{(l)} - (s_{i2} + \tau^{(l)} t_{i2}) h_2^{(l)} - (s_{i3} + \tau^{(l)} t_{i3}) h_3^{(l)} \right]^2. \quad (8)$$

Алгоритм решения задачи калибровки измерительных осей БМ сводится к поиску методом наименьших квадратов [18] таких значений переменных  $s_{ij}$ ,  $t_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $b_i$ ,  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), которые при заданном наборе векторов измерений  $\{\mathbf{h}^{(l)}\}$  ( $l = 1, 2, \dots, N$ ) доставляют минимум функции  $\Phi$ . С этой целью требуется исследовать функцию  $\Phi$  на экстремум [19]. Запишем необходимое условие локального экстремума этой функции:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial b_i} = -2 \sum_{l=1}^N \left[ B_i^{(l)} - \tau^{(l)} \theta_i - b_i - (s_{i1} + \tau^{(l)} t_{i1}) h_1^{(l)} - (s_{i2} + \tau^{(l)} t_{i2}) h_2^{(l)} - (s_{i3} + \tau^{(l)} t_{i3}) h_3^{(l)} \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} = -2 \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} \left[ B_i^{(l)} - \tau^{(l)} \theta_i - b_i - (s_{i1} + \tau^{(l)} t_{i1}) h_1^{(l)} - (s_{i2} + \tau^{(l)} t_{i2}) h_2^{(l)} - (s_{i3} + \tau^{(l)} t_{i3}) h_3^{(l)} \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} = -2 \sum_{l=1}^N h_j^{(l)} \left[ B_i^{(l)} - \tau^{(l)} \theta_i - b_i - (s_{i1} + \tau^{(l)} t_{i1}) h_1^{(l)} - (s_{i2} + \tau^{(l)} t_{i2}) h_2^{(l)} - (s_{i3} + \tau^{(l)} t_{i3}) h_3^{(l)} \right] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t_{ij}} = -2 \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} h_j^{(l)} \left[ B_i^{(l)} - \tau^{(l)} \theta_i - b_i - (s_{i1} + \tau^{(l)} t_{i1}) h_1^{(l)} - (s_{i2} + \tau^{(l)} t_{i2}) h_2^{(l)} - (s_{i3} + \tau^{(l)} t_{i3}) h_3^{(l)} \right] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (9)$$

Требуется найти стационарные точки функции  $\Phi$ , т. е. решение системы (9) – системы линейных алгебраических уравнений относительно 24 неизвестных  $s_{ij}$ ,  $t_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $b_i$ ,  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Для удобства разобьем (9) на три системы

$$\begin{cases} Nb_i + \theta_i \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} + \sum_{k=1}^3 \left[ s_{ik} \sum_{l=1}^N h_k^{(l)} \right] + \sum_{k=1}^3 \left[ t_{ik} \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} h_k^{(l)} \right] = \sum_{l=1}^N B_i^{(l)}, \\ b_i \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} + \theta_i \sum_{l=1}^N (\tau^{(l)})^2 + \sum_{k=1}^3 \left[ s_{ik} \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} h_k^{(l)} \right] + \sum_{k=1}^3 \left[ t_{ik} \sum_{l=1}^N (\tau^{(l)})^2 h_k^{(l)} \right] = \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} B_i^{(l)}, \\ b_i \sum_{l=1}^N h_j^{(l)} + \theta_i \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} h_j^{(l)} + \sum_{k=1}^3 \left[ s_{ik} \sum_{l=1}^N h_k^{(l)} h_j^{(l)} \right] + \sum_{k=1}^3 \left[ t_{ik} \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} h_k^{(l)} h_j^{(l)} \right] = \sum_{l=1}^N h_j^{(l)} B_i^{(l)}, \quad j = 1, 2, 3, \\ b_i \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} h_j^{(l)} + \theta_i \sum_{l=1}^N (\tau^{(l)})^2 h_j^{(l)} + \sum_{k=1}^3 \left[ s_{ik} \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} h_k^{(l)} h_j^{(l)} \right] + \sum_{k=1}^3 \left[ t_{ik} \sum_{l=1}^N (\tau^{(l)})^2 h_k^{(l)} h_j^{(l)} \right] = \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} B_i^{(l)} h_j^{(l)}, \quad j = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (10)$$

$i = 1, 2, 3$ . Заметим, что  $i$ -я система (10) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно восьми неизвестных  $b_i, \theta_i, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, i = 1, 2, 3$ .

Докажем, что каждая из трех систем уравнений (10) имеет решение, и притом только одно. Для этого достаточно показать, что основная матрица каждой из этих трех систем не вырождена. Основная матрица каждой из указанных систем – матрица Грама, составленная из скалярных произведений следующих восьми векторов:

$$(1, 1, \dots, 1), (\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(N)}), (h_i^{(1)}, h_i^{(2)}, \dots, h_i^{(N)}) (i = 1, 2, 3),$$

$$(\tau^{(1)}h_i^{(1)}, \tau^{(2)}h_i^{(2)}, \dots, \tau^{(N)}h_i^{(N)}) (i = 1, 2, 3). \tag{11}$$

При этом скалярное произведение двух векторов определяется как сумма произведений их компонент с одинаковыми номерами.

Докажем, что система векторов (11) линейно независима, откуда будет следовать невырожденность матрицы Грама этой системы [20], т. е. основной матрицы каждой из этих трех систем уравнений (10). Доказательство проведем методом «от противного». Предположим, что система векторов (11) линейно зависима. Тогда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau^{(1)} & h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & h_3^{(1)} & \tau^{(1)}h_1^{(1)} & \tau^{(1)}h_2^{(1)} & \tau^{(1)}h_3^{(1)} \\ 1 & \tau^{(2)} & h_1^{(2)} & h_2^{(2)} & h_3^{(2)} & \tau^{(2)}h_1^{(2)} & \tau^{(2)}h_2^{(2)} & \tau^{(2)}h_3^{(2)} \\ \dots & \dots \\ 1 & \tau^{(N)} & h_1^{(N)} & h_2^{(N)} & h_3^{(N)} & \tau^{(N)}h_1^{(N)} & \tau^{(N)}h_2^{(N)} & \tau^{(N)}h_3^{(N)} \end{pmatrix},$$

столбцы которой составлены из компонент векторов (11), меньше 8. Следовательно, любой минор 8-го порядка этой матрицы равен нулю (считаем, что  $N \geq 8$ ), откуда вытекает справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 1 & \tau^{(i_1)} & h_1^{(i_1)} & h_2^{(i_1)} & h_3^{(i_1)} & \tau^{(i_1)}h_1^{(i_1)} & \tau^{(i_1)}h_2^{(i_1)} & \tau^{(i_1)}h_3^{(i_1)} \\ 1 & \tau^{(i_2)} & h_1^{(i_2)} & h_2^{(i_2)} & h_3^{(i_2)} & \tau^{(i_2)}h_1^{(i_2)} & \tau^{(i_2)}h_2^{(i_2)} & \tau^{(i_2)}h_3^{(i_2)} \\ \dots & \dots \\ 1 & \tau^{(i_7)} & h_1^{(i_7)} & h_2^{(i_7)} & h_3^{(i_7)} & \tau^{(i_7)}h_1^{(i_7)} & \tau^{(i_7)}h_2^{(i_7)} & \tau^{(i_7)}h_3^{(i_7)} \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

$1 < i_1 < i_2 < \dots < i_7 \leq N$ , где  $U_{i_l}(\tau^{(i_l)}, h_1^{(i_l)}, h_2^{(i_l)}, h_3^{(i_l)}, \tau^{(i_l)}h_1^{(i_l)}, \tau^{(i_l)}h_2^{(i_l)}, \tau^{(i_l)}h_3^{(i_l)})$  – аффинно независимые точки из набора точек (2),  $l = 1, 2, \dots, 7$  (семь таких точек существуют в силу Леммы 1), а  $(x_1, x_2, \dots, x_7)$  – координаты любой из остальных  $(N - 7)$  точек набора (2). Равенство (12) равносильно равенству

$$\begin{vmatrix} x_1 - \tau^{(i_1)} & x_2 - h_1^{(i_1)} & x_3 - h_2^{(i_1)} & x_4 - h_3^{(i_1)} & x_5 - \tau^{(i_1)}h_1^{(i_1)} & x_6 - \tau^{(i_1)}h_2^{(i_1)} & x_7 - \tau^{(i_1)}h_3^{(i_1)} \\ \tau^{(i_2)} - \tau^{(i_1)} & h_1^{(i_2)} - h_1^{(i_1)} & h_2^{(i_2)} - h_2^{(i_1)} & h_3^{(i_2)} - h_3^{(i_1)} & \tau^{(i_2)}h_1^{(i_2)} - \tau^{(i_1)}h_1^{(i_1)} & \tau^{(i_2)}h_2^{(i_2)} - \tau^{(i_1)}h_2^{(i_1)} & \tau^{(i_2)}h_3^{(i_2)} - \tau^{(i_1)}h_3^{(i_1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau^{(i_7)} - \tau^{(i_1)} & h_1^{(i_7)} - h_1^{(i_1)} & h_2^{(i_7)} - h_2^{(i_1)} & h_3^{(i_7)} - h_3^{(i_1)} & \tau^{(i_7)}h_1^{(i_7)} - \tau^{(i_1)}h_1^{(i_1)} & \tau^{(i_7)}h_2^{(i_7)} - \tau^{(i_1)}h_2^{(i_1)} & \tau^{(i_7)}h_3^{(i_7)} - \tau^{(i_1)}h_3^{(i_1)} \end{vmatrix} = 0,$$

которое представляет собой уравнение гиперплоскости, проходящей через аффинно независимые точки  $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_7}$ . Из вышесказанного следует, что этому уравнению удовлетворяют координаты любой из  $N$  точек набора (2), а это противоречит тому, что  $N$  точек (2) не лежат в одной гиперплоскости.

Таким образом, система векторов (11) линейно независима, а значит основная матрица каждой из трех систем уравнений (10) не вырождена. Следовательно, каждая из этих систем имеет решение, и притом только одно, что и требовалось доказать.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 A_i &= \sum_{l=1}^N B_i^{(l)}, \quad C_i = \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} B_i^{(l)}, \quad i=1,2,3; \quad G_j = \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} h_j^{(l)}, \quad H_j = \sum_{l=1}^N h_j^{(l)}, \quad L_j = \sum_{l=1}^N \left(\tau^{(l)}\right)^2 h_j^{(l)}, \quad j=1,2,3; \\
 M_{kj} &= M_{jk} = \sum_{l=1}^N h_k^{(l)} h_j^{(l)}, \quad P_{kj} = P_{jk} = \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} h_k^{(l)} h_j^{(l)}, \quad Q_{kj} = Q_{jk} = \sum_{l=1}^N \left(\tau^{(l)}\right)^2 h_k^{(l)} h_j^{(l)}, \quad k, j=1,2,3; \\
 D_{ij} &= \sum_{l=1}^N B_i^{(l)} h_j^{(l)}, \quad F_{ij} = \sum_{l=1}^N \tau^{(l)} B_i^{(l)} h_j^{(l)}, \quad i, j=1,2,3; \quad R = \sum_{l=1}^N \left(\tau^{(l)}\right)^2, \quad T = \sum_{l=1}^N \tau^{(l)}.
 \end{aligned}$$

Тогда каждую из трех систем уравнений (10) можно записать в виде

$$\begin{cases}
 Nb_i + T\theta_i + \sum_{k=1}^3 H_k s_{ik} + \sum_{k=1}^3 G_k t_{ik} = A_i, \\
 Tb_i + R\theta_i + \sum_{k=1}^3 G_k s_{ik} + \sum_{k=1}^3 L_k t_{ik} = C_i, \\
 H_j b_i + G_j \theta_i + \sum_{k=1}^3 M_{kj} s_{ik} + \sum_{k=1}^3 P_{kj} t_{ik} = D_{ij}, \quad j=1,2,3, \\
 G_j b_i + L_j \theta_i + \sum_{k=1}^3 P_{kj} s_{ik} + \sum_{k=1}^3 Q_{kj} t_{ik} = F_{ij}, \quad j=1,2,3,
 \end{cases} \quad (13)$$

$i = 1, 2, 3$ . В каждой из трех систем (13) выразим из первых двух уравнений  $b_i$  и  $\theta_i$  через  $s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}$ , затем исключим  $b_i$  и  $\theta_i$  из остальных шести уравнений системы и умножим обе части каждого из последних шести уравнений на  $(T^2 - NR)$ :

$$\begin{cases}
 b_i = (T^2 - NR)^{-1} \left[ TC_i - RA_i + \sum_{k=1}^3 (RH_k - TG_k) s_{ik} + \sum_{k=1}^3 (RG_k - TL_k) t_{ik} \right], \\
 \theta_i = (T^2 - NR)^{-1} \left[ TA_i - NC_i + \sum_{k=1}^3 (NG_k - TH_k) s_{ik} + \sum_{k=1}^3 (NL_k - TG_k) t_{ik} \right],
 \end{cases} \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_{j,k} s_{ik} + \sum_{k=1}^3 \beta_{j,k} t_{ik} = \gamma_{j,i}, \quad j=1,2,\dots,6, \quad (15)$$

$i = 1, 2, 3$ , где коэффициенты при неизвестных и свободные члены определяются равенствами

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j,k} &= (T^2 - NR) M_{kj} + H_j (RH_k - TG_k) + G_j (NG_k - TH_k), \\
 \alpha_{j+3,k} &= (T^2 - NR) P_{kj} + G_j (RH_k - TG_k) + L_j (NG_k - TH_k), \\
 \beta_{j,k} &= (T^2 - NR) P_{kj} + H_j (RG_k - TL_k) + G_j (NL_k - TG_k), \\
 \beta_{j+3,k} &= (T^2 - NR) Q_{kj} + G_j (RG_k - TL_k) + L_j (NL_k - TG_k), \\
 \gamma_{j,i} &= (T^2 - NR) D_{ij} + H_j (RA_i - TC_i) + G_j (NC_i - TA_i), \\
 \gamma_{j+3,i} &= (T^2 - NR) F_{ij} + G_j (RA_i - TC_i) + L_j (NC_i - TA_i),
 \end{aligned}$$

$i, j, k = 1, 2, 3$ .

Заметим, что хотя бы один из миноров третьего порядка, расположенных в первых трех столбцах основной матрицы,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \beta_{61} & \beta_{62} & \beta_{63} \end{pmatrix} \quad (16)$$

каждой из трех систем уравнений (15), отличен от нуля. Действительно, в силу теоремы Лапласа, определитель матрицы (16) равен сумме произведений всех миноров третьего порядка, расположенных в первых трех столбцах этой матрицы, на их алгебраические дополнения, и если бы все указанные миноры равнялись нулю, то нулю равнялся бы и определитель матрицы (16), что противоречило бы необходимому и достаточному условию существования единственного решения каждой из трех систем уравнений (15), а значит и каждой из трех систем уравнений (10).

Пусть  $j_1, j_2, j_3$  ( $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq 6$ ) – номера строк матрицы (16), на пересечении которых с первыми тремя столбцами этой матрицы расположен отличный от нуля минор третьего порядка. Поменяем местами уравнения каждой из трех систем (15) так, чтобы уравнения с номерами  $j_1, j_2, j_3$  оказались соответственно первым, вторым и третьим. Номера уравнений, оказавшихся при этом на четвертом, пятом и шестом местах, обозначим соответственно через  $j_4, j_5, j_6$ . Введем также следующие обозначения:

$$\Omega_{11} = (\alpha_{j_n, k})_{n, k=1}^3, \quad \Omega_{12} = (\beta_{j_n, k})_{n, k=1}^3, \quad \Omega_{21} = (\alpha_{j_{n+3}, k})_{n, k=1}^3, \quad \Omega_{22} = (\beta_{j_{n+3}, k})_{n, k=1}^3,$$

$$\Gamma_{1i} = (\gamma_{j_1, i}, \gamma_{j_2, i}, \gamma_{j_3, i})^T, \quad \Gamma_{2i} = (\gamma_{j_4, i}, \gamma_{j_5, i}, \gamma_{j_6, i})^T,$$

$i = 1, 2, 3$ . Тогда расширенная матрица системы, полученной из  $i$ -й системы (15) в результате указанной выше перестановки уравнений, примет вид

$$\begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Gamma_{1i} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Gamma_{2i} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$i = 1, 2, 3$ . При этом  $\Omega_{11}$  – невырожденная матрица в силу ее определения и условия выбора номеров  $j_1, j_2, j_3$  строк матрицы (16). Из второй строки  $i$ -й блочной матрицы (17) вычтем ее первую строку, умноженную слева на  $\Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Gamma_{1i} \\ O & \Omega_{22} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12} & \Gamma_{2i} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Gamma_{1i} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$i = 1, 2, 3$ , где  $O$  – нулевая квадратная матрица третьего порядка. Полученная матрица (18) эквивалентна матрице (17) [21]. Для каждого  $i = 1, 2, 3$  последние три уравнения системы, соответствующей расширенной матрице (18), образуют систему, матричная запись которой выглядит следующим образом:

$$(\Omega_{22} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12})\Lambda_i = \Gamma_{2i} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Gamma_{1i}, \quad (19)$$

где  $\Lambda_i = (t_{i1}, t_{i2}, t_{i3})^T, i = 1, 2, 3$ .

Заметим, что основная матрица  $(\Omega_{22} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12})$  каждой из трех систем уравнений (19) не вырождена, так как в противном случае нарушалось бы необходимое и достаточное условие существования единственного решения каждой из трех систем (19), а значит и каждой из трех систем (15) и, следовательно, каждой из трех систем (10).

Значения неизвестных  $t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}$  для каждого  $i = 1, 2, 3$  находим из системы уравнений (19) по формулам Крамера

$$t_{ik} = \frac{\Delta_{i,k}}{\Delta}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (20)$$

где

$$\Delta = \det(\Omega_{22} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}),$$

а каждый из определителей  $\Delta_{i,k}$  получаем из определителя  $\Delta$  заменой его  $k$ -го столбца на столбец свободных членов

$$\Gamma_{2i} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Gamma_{1i},$$

$i, k = 1, 2, 3$ .

Подставляя для каждого  $i = 1, 2, 3$  в первые три уравнения системы, соответствующей расширенной матрице (18), вместо  $t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}$  значения этих неизвестных, вычисленные по формулам (20), получим систему трех уравнений относительно трех неизвестных  $s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}$ , матричная запись которой имеет вид

$$\Omega_{11}\Sigma_i = \Gamma_{1i} - \Omega_{12}\tilde{\Lambda}_i, \quad (21)$$

где  $\tilde{\Lambda}_i$  – вектор-столбец решений системы уравнений (19),  $\Sigma_i = (s_{i1}, s_{i2}, s_{i3})^T$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Значения неизвестных  $s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}$  для каждого  $i = 1, 2, 3$  находим из системы уравнений (21) по формулам Крамера

$$s_{ik} = \frac{\tilde{\Delta}_{i,k}}{\tilde{\Delta}}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

где

$$\tilde{\Delta} = \det(\Omega_{11}),$$

а каждый из определителей  $\tilde{\Delta}_{i,k}$  получаем из определителя  $\tilde{\Delta}$  заменой его  $k$ -го столбца на столбец свободных членов

$$\Gamma_{1i} - \Omega_{12}\tilde{\Lambda}_i,$$

$i, k = 1, 2, 3$ .

После нахождения значений неизвестных  $t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}$  находим значения неизвестных  $b_i$  и  $\theta_i$  по формулам (14),  $i = 1, 2, 3$ .

Докажем, что найденная стационарная точка функции  $\Phi$ , определенной равенством (8), т. е. решение системы уравнений (9), полученное изложенным выше способом, доставляет минимум функции  $\Phi$ . Выведем выражение второго дифференциала  $d^2\Phi$  функции  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} d^2\Phi &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left[ \frac{\partial^2\Phi}{\partial s_{ij}\partial s_{km}} ds_{ij} ds_{km} + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial s_{ij}\partial t_{km}} ds_{ij} dt_{km} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t_{ij}\partial t_{km}} dt_{ij} dt_{km} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left[ 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial b_i\partial\theta_m} db_i d\theta_m + \frac{\partial^2\Phi}{\partial b_i\partial b_m} db_i db_m + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_i\partial\theta_m} d\theta_i d\theta_m \right] + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial^2\Phi}{\partial s_{ij}\partial b_k} ds_{ij} db_k + \frac{\partial^2\Phi}{\partial s_{ij}\partial\theta_k} ds_{ij} d\theta_k + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t_{ij}\partial b_k} dt_{ij} db_k + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t_{ij}\partial\theta_k} dt_{ij} d\theta_k \right] = \\ &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^N \left[ h_j^{(l)} h_m^{(l)} \Delta s_{ij} \Delta s_{im} + 2\tau^{(l)} h_j^{(l)} h_m^{(l)} \Delta s_{ij} \Delta t_{im} + \left(\tau^{(l)}\right)^2 h_j^{(l)} h_m^{(l)} \Delta t_{ij} \Delta t_{im} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^N \left[ 2\tau^{(l)} \Delta b_i \Delta \theta_i + (\Delta b_i)^2 + \left( \tau^{(l)} \right)^2 (\Delta \theta_i)^2 \right] + \\
& + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^N \left[ h_j^{(l)} \Delta s_{ij} \Delta b_i + \tau^{(l)} h_j^{(l)} \Delta s_{ij} \Delta \theta_i + \tau^{(l)} h_j^{(l)} \Delta t_{ij} \Delta b_i + \left( \tau^{(l)} \right)^2 h_j^{(l)} \Delta t_{ij} \Delta \theta_i \right] \Bigg\} = \\
& = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^N \left\{ \Delta b_i + \tau^{(l)} \Delta \theta_i + \sum_{j=1}^3 h_j^{(l)} \Delta s_{ij} + \sum_{j=1}^3 \tau^{(l)} h_j^{(l)} \Delta t_{ij} \right\}^2,
\end{aligned}$$

где  $\Delta s_{ij} = ds_{ij}$ ,  $\Delta t_{ij} = dt_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $\Delta b_i = db_i$ ,  $\Delta \theta_i = d\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Из полученного выражения для  $d^2\Phi$  следует, что при условии неравенства нулю хотя бы одного из слагаемых

$$\left\{ \Delta b_i + \tau^{(l)} \Delta \theta_i + \sum_{j=1}^3 h_j^{(l)} \Delta s_{ij} + \sum_{j=1}^3 \tau^{(l)} h_j^{(l)} \Delta t_{ij} \right\}^2 \quad (i=1, 2, 3, l=1, \dots, N)$$

В последней двойной сумме (с физической точки зрения это вполне естественно) имеет место неравенство  $d^2\Phi > 0$  в любой точке, а значит, и в найденной стационарной точке функции  $\Phi$ . Следовательно, полученное решение системы уравнений (9) действительно доставляет минимум функции  $\Phi$  [19].

### Заключение

Итак, мы получили аналитическое решение задачи калибровки магнитометра космического аппарата для модели, учитывающей вектор температурной зависимости смещений нуля для каждой из измерительных осей блока магнитометра и матрицу линейной температурной зависимости каждого из членов матрицы чувствительности, масштабирующей сигнал на основе реальной чувствительности каждой оси и включающей линейные внеосевые эффекты.

Процедура вычисления калибровочных параметров БМ по выведенным формулам обладает следующими очевидными преимуществами по сравнению с численными методами решения этой задачи:

- существенно уменьшается число арифметических операций;
- исчезает проблема возможной неустойчивости метода.

### Библиографические ссылки

1. Belsten N., Knapp M., Masterson R., Payne C., Ammons K., Lind F.D., Cahoy K. Verification and calibration of a commercial anisotropic magnetoresistive magnetometer by multivariate non-linear regression // *Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems*. 2023. Vol. 12, No. 2, P. 201–213. Doi: 10.5194/gi-12-201-2023.
2. Chen M., Liu K., Hu X., Li Y., Hao X., Pan Z. Ground calibration of the Mars orbiter magnetometer onboard Tianwen-1 // *Earth and Planetary Physics*. 2023. Vol. 7, No. 3. P. 371–377. Doi: 10.26464/epp2023004.
3. Cheng S., Wang G., Zhang T., Pan Z., Meng L., Yi Z. An optimal method for in-flight calibration of the fluxgate magnetometer when the total magnetic field of alfvén waves has a drift trend // *Acta Geophysica Sinica*. 2022. Vol. 65, No. 5. P. 1558–1570. Doi: 10.6038/cjg2022P0362.
4. Crassidis J. L., Cheng Ya. Three-axis magnetometer calibration using total least squares // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2021. Vol. 44, No. 8. P. 1410–1424. Doi: 10.2514/1.g005305.
5. Huang Yu., Wu L., Wang Ya., Xu Y. Scalar calibration of total instrument errors of tri-axial magnetometer using constrained optimization independent of magnetic field intensity // *IEEE Sensors Journal*. 2024. Vol. 24, No. 9. P. 14352–14360. Doi: 10.1109/jsen.2024.3370624.

6. Kim Ji. H., Lee Ch. Ju., Lee Ju. K. Effects of outlier elimination in magnetometer calibration data on the performance of ellipsoid fitting-based calibration // *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*. 2024. Vol. 30, No. 12. P. 1373–1379. Doi: 10.5302/j.icros.2024.24.0209.
7. Kinatas H., Hajiyev Ch. Triad-Aided Multiplicative EKF for Small Satellite Attitude Estimation and Magnetometer Calibration // *IEEE Sensors Journal*. 2023. Vol. 23, No. 22. P. 27161–27168. Doi: 10.1109/jsen.2023.3317969.
8. Liu J., Yan Y., Yan Sh., Li X. A hybrid calibration method for a three-axis magnetometer in limited-range attitudes // *IEEE Sensors Journal*. 2022. Vol. 22, No. 1. P. 203–210. Doi: 10.1109/jsen.2021.3123728.
9. Integrated calibration of strap-down geomagnetic vector measurement system / H. Pang, Ch. Wan, Sh. Mou et al. // *IEEE Sensors Journal*. 2022. Vol. 22, No. 11. P. 10476–10484. Doi: 10.1109/jsen.2022.3171325.
10. Particle swarm optimization for magnetometer calibration with rotation axis fitting using in-orbit data / B. A. Riwanto, P. Niemela, M. R. Mughal et al. // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2022. Vol. 58, No. 2. P. 1211–1223. Doi: 10.1109/TAES.2021.3122514.
11. Soken H. E. A survey of calibration algorithms for small satellite magnetometers // *Measurement*. 2018. Vol. 122. P. 417–423. Doi: 10.1016/j.measurement.2017.10.017.
12. Song H., Park Ja., Lee Ja. Magnetometer calibration based on the Chaos-7 model // *Journal of Astronomy and Space Science*. 2021. Vol. 38, No. 3. P. 157–164. Doi: 10.5140/jass.2021.38.3.157.
13. Wang Y., Yu X., Zong Q., Xiao Ch., Liu Si., Chen H., Zou H., Shi W. In-flight vector magnetometer calibration for FY-3E satellite // *Science China Technological Sciences*. 2023. Vol. 66, No. 6. P. 1867–1868. Doi: 10.1007/s11431-022-2338-1.
14. Withanage D. Ch., Teramoto M., Cho M. On-orbit magnetometer data calibration using genetic algorithm and interchangeability of the calibration parameters // *Applied Sciences (Switzerland)*. 2023. Vol. 13, No. 11. P. 6742. Doi: 10.3390/app13116742.
15. Attitude-independent magnetometer calibration based on adaptive filtering / W. Zeng, Q. Bian, Ju. Gao et al. // *IEEE Sensors Journal*. 2022. Vol. 22, No. 1. P. 195–202. Doi: 10.1109/jsen.2021.3114347.
16. Калибровка магнитометра космического аппарата «Декарт» в полёте / П. Е. Розин, А. В. Симонов, Е. С. Гордиенко, Ю. К. Зайко // *Труды МАИ*. 2022. № 124. Doi: 10.34759/trd-2022-124-19.
17. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М. : Ленанд, 2021. 672 с.
18. Зоркальцев В. И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. Новосибирск : Наука, 1995. 220 с.
19. Цирлин А. М. Методы оптимизации для инженеров. Москва, Берлин : Директ-Медиа, 2015. 214 с.
20. Horn R. A., Johnson C.R. *Matrix Analysis* (2nd ed.). Cambridge University Press, 2012, 643 p.
21. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Физматлит, 2004. 560 с.

## References

1. Belsten N., Knapp M., Masterson R., Payne C., Ammons K., Lind F.D., Cahoy K. Verification and calibration of a commercial anisotropic magnetoresistive magnetometer by multivariate non-linear regression. *Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems*. 2023, Vol. 12, No. 2, P. 201–213. Doi: 10.5194/gi-12-201-2023.
2. Chen M., Liu K., Hu X., Li Y., Hao X., Pan Z. Ground calibration of the Mars orbiter magnetometer onboard Tianwen-1. *Earth and Planetary Physics*. 2023, Vol. 7, No. 3, P. 371–377. Doi: 10.26464/epp2023004.
3. Cheng S., Wang G., Zhang T., Pan Z., Meng L., Yi Z. An optimal method for in-flight calibration of the fluxgate magnetometer when the total magnetic field of alfvén waves has a drift trend. *Acta Geophysica Sinica*. 2022, Vol. 65, No. 5, P. 1558–1570. Doi: 10.6038/cjg2022P0362.

4. Crassidis J.L., Cheng Ya. Three-axis magnetometer calibration using total least squares. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2021, Vol. 44, No. 8, P. 1410–1424. Doi: 10.2514/1.g005305.
5. Huang Yu., Wu L., Wang Ya., Xu Y. Scalar calibration of total instrument errors of tri-axial magnetometer using constrained optimization independent of magnetic field intensity. *IEEE Sensors Journal*. 2024, Vol. 24, No. 9, P. 14352–14360. Doi: 10.1109/jсен.2024.3370624.
6. Kim Ji.H., Lee Ch.Ju., Lee Ju.K. Effects of outlier elimination in magnetometer calibration data on the performance of ellipsoid fitting-based calibration. *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*. 2024, Vol. 30, No. 12, P. 1373–1379. Doi: 10.5302/j.icros.2024.24.0209.
7. Kinatas H., Hajiyeв Ch. Triad-Aided Multiplicative EKF for Small Satellite Attitude Estimation and Magnetometer Calibration. *IEEE Sensors Journal*. 2023, Vol. 23, No. 22, P. 27161–27168. Doi: 10.1109/jсен.2023.3317969.
8. Liu J., Yan Y., Yan Sh., Li X. A hybrid calibration method for a three-axis magnetometer in limited-range attitudes. *IEEE Sensors Journal*. 2022, Vol. 22, No. 1, P. 203–210. Doi: 10.1109/jсен.2021.3123728.
9. Pang H., Wan Ch., Mou Sh., Wei Lu., Li H., Zhang Qi., Pan M., Yang D. Integrated calibration of strap-down geomagnetic vector measurement system. *IEEE Sensors Journal*. 2022, Vol. 22, No. 11, P. 10476–10484. Doi: 10.1109/jсен.2022.3171325.
10. Riwanto B.A., Niemela P., Mughal M.R., Praks J., Ehrpais H., Slavinskis A. Particle swarm optimization for magnetometer calibration with rotation axis fitting using in-orbit data. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2022, Vol. 58, No. 2, P. 1211–1223. Doi: 10.1109/TAES.2021.3122514.
11. Soken H. E. A survey of calibration algorithms for small satellite magnetometers. *Measurement*. 2018, Vol. 122, P. 417–423. Doi: 10.1016/j.measurement.2017.10.017.
12. Song H., Park Ja., Lee Ja. Magnetometer calibration based on the Chaos-7 model. *Journal of Astronomy and Space Science*. 2021, Vol. 38, No. 3, P. 157–164. Doi: 10.5140/jass.2021.38.3.157.
13. Wang Y., Yu X., Zong Q., Xiao Ch., Liu Si., Chen H., Zou H., Shi W. In-flight vector magnetometer calibration for FY-3E satellite. *Science China Technological Sciences*. 2023, Vol. 66, No. 6, P. 1867–1868. Doi: 10.1007/s11431-022-2338-1.
14. Withanage D. Ch., Teramoto M., Cho M. On-orbit magnetometer data calibration using genetic algorithm and interchangeability of the calibration parameters. *Applied Sciences (Switzerland)*. 2023, Vol. 13, No. 11, P. 6742. Doi: 10.3390/app13116742.
15. Zeng W., Bian Q., Gao Ju., Chang L., Tong Yu. Attitude-independent magnetometer calibration based on adaptive filtering. *IEEE Sensors Journal*. 2022, Vol. 22, No. 1, P. 195–202. Doi: 10.1109/jсен.2021.3114347.
16. Rozin P. E., Simonov A. V., Gordienko E. S., Zaiko Yu. K. [In-Flight Calibration of the “De-kart” Cubesat Magnetometer]. *Trudy MAI*. 2022, No. 124. Doi: 10.34759/trd-2022-124-19 (In Russ.).
17. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional spaces]. Moscow, Lenand Publ., 2021, 672 p.
18. Zorkal'tsev V. I. *Metod naimen'shikh kvadratov: geometricheskie svoystva, al'ternativnye podkhody, prilozheniya* [Least squares: geometric properties, alternative approaches, applications]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1995, 220 p.
19. Tsirlin A. M. *Metody optimizatsii dlya inzhenerov* [Optimization methods for engineers]. Moscow, Berlin: Direkt-Media Publ., 2015, 214 p.
20. Horn R. A., Johnson C.R. *Matrix Analysis* (2nd ed.). Cambridge University Press, 2012, 643 p.
21. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 560 p.

© Кириллов К. А., Кириллова С. В., Мелентьев Д. О.,  
Титов Г. П., Гашин А. А., 2025

**Кириллов Кирилл Анатольевич** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: kkirillow@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0002-3763-1303>.

**Кириллова Светлана Владимировна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и анализа данных; Сибирский федеральный университет. E-mail: svkirillova2009@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0003-3779-2825>.

**Мелентьев Денис Олегович** – аспирант, Сибирский федеральный университет; инженер, АО «РЕШЕТ-НЁВ». E-mail: denes.2000@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0009-6187-4098>.

**Титов Геннадий Павлович** – ведущий специалист; АО «РЕШЕТНЁВ». E-mail: titov@iss-reshetnev.ru. <https://orcid.org/0009-0009-1223-9434>.

**Гашин Артем Александрович** – аспирант кафедры прикладной математики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: artem.gashin@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0000-7062-6285>.

**Kirillov Kirill Anatolievich** – Dr. Sc. (Phys. and Math.), Associate Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: kkirillow@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0002-3763-1303>.

**Kirillova Svetlana Vladimirovna** – Cand. Sc. (Technical Sciences), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Data Analysis; Siberian Federal University. E-mail: svkirillova2009@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0003-3779-2825>.

**Melent'ev Denis Olegovich** – Graduate Student, Siberian Federal University; Engineer, JSC “RESHETNEV”. E-mail: denes.2000@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0009-6187-4098>.

**Titov Gennady Pavlovich** – Leading Specialist; JSC “RESHETNEV”. E-mail: titov@iss-reshetnev.ru. <https://orcid.org/0009-0009-1223-9434>.

**Gashin Artem Alexandrovich** – Graduate student of the Department of Applied Mathematics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: artem.gashin@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0000-7062-6285>.

---

Статья поступила в редакцию 14.01.2025; принята к публикации 04.02.2025; опубликована 11.04.2025  
The article was submitted 14.01.2025; accepted for publication 04.02.2025; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License

УДК 004.942, 519.876.5

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-34-47

---

**Для цитирования:** Лелеков А. Т. Динамическое моделирование технических систем на Python // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 34–47. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-34-47.

**For citation:** Lelekov A. T. [Technical system simulation with Python]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 34–47. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-34-47.

---

## Динамическое моделирование технических систем на Python

А. Т. Лелеков

Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр  
Сибирского отделения Российской академии наук»  
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50  
E-mail: a.t.lelekov@yandex.ru

*Аннотация.* Представлены результаты разработки диспетчера для совместного выполнения имитационных моделей многокомпонентных систем. Программное обеспечение реализовано на Python, что обеспечивает интеграцию множества библиотек для управления и анализа данных. Обмен данными осуществляется через UDP-пакеты, поддерживающие разные языки программирования. Это упрощает реализацию технологии hardware-in-the-loop, улучшая разработку систем управления. Пример использования диспетчера представлен на модели системы ориентации космического аппарата CubeSAT с магнитной системой ориентации. Приведен алгоритм B-Dot и результаты моделирования переходного процесса. Исходный код доступен под лицензией BSD на GitFlic, а документация – на ReadTheDocs.

*Ключевые слова:* система ориентации и стабилизации, магнитная система, CubeSAT, имитационное моделирование, совместное решение.

## Technical system simulation with Python

A. T. Lelekov

Federal Research Center “Krasnoyarsk Science Center of the Siberian Branch  
of the Russian Academy of Sciences”  
50, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation  
E-mail: a.t.lelekov@yandex.ru

*Abstract.* The results of the development of a scheduler for the joint execution of simulation models of multicomponent systems are presented. The software is implemented in Python, which allows integration with numerous libraries for control and data analysis. Data exchange is carried out via UDP packets that support different programming languages. This simplifies the implementation of hardware-in-the-loop technology, improving the development of control systems. An example of using the scheduler is demonstrated on the model of the attitude determination and control system of a CubeSat spacecraft with a magnetic orientation system. The B-Dot algorithm and the results of simulating the transient process are provided. The source code is available under the BSD license on GitFlic, and the documentation is available on ReadTheDocs.

*Keywords:* ADCS, attitude determination and control, CubeSat, magnetic, co-simulation.

## Введение

В рамках реализации проекта «Космическая миссия ReshUCube-3», лаборатория малых космических аппаратов (МКА) Университета Решетнева совместно с лабораторией Космических систем и технологий ФИЦ КНЦ СО РАН разрабатывает систему ориентации для малого спутника формата CubeSat 1U. Он имеет активную магнитную систему ориентации, структура которой показана на рис. 1. Она представляет собой классическую систему с обратной связью.

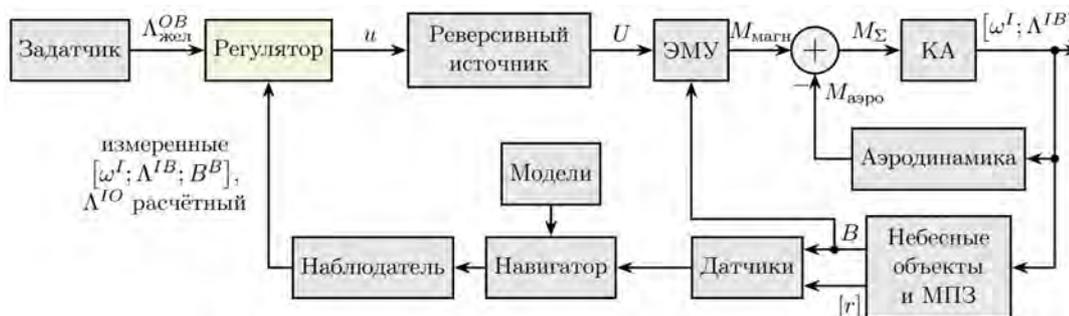


Рис. 1. Структурная схема системы ориентации КА ReshUCube-3

Fig. 1. ADCS of ReshUCube-3 structure

Состояние космического аппарата (КА) описывается угловой скоростью  $\omega^I$  и кватернионом поворота  $\Lambda^{IB}$  связанной системы координат (верхний индекс В, body axes) относительно инерциального пространства (I, inertial). Состояние зависит от приложенного вращательного момента, который складывается из момента от аэродинамических сил  $M_{аэро}$  и магнитного момента  $M_{магн}$ . Управляющим является магнитный момент, который создан взаимодействием магнитных полей электромагнитного устройства (ЭМУ, магнитной катушки) и вектора  $B$  магнитного поля Земли (МПЗ).

Для управления ориентацией используется несколько систем координат – некоторые вектора просто удобнее задавать в своей системе координат. Во-первых, это связанная система координат (body axes, индекс В), оси которой связаны жёстко с аппаратом и поворачиваются вместе с ним. Обычно их располагают по строительным осям КА. Во-вторых, инерциальная система координат (inertial, индекс I), которая привязана к инерциальному пространству, к направлению на звезды. Она не вращается. В-третьих, орбитальная система координат (orbital, индекс O), всегда направленная осью  $z_0$  на центр Земли (по местной вертикали), а ось  $x_0$  направлена по вектору скорости КА. Эта система удобна для определения направления на Землю и учёта аэродинамических сил и моментов. Верхние индексы у вектора или кватерниона обозначают, в какой из систем координат взяты его компоненты.

Регулятор формирует сигнал управления таким образом, чтобы измеренный кватернион поворота  $\Lambda_{изм}^{IB}$  стал равен желаемому кватерниону  $\Lambda_{жсл}^{IB}$ , т. е. чтобы КА встал в заданную ориентацию. По форме это классический для таких задач ПД-регулятор (для Д-канала используется угловая скорость  $\omega_{изм}^I$ ). Отличный обзор современного состояния магнитных систем ориентации приведён в [1].

В приведённой системе управления достаточно сложными являются алгоритм навигации и алгоритм наблюдателя, которые по показаниям датчиков рассчитывают наиболее статистически достоверные значения переменных состояния КА.

В структурной схеме можно выделить группы блоков, которые имеют разную природу. Например, повороты КА, аэродинамические и магнитные моменты имеют физическую природу и действуют непрерывно; регулятор, наблюдатель и навигатор – это алгоритмы, работающие в бортовом вычислителе с некоторой периодичностью. Понятно, что при имитационном моделировании эти группы необходимо рассчитывать разными вычислительными методами, связывая их в единый расчёт, чтобы получить совместное решение.

Такой способ расчёта имеет название co-simulation, суть которого заключается в следующем. Имитационные модели частей системы объединяются со своим расчётным методом (солвером) – в расчётные модули. Модули последовательно, в порядке заданном структурой системы, запускаются на расчёт на некоторый шаг модельного времени. Результаты расчёта передаются в качестве начальных условий для следующих по порядку расчёта модулей. Таким образом, модули оказываются взаимосвязанными, а общее решение – совместным.

**Обзор состояния проблемы**

Хороший и очень детальный обзор современного состояния этой технологии приведён в [2]. Межмодульное взаимодействие обеспечивает оркестратор – некоторый менеджер модулей, задающий модельное время, определяющий очередность запуска модулей на расчёт и обеспечивающий передачу данных между модулями, от выхода к входам последующего.

```

ALGORITHM 3: Generic Jacobi-based orchestrator for autonomous CT co-simulation scenarios.
Data: An autonomous scenario  $cs = \langle \emptyset, Y_{cs}, D = \{1, \dots, n\}, \{S_i\}, L, \emptyset \rangle$ , and a communication step size  $H$ .
Result: A co-simulation trace.
 $t := 0$ ;
 $x_i := x_i(0)$  for  $i = 1, \dots, n$ ;
while true do
    Solve the following system for the unknowns:
        
$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1(t, x_1, u_1) \\ \dots \\ y_n = \lambda_n(t, x_n, u_n) \\ L(y_1, \dots, y_n, y_{cs}, u_1, \dots, u_n) = \bar{0} \end{cases} \tag{15}$$

         $x_i := \delta_i(t, x_i, u_i)$ , for  $i = 1, \dots, n$ ; // Instruct each SU to advance
         $t := t + H$ ; // Advance time
end
    
```

Рис. 2. Алгоритм оркестратора для систем с непрерывным временем [2]

Fig. 2. Orchestrator algorithm for continuous-time systems [2]

На рис. 2 приведён обобщённый алгоритм оркестратора для систем с непрерывным временем. В нём явно выделен цикл по модельному времени, в котором:

1. Рассчитываются выходы моделей с учётом накладываемых ограничений. Здесь решается система нелинейных уравнений, рассчитывающая рабочую точку системы.
2. Рассчитываются переменные состояния моделей на следующий шаг.
3. Делается шаг  $H$  по времени.

Цикл производится до достижения конечного времени.

В приведённом алгоритме  $\lambda(t, x, u)$  – функция расчёта выхода модели  $y$ ;  $x$  и  $u$  – переменные состояния и входы модели;  $\delta$  – функция расчёта переменных состояния системы;  $H$  – величина шага во времени;  $L$  – функционал, задающий ограничения.

Авторы [2] выделяют дискретные, непрерывные и гибридные модели в зависимости от типа взаимодействия моделей во времени. Они отличаются особенностями оркестрирования при совместном расчёте. В обзоре подробно рассмотрены проблемы совместного моделирования, специфичные для каждого типа систем, например, использование накладываемых на решения ограничений, алгебраические циклы, стратегии инициализации моделей в рабочей точке, контроль сходимости и устойчивости решения, точность и валидность связанных моделей.

На практике межмодельное взаимодействие реализуется по-разному. Обычно применяется шаблон передачи сообщений «Издатель – подписчик» [3], в котором сообщение (например, результат расчёта) помещается издателем в канал передачи данных или базу данных, а подписчик выбирает только требующиеся конкретно ему сообщения.

В некоторых реализациях издатель отправляет сообщения посреднику (брокеру). В этом случае подписчики должны регистрировать подписку у брокера, который осуществляет хранение и пересылку сообщений к подписчику. Подписчики могут подписываться на определённые сообщения на этапе написания кода, во время инициализации приложения или выполнения.

Например, хорошо документированный фреймворк HELICS (Hierarchical Engine for Large-scale Infrastructure Co-Simulation) [4] использует брокер, который организует межмодельные связи (предоставляет информацию об интерфейсах моделей), а обмен сообщениями проходит на горизонтальном уровне модель – модель, минуя брокера (рис. 3). Для подписки используются конфигурационные файлы в формате JSON, которые читаются во время инициализации. Кроме этого, в HELICS брокер несёт функцию оркестратора, синхронизируя обмен сообщениями.

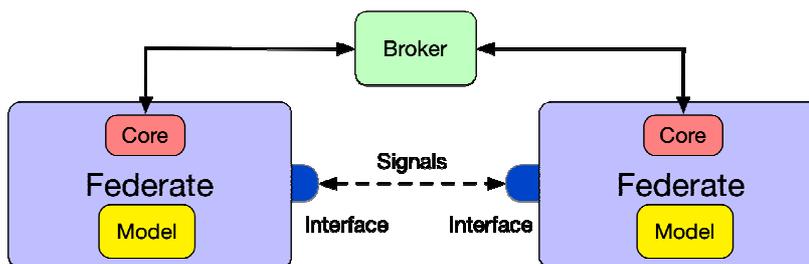


Рис. 3. Базовая архитектура фреймворка HELICS [5]. Здесь Federate – вычислительный модуль с ядром Core (управление моделированием и интерфейс сообщений) и выполняемым кодом модели

Fig. 3. Base architecture of HELICS framework [5]. Here Federate is a computational module containing a core (simulation control and message interface) and executable model code

Архитектура пакета MOSAIC, написанного полностью на Python, включает в себя ядро и набор интерфейсов (рис. 4). Ядро, в котором реализован оркестратор, состоит из двух компонент: планировщика и координатора моделей.

Пользователь пишет сценарий, который задаёт режим моделирования. На основе сценария планировщик определяет параметры моделей, обеспечивает последовательность выполнения и синхронизацию моделей, выполняет функции брокера при обмене данными. Координатор отвечает за связь между моделями, используя интерфейсы для конкретных протоколов межмодельного обмена данными.

В отечественном комплексе имитационного моделирования SimInTech брокер не используется: модель не регистрирует сигналы, а просто забирает их запросами к общей межмодельной базе данных сигналов. Архитектура комплекса приведена на рис. 5.

Комплекс SimInTech – система с компиляцией модели в машинный код, что позволяет выполнять моделирование очень быстро. Для задания собственных алгоритмов управления, содержащих сложные операции обработки сигналов датчиков и расчёта управления, используется встроенный язык программирования. Он представляет собой диалект языка Pascal, адаптированный для задач программирования имитационных моделей, работающих во времени. Например, в нем введены секции кода, выполняющиеся на отдельных этапах моделирования (компиляция, инициализация, финализация), есть возможности для обращения к системным функциям и переменным, а также для работы с базой данных сигналов моделей и ряд др.

Язык достаточно глубоко специализирован и не является полностью совместимым с языком Pascal (например, нет возможности задавать сложные типы переменных и объекты), на него нет сторонних компиляторов и отладчиков.

В последних версиях SimInTech появилась интеграция с языком программирования Python – можно разово (например, при инициализации) выполнить скрипт. Поскольку код Python не является компилируемым, при циклическом выполнении он будет выполняться достаточно долго (запуск интерпретатора, передача скрипта и параметров, выполнение, передача результатов).

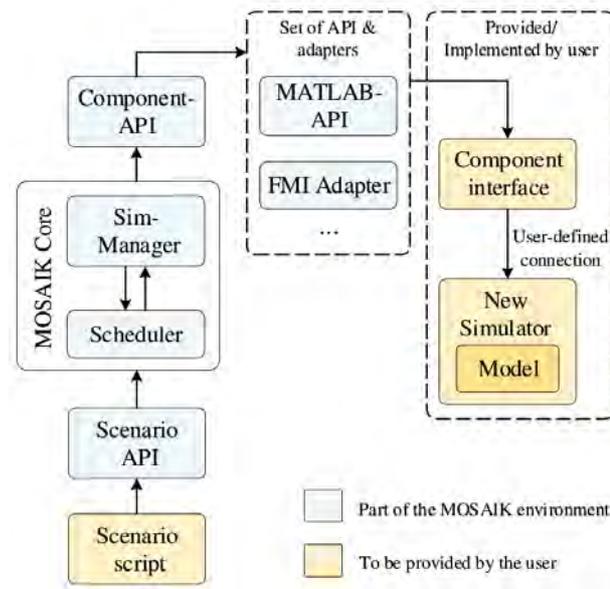


Рис. 4. Архитектура фреймворка MOSAIC [6]

Fig. 4. Architecture of MOSAIC framework [6]

Выполняется он внешним для SimInTech интерпретатором Python, а при таком способе запуска крайне сложно реализовать хранение состояния объектов (это требовалось для алгоритма SGP4, определяющего текущее положение КА [7]).

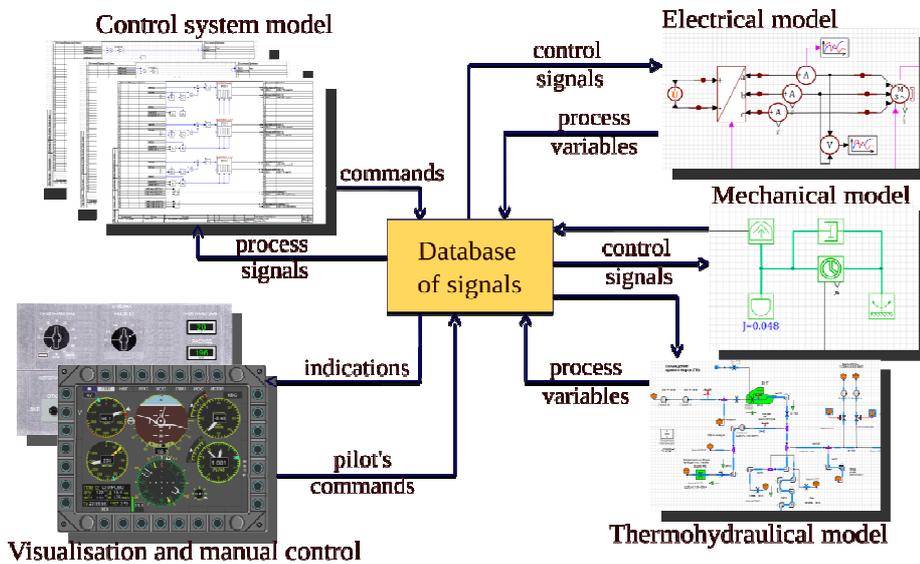


Рис. 5. Архитектура комплекса имитационного моделирования SimInTech [8]

Fig. 5. Architecture of SimInTech dynamic simulation environment [8]

SimInTech позволяет разработать блок с собственными алгоритмами, используя внешние для SimInTech средства (например, в виде динамической библиотеки .dll), но процедура создания описана только для Windows, с использованием среды Delphi. В 2020 г. система SimInTech была успешно портирована на ОС Linux [9], но, к сожалению, до настоящего времени отсутствует описание процедуры создания и подключения блоков в виде динамических .so библиотек. Отладка в среде программирования SimInTech реализована не слишком удобно, хотя все основные инструменты есть (точки останова, просмотр состояния переменных и др.). Статиче-

ский анализатор кода (линтер) не реализован. В результате, ряд особенностей рассмотренного выше ПО не позволил реализовать в ней модель системы ориентации; код получался достаточно громоздким, быстрорастущим и сложным в отладке.

Поэтому было принято решение переписать все алгоритмы и модели на Python, для совместного выполнения которых был написан диспетчер для совместного выполнения моделей, рассчитываемых различными алгоритмами.

Говоря о системах моделирования, реализованных с использованием Python, невозможно не упомянуть отличную и хорошо проработанную систему Basilisk [10], разработанную в центре исследования астродинамики университета Колорадо. Это компилируемая система написана на C++, а код на Python связывается (и компилируется) с системой посредством Software Interface Generator (SWIG). Соответственно, модели исполняются достаточно быстро. Basilisk написан специально для моделирования космических систем и имеет очень хорошую графическую подсистему. Также реализована возможность подключения кода на C++, реализации технологий подключения аппаратуры в контуре управления (hardware-in-the-loop), равно как и программ (software-in-the-loop). Как и все программы, обладающие большим функционалом, хорошо проработанные и имеющие долгую историю, Basilisk достаточно сложен в использовании, но эта сложность вполне себя оправдывает. Честно говоря, если бы на тот момент, когда автор начинал работу над системой ориентации, встретилась бы система Basilisk, то вряд ли была бы начата разработка собственной системы моделирования.

Полностью на Python написана модель системы ориентации, представленная в отчёте [11]. Её особенность заключается в том, что в ней используется упрощённая технология совместного моделирования: формируется общая матрица уравнений, решаемая алгоритмом LSODA для непрерывных систем на шаг по времени; затем выполняются алгоритмы системы ориентации. В системе выделены алгоритмы и уравнения отдельных блоков, каждый из которых обеспечивает формирование своей части системы уравнений.

### Архитектура

На рис. 6 представлена архитектура диспетчера для имитационного моделирования систем управления.

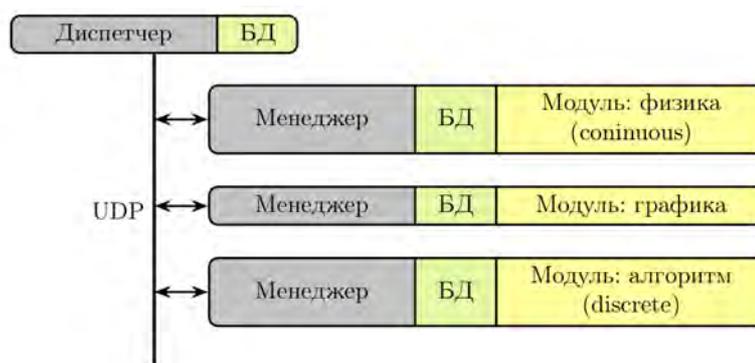


Рис. 6. Архитектура диспетчера имитационного моделирования pySimScheduler [12]

Fig. 6. Architecture of dynamic simulation model manager pySimScheduler [12]

Каждая модель реализуется в виде самостоятельного расчётного модуля. Он запускается в отдельном процессе и содержит как уравнения и алгоритмы модели, так и методы численного расчёта этих алгоритмов. Модуль должен произвести расчёт своих выходных величин на некоторый определенный интервал времени.

Подобно тому, как это реализовано в SimInTech, модуль может находиться в нескольких состояниях (рис. 7). Переход между этими состояниями происходит по командам диспетчера или в ответ на внутренние события модуля.

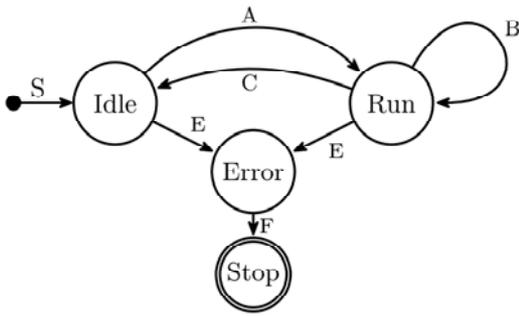


Рис. 7. Машина состояний системы pySimScheduler

Fig. 7. State machine of pySimScheduler model manager

После получения команды на начало моделирования, модуль переходит (A) из состояния ожидания Idle в состояние работы Run; при этом происходит инициализация графики и внутренних переменных модуля (выставляется начальное состояние). После этого диспетчер циклически выдаёт каждому расчётному модулю команду на производство расчётного шага (B), передавая при этом модулю исходные данные (результат расчёта смежных с ним модулей) и забирая результаты расчёта (чтобы передать их последующим модулям). По окончании расчётного времени модуль переходит в состояние ожидания (C), выполняя действия для финализации расчёта (дорисовка графики, закрытие файлов). Если во время расчёта происходит внутренняя ошибка, модуль переходит в состояние ошибки (E) с выдачей сообщения об ошибке диспетчеру, а затем останавливается. При этом по команде диспетчера остальные модули переходят в состояние ожидания.

Обмен данными производится посредством UDP-пакетов, которые содержат требующиеся для конкретного модуля переменные из общей базы данных. Каждый модуль содержит менеджер базы данных. Он производит распаковку/запаковку пакетов и раскладывает данные по внутренним переменным класса модуля. Система сделана на основе [13], где обмен производится с оборудованием стенда, работающим подобно расчётному модулю.

База данных должна содержать собственно базу переменных, которые будут общими между модулями. Также она содержит список модулей с указанием, какие переменные участвуют в обмене (какие передаются, такие и принимаются).

После инициализации модуля в его атрибутах появится объект Manager, который является менеджером базы данных. Именно он создаст (при своей инициализации) в объекте модуля требуемые атрибуты, которые являются полями общей базы данных – они будут синхронизироваться каждый расчётный шаг.

Общая база данных, её поля, состав конкретных переменных для обмена с конкретными модулями задаются в классе-контейнере в виде атрибутов:

Листинг 1. Пример кода базы данных

```

class DataBase():
    # --- общие переменные ---
    t = 0. # модельное время
    dt = 0.25 # расчётный шаг
    tmax = 4. # время моделирования
    cmd = 0 # команда всем модулям

    # --- пользовательские переменные ---
    U = np.array([0.1, 0., 0.]) # управление
    L_B = np.zeros(3) # магнитное поле катушек
    B_I = np.array([0., 1e-5, 0.]) # магнитное поле (I), [T]
    Mm_B = np.zeros(3) # вращательный момент от катушек
    w_B = np.zeros(3) # угловая скорость
    q_IB = quat.Quaternion() # кватернион связанной СК относительно инерциальной
  
```

Модули вызываются в порядке следования в словаре Tasks. Например, в листинге 2 задано три модуля (Rotation, Control и Plot2D), имена которых являются ключами в этом словаре:

Листинг 2. Пример определения параметров вызова модулей

```

Tasks = {
  'Rotation': {'Keys': """"t,cmd,dt,
                U,L_B,B_I,Mm_B,
                w_B,q_IB""""},
  'Control': {'Keys': ['t','cmd','U','B_I','q_IB']},
  'Plot2D': {'Keys': 't,cmd,dt,U,w_B,q_IB',
             'Addr': ('188.162.92.100', 6502),
             'noAnswer': True}

```

Соответствующие ключам значения также являются словарями (dict). Они имеют обязательный ключ Keys, в котором указаны поля базы данных, которыми будет осуществляться обмен с данным модулем по указанному адресу.

Если обмен данными производится с удалённой системой, то необходимо задать сетевой адрес, по которому будут отправляться пакеты с данными. В этом случае добавляется ключ Addr, значение которого должно быть кортежем и иметь вид (ip-адрес, порт).

Можно настроить обмен так, чтобы модуль не возвращал данные, а только принимал их. Это удобно, когда модуль решает вычислительно тяжелые задачи визуализации двумерных и трёхмерных графиков. Чтобы не ожидать ответа, используется флаг noAnswer.

Поскольку для получения совместного решения в каждой из моделей используются ставшие стандартными методы решения дифференциальных и других уравнений, а обмен данными производится совершенно предсказуемо, то и общее решение будет адекватным и точным. Понятно, для устойчивого решения возникает вопрос выбора длины шага обмена переменными. Он рассматривается во многих публикациях (см. обзор [2]), и при разумном подходе к выбору параметров методов решения, совместное решение будет адекватным.

### Написание и выполнение моделей

Код модели выглядит как описание класса на Python, который должен иметь методы с определёнными именами, которые вызываются при переходах между состояниями. В них требуется задать расчётный код модели. Машина состояний (см. рис. 7) и менеджер базы данных реализованы в родительском классе, от которого нужно унаследовать класс с описанием модели. По коду понятно, что нужно переопределить (при необходимости) следующие методы, задав в них требуемую модельную логику:

- Setup – запускается один раз при создании экземпляра класса модели;
- Initialize – выполняется один раз при инициализации модели перед запуском на расчёт;
- Run – расчёт модели. Запускается циклично для каждого интервала времени dt;
- Finalize – выполняется один раз, при завершении расчёта.

На переходах в состояние ошибки (Error) и в останов (Stop) выполняются внутренние служебные методы модуля, в которые пользователю не следует вносить логику модели.

В конце файла с кодом модели нужно создать экземпляр класса и передать управление внутренней машине состояний:

Листинг 3. Пример передачи управления модулю

```

model = Controller(TaskList=db.Tasks, DB=db.DataBase(), isSheduler=False, isRealTime=False)
model.Manager.Loop()

```

Параметрами класса модели указываются:

- TaskList: список модулей Tasks;
- DB: объект общей БД;

– `isScheduler`: флаг, показывающий, содержит ли модуль диспетчер и запускает ли другие модули. Один из модулей должен быть ведущим, запускать все остальные и обеспечивать обмен данными. Он должен иметь флаг `isScheduler=True` и запускаться последним. Удобно сделать ведущим модуль, с кодом которого мы сейчас работаем;

– `isRealTime`: флаг, показывающий, работаем ли в реальном времени (атрибут `t` соответствует реальному времени). Этот режим обычно применяется при обмене данными с реальным оборудованием.

Каждый модуль нужно запустить в отдельном интерпретаторе Python, при этом в консоли отображается состояние модуля. После запуска ведущего модуля система начинает выполнять моделирование – обрабатывает машину состояний. После того, как закончилось время моделирования, ведомые модули переходят в состояние `Idle` и ожидают дальнейших команд. При перезапуске модель использует начальные условия, указанные в базе данных на момент `Setup`; начальные условия можно задать непосредственно в коде модели.

## Применение

Для определения кватерниона поворота космического аппарата относительно инерциального пространства используется алгоритм навигатора.

Пусть в текущем угловом и пространственном положении КА с датчиков получен набор единичных «измеренных» векторов  $b$ , представленный в связанной системе координат. Для малого КА, имеющего ограниченный набор датчиков, это могут быть, например, направление на Солнце, Землю и вектор МПЗ.

Также для текущего пространственного положения КА расчётным образом получены те же вектора – набор «эталонных» (референсных) единичных векторов  $r$ . Они заданы в инерциальной системе отсчёта.

Требуется найти такой поворот, который совместит эталонные вектора с измеренными векторами с наименьшей ошибкой. Этот поворот и будет определять угловое положение связанной системы координат относительно инерциальной.

Расчёт эталонных векторов необходимо проводить на борту. Исходные данные для этого алгоритма – координаты КА в инерциальной системе координат, которые рассчитываются на основе параметров TLE с использованием алгоритма SGP4. Это достаточно сложный алгоритм (рис. 8), предложенный в [14] и транслированный на многие языки программирования. Для определения координат, на КА время от времени (с интервалом примерно в неделю) передаются параметры TLE. Алгоритм SGP4 достаточно ресурсоёмкий, и поэтому точный расчёт производится периодически (сутки), а между его вызовами рассчитывается приближенное, экстраполированное решение.

В имитационной модели системы расчёт эталонных векторов требуется также для моделей датчиков. В этом случае алгоритм моделирует окружающий мир – «реальное» положение Солнца и вектор МПЗ, рассчитывая соответствующий вектора  $r^*$  в инерциальной системе. На основе этих векторов, модель датчиков формирует измеренные вектора  $b$ , добавляя шум и смещение.

Если рассчитывать вектора  $r$  и  $r^*$  одним и тем же алгоритмом, то они будут отличаться только добавленным шумом. Поэтому, для повышения робастности системы, решено было применить разные реализации алгоритмов: в бортовом ПО использовать код C/C++ из [7; 15], а в модели датчиков – библиотеку астродинамики OreKIT [14].

Для связывания кода на C++ с диспетчером, который написан на Python, был разработан упрощенный менеджер. Он реализует аналогичную машину состояний (см. рис. 5), вызывающую нужные процедуры для инициализации (требуется для алгоритма SGP4), расчёта на шаг по времени и финализации модели. Поскольку формат структур на Python и C++ отличается, для работы с UDP-пакетами на стороне модели применена библиотека `cppstruct` [17]. Она позволяет распаковывать и запаковывать UDP-пакеты в формат, принимаемый библиотекой `struct` (пример кода приведён в директории `ex5.1` репозитория [13]). В настоящий момент код менеджера формируется вызовом специального метода диспетчера, в коде будет сформирована C++

структура с именами полей, соответствующих переменным в базе данных. Программист должен самостоятельно задать вызовы нужных процедур, передавая им данные из этой структуры и заполняя её поля после расчёта.

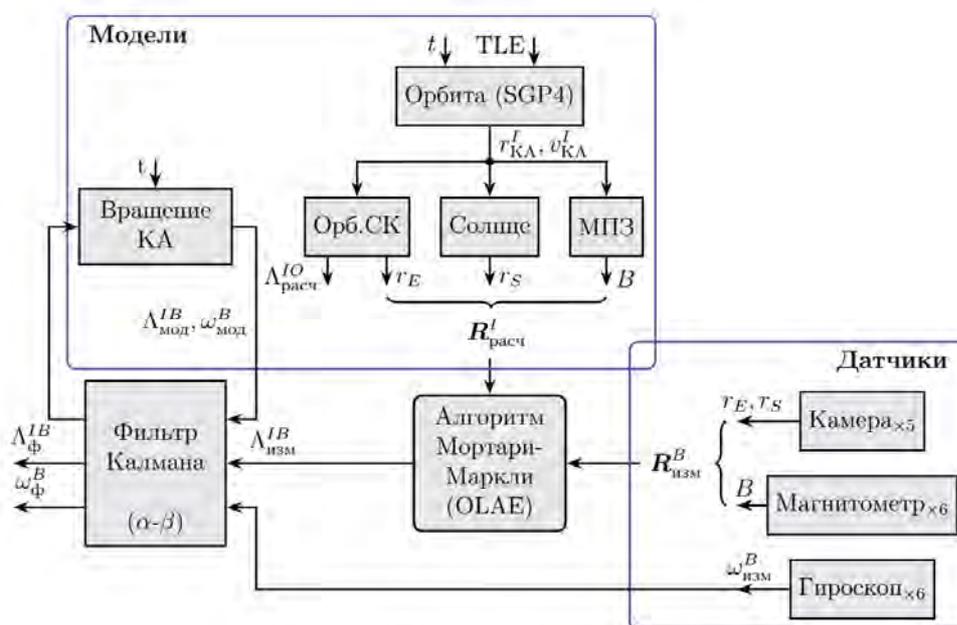


Рис. 8. Структура алгоритма навигатора

Fig. 8. Navigation algorithm structure

### Управление вращательным движением КА

На рис. 9 приведена структурная схема модели вращательного движения. На ней детализированы блоки ЭМУ, КА и Аэродинамика, приведенные на рис. 1.

Управление с учётом обратной связи по аэродинамике является достаточно сложным. Детальное рассмотрение принципа управления в этом случае требует отдельной статьи. Вкратце, предварительно можно отметить, что аэродинамические моменты имеют величину порядка 10 % от моментов, создаваемых магнитной системой ориентации. Поэтому в первом приближении не будем учитывать эту обратную связь.

Вращательное движение твердого тела описывается двумя уравнениями – динамики и кинематики [16]. Первое, уравнение Эйлера, записанное в связанной системе координат (СК) в матричной форме, имеет вид

$$J\dot{\omega}^B + \omega^B \times (J\omega^B) = M^B,$$

выражая из которого производную угловой скорости, имеем

$$\dot{\omega}^B = J^{-1} (M^B - \omega^B \times (J\omega^B)),$$

где  $J$  – тензор момента инерции;  $\omega^B$  – вектор угловой скорости;  $M^B$  – вращающий момент.

Уравнение кинематики вращения, записанное в кватернионной форме, имеет вид

$$\dot{\Lambda}^{IB} = \frac{1}{2} \Lambda^{IB} \circ \omega^B,$$

где  $\Lambda^{IB}$  – кватернион поворота связанной СК относительно инерциального пространства.

Момент, действующий на КА, складывается из аэродинамического и магнитного моментов. Магнитный момент используется для управления движением. Он создётся взаимодействием поля катушек  $L$  и магнитного поля Земли  $B$ . Подобно стрелке магнитного компаса,

система катушек поворачивается до совпадения вектора  $L$  с полем Земли  $B$ . Вращательный момент можно рассчитать как  $M = L \times B$ .

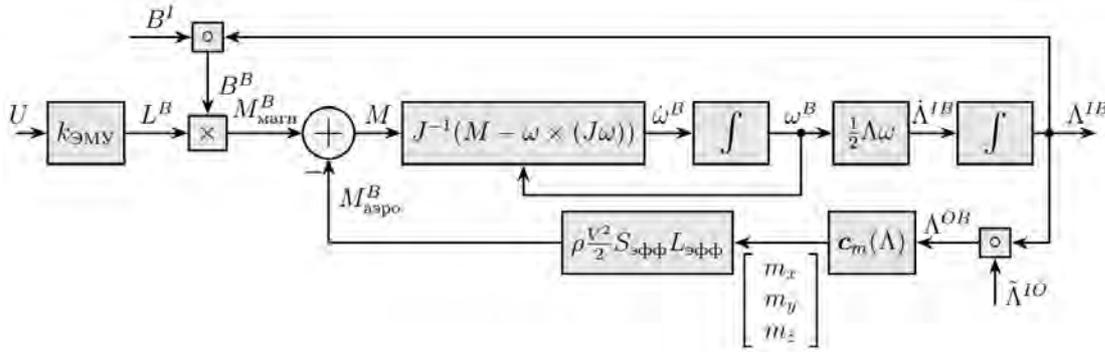


Рис. 9. Модель вращательного движения КА

Fig. 9. Model of satellite rotational movement

Для простоты положим, что главная обратная связь (включающая в себя алгоритмы навигации и наблюдателя) работает идеально, её коэффициент равен единице. Поэтому замкнём нашу систему и рассмотрим самый простой алгоритм, который применяется на всех (за очень редким исключением) низколетящих МКА – алгоритм гашения угловой скорости В-Dot. Он используется на начальном этапе миссии для гашения вращения, которое неизбежно возникает после выталкивания МКА из выпускного контейнера ракеты-носителя.

Классический алгоритм В-dot имеет вид [21]

$$M = -k \frac{\dot{B}}{\|B\|},$$

где  $k$  – коэффициент, скалярный или векторный (для случая, например, большой разницы моментов инерции по осям КА). Выбор коэффициента представляет собой отдельную интересную задачу (см., например, [18]), но даже ручной подбор даёт приемлемое качество управления. Нормализация вектора производной магнитного поля (знаменатель) повышает стабильность коэффициента в контуре управления, хотя шум магнитометра, конечно, остаётся.

В виде кода алгоритм В-dot выглядит так же просто:

Листинг 4. Вариант реализации алгоритма В-dot

```

kBDot = 500
def BDot(self):
    """ алгоритм В-Dot по нормализованному вектору МПЗ """
    dB = self.B_Bn - self.Buf.B_Bn[-1]
    dt = self.t - self.Buf.t[-1]
    return -self.kBDot * dB/dt
    
```

Здесь объект Buf представляет собой буфер, в котором хранятся значения переменных t и B с предыдущих итераций. Они обновляются в основном алгоритме (см. примеры в репозитории проекта на GitFlic [19]).

На рис. 10 приведён переходной процесс для угловой скорости КА – компоненты угловой скорости  $\omega^B$  и вектора измеренного магнитного поля  $B^B$ , в осях связанной системы координат. Видно, как система не может погасить составляющую  $\omega_x$  – она совпала по направлению с вектором, а магнитная система физически не может создать момент вокруг вектора МПЗ.

При вращении наиболее энергоёмка ось КА с наибольшим моментом инерции. При работе алгоритма, когда создаётся противодействующий момент, именно эту составляющую наиболее трудно погасить. Поэтому практически всегда КА разворачивается так, что эта ось становится

коллинеарной вектору магнитного поля  $B$ , что мы и наблюдаем на графиках переходного процесса по компонентам угловой скорости.

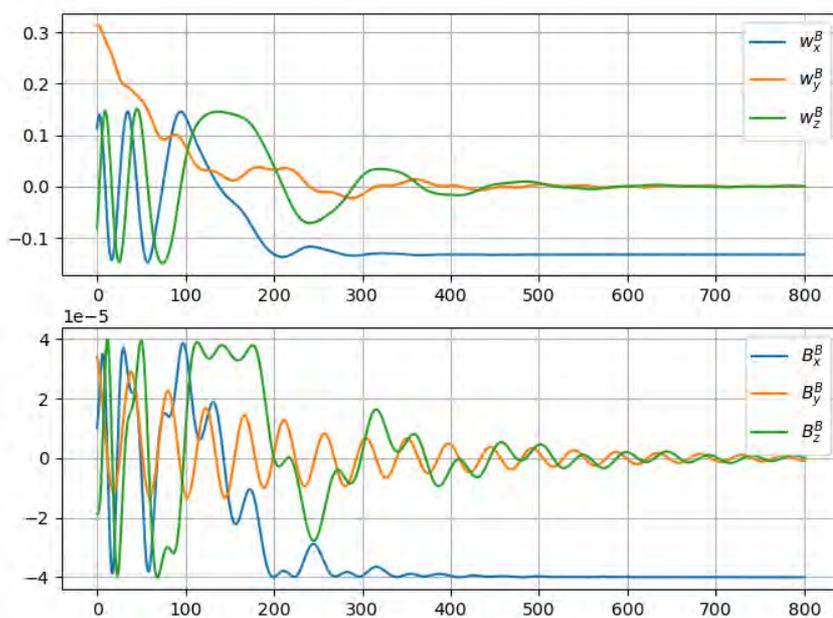


Рис. 10. Переходной процесс при гашении угловой скорости алгоритмом B-Dot

Fig. 10. Transient of B-Dot detumbling algorithm

### Заключение

В работе представлены результаты разработки диспетчера, предназначенного для совместного выполнения имитационных моделей, составляющих многокомпонентную систему. В результате моделирования получается совместное решение переходного процесса, что позволяет проводить комплексные испытания алгоритмов и моделей. Это способствует выявлению ошибок, которые могут быть трудно обнаруживаемы при изолированном тестировании отдельных подсистем.

Особенностью разработанного программного обеспечения является реализация на популярном языке программирования Python, что позволяет бесшовно интегрировать огромное количество библиотек для Python, в том числе для разработки систем управления и анализа данных.

Обмен данными между моделями производится посредством UDP-пакетов, что позволяет использовать для написания моделей не только Python, но и другие языки программирования. По той же причине достаточно просто реализовать технологию hardware-in-loop (соответствующий пример приведён в статье [11]), что позволяет эффективнее проводить разработку систем управления.

Представлен пример применения разработанного менеджера для создания модели системы ориентации небольшого космического аппарата формата CubeSAT, имеющего магнитную систему ориентации; приведён пример реализации алгоритма B-Dot и результаты моделирования переходного процесса.

Разработанная система используется для имитационного моделирования и разработки системы ориентации аппаратов проекта «Космическая миссия ReshUCube-3».

Приведены ссылки на исходный код системы (BSD License), который выложен в открытом доступе на GitFlic [21], документация выложена на платформе ReadTheDocs [10].

### Библиографические ссылки

1. Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S. A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites // Progress in Aerospace Sciences. 2019. Vol. 109. P. 100546.
2. Co-Simulation: A Survey / Gomes Cláudio, Thule Casper, Broman David, Larsen Peter Gorm, Vangheluwe Hans // ACM Computing Surveys. 2018. Vol. 51, No. 3. P. 1–33.11.

3. Hohpe G., Woolf B. Enterprise Integration Patterns Designing, Building, and Deploying Messaging Solutions. Pearson Education, Limited, 2012. P. 736.
4. HELICS: A Co-Simulation Framework for Scalable Multi-Domain Modeling and Analysis / Hardy Trevor D., Palmintier Bryan, Top Philip L., Krishnamurthy Dheepak, Fuller Jason C. // IEEE Access. 2024. Vol. 12. P. 24325–24347.
5. HELICS User Guide. [Электронный ресурс]. URL: [https://docs.helics.org/en/main/user-guide/fundamental\\_topics/helics\\_terminology.html](https://docs.helics.org/en/main/user-guide/fundamental_topics/helics_terminology.html) (дата обращения: 10.01.2025).
6. MOSAIK and FMI-Based Co-Simulation Applied to Transient Stability Analysis of Grid-Forming Converter Modulated Wind Power Plants / Farrokhseresht Nakisa, van der Meer Arjen A., Rueda Torres José, van der Meijden Mart A. M. M. // Applied Sciences. 2021. Vol. 11, No. 5. P. 2410.
7. Vallado David A. Fundamentals of astrodynamics and applications / ed. by McClain Wayne D. Space technology library no. 21. 3. ed., 1. printing ed. Hawthorne, Calif. u.a.: Microcosm Press u.a., 2007. 1055 p.
8. Справочная система SimInTech [Электронный ресурс]. URL: <https://help.simintech.ru>. (дата обращения: 10.01.2025).
9. Тимофеев К. А. Особенности портирования сложного модульного ПО написанного на Delphi под ОС Linux. [Электронный ресурс]. URL: <https://habr.com/ru/articles/534466/> (дата обращения: 10.01.2025).
10. Kenneally P., Piggott S., Schaub H. Basilisk: A Flexible, Scalable and Modular Astrodynamics Simulation Framework // Journal of Aerospace Information Systems. 2020. Vol. 17, No. 9. P. 496–5072020-09.
11. Martin G. Technical Report of ASE 372K Project. The University of Texas at Austin, USA, 2018. [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/gavinmartin/adcs-simulation> (дата обращения: 10.01.2025).
12. Документация к пакету pySimSheduler [Электронный ресурс]. URL: <https://pysimscheduler.readthedocs.io/> (дата обращения: 10.01.2025).
13. Lelekov A. T., Kureshov V. A. Remote Laboratory for the Design of Attitude Control Systems for Small Satellites // Instruments and Experimental Techniques. 2022. Vol. 65, No. 5. P. 858–863.
14. Revisiting Spacetrack Report #3 / Vallado David A., Crawford Paul, Hujsak Richard, Kelso T. S. // AIAA Astrodynamics Specialists Conference and Exhibit. August 2006.
15. Meeus Jean. Astronomical formulae for calculators. // 4. ed. enlarged rev. ed. Richmond, Va. : Willmann-Bell, 1988. 218 p.
16. Maisonobe L., Pommier V., Parraud P. Orekit: an Open-source Library for Operational Flight Dynamics Applications // Presented at the 4th ICATT International Conference on Astro-dynamics Tools and Techniques. Madrid, Spain. 2010.
17. Cppustruct source code [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/karkason/cppustruct> (дата обращения: 10.01.2025).
18. Spacecraft Dynamics and Control: The Embedded Model Control Approach / Canuto Enrico, Novara Carlo, Massotti Luca, Carlucci Donato, Montenegro Carlos Perez. Elsevier, 2018.
19. Desouky Mohammed A. A., Abdelkhalik Ossama. A new variant of the B-dot control for spacecraft magnetic detumbling // Acta Astronautica. 2020. Vol. 171. P. 14–22.
20. Avanzini Giulio, Giulietti Fabrizio. Magnetic Detumbling of a Rigid Spacecraft // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35, No. 4. P. 1326–1334.
21. PySimSheduler source code [Электронный ресурс]. URL: <https://gitflic.ru/project/alexlelekov/pysimscheduler> (дата обращения: 10.01.2025).

## References

1. Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S. A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites. *Progress in Aerospace Sciences*. 2019, Vol. 109, P. 100546.
2. Gomes Cláudio, Thule Casper, Broman David, Larsen Peter Gorm, Vangheluwe Hans. Co-Simulation: A Survey. *ACM Computing Surveys*. 2018, Vol. 51, No. 3, P. 1–33.11.
3. Hohpe Gregor, Woolf Bobby. Enterprise Integration Patterns Designing, Building, and Deploying Messaging Solutions. Pearson Education, Limited, 2012. P. 736.

4. Hardy Trevor D., Palmintier Bryan, Top Philip L., Krishnamurthy Dheepak, Fuller Jason C. HELICS: A Co-Simulation Framework for Scalable Multi-Domain Modeling and Analysis. *IEEE Access*. 2024, Vol. 12, P. 24325–24347.
5. HELICS User Guide. Available at: [https://docs.helics.org/en/main/user-guide/fundamental\\_topics/helics\\_terminology.html](https://docs.helics.org/en/main/user-guide/fundamental_topics/helics_terminology.html) (accessed: 10.01.2025).
6. Farrokhseresht Nakisa, van der Meer Arjen A., Rueda Torres José, and van der Meijden Mart A. M. M. MOSAIK and FMI-Based Co-Simulation Applied to Transient Stability Analysis of Grid-Forming Converter Modulated Wind Power Plants. *Applied Sciences*. 2021, Vol. 11, No. 5, P. 2410.
7. Vallado David A. Fundamentals of astrodynamics and applications. Ed. by McClain Wayne D. Space technology library No. 21. 3. ed., 1. printing ed. Hawthorne, Calif. u.a. : Microcosm Press u.a., 2007. 1055 p.
8. Справочная система SimInTech. Available at: <https://help.simintech.ru> (accessed: 10.01.2025).
9. Тимофеев К. А. Особенности портирования сложного модульного ПО написанного на Delphi под ОС Linux. Available at: <https://habr.com/ru/articles/534466/> (accessed: 10.01.2025).
10. Kenneally P., Piggott S., Schaub H. Basilisk: A Flexible, Scalable and Modular Astrodynamics Simulation Framework. *Journal of Aerospace Information Systems*. 2020, Vol. 17, No. 9, P. 496-5072020-09.
11. Martin G. Technical Report of ASE 372K Project. The University of Texas at Austin, USA, 2018. Available at: <https://github.com/gavincmartin/adcs-simulation> (accessed: 10.01.2025).
12. PySimScheduler documentation. Available at: <https://pysimscheduler.readthedocs.io/> (accessed: 10.01.2025).
13. Lelekov A. T., Kureshov V. A. Remote Laboratory for the Design of Attitude Control Systems for Small Satellites. *Instruments and Experimental Techniques*. 2022, Vol. 65, No. 5, P. 858–863.
14. Vallado David A., Crawford Paul, Hujsak Richard, Kelso T. S. Revisiting Spacetrack Report #3. *AIAA Astrodynamics Specialists Conference and Exhibit*. August 2006.
15. Meeus Jean. Astronomical formulae for calculators. 4 ed. enlarged rev. ed. Richmond, Va. : Willmann-Bell, 1988. 218 p.
16. Maisonobe L., Pommier V., Parraud P. Orekit: an Open-source Library for OperationalFlight Dynamics Applications. Presented at the 4th ICATT International Conference on Astro-dynamics Tools and Techniques, Madrid, Spain. 2010.
17. Cppystruct source code. Available at: <https://github.com/karkason/cppstruct> (accessed: 10.01.2025).
18. Canuto Enrico, Novara Carlo, Massotti Luca, Carlucci Donato, Montenegro Carlos Perez. *Spacecraft Dynamics and Control: The Embedded Model Control Approach*. Elsevier, 2018.
19. Desouky Mohammed A. A., Abdelkhalik Ossama. A new variant of the B-dot control for spacecraft magnetic detumbling. *Acta Astronautica*. 2020, Vol. 171, P. 14–22.
20. Avanzini Giulio, Giulietti Fabrizio. Magnetic Detumbling of a Rigid Spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2012, Vol. 35, No. 4, P. 1326–1334.
21. PySimScheduler source code. Available at: <https://gitflirc.ru/project/alexlelekov/pysimsheduler> (accessed: 10.1.2025).

© Лелеков А. Т., 2025

---

**Лелеков Александр Тимофеевич** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник; Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук». E-mail: [a.t.lelekov@yandex.ru](mailto:a.t.lelekov@yandex.ru). <https://orcid.org/0000-0003-1160-8997>.

**Lelekov Alexander Timofeevich** – Cand. Sc., senior researcher; Federal Research Center “Krasnoyarsk Science Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences”. E-mail: [a.t.lelekov@yandex.ru](mailto:a.t.lelekov@yandex.ru). <https://orcid.org/0000-0003-1160-8997>.

---

Статья поступила в редакцию 03.02.2025; принята к публикации 03.03.2025; опубликована 11.04.2025  
The article was submitted 03.02.2025; accepted for publication 03.03.2025; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License

УДК 519.7 + 004.93

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-48-59

**Для цитирования:** Шаруева А. В. Непараметрическая методика проверки гипотезы о независимости случайных величин и ее применение при анализе данных дистанционного зондирования // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 48–59. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-48-59.

**For citation:** Sharueva A. V. [Nonparametric method for testing the hypothesis of independence of random variables and its application in the analysis of remote sensing data]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 48–59. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-48-59.

## **Непараметрическая методика проверки гипотезы о независимости случайных величин и ее применение при анализе данных дистанционного зондирования**

А. В. Шаруева

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31  
E-mail: anna-denisuyuk@yandex.ru

*Аннотация. Проверка гипотезы о независимости случайных величин является одним из основных этапов системного анализа статистических данных. На её результатах осуществляется синтез эффективных алгоритмов принятия решений. Традиционная методика проверки гипотезы о независимости случайных величин основана на использовании критерия Пирсона и содержит трудно формализуемый этап разбиения области значений случайных величин на многомерные интервалы. Предложена методика проверки гипотезы о независимости случайных величин, которая использует непараметрический алгоритм распознавания образов, соответствующий критерию максимального правдоподобия. Её применение позволяет обойти проблему декомпозиции области значений случайных величин на интервалы. Идея подхода состоит в формировании по исходным статистическим данным обучающей выборки для решения двухальтернативной задачи распознавания образов. Каждый класс определяется в предположении независимости либо зависимости случайных величин, что проявляется в различии их законов распределения в классах. В этих условиях появляется возможность замены исходной гипотезы на задачу проверки достоверности отличия вероятностей ошибок распознавания образов в классах. С использованием аппарата теории графов предлагаемая методика развита при формировании наборов независимых случайных величин. Полученные результаты обобщены при проверке гипотезы о независимости случайных величин для больших объёмов статистических данных на основе сжатия исходной информации. Это позволяет на порядки повысить вычислительную эффективность решаемой задачи. В статье обосновывается методика проверки гипотезы о независимости случайных величин, основанная на использовании непараметрического алгоритма распознавания образов в условиях больших объёмов статистических данных. Приводятся результаты сравнения методики с общепризнанным критерием согласия Пирсона при исследовании неоднозначных зависимостей между случайными величинами различной сложности. Эффективность предлагаемой методики подтверждается результатами применения при обработке информации дистанционного зондирования антропогенных территорий в окрестности города Красноярска.*

*Ключевые слова:* проверка гипотезы о независимости случайных величин, ядерная оценка плотности вероятности, регрессионная оценка плотности вероятности, распознавание образов, критерий Пирсона, дистанционное зондирование.

# Nonparametric method for testing the hypothesis of independence of random variables and its application in the analysis of remote sensing data

A. V. Sharueva

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation  
E-mail: anna-denisyuk@yandex.ru

*Abstract.* Testing the hypothesis of independence of random variables is one of the main stages of system analysis of statistical data. Based on its results, a synthesis of effective decision-making algorithms is carried out. The traditional method of testing the hypothesis of independence of random variables is based on the use of the Pearson criterion, which contains a difficult to formalize stage of dividing the range of values of random variables into multidimensional intervals. A method for testing the hypothesis of independence of random variables is proposed, which uses a nonparametric pattern recognition algorithm corresponding to the maximum likelihood criterion. Its application makes it possible to circumvent the problem of decomposing the range of values of random variables into intervals. The idea of the approach is to form a training sample based on the initial statistical data to solve a two-alternative pattern recognition problem. Each class is defined under the assumption of independence or dependence of random variables, which is manifested in the difference in their distribution laws in the classes. Under these conditions, it becomes possible to replace the initial hypothesis with the task of checking the reliability of the difference in the probabilities of pattern recognition errors in classes. Using the apparatus of graph theory, the proposed method is developed in the formation of sets of independent random variables. The obtained results are generalized when testing the hypothesis of independence of random variables for large volumes of statistical data based on compression of the original information. This allows to increase the computational efficiency of the problem being solved. The article substantiates a method for testing the hypothesis of independence of random variables, based on the use of a nonparametric pattern recognition algorithm in conditions of large volumes of statistical data. The results of comparing the technique with the generally recognized Pearson consensus criterion in the study of ambiguous dependencies between random variables of varying complexity are presented. The effectiveness of the proposed method is confirmed by the results of its application in processing remote sensing information from anthropogenic territories in the vicinity of the city of Krasnoyarsk.

*Keywords:* testing the hypothesis of independence of random variables, kernel probability density estimation, regression probability density estimation, pattern recognition, Pearson criterion, remote sensing.

## Введение

Универсальным и общепризнанным критерием проверки гипотез о распределениях случайных величин, включая их независимость, является критерий Пирсона [1]. При его использовании необходимо решать задачи разбиения области значений случайных величин на многомерные интервалы и устанавливать закон распределения критерия, определяющего зависимости между вероятностными характеристиками случайных величин. В работах [2–4] предложен новый подход, позволяющий упростить проверку гипотезы о независимости случайных величин с применением непараметрического алгоритма распознавания образов ядерного типа, соответствующего критерию максимального правдоподобия. Идея подхода состоит в решении двухальтернативной задачи распознавания образов. Рассматриваемые классы определяются предположениями о зависимости и независимости случайных величин. На этой основе формируется обучающая выборка по исходным статистическим данным о наблюдениях случайных величин и решается задача распознавания образов. Соотношение между оценками вероятностей ошибок распознавания введённых классов подтверждает либо опровергает рассматриваемую гипотезу.

Цель данной работы состоит в обобщении и развитии непараметрического метода проверки гипотезы о независимости случайных величин для условий большого объёма статистических данных и его применении при анализе информации о дистанционном зондировании антропогенных территорий.

### Методика проверки гипотезы о независимости случайных величин

Пусть имеется выборка  $V = (x^i, i = \overline{1, n})$  объёма  $n$ , составленная из независимых наблюдений двумерной случайной величины  $x = (x_1, x_2)$ . Предположим, что выборка  $V$  извлекается из генеральных совокупностей, характеризующихся плотностями вероятностей  $p(x_1) p(x_2)$  или  $p(x_1, x_2)$ . Необходимо по статистическим данным  $V$  проверить гипотезу

$$H_0: p(x_1, x_2) \equiv p(x_1) p(x_2)$$

о независимости случайных величин  $x_1, x_2$ .

Для проверки гипотезы  $H_0$  будем решать двухальтернативную задачу распознавания образов. Под классами  $\Omega_1, \Omega_2$  понимаются области определения плотностей вероятностей  $p(x_1) p(x_2), p(x_1, x_2)$ . В этих условиях байесовское решающее правило, соответствующее критерию максимального правдоподобия, имеет вид

$$m(x): \begin{cases} x \in \Omega_1, \text{ если } p(x_1, x_2) < p(x_1) p(x_2), \\ x \in \Omega_2, \text{ если } p(x_1, x_2) > p(x_1) p(x_2). \end{cases}$$

В отличие от традиционной постановки задачи распознавания образов при синтезе решающего правила  $m(x)$  априори отсутствует обучающая выборка, содержащая сведения о принадлежности элементов выборки  $V$  к тому или иному классу. Эти сведения должны обнаруживаться в процессе реализации методики проверки гипотезы  $H_0$ , которая основана на выполнении следующих действий.

По выборке  $V$  восстановить плотности вероятностей  $p(x_1, x_2), p(x_1) p(x_2)$ , используя их непараметрические оценки типа Розенблатта – Парзена [5; 6],

$$\begin{aligned} \bar{p}(x_1, x_2) &= \frac{1}{n c_1 c_2} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x_1 - x_1^i}{c_1}\right) \Phi\left(\frac{x_2 - x_2^i}{c_2}\right), \\ \bar{p}(x_1) \bar{p}(x_2) &= \frac{1}{n^2 c_1 c_2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi\left(\frac{x_1 - x_1^i}{c_1}\right) \Phi\left(\frac{x_2 - x_2^j}{c_2}\right). \end{aligned}$$

В статистиках  $\bar{p}(x_1, x_2), \bar{p}(x_1) \bar{p}(x_2)$  ядерные функции  $\Phi(u_v)$  удовлетворяют условиям положительности, симметричности и нормированности.

Значения коэффициентов размытости  $c_v, v = 1, 2$  ядерных функций убывают с ростом объёма  $n$  выборки статистических данных  $V$ . Тогда непараметрическое решающее правило классификации случайных величин  $x = (x_1, x_2)$  запишется как

$$\bar{m}(x): \begin{cases} x \in \Omega_1, \text{ если } \bar{p}(x_1, x_2) < \bar{p}(x_1) \bar{p}(x_2), \\ x \in \Omega_2, \text{ если } \bar{p}(x_1, x_2) > \bar{p}(x_1) \bar{p}(x_2). \end{cases}$$

Оптимальные коэффициенты размытости ядерных функций решающего правила  $\bar{m}(x)$  выбираются на основе анализа аппроксимационных свойств непараметрических оценок плотно-

стей вероятностей  $\bar{p}(x_1, x_2)$ ,  $\bar{p}(x_1)$ ,  $\bar{p}(x_2)$  из условия минимума, соответствующих им оценок среднеквадратических отклонений от  $p(x_1, x_2)$ ,  $p(x_1)$ ,  $p(x_2)$ . Например, для  $\bar{p}(x_1)$  подобным критерием является [7–11]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}^2(x_1) dx_1 - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \bar{p}(x_1^j).$$

Определим оценки вероятностей ошибок распознавания образов  $\bar{\rho}_1(\bar{c}(1))$ ,  $\bar{\rho}_2(\bar{c}(2))$  решающим правилом  $\bar{m}(x)$  по исходным статистическим данным  $V$  при оптимальных коэффициентах размытости  $\bar{c}(1) = (\bar{c}_1(1), \bar{c}_2(1))$ ,  $\bar{c}(2) = (\bar{c}_1(2), \bar{c}_2(2))$  ядерных функций статистик  $\bar{p}(x_1) \bar{p}(x_2)$ ,  $\bar{p}(x_1, x_2)$  соответственно.

Значения  $\bar{\rho}_t(\bar{c}(1), \bar{c}(2))$  вычисляются в режиме «скользящего экзамена» по выборке  $V$  в предположении, что её элементы принадлежат классу  $\Omega_t$ ,

$$\bar{\rho}_t(\bar{c}(1), \bar{c}(2)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1(\delta(j), \bar{\delta}(j)), \quad t=1, 2,$$

где  $\delta(j) = t$  – указания типа  $x^j = (x_1^j, x_2^j) \in \Omega_t$ ;

$$\bar{\delta}(j) = \begin{cases} t, & \text{если } x^j \in \Omega_t \\ 0, & \text{если } x^j \notin \Omega_t \end{cases}$$

– «решение» алгоритма  $\bar{m}(x)$  о принадлежности ситуации  $x^j$  к одному из классов  $\Omega_t$ ,  $t=1, 2$ .

При вычислении  $\bar{\rho}_t(\bar{c}(1), \bar{c}(2))$  в соответствии с методикой «скользящего экзамена» ситуация  $x^j = (x_1^j, x_2^j)$  из выборки  $V$ , которая подаётся на контроль в алгоритм  $\bar{m}(x)$ , исключается из процесса формирования статистик  $\bar{p}(x_1, x_2)$ ,  $\bar{p}(x_1) \bar{p}(x_2)$ .

Индикаторная функция определяется выражением

$$1(\delta(j), \bar{\delta}(j)) = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta(j) = \bar{\delta}(j), \\ 1, & \text{если } \delta(j) \neq \bar{\delta}(j). \end{cases}$$

Обозначим через  $\bar{\rho}_t$  значение оценки вероятности ошибки распознавания образов в предположении, что элементы выборки  $V$  принадлежат классу  $\Omega_t$ ,  $t=1, 2$ . Сравним значения  $\bar{\rho}_1$ ,  $\bar{\rho}_2$ .

Тогда гипотеза  $H_0$  справедлива, если  $\bar{\rho}_1 < \bar{\rho}_2$ . В противном случае при  $\bar{\rho}_2 < \bar{\rho}_1$  случайные величины  $x_1$  и  $x_2$  являются зависимыми.

При ограниченном объёме  $n$  выборки  $V$  возникает задача доверительного оценивания вероятностей ошибок распознавания образов. Для её решения используется традиционная методика доверительного оценивания вероятностей либо критерий Колмогорова – Смирнова.

Например, при использовании критерия Колмогорова – Смирнова отклонение  $\bar{D}_{12} = |\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|$  сравнивается с пороговым значением [12]

$$D_\beta = \sqrt{-\ln\left(\frac{\beta}{2}\right)/n}.$$

Здесь  $\beta$  – вероятность (риск) отвергнуть гипотезу  $\bar{H}_0: \rho_1 = \rho_2$ . Если выполняется соотношение  $\bar{D}_{12} < D_\beta$ , то гипотеза  $\bar{H}_0$  справедлива и риск её отвергнуть не превышает значения  $\beta$ . При  $\bar{D}_{12} > D_\beta$  гипотеза  $\bar{H}_0$  отвергается.

### Формирование наборов независимых случайных величин

Имеется выборка наблюдений  $V = (x_v^i, v = \overline{1, k}, i = \overline{1, n})$  объёма  $n$ , составленная из статистически независимых наблюдений компонент многомерной случайной величины  $x = (x_v, v = \overline{1, k})$ . Вид плотности вероятности  $p(x)$  априори неизвестен. Необходимо по статистическим данным  $V$ , используя предложенный выше критерий проверки гипотез [13–16]

$$H_{vj}: p(x_v, x_j) \equiv p(x_v) p(x_j)$$

для компонент  $x_v, v = \overline{1, k}, x_j, j = \overline{1, k}, v > j$ , сформировать наборы независимых случайных величин  $x(t) = (x_v, v \in I_t), t = \overline{1, m}$ . Количество  $m$  наборов компонент случайной величины  $x$  неизвестно, а  $I_t$  – множество номеров компонент, составляющих набор  $x(t)$ .

Предлагаемая методика основана на выполнении следующих действий:

1. В соответствии с приведёнными выше рекомендациями проверить гипотезы  $H_{vj}$  для каждой пары компонент  $(x_v, x_j)$  многомерной случайной величины  $x = (x_v, v = \overline{1, k})$ . Количество таких пар соответствует значению  $k(k-1)/2$ .

2. По результатам этапа 1 построить информационный граф  $G(X, A)$ , где  $X$  – множество его вершин, соответствующих компонентам случайной величины  $x$ , а  $A$  – множество ребер. Между двумя вершинами  $x_v, x_j$  имеется ребро, если выполняется гипотеза  $H_{vj}$ , т. е. компоненты  $x_v, x_j$  являются независимыми.

3. Провести анализ информационного графа  $G(X, A)$  и определить его полные подграфы  $G(X_t, A_t), t = \overline{1, m}$ . Каждая пара вершин подграфа  $G(X_t, A_t)$  имеет ребро, если компоненты случайной величины  $x$  являются независимыми. Обнаружить полные подграфы с использованием алгоритмов разрезания исходного графа, которые основаны на анализе его матрицы смежности. Компоненты  $x_v, v \in I_t$ , соответствующие вершинам полного подграфа  $G(X_t, A_t)$ , образуют набор независимых случайных величин.

### Модификация методики проверки гипотезы о независимости случайных величин в условиях больших объёмов статистических данных

При больших объёмах  $n$  статистических данных  $V = (x_1^i, x_2^i, i = \overline{1, n})$  в предложенной методике используются регрессионные оценки плотностей вероятностей  $\bar{p}(x_1, x_2), \bar{p}(x_1), \bar{p}(x_2)$ . Эти оценки основаны на сжатии исходной информации, например,  $V_1 = (x_1^i, i = \overline{1, n})$  в массив данных  $\bar{V}_1 = (\bar{p}_1^j, z^j, j = \overline{1, N})$  путём декомпозиции области значений  $x_1$  на  $N$  интервалов. Здесь  $z^j$  – центры интервалов дискретизации значений  $x_1$ , а  $\bar{p}_1^j = \bar{P}_1^j / \Delta$  – оценка плотности вероятности в  $j$ -м интервале;  $\Delta$  – длина интервала дискретизации;  $\bar{P}_1^j$  – частота встречаемости значений  $x_1^i$  из выборки  $V_1$  в интервале под номером  $j$ . Тогда регрессионная оценка плотности вероятности  $p(x_1)$  по данным  $\bar{V}_1$  имеет вид [17; 18]

$$\bar{p}(x_1) = \frac{1}{c_1} \sum_{j=1}^N \bar{P}_1^j \Phi\left(\frac{x_1 - z^j}{c_1}\right).$$

Предлагаемый подход позволяет на порядки сократить объём  $n$  исходной статистической информации при оценивании плотностей вероятностей. Особенность статистики типа  $\bar{p}(x_1)$  позволяет значительно упростить выбор коэффициентов размытости  $c$  ядерных функций в статистике  $\bar{p}(x_1)$  из условия минимума критерия

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{p}_1^i - \bar{p}(x_1^i)).$$

По аналогии осуществляется оценивание плотностей вероятностей  $p(x_2)$ ,  $p(x_1, x_2)$ . Регрессионные оценки плотностей вероятностей используются при проверке гипотезы о независимости случайных величин в соответствии с предложенной методикой.

### Анализ результатов вычислительного эксперимента

Проведено сравнение эффективности предлагаемой методики проверки гипотезы о независимости двумерных случайных величин и критерия Пирсона в условиях неоднозначных зависимостей при различных объёмах статистических данных [19–21]. Датчики случайных величин  $x_1$ ,  $x_2$  формировались на основе равномерного закона распределения  $x_1$ , который использовался при вычислении значений  $x_2$  в виде нелинейных преобразований  $x_1$ . При этом на значения  $x_2$  накладывались помехи с нормальным законом распределения, который имеет нулевое математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$ . Пример значений случайных величин  $x_1$  и  $x_2$  приведён на рис. 1.

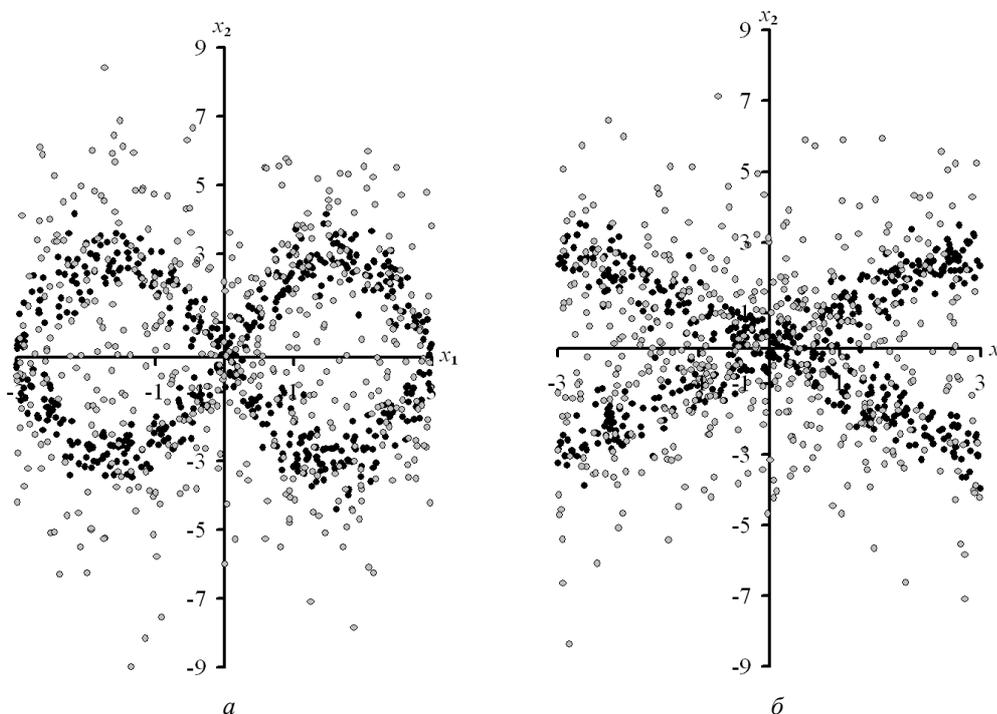


Рис. 1. Значения случайных величин  $x_1$ ,  $x_2$  из выборки исходных статистических данных  $V$  при  $n = 500$  и  $\sigma = 0,5$  (темные точки), а при  $\sigma = 2$  (серые точки) при использовании зависимостей различной сложности

Fig. 1. Values  $x_1$ ,  $x_2$  of random variables from a sample of initial statistical data  $V$  at  $n = 500$  and  $\sigma = 0.5$  (dark dots), and at  $\sigma = 2$  (gray dots) when using dependencies of varying complexity

При проверке гипотезы о независимости компонент двухмерной случайной величины на основе критерия Пирсона используются результаты оптимального выбора количества интервалов дискретизации [22–24]

$$N^* = \left( \frac{3}{4} \Delta_1 \Delta_2 \|p(x_1, x_2)\|^2 n \right)^{1/2}.$$

Значение  $\|p(x_1, x_2)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ , а  $\Delta_v$  – длина интервала значений случайной величины  $x_v$ ,  $v = 1, 2$ . Традиционным формулам дискретизации области значений случайных величин посвящены работы [25–27].

По результатам вычислительного эксперимента предлагаемая методика и критерий Пирсона при анализе неоднозначных зависимостей между случайными величинами в условиях относительно малых объёмов статистических данных и средних квадратических отклонений  $\sigma$  помех сопоставимы и безошибочно определяют зависимость случайных величин. Данный вывод не соблюдается при зависимости между случайными величинами (рис. 1, а), когда критерий Пирсона не устанавливает зависимость в условиях  $n = 100$  и  $\sigma \in [0.5; 2]$ . С увеличением  $\sigma$  эффективность сравниваемых критериев снижается. Этот факт объясняется особенностями неоднозначных зависимостей и большими значениями  $\sigma$ , когда область определения случайных величин скрывает искомую зависимость. С увеличением объёма  $n$  исходных данных эффективность сравниваемых критериев проверки гипотезы о независимости случайных величин повышается. Этот вывод является ожидаемым, так как с ростом  $n$  повышаются асимптотические свойства непараметрических оценок плотностей вероятностей и частот встречаемости случайных величин в их двухмерных интервалах. Преимущество предлагаемой методики проверки гипотезы о независимости случайных величин наблюдается при малых значениях  $\sigma$ , ограниченных и больших  $n$ . При больших  $n$  и  $\sigma$  часто обнаруживается преимущество критерия Пирсона, если используется процедура оптимальной дискретизации области значений двухмерной случайной величины [22].

### Применение предлагаемой методики при анализе данных дистанционного зондирования

Разработанная методика апробирована при анализе данных дистанционного зондирования [2; 28]. Объектом исследования являются антропогенные территории (карьер, пригородная застройка) в окрестности города Красноярск. Исходная информация формировалась по фрагментам съёмки спутника Sentinel-2 на 26.08.2021 (рис. 2). Использовались спектральные каналы  $x_j$ ,  $j = \overline{1, 9}$ , которые характеризуются длинами волн (нанометры):  $x_1$  – (458–523),  $x_2$  – (543–578),  $x_3$  – (650–680),  $x_4$  – (698–713),  $x_5$  – (733–748),  $x_6$  – (773–793),  $x_7$  – (785–899),  $x_8$  – (1565–1655),  $x_9$  – (2100–2280).

Предлагаемая методика позволяет формировать пары независимых и зависимых случайных величин, изменяя соотношение между их параметрами. Применение методики позволило обнаружить 31 и 29 пар спектральных признаков с сильной линейной зависимостью соответственно для объектов «карьер», «пригородная застройка». Полученные результаты представлены на рис. 3.

Дополнительно обнаружены нелинейные зависимости между спектральными признаками для объекта «карьер»

$$(x_1, x_9), (x_1, x_8), (x_1, x_7), (x_1, x_5), (x_1, x_4)$$

и объекта «пригородная застройка»

$$(x_7, x_9), (x_4, x_9), (x_3, x_9), (x_2, x_9), (x_1, x_9), (x_1, x_8), (x_1, x_7).$$

Полученные результаты являются достоверными для всех пар спектральных признаков, так как соблюдается условие  $|\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2| > D_\beta$  при  $D_\beta = 0,029$  и риске  $\beta = 0,025$  отвергнуть гипотезу  $H_0$  равенства значений  $\rho_1, \rho_2$ .

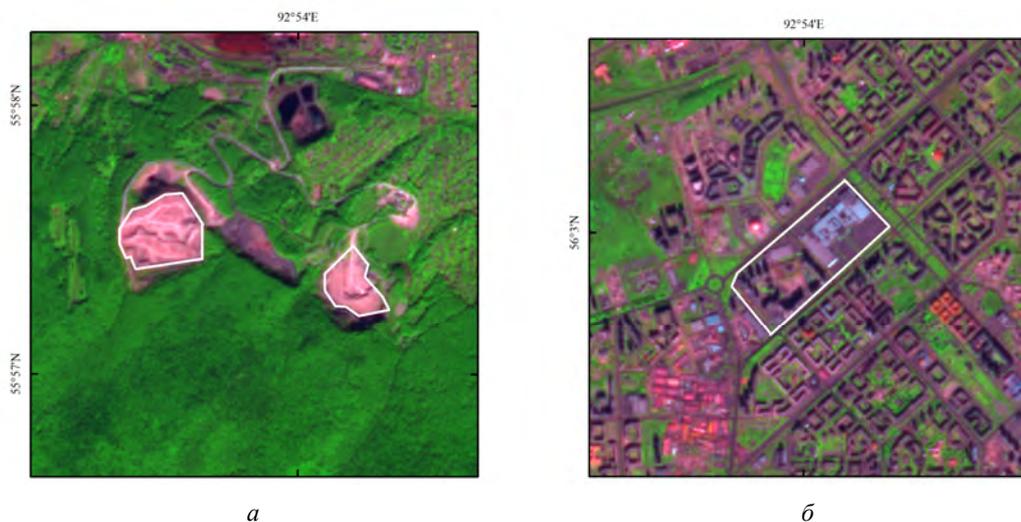


Рис. 2. Фрагменты спутниковой съемки Sentinel-2. Антропогенные территории:  
*a* – карьер; *б* – пригородная застройка

Fig. 2. Fragments of Sentinel-2 satellite imagery. Anthropogenic territories:  
*a* – quarry; *б* – suburban development

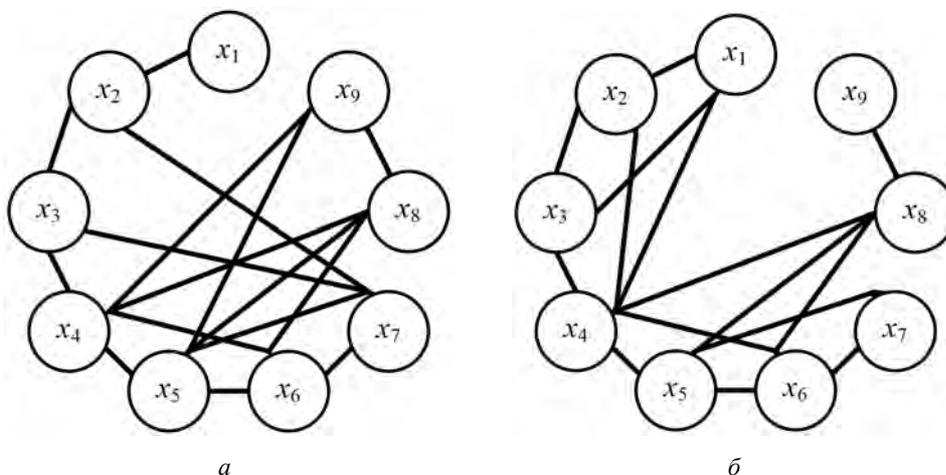


Рис. 3. Иллюстрация сильной линейной зависимости между парами спектральных признаков  $(x_i, x_j)$ , характеризующихся оценками коэффициентов корреляции больше 0,9:  
*a* – карьер; *б* – пригородная застройка

Fig. 3. Illustration of a strong linear relationship between pairs of spectral features  $(x_i, x_j)$  characterized by correlation coefficient estimates greater than 0,9:  
*a* – quarry; *б* – suburban development

Рассмотрена задача обнаружения антропогенных территорий по спектральным данным. Ошибка их распознавания в пространстве спектральных признаков  $x = (x_j, j = \overline{1, 9})$  по обучающей выборке  $V = (x^i, \sigma(i), i = \overline{1, n})$  равна 0,012, где  $n = n_1 + n_2$ ,  $n_1 = 3377$  («карьер»,  $\sigma(i) = 1$ ),

$n_2 = 5049$  («пригородная застройка»,  $\sigma(i) = 2$ ). При исключении из обучающей выборки, например, спектральных признаков  $(x_4, x_5)$ ,  $(x_5, x_6)$ ,  $(x_4, x_5, x_6)$ , оценки ошибок распознавания образов соответствуют значениям 0,011; 0,01; 0,008. Полученное снижение ошибок распознавания образов не является достоверным по сравнению с оценкой ошибки в пространстве признаков  $x_j$ ,  $j = \overline{1, 9}$ . Однако полученный результат обосновывает возможность сокращения спектральных признаков при синтезе алгоритмов принятия решений и упрощения их оптимизации.

### Заключение

Методика проверки гипотезы о независимости пар случайных величин, основанная на использовании непараметрического алгоритма распознавания образов, позволяет обойти проблему дискретизации области значений случайных величин на многомерные интервалы. Эта проблема свойственна общепризнанному критерию Пирсона. Определены условия компетентности предлагаемого метода и критерия Пирсона при анализе однозначных и неоднозначных зависимостей между случайными величинами. С использованием аппарата теории графов предлагаемая методика развита при формировании наборов независимых случайных величин. Полученные результаты обобщены при проверке гипотезы о независимости случайных величин для больших объёмов статистических данных на основе сжатия исходной информации, что позволяет на порядки повысить вычислительную эффективность решаемых задач. Эффективность предложенной методики подтверждена при анализе данных дистанционного зондирования антропогенных территорий и оценивании их состояний. При наличии набора спектральных признаков, характеризующихся сильной линейной зависимостью между его парами, появляется возможность сокращения количества спектральных признаков при распознавании антропогенных территорий с уменьшением оценки вероятности ошибки их распознавания.

### Библиографические ссылки

1. Академик Пугачёв Владимир Семёнович: к столетию со дня рождения / под ред. И. Н. Синицына. М. : Торус Пресс, 2011. 376 с.
2. Шаруева А. В., Лапко А. В., Лапко В. А. Непараметрические методы проверки гипотез о распределениях случайных величин при анализе данных дистанционного зондирования. Новосибирск : СО РАН, 2024. 189 с.
3. Лапко А. В., Лапко В. А. Проверка гипотезы о независимости двумерных случайных величин с использованием непараметрического алгоритма распознавания образов // Автометрия. 2021. Т. 57, № 2. С. 41–48. DOI: 10.15372/AUT20210205.
4. Лапко А. В., Лапко В. А., Бахтина А. В. Исследование методики проверки гипотезы о независимости двумерных случайных величин с использованием непараметрического классификатора // Автометрия. 2021. Т. 57, № 6. С. 90–100. DOI: 10.15372/AUT20210610.
5. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode // Annals of Mathematical Statistics. 1962. Vol. 33, No. 3. P. 1065–1076. DOI: 10.1214/aoms/1177704472.
6. Епанечников В. А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятности и ее применения. 1969. Т. 14, №1. С. 156–161.
7. Лапко А. В., Лапко В. А. Анализ методов оптимизации непараметрической оценки плотности вероятности по коэффициенту размытости ядерных функций // Измерительная техника. 2017. № 6. С. 3–8.
8. Лапко А. В., Лапко В. А. Ядерные оценки плотности вероятности и их применение. Красноярск : СибГУ им. М. Ф. Решетнёва, 2021. 308 с.
9. Rudemo M. Empirical choice of histogram and kernel density estimators // Scandinavian Journal of Statistics. 1982. No. 9. P. 65–78.

10. Bowman A. W. A comparative study of some kernel-based non-parametric density estimators // *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 1982. Vol. 21. P. 313–327.
11. Hall P. Large-sample optimality of least squares cross-validation in density estimation // *Annals of Statistics*. 1983. Vol. 11. P. 1156–1174.
12. Шаракшанэ А. С., Железнов И. Г., Ивницкий В. А. Сложные системы. М. : Высш. шк., 1977. 248 с.
13. Лапко А. В., Лапко В. А., Бахтина А. В. Формирование наборов независимых компонент многомерной случайной величины на основе непараметрического алгоритма распознавания образов // *Измерительная техника*. 2021. № 9. С. 3–9. DOI: 10.32446/0368-1025it.2021-9-3-9.
14. Непараметрический алгоритм распознавания образов в задаче проверки гипотезы о независимости случайных величин / И. В. Зеньков, А. В. Лапко, В. А. Лапко и др. // *Компьютерная оптика*. 2021. Т. 45, № 5. С. 767–772. DOI: 10.18287/2412-6179-СО-871.
15. Методика последовательного формирования набора компонент многомерной случайной величины с использованием непараметрического алгоритма распознавания образов / И. В. Зеньков, А. В. Лапко, В. А. Лапко и др. // *Компьютерная оптика*. 2021. Т. 45. № 6. С. 926–933. DOI: 10.18287/2412-6179-СО-902.
16. Лапко А. В., Лапко В. А., Шаруева А. В. Непараметрический алгоритм распознавания образов в задаче формирования наборов независимых случайных величин // *Информатика и системы управления*. 2024. Т. 79, №1. С. 81–90. DOI: 10.22250/18142400\_2024\_79\_1\_81.
17. Лапко А. В., Лапко В. А. Регрессионная оценка плотности вероятности и её свойства // *Системы управления и информационные технологии*. 2012. № 3-1 (49). С. 152–156.
18. Лапко А. В., Лапко В. А. Регрессионная оценка многомерной плотности вероятности и её свойства // *Автометрия*. 2014. Т. 50, № 2. С. 50–56.
19. Лапко А. В., Лапко В. А., Бахтина А. В. Применение непараметрического алгоритма распознавания образов в задаче проверки гипотезы о независимости переменных неоднозначных функций // *Измерительная техника*. 2022. № 1. С. 17–22. DOI: 10.32446/0368-1025it.2022-01-17-22.
20. Лапко А. В., Лапко В. А., Бахтина А. В. Сравнение методики проверки гипотезы о независимости двумерных случайных величин, основанной на непараметрическом классификаторе // *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2022. № 1. С. 45–56. DOI: 10.14357/20718594220105.
21. Лапко А. В., Лапко В. А., Бахтина А. В. Сравнение методик проверки гипотезы о независимости случайных величин, основанных на непараметрическом классификаторе и критерии Пирсона // *Автометрия*. 2023. Т. 59, № 5. С. 36–46.
22. Лапко А. В., Лапко В. А. Выбор оптимального количества интервалов дискретизации области значений двумерной случайной величины // *Измерительная техника*. 2016. № 2. С. 14–17.
23. Лапко А. В., Лапко В. А. Метод дискретизации области значений многомерной случайной величины // *Измерительная техника*. 2019. № 1. С. 16–20. DOI: 10.32446/0368-1025it.2019-1-16-20.
24. Лапко А. В., Лапко В. А. Оценивание параметров формулы оптимальной дискретизации области значений двумерной случайной величины // *Измерительная техника*. 2018. № 5. С. 9–13.
25. Sturges H. A. The choice of a class interval // *Journal of the American Statistical Association*. 1926. Vol. 21, No. 153. P. 65–66.
26. Heinhold I., Gaede K. *Ingenieur statistic*. München: Springer Verlag, 1964. 352 p.
27. Scott D.W. *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2015. 384 p.
28. Лапко А. В., Лапко В. А., Бахтина А. В. Применение непараметрической методики проверки гипотезы о независимости случайных величин в условиях большого объёма статистических данных // *Измерительная техника*. 2023. № 10. С. 17–24. DOI: 10.32446/0368-1025it.2023-10-17-24.

## References

1. Sinitsyna I. N. *Akademik Pugachev Vladimir Semenovich: k stoletiyu so dnya rozhdeniya* [Academician Vladimir Semenovich Pugachev: on the centenary of his birth]. Moscow, Torus Press Publ., 2011, 376 p.
2. Sharueva A. V., Lapko A. V., Lapko V. A. *Neparametricheskiye metody proverki gipotez o raspredeleniyakh sluchaynykh velichin pri analize dannykh distantsionnogo zondirovaniya* [Nonparametric methods for testing hypotheses about distributions of random variables in the analysis of remote sensing data]. Novosibirsk, SO RAN Publ., 2024, 189 p.
3. Lapko A. V., Lapko V. A. Testing the Hypothesis of the Independence of Two-Dimensional Random Variables Using a Nonparametric Algorithm for Pattern Recognition. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2021, Vol. 57, No. 2, P. 149–155.
4. Lapko A. V., Lapko V. A., Bakhtina A. V. Study of the Method for Verification of the Hypothesis on Independence of Two-Dimensional Random Quantities Using a Nonparametric Classifier. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2022, Vol. 57, No. 6, P. 639–648.
5. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics*. 1962, Vol. 33, No. 3, P. 1065–1076.
6. Epanechnikov V. A. [Non-parametric estimation of a multivariate probability density]. *Theory of Probability & Its Applications*. 1969, Vol. 14, No. 1, P. 156–161 (In Russ.).
7. Lapko A. V., Lapko V. A. Analysis of optimization methods for nonparametric estimation of the probability density with respect to the blur factor of kernel functions. *Measurement Techniques*. 2017, Vol. 60, No. 6, P. 515–522.
8. Lapko A. V., Lapko V. A. *Yadernye otsenki plotnosti veroyatnosti i ikh primeneniye* [Kernel probability density estimates and their applications]. Krasnoyarsk, SibGU im. M.F. Reshetnev Publ., 2021, 208 p.
9. Rudemo M. Empirical choice of histogram and kernel density estimators. *Scandinavian Journal of Statistics*. 1982, No. 9, P. 65–78.
10. Bowman A. W. A comparative study of some kernel-based non-parametric density estimators. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 1982, Vol. 21, P. 313–327.
11. Hall P. Large-sample optimality of least squares cross-validation in density estimation. *Annals of Statistics*. 1983, Vol. 11, P. 1156–1174.
12. Sharakshane, A. S., Zheleznov I. G., Ivnikskii V. A. *Slozhnye sistemy* [Complex systems]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1977, 248 p.
13. Lapko A. V., Lapko V. A., Bakhtina A. V. Formation of Sets of Independent Components of a Multidimensional Random Variable Based on a Nonparametric Pattern Recognition Algorithm. *Measurement Techniques*. 2021, Vol. 64, No. 9, P. 689–696.
14. Zenkov I. V., Lapko A. V., Lapko V. A., Kiryushina E. V., Vokin V. N. Nonparametric pattern recognition algorithm for testing a hypothesis of the independence of random variables. *Computer Optics*. 2021, Vol. 45, No 5, P. 767–772.
15. Zenkov I. V., Lapko A. V., Lapko V. A., Kiryushina E. V., Vokin V. N., Bakhtina A. V. A method of sequentially generating a set of components of a multidimensional random variable using a nonparametric pattern recognition algorithm. *Computer Optics*. 2021, Vol. 45, No. 6, P. 926–933.
16. Lapko A. V., Lapko V. A., Sharueva A. V. *Neparametricheskii algoritm raspoznavaniya obrazov v zadache formirovaniya naborov nezavisimyykh sluchainyykh velichin* [A nonparametric pattern recognition algorithm in the problem of forming sets of independent random variables]. *Informatika i sistemy upravleniya*. 2024, Vol. 79, No. 1, P. 81–90 (In Russ.).
17. Lapko A. V., Lapko V. A. Regressionnaya otsenka plotnosti veroyatnosti i ee svoystva [Regression estimation of probability density and its properties]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 2012, No. 3-1 (49), P. 152–156 (In Russ.).
18. Lapko A. V., Lapko V. A. Regression estimate of the multidimensional probability density and its properties. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2014, Vol. 50, No. 2, P. 148–153.

19. Lapko A. V., Lapko V. A., Bakhtina A. V. Application of a nonparametric pattern recognition algorithm to the problem of testing the hypothesis of the independence of variables of multi-valued functions. *Measurement Techniques*. 2022, Vol. 65, No. 1, P. 17–23.
20. Lapko A. V., Lapko V. A., Bakhtina A. V. Comparison of the Methodology for Hypothesis Testing of the Independence of Two-Dimensional Random Variables Based on a Nonparametric Classifier. *Scientific and Technical Information Processing*. 2023, Vol. 50, No. 6, P. 572–581.
21. Lapko A. V., Lapko V. A., Bakhtina A. V. Comparison of Methods for Testing the Hypothesis of Independence of Random Variables Based on a Nonparametric Classifier and Pearson's Chi-Squared Test. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2023, Vol. 59, No. 5, P. 551–560.
22. Lapko A. V., Lapko V. A. Selection of the Optimal Number of Intervals Sampling the Region of Values of a Two-Dimensional Random Variable. *Measurement Techniques*. 2016, Vol. 59, No. 2, P. 122–126.
23. Lapko A. V., Lapko V. A. Discretization method for the range of values of a multi-dimensional random variable. *Measurement Techniques*. 2019, Vol. 62, No. 1, P. 16–22.
24. Lapko A. V., Lapko V. A. Estimation of parameters of the formula for optimal discretization of the range of values of a two-dimensional random variable. *Measurement Techniques*. 2018, Vol. 61, No. 5, P. 427–433.
25. Sturges H. A. The choice of a class interval. *Journal of the American Statistical Association*, 1926, Vol. 21, P. 65–66.
26. Heinhold I., Gaede K. W. *Ingenieur statistik*. München, Springer Verlag, 1964, 352 p.
27. Scott D. W. *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*. New Jersey, John Wiley & Sons, 2015, 384 p.
28. Lapko A. V., Lapko V. A., Bakhtina A. V. Application of a nonparametric procedure for testing the hypothesis about the independence of random variables given a large amount of statistical data. *Measurement Techniques*, 2024, Vol. 66, P. 744–754.

© Шаруева А. В., 2025

---

**Шаруева Анна Владимировна** – заведующий лабораторией дистанционного зондирования, ассистент; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: anna-denisjuk@yandex.ru. <https://orcid.org/0009-0003-4255-4554>.

**Sharueva Anna Vladimirovna** – head of the remote sensing laboratory, assistant; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: anna-denisjuk@yandex.ru. <https://orcid.org/0009-0003-4255-4554>.

---

Статья поступила в редакцию 27.12.2024; принята к публикации 13.01.2025; опубликована 11.04.2025  
The article was submitted 27.12.2024; accepted for publication 13.01.2025; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License

УДК 519.6

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-60-70

**Для цитирования:** Шерстнев П. А., Семенкин Е. С. Самоконфигурируемые алгоритмы генетического программирования с адаптацией на основе истории успеха // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 60–70. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-60-70.

**For citation:** Sherstnev P. A., Semenkin E. S. [Self-Configuring Genetic Programming Algorithms with Success History-Based Adaptation]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 60–70. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-60-70.

## Самоконфигурируемые алгоритмы генетического программирования с адаптацией на основе истории успеха

П. А. Шерстнев<sup>1\*</sup>, Е. С. Семенкин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сибирский федеральный университет

Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79

<sup>2</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева

Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

\*E-mail: sherstpasha99@gmail.com

*Аннотация.* В данной работе представлен новый метод самонастройки алгоритмов генетического программирования (ГП), который базируется на идеях метода *Success History based Parameter Adaptation (SHA)*, изначально разработанного для алгоритма дифференциальной эволюции (ДЭ). Основная идея метода заключается в динамическом анализе истории успешных решений для адаптации параметров алгоритма в процессе поиска решения. Для реализации этой концепции схема работы классического ГП была модифицирована таким образом, чтобы имитировать схему ДЭ, что позволило интегрировать механизм *SHA* в ГП. Полученный алгоритм, обозначенный как *SHAGP (Success-History based Adaptive Genetic Programming)*, демонстрирует новые возможности для адаптации параметров, таких как вероятность скрещивания и мутации. В работе также проведён обзор существующих методов самонастройки алгоритмов ГП, что позволило выявить их ключевые преимущества и ограничения и использовать эти знания при разработке *SHAGP*. Дополнительно предложены новые операторы скрещивания, позволяющие динамически настраивать вероятность скрещивания, учитывать селективное давление на данном этапе, а также реализующие многородительское скрещивание. Такая модификация позволяет более гибко управлять процессом рекомбинации генотипов, улучшая адаптивность алгоритма к решаемой задаче. Для настройки вероятностей применения различных операторов (селекции, скрещивания, мутации) используются методы самоконфигурирования эволюционных алгоритмов, в частности, *Self-Configuring Evolutionary Algorithm* и *Population-Level Dynamic Probabilities Evolutionary Algorithm*. В рамках работы было реализовано два варианта алгоритма – *SelfCSHAGP* и *PDPSSHAGP*. Эффективность предложенных алгоритмов была проверена на наборах задач из *Feynman Symbolic Regression Database*. Каждый алгоритм запускался многократно на каждой задаче для получения достоверной статистической выборки, а результаты сравнивались с использованием статистического критерия Манна – Уитни. Экспериментальные данные показали, что предложенные алгоритмы достигают более высокого показателя надёжности по сравнению с существующими методами самонастройки ГП, причём метод *PDPSSHAGP* демонстрирует наилучшую эффективность более чем в 90 % случаев. Такой универсальный механизм самонастройки может найти применение в широком наборе областей, таких как автоматизация машинного обучения, обработка больших данных, инженерный дизайн, медицина, а также в космических приложениях, например, при проектировании навигационных систем для космических аппаратов и разработке систем управления летательными аппаратами. В этих сферах критически важны высокая надёжность алгоритмов и их способность находить оптимальные решения в сложных многомерных пространствах.

*Ключевые слова:* самонастройка, генетическое программирование, адаптация, самоконфигурирование, скрещивание, регрессия.

## Self-Configuring Genetic Programming Algorithms with Success History-Based Adaptation

P. A. Sherstnev<sup>1\*</sup>, E. S. Semenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Siberian Federal University

79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation

<sup>2</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology

31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

\*E-mail: sherstpasha99@gmail.com

*Abstract. In this work, a novel method for self-tuning genetic programming (GP) algorithms is presented, based on the ideas of the Success History based Parameter Adaptation (SHA) method, originally developed for the Differential Evolution (DE) algorithm. The main idea of the method is to perform a dynamic analysis of the history of successful solutions to adapt the algorithm's parameters during the search process. To implement this concept, the operation scheme of classical GP was modified to mimic the DE scheme, allowing the integration of the success history mechanism into GP. The resulting algorithm, denoted as SHAGP (Success-History based Adaptive Genetic Programming), demonstrates new capabilities for parameter adaptation, such as the adjustment of crossover and mutation probabilities. The work also includes a detailed review of existing self-tuning methods for GP algorithms, which allowed for the identification of their key advantages and limitations and the application of this knowledge in the development of SHAGP. Additionally, new crossover operators are proposed that enable dynamic adjustment of the crossover probability, account for the selective pressure at the current stage, and implement a multi-parent approach. This modification allows for more flexible control over the process of genotype recombination, thereby enhancing the algorithm's adaptability to the problem at hand. To adjust the probabilities of applying various operators (selection, crossover, mutation), self-configuring evolutionary algorithm methods are employed, in particular, the Self-Configuring Evolutionary Algorithm and the Population-Level Dynamic Probabilities Evolutionary Algorithm. Within the framework of this work, two variants of the algorithm were implemented – SelfCSHAGP and PDPSSHAGP. The efficiency of the proposed algorithms was tested on problem sets from the Feynman Symbolic Regression Database. Each algorithm was run multiple times on each problem to obtain a reliable statistical sample, and the results were compared using the Mann–Whitney statistical test. The experimental data showed that the proposed algorithms achieve a higher reliability metric compared to existing GP self-tuning methods, with the PDPSSHAGP method demonstrating the best efficiency in more than 90 % of the cases. Such a universal self-tuning mechanism can find applications in a wide range of fields, such as automated machine learning, big data processing, engineering design, and medicine, as well as in space applications – for example, in the design of navigation systems for spacecraft and the development of control systems for aerial vehicles. In these areas, the high reliability of algorithms and their ability to find optimal solutions in complex multidimensional spaces are critically important.*

*Keywords: self-tuning, genetic programming, adaptation, self-configuration, crossover, regression.*

### Введение

Область исследований, связанная с самонастройкой, является одним из самых актуальных направлений в развитии эволюционных алгоритмов (ЭА). Методы самонастройки ЭА стали неотъемлемой частью алгоритмов, представляемых на IEEE Congress on Evolutionary Computation – одном из ведущих международных форумов по эволюционным вычислениям и вычислительному интеллекту [1]. Это связано с тем, что эффективность оптимизации с использованием ЭА напрямую зависит от выбора конфигурации и числовых параметров, при этом заранее определить их оптимальные значения для конкретной задачи невозможно. Методы самонастройки принято делить на два класса: самоконфигурируемые, которые настраивают конфигурацию алгоритма (варианты операторов селекции, скрещивания и мутации), и адаптивные,

регулирующие числовые параметры алгоритма (вероятности скрещивания и мутации, размер популяции). По мере усложнения задач оптимизации возрастает потребность в более гибких и адаптивных ЭА. Особенно это касается генетического программирования (ГП), которое находит применение в таких областях, как автоматизация машинного обучения, обработка больших данных, инженерный дизайн и медицина, где критически важны высокая надёжность алгоритмов и их способность находить оптимальные решения в сложных многомерных пространствах. Аналогичные требования к адаптивности и точности управления наблюдаются и в ряде технических приложений, что также касается некоторых аспектов ракетно-космических исследований.

### **Алгоритм генетического программирования**

Алгоритм ГП – это семейство алгоритмов оптимизации, эволюционирующие программы, представленные в виде древовидных структур, каждый внутренний узел в которых является операцией, а конечный узел – операндом [2; 3]. Благодаря гибкости такого способа кодирования, с помощью ГП могут решаться задачи, где структура решения заранее неизвестна или сложна для аналитического описания. Наиболее часто ГП используется для решения задач символьной регрессии [4; 5], классификации [6–8], формирования моделей машинного обучения и алгоритмов оптимизации [9–11], синтеза программ и оптимизации сложных систем [12; 13]. Этапы работы ГП обычно аналогичны этапам большинства ЭА и включают следующие шаги: инициализацию начальной популяции (полный метод, метод выращивания, комбинированный метод); оценку индивидов (вычисление значений функции пригодности (ФП) каждого индивида популяции); отбор индивидов, которые будут формировать новое поколение с помощью генетического оператора селекции (пропорциональная, ранговая или турнирная селекция); рекомбинация выбранных индивидов для создания потомков путем применения генетического оператора скрещивания (одноточечное, стандартное или равномерное скрещивание); мутация индивидов-потомков путем применения генетического оператора мутации (точечная, выращиванием, обмен или сжатие); замещение предыдущего поколения потомками. Затем происходит переход на этап оценки индивидов и цикл повторяется [3].

### **Обзор методов самонастройки алгоритма генетического программирования**

Для ГП было разработано и исследовано множество различных методов самонастройки. Так, в работе [14] был предложен один из первых методов самоконфигурирования ГП, упоминаемый как Population-Level Dynamic Probabilities (PDP), в котором при создании индивида генетические операторы выбираются случайно из заданного множества вариантов. При этом вероятность выбора оператора динамически корректируется в процессе поиска решения так, что успешные индивиды получают больше шансов быть выбранными в дальнейшем. Успешность оператора определяется как достижение созданным им потомком лучшего значения ФП, чем было у родителя. Одной из проблем данного метода является неопределённость в выборе родителя для сравнения с потомком. Как правило, выбор производится случайным образом. Несмотря на это, PDP успешно используется для самонастройки не только ГП, но и других ЭА [15; 16]. Другой эффективный метод самонастройки был предложен в [17]. Метод называется SelfCEA (Self-Configuring Evolutionary Algorithm) и во многом схож с PDP – в нем также динамически меняются вероятности применения генетических операторов, но на основе среднего значения ФП, достигнутого оператором. Вероятность применения оператора, при использовании которого в среднем получают индивиды с более высоким значением ФП, увеличивается [5; 18]. В другом методе, предложенном в работе [19], каждому индивиду назначаются свои собственные вероятности применения каждого типа оператора, а затем, на основе обратной связи от качества создаваемых решений, вероятности увеличиваются или уменьшаются на заранее заданное значение. Метод показал значительное увеличение надёжности ГП по сравнению с фиксированными вероятностями для геометрически семантического ГП, но его эффективность для стандартного древовидного ГП (Tree-based GP) не доказана. Кроме методов само-

конфигурирования ГП были предложены и методы адаптации числовых параметров ЭА. Так, в [20] описывается алгоритм SAGP, настраивающий вероятности скрещивания и мутации на основе средних значений размеров деревьев в предыдущем и текущем поколении. Это позволяет не допускать разрастания деревьев и получать интерпретируемые зависимости, но может приводить к чрезмерному сокращению сложности создаваемых функций. Авторы статьи [21] предложили алгоритм CF-GP (Adaptive Crossover + Adaptive Function List), в котором сочетаются адаптивное управление вероятностями скрещивания и динамическое удаление неэффективных функций из функционального множества. Однако в работе отсутствует детальный статистический анализ результатов, что затрудняет оценку его эффективности.

### Предлагаемый подход

Схема адаптации, основанная на истории успешных применений (SHA), зарекомендовала себя как высокоэффективный метод настройки вероятностей скрещивания и мутации, что подтверждено успешными экспериментальными результатами [22; 23] и её регулярным применением в различных алгоритмах, включая генетические алгоритмы (ГА). Например, в работе [24] применение SHA к ГА позволило создать SHAGA, демонстрирующий более высокую надёжность по сравнению с SelfCGA на задачах вещественной и псевдодулевой оптимизации. Достигнутые результаты дают основания считать, что применение SHA в ГП приведет к аналогичным улучшениям. Для этого потребуется изменить схему работы ГП. На каждом поколении для каждого  $i$ -го индивида из популяции последовательно применяются генетические операторы. Сначала посредством селекции отбираются родители – поскольку  $i$ -й индивид уже служит первым родителем, выбирается на одного меньше, чем в стандартной схеме. Затем  $i$ -й индивид скрещивается с выбранными родителями, после чего к полученному потомку применяется оператор мутации. Это изменение схемы алгоритма введено для интеграции метода SHA, который адаптирует вероятности мутации и скрещивания на основе критерия: если значение ФП потомка выше, чем у  $i$ -го решения, текущая настройка параметров считается успешной.

Кроме того, требуется изменить работу оператора скрещивания. В стандартной схеме ГП оператор скрещивания определяет, будет ли создан потомок, и если нет, то скрещивание не происходит. В методе SHA для каждого бита с вероятностью  $CR$  выбирается, передавать ли его от родителя или мутанта, что напоминает оператор равномерного скрещивания, но с динамически изменяемой вероятностью, отличной от фиксированной и равной 0,5. Дополнительно, при модификации оператора скрещивания в ГП необходимо обеспечить возможность селективного давления на данном этапе и выбора более чем двух родителей [18]. Процесс скрещивания организован в два этапа: сначала для каждого гена с вероятностью  $CR$  определяется, будет ли он унаследован от первого родителя (текущего решения) или других родителей. Если ген выбирается от первого родителя либо родителей всего два, алгоритм переходит к следующему гену. В противном случае на втором этапе происходит выбор среди оставшихся родителей с учетом их значений ФП, что соответствует подходу, описанному в [18].

Предлагаемая модификация оператора скрещивания в SHAGP позволяет реализовать много-родительское скрещивание с возможностью регулирования его интенсивности посредством параметра  $CR$  и учетом селективного давления на этапе скрещивания. Кроме того, допускается использование классических операторов (одноточечного и стандартного), где процедура выполняется без описанных ранее изменений, но иницируется с вероятностью  $CR$ ; если скрещивание не происходит, оператор возвращает первого родителя (текущее решение). Согласно [18], при использовании много-родительского скрещивания, оптимальным числом родителей для большинства операторов является 2 и 7, а для турнирного – 3 и 7. Однако в данном алгоритме на этапе скрещивания применяется дополнительное селективное давление посредством оператора селекции на втором этапе, поэтому общее число родителей увеличивается на 1 по сравнению с оригинальной реализацией.

Данная модификация позволяет использовать различные варианты операторов скрещивания: одноточечное, стандартное, равномерное равновероятное с двумя родителями, равномерное равновероятное с тремя родителями, равномерное равновероятное с восемью родителями, равномерное пропорциональное с тремя родителями, равномерное пропорциональное с восемью родителями, равномерное ранговое с тремя родителями, равномерное ранговое с восемью родителями, равномерное турнирное с тремя родителями, равномерное турнирное с восемью родителями. Оператор селекции при этом может быть любым. В данном исследовании используются: пропорциональная, ранговая, турнирная с размером турнира, равным 3, 5 и 7 индивидов. При этом применяются следующие операторы мутации: точечная, выращиванием, обмена, сжатия.

Поскольку алгоритм обладает 160 возможными конфигурациями, возникает проблема определения оптимальной настройки для каждой решаемой задачи. В этом случае целесообразно использовать методы самоконфигурирования ГП, которые динамически настраивают параметры в процессе работы, обеспечивая большую надежность, чем при случайном выборе.

Объединив все описанные модификации (изменение схемы работы ГП, модифицированный оператор скрещивания, адаптацию на основе истории успешных применений и методы самоконфигурирования), получается единый алгоритм – самоконфигурируемый алгоритм ГП с адаптацией на основе истории успешных применений (Self-Configuring SHAGP). Псевдокод предлагаемого алгоритма представлен ниже:

## 1. Инициализация.

1.1. Сгенерировать начальную популяцию бинарных деревьев случайным образом.

1.2. Вычислить значение ФП для каждого индивида.

1.3. Инициализировать историю параметров:

1.3.1. Массив  $H\_MR$  (для вероятности мутации) заполнить значениями 0,1.

1.3.2. Массив  $H\_CR$  (для вероятности скрещивания) заполнить значениями 0,9.

1.3.3. Установить индекс истории  $k = 0$ .

1.4. Инициализировать вероятности применения операторов для каждого типа:

1.4.1.  $P\_sel$  (операторы селекции) – равновероятно по всем вариантам.

1.4.2.  $P\_cross$  (операторы скрещивания) – равновероятно по всем вариантам.

1.4.3.  $P\_mut$  (операторы мутации) – равновероятно по всем вариантам.

## 2. Основной цикл (для каждого поколения):

2.1. Для каждого индивида  $i$ :

2.1.1. Случайно выбрать индекс  $r$  из диапазона  $[0, H\_size]$ .

2.1.2. Задать  $MR\_i$ , используя распределение Коши с центром  $H\_MR[r]$  и масштабом 0,1.

2.1.3. Задать  $CR\_i$ , используя нормальное распределение с центром  $H\_CR[r]$  и со стандартным отклонением 0,1.

2.1.4. Выбрать вариант оператора селекции с помощью распределения вероятностей  $P\_sel$ .

2.1.5. Выбрать вариант оператора скрещивания с помощью распределения вероятностей  $P\_cross$ .

2.1.6. Выбрать вариант оператора мутации с помощью распределения вероятностей  $P\_mut$ .

2.1.7. Применить выбранный оператор селекции для отбора родителей.

2.1.8. Применить выбранный оператор скрещивания к  $i$ -му индивиду (первому родителю) и другим родителям, формируя потомка с вероятностью  $CR\_i$ .

2.1.9. Применить выбранный оператор мутации к полученному потомку с вероятностью  $MR\_i$ .

2.1.10. Вычислить значение ФП потомка.

2.2. Замещение:

2.2.1. Для каждого индивида  $i$ : если значение ФП потомка лучше, чем  $i$ -го индивида, заменить  $i$ -го индивида потомком.

- 2.3. Обновление истории параметров:
  - 2.3.1. Для всех индивидов, у которых произошла замена, собрать использованные значения MR и CR, а также величины улучшения значений ФП.
  - 2.3.2. Обновить  $H\_MR[k]$  и  $H\_CR[k]$  с использованием взвешенного среднего успешных значений.
  - 2.3.3. Положить  $k = k+1$  или 0, если  $k > H\_size$ .
- 2.4. Обновление вероятностей применения операторов:
  - 2.4.1. Обновить значения вероятностей применения генетических операторов  $P\_sel$ ,  $P\_cross$  и  $P\_mut$ , используя метод самоконфигурирования.
- 2.5. Обновить глобально лучшего индивида.
- 2.6. Если критерий остановки не выполнен, то перейти к 2,1.
3. Завершение:
  - 3.1. Вернуть лучшего найденного индивида и статистику работы алгоритма.

Рассмотрим ход работы Self-Configuring SHAGP. Инициализация. Алгоритм стартует с генерации случайной популяции бинарных деревьев и вычисления их значений ФП. Начальные параметры фиксируются: массив  $H\_MR$  заполняется значением 0,1, массив  $H\_CR$  – значением 0,9, а вероятности применения операторов ( $P\_sel$ ,  $P\_cross$ ,  $P\_mut$ ) задаются равными, как в оригинальной реализации методов SelfCGP и PDPGP. Формирование нового поколения. Перед созданием потомка для каждого индивида случайно выбирается индекс  $g$  из истории параметров. На его основе генерируются значения MR и CR: MR определяется с помощью распределения Коши с центром  $H\_MR[g]$  (0,1) и масштабом 0,1, CR – посредством нормального распределения с центром  $H\_CR[g]$  (0,9) и стандартным отклонением 0,1. Операторы селекции, скрещивания и мутации выбираются на основе значений вероятностей их применения, и с их помощью формируется новый потомок. Адаптация параметров. При замещении индивидов успешные значения MR и CR сохраняются для последующей адаптации. Обновление параметров производится по взвешенному среднему успешных значений. Самоконфигурирование операторов. После формирования нового поколения обновляются значения вероятностей применения генетических операторов с использованием выбранного метода самоконфигурирования.

### **Исследование эффективности самоконфигурируемых алгоритмов генетического программирования**

Для апробации предложенного метода использовался набор Feynman Symbolic Regression Database [25], содержащий 120 уравнений различной сложности с количеством неизвестных от 1 до 9. Эти уравнения охватывают широкий спектр физических явлений, включая механические, электромагнитные, квантовые и термодинамические процессы. Каждый из тестируемых самоадаптируемых алгоритмов обладал одинаковым набором типов генетических операторов и функциональным множеством. Всем алгоритмам было задано одинаковое количество поколений (1000), в течение которых они работали, и размер популяции (100).

В исследовании участвовали следующие алгоритмы: SelfCGP – версия ГП на основе SelfCEA с расширенным набором операторов, включающих селективное давление; PDPGP – алгоритм, использующий механизм PDP для настройки операторов с селективным давлением; PDPSHAGP – PDP-модификация алгоритма SHAGP, реализующая динамическую адаптацию вероятностей скрещивания и мутации; SelfCSHAGP – версия SHAGP, основанная на SelfCEA.

Для каждого из 120 уравнений использовалась выборка из 1000 точек, распределённых случайным образом в пространстве. Подробности формирования выборки описаны в [25]. После этого данные были разделены на обучающую (750 точек) и тестовую (250 точек) выборки. Чтобы учесть стохастическую природу эволюционных алгоритмов, проводилось по 100 запусков для каждой задачи, при этом при каждом запуске сохранялось наилучшее значение метрики  $R^2$  [26]. Для подтверждения статистической значимости различий результатов алгоритмов применялся статистический критерий Манна – Уитни с уровнем значимости 0,05.

При сравнении результатов решения задач регрессии с использованием большого количества задач возникает проблема интерпретации значения коэффициента детерминации  $R^2$ , которое может принимать отрицательные значения и тем самым смещать средние показатели и искажать оценку методов. Часто для решения этой проблемы используют показатель надёжности – долю успешно найденных решений, где успех определяется достижением заранее установленного порога ошибки. Однако такой подход может приводить к потере информации, поскольку результат сильно зависит от выбранного порога. Более информативным является вычисление надёжности при различных пороговых значениях. На рис. 1 представлен график значений усредненной по 120 уравнениям надёжности при различных значениях порога (от 0 до 1 с шагом 0,01) для каждого из тестируемых методов.

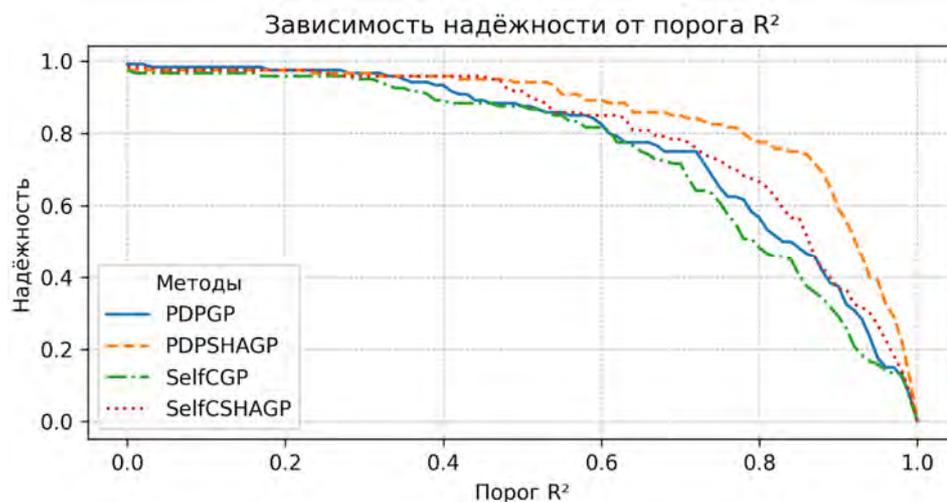


Рис. 1. Зависимость надёжности от порогового значения коэффициента детерминации

Fig. 1. Dependence of reliability on the threshold value of the coefficient of determination

График (рис. 1) показывает, как изменяется надёжность различных методов при увеличении порога. PDPSHAGP (оранжевая пунктирная линия) отражает лучшие результаты, оставаясь выше остальных по всему диапазону. SelfCSHAGP (красная точечная линия) тоже выше остальных, но кривая спадает быстрее. PDPGP (синяя сплошная линия) и SelfCGP (зелёная штрихпунктирная линия) заметно уступают, особенно при высоких значениях порога. Усреднённые значения надёжности, рассчитанные по всем порогам и задачам, равны: SelfCGP – 0,742; PDPGP – 0,773; SelfCSHAGP – 0,797; PDPSHAGP – 0,848.

На рис. 2 приведены круговые диаграммы, построенные на основе результатов статистического теста, выполненного для сравнения алгоритмов SelfCSHAGP и PDPSHAGP с другими самоадаптирующимися алгоритмами. Диаграммы разделены на три категории: «превосходит» (зелёный сектор) – количество функций, где первый алгоритм показал лучшие результаты; «без различий» (серый сектор) – статистически незначимые различия; «уступает» (красный сектор) – случаи, когда второй алгоритм продемонстрировал лучшие показатели.

Из представленных диаграмм видно, что оба алгоритма с использованием SHA (SelfCSHAGP и PDPSHAGP) превосходят конкурентов в большинстве тестовых функций. SelfCSHAGP уверенно опережает SelfCGP (80 против 2) и заметно выигрывает у PDPGP (41 против 3), хотя доля задач, в которых различия оказались статистически незначимыми, достаточно велика (38 и 76 соответственно). PDPSHAGP же демонстрирует ещё более высокие результаты: алгоритм опережает SelfCGP (109 против 4) и PDPGP (92 против 2) с незначительным числом «ничейных» исходов, что указывает на его лидерство среди сравниваемых алгоритмов.

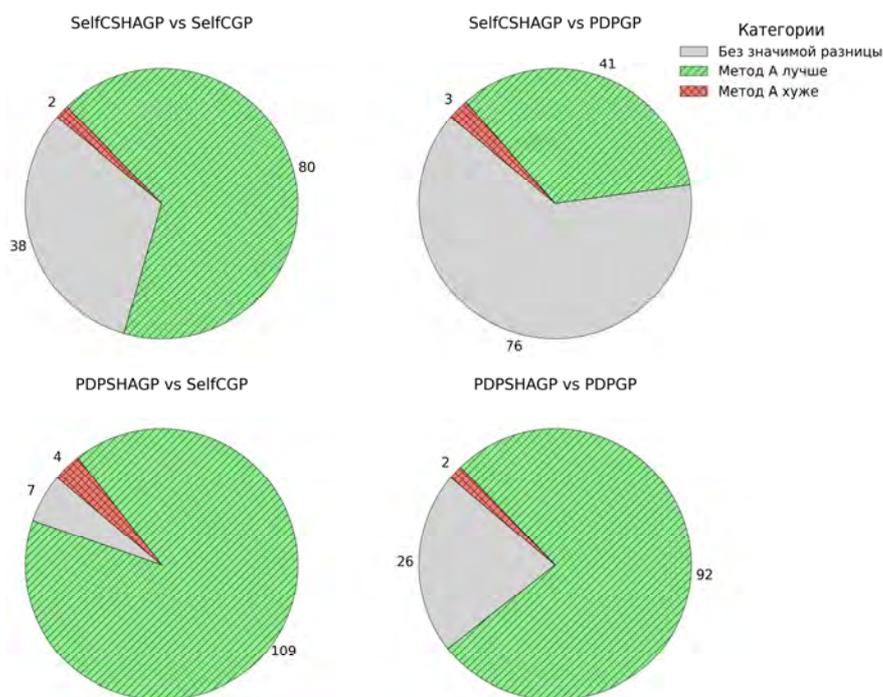


Рис. 2. Результаты сравнения методов самонастройки с использованием статистического теста

Fig. 2. Results of comparing self-tuning methods using a statistical test

### Заключение

В данной работе представлен и исследован самоконфигурируемый алгоритм ГП с адаптацией параметров на основе истории успешных применений. Алгоритм позволяет настраивать как параметры вероятностей скрещивания и мутации, так и варианты генетических операторов. Особое внимание уделено модифицированному оператору скрещивания, который отличается возможностью адаптации интенсивности скрещивания за счёт настройки вероятности его применения, применения селективного давления на данном этапе и использования многократного скрещивания. В рамках исследования алгоритм реализован в двух вариантах, отличающихся методом самоконфигурирования: SelfCSHAGP и PDPSHAGP. Результаты сравнительных экспериментов на задачах регрессии показали, что предложенные алгоритмы превосходят ранние подходы на большинстве тестовых задач, а в оставшихся случаях демонстрируют сопоставимые показатели. Наиболее эффективной оказалась реализация с использованием метода PDPEA для настройки операторов.

Полученные результаты подтверждают перспективность подхода и позволяют наметить дальнейшие направления его развития: анализ эффективности алгоритма при решении задач других классов (например, при формировании моделей машинного обучения) и интеграция дополнительных методов самонастройки, включая настройку размера популяции.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках Государственного задания в сфере науки (проект № FEFE-2023-0004).

**Acknowledgment.** This research was funded by the State Assignment project № FEFE-2023-0004.

### Библиографические ссылки

1. IEEE Congress on Evolutionary Computation [Электронный ресурс]. 2025. URL: <https://www.cec2025.org/> (дата обращения: 08.01.2025).
2. Koza J. R. Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection. Sixth printing, 1998, Massachusetts Institute of Technology, 609 p.

3. Kuranga C., Pillay N. A Comparative Study of Genetic Programming Variants // Artificial Intelligence and Soft Computing. ICAISC 2022. Lecture Notes in Computer Science. 2023. Vol. 13588, P. 377–386. DOI: 10.1007/978-3-031-23492-7\_32.
4. Genetic Programming-based Feature Selection for Symbolic Regression on Incomplete Data. Evolutionary Computation / B. Al-Helali et al. 2024. P. 1–27.
5. Karaseva T. S., Mitrofanov S. A. Self-configuring genetic programming algorithm for solving symbolic regression problems // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Krasnoyarsk, 16–18 April 2020. 2020. Vol. 862. P. 52–69. DOI: 10.1088/1757-899X/862/5/052069.
6. Traffic Classification in Software-Defined Networking Using Genetic Programming Tools / S. Margariti, I. Tsoulos, E. Kiouisi, E. Stergiou // Future Internet. 2024. Vol. 16. P. 338. DOI: 10.3390/fi16090338.
7. Maurya P., Kushwaha A., Prakash O. Medical Data Classification Using Genetic Programming: A Systematic Literature Review // Expert Systems. 2025. Vol. 42, No. 3. DOI: 10.1111/exsy.70007.
8. A Genetic Programming Approach to Binary Classification Problem / L. Santoso, B. Singh, S. Rajest et al. EAI Endorsed Transactions on Energy Web, 2020. DOI: 10.4108/eai.13-7-2018.165523.
9. A hyper-heuristic approach to automated generation of mutation operators for evolutionary programming / L. Hong, J. Drake, J. Woodward, E. Özcan // Applied Soft Computing. 2018. Vol. 62. DOI: 10.1016/j.asoc.2017.10.002.
10. Scott E. 'Siggy, Bassett J. Learning Genetic Representations for Classes of Real-Valued Optimization Problems. 2015. DOI: 10.1145/2739482.2768460.
11. Hyper-heuristic approach: automatically designing adaptive mutation operators for evolutionary programming / L. Hong, J. R. Woodward, E. Özcan et al. // Complex Intell. Syst. 2021. Vol. 7. P. 3135–3163. DOI: 10.1007/s40747-021-00507-6.
12. Trajectory optimization method for spacecraft orbit transfer with finite thrust. Xinan Jiaotong Daxue Xuebao / C. Wang, Y. Qu, Z. Lu et al. // Journal of Southwest Jiaotong University. 2013. Vol. 48. P. 390–394. DOI: 10.3969/j.issn.0258-2724.2013.02.030.
13. Semenkin E., Semenkina M. Spacecrafts' control systems effective variants choice with self-configuring genetic algorithm // ICINCO 2012 – Proceedings of the 9th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. Rome, 28–31 July 2012. 2012. Vol. 1. P. 84–93.
14. Niehaus J., Banzhaf W. Adaption of Operator Probabilities in Genetic Programming // Genetic Programming. EuroGP 2001. Lecture Notes in Computer Science. 2001. Vol. 2038. P. 325–336. DOI: 10.1007/3-540-45355-5\_26.
15. Липинский Л. В., Кушнарева Т. В. Исследование моделей и процедур самоконфигурации генетического программирования для формирования деревьев принятия решений в задачах интеллектуального анализа данных // Вестник СибГАУ. 2016. Т. 17, № 3. С. 579–586.
16. Митрофанов С. А., Семенкин Е. С. Дифференциальная эволюция в алгоритме обучения деревьев принятия решений // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20, № 3. С. 312–319. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-3-312-319.
17. Semenkin E. S., Semenkina M. E. Self-configuring Genetic Algorithm with Modified Uniform Crossover Operator // LNCS. 2012. Vol. 7331. P. 414–421.
18. Semenkin E., Semenkina M. Self-configuring genetic programming algorithm with modified uniform crossover // Evolutionary Computation (CEC), 2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation, June 2012. P. 1–6. DOI: 10.1109/CEC.2012.6256587.
19. Self-tuning geometric semantic Genetic Programming / M. Castelli, L. Manzoni, L. Vanneschi et al. // Genetic Programming and Evolvable Machines. 2016. Vol. 17, No. 1. DOI: 10.1007/s10710-015-9251-7.
20. Oh S., Suh W.-H., Ahn C.-W. Self-Adaptive Genetic Programming for Manufacturing Big Data Analysis // Symmetry. 2021. Vol. 13, No. 4. P. 709. DOI: 10.3390/sym13040709.
21. Al-Madi N., Ludwig S. Adaptive Genetic Programming applied to Classification in Data Mining. Fourth World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing (IEEE NaBIC'12), Mexico City, Mexico, November 2012. DOI: 10.1109/NaBIC.2012.6402243.
22. Tanabe R., Fukunaga A. Success-history based parameter adaptation for Differential Evolution // 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation, Cancun, Mexico, 2013, P. 71–78. DOI: 10.1109/CEC.2013.6557555.

23. Renkavieski C., Parpinelli R. L-SHADE with Alternative Population Size Reduction for Unconstrained Continuous Optimization. *Computer on the Beach*, September 2020, P. 351–358. DOI: 10.14210/cotb.v11n1.p351-358.

24. Stanovov V., Akhmedova S., Semenkin E. Genetic algorithm with success history based parameter adaptation // *IJCCI 2019 – Proceedings of the 11th International Joint Conference on Computational Intelligence*: 11, Vienna, 17–19 September 2019. Vienna : 2019. P. 180–187. DOI: 10.5220/0008071201800187.

25. Marian S., Tegmark M. E. AI Feynman: A physics-inspired method for symbolic regression // *Science Advances*. 2020, Vol. 6, No. 16. DOI: 10.1126/sciadv.aay2631.

26. Rights M. D., Sterba S. K. A framework for effect size measures in multilevel models: A review and recommendations // *Psychological Methods*. 2019. Vol. 24, No. 3. P. 289–315.

## References

1. IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC) [Electronic resource]. 2025. Available at: <https://www.cec2025.org/> (accessed: 08.01.2025).

2. Koza J. R. Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection. Sixth printing, 1998, Massachusetts Institute of Technology, 609 p.

3. Kuranga C., Pillay N. A Comparative Study of Genetic Programming Variants. *Artificial Intelligence and Soft Computing*. ICAISC 2022. Lecture Notes in Computer Science. 2023. Vol. 13588, P. 377–386. DOI: 10.1007/978-3-031-23492-7\_32.

4. Al-Helali B. et al. Genetic Programming-based Feature Selection for Symbolic Regression on Incomplete Data. *Evolutionary Computation*, 2024, P. 1–27.

5. Karaseva T. S., Mitrofanov S. A. Self-configuring genetic programming algorithm for solving symbolic regression problems. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Krasnoyarsk, 16–18 April 2020. 2020, Vol. 862, P. 52069. DOI: 10.1088/1757-899X/862/5/052069.

6. Margariti S., Tsoulos I., Kiouisi E., Stergiou E. Traffic Classification in Software-Defined Networking Using Genetic Programming Tools. *Future Internet*. 2024, Vol. 16, P. 338. DOI: 10.3390/fi16090338.

7. Maurya P., Kushwaha A., Prakash O. Medical Data Classification Using Genetic Programming: A Systematic Literature Review. *Expert Systems*. 2025, Vol. 42, No. 3. DOI: 10.1111/exsy.70007.

8. Santoso L., Singh B., Rajest S., Rajan R., Kadhim K. A Genetic Programming Approach to Binary Classification Problem. *EAI Endorsed Transactions on Energy Web*, 2020. DOI: 10.4108/eai.13-7-2018.165523.

9. Hong L., Drake J., Woodward J., Özcan E. A hyper-heuristic approach to automated generation of mutation operators for evolutionary programming. *Applied Soft Computing*. 2018, Vol. 62. DOI: 10.1016/j.asoc.2017.10.002.

10. Scott E. 'Siggy, Bassett J. Learning Genetic Representations for Classes of Real-Valued Optimization Problems. 2015. DOI: 10.1145/2739482.2768460.

11. Hong L., Woodward J. R., Özcan E. et al. Hyper-heuristic approach: automatically designing adaptive mutation operators for evolutionary programming. *Complex Intell. Syst.* 2021, Vol. 7, P. 3135–3163. DOI: 10.1007/s40747-021-00507-6.

12. Wang C., Qu Y., Lu Z., An H., Xia H., Ma G. Trajectory optimization method for spacecraft orbit transfer with finite thrust. *Xinan Jiaotong Daxue Xuebao. Journal of Southwest Jiaotong University*. 2013, Vol. 48, P. 390–394. DOI: 10.3969/j.issn.0258-2724.2013.02.030.

13. Semenkin E., Semenkina M. Spacecrafts' control systems effective variants choice with self-configuring genetic algorithm. *ICINCO 2012 – Proceedings of the 9th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*. 2012, Vol. 1, P. 84–93.

14. Niehaus J., Banzhaf W. Adaption of Operator Probabilities in Genetic Programming. *Genetic Programming. EuroGP 2001*. Lecture Notes in Computer Science. 2001, Vol. 2038, P. 325–336. DOI: 10.1007/3-540-45355-5\_26.

15. Lipinskiy L. V., Kushnareva T. V. [A study of models and procedures of self-configuring genetic programming for forming decision trees in data mining tasks]. *Vestnik SibSAU*. 2016, Vol. 17, No. 3, P. 579–586 (In Russ.).

16. Mitrofanov S. A., Semenkin E. S. [Differential evolution in the decision tree learning algorithm]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2019, Vol. 20, No. 3, P. 312–319. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-3-312-319 (In Russ.).
17. Semenkin E. S., Semenkina M. E. Self-configuring Genetic Algorithm with Modified Uniform Crossover Operator. *LNCS*. 2012, Vol. 7331, P. 414–421.
18. Semenkin E., Semenkina M. Self-configuring genetic programming algorithm with modified uniform crossover. *Evolutionary Computation (CEC), 2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, June 2012, P. 1–6. DOI: 10.1109/CEC.2012.6256587.
19. Castelli M., Manzoni L., Vanneschi L., Popovič A. et al. Self-tuning geometric semantic Genetic Programming. *Genetic Programming and Evolvable Machines*. 2016, Vol. 17, No. 1. DOI: 10.1007/s10710-015-9251-7.
20. Oh S., Suh W.-H., Ahn C.-W. Self-Adaptive Genetic Programming for Manufacturing Big Data Analysis. *Symmetry*. 2021, Vol. 13, No. 4, P. 709. Available at: DOI: 10.3390/sym13040709.
21. Al-Madi N., Ludwig S. Adaptive Genetic Programming applied to Classification in Data Mining. *Fourth World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing (IEEE NaBIC'12)*. Mexico City, Mexico, November 2012. Available at: <https://doi.org/10.1109/NaBIC.2012.6402243>.
22. Tanabe R., Fukunaga A. Success-history based parameter adaptation for Differential Evolution. *2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Cancun, Mexico, 2013, P. 71–78. DOI: 10.1109/CEC.2013.6557555.
23. Renkavieski C., Parpinelli R. L-SHADE with Alternative Population Size Reduction for Unconstrained Continuous Optimization. *Computer on the Beach*, September 2020, P. 351–358. DOI: 10.14210/cotb.v11n1.p351-358.
24. Stanovov V., Akhmedova S., Semenkin E. Genetic algorithm with success history based parameter adaptation. *IJCCI 2019 – Proceedings of the 11th International Joint Conference on Computational Intelligence*: 11, Vienna, 17–19 September 2019. Vienna, 2019, P. 180–187. DOI: 10.5220/0008071201800187.
25. Marian S., Tegmark M. E. AI Feynman: A physics-inspired method for symbolic regression. *Science Advances*. 2020, Vol. 6, No. 16, P. 2631. DOI: 10.1126/sciadv.aay2631.
26. Rights M. D., Sterba S. K. A framework for effect size measures in multilevel models: A review and recommendations. *Psychological Methods*. 2019, Vol. 24, No. 3, P. 289–315.

© Шерстнев П. А., Семенкин Е. С., 2025

---

**Шерстнев Павел Александрович** – аспирант кафедры программной инженерии, инженер-исследователь Центра искусственного интеллекта; Сибирский федеральный университет. E-mail: [sherstpasha99@gmail.com](mailto:sherstpasha99@gmail.com).

**Семенкин Евгений Станиславович** – доктор технических наук, профессор; кафедра системного анализа и исследования операций, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: [eugeneseimenkin@yandex.ru](mailto:eugeneseimenkin@yandex.ru). <https://orcid.org/0000-0002-3776-5707>

**Sherstnev Pavel Aleksandrovich** – graduate student, Research Engineer; Artificial Intelligence Center, Siberian Federal University. E-mail: [sherstpasha99@gmail.com](mailto:sherstpasha99@gmail.com).

**Semenkin Evgeniy Stanislavovich** – Dr. Sc., Professor, Department of Systems Analysis and Operations Research; Siberian State University of Science and Technology. E-mail: [eugeneseimenkin@yandex.ru](mailto:eugeneseimenkin@yandex.ru). <https://orcid.org/0000-0002-3776-5707>

---

Статья поступила в редакцию 24.02.2025; принята к публикации 04.03.2025; опубликована 11.04.2025

The article was submitted 24.02.2025; accepted for publication 04.03.2025; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License



АВИАЦИОННАЯ  
И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ  
ТЕХНИКА

AVIATION  
AND SPACECRAFT  
ENGINEERING



УДК 629.785

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-72-82

**Для цитирования:** Выбор проектных параметров снарядов-пробойников активно-реактивного типа для движения в грунте / Е. В. Гусев, В. А. Заговорчев, В. В. Родченко и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 72–82. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-72-82.

**For citation:** Gusev E. V., Zagovorchev V. A., Rodchenko V. V., Sadretdinova E. R., Shipnevskaya E. A. [Selection of design parameters of active-reactive type penetrating projectiles for movement in the ground]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 72–82. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-72-82.

## Выбор проектных параметров снарядов-пробойников активно-реактивного типа для движения в грунте

Е. В. Гусев\*, В. А. Заговорчев, В. В. Родченко,  
Э. Р. Садретдинова, Е. А. Шипневская

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Российская Федерация, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4  
\*E-mail: ccg-gus@mail.ru

*Аннотация. Целью работы является расчетно-экспериментальное обоснование целесообразности применения (как на Земле, так и на поверхности других планет) снарядов-пробойников активно-реактивного типа (СПАРТ) для решения целого ряда научных задач, связанных с образованием скважин в грунте и доставкой полезных грузов на некоторую глубину. Методы исследования: рассмотрены различные схемы запусков (варианты организации процесса функционирования) СПАРТ. Произведен расчет глубины проникания СПАРТ в суглинок для случая, когда СПАРТ выстреливается из баллистической установки, расположенной таким образом, что скорость выхода снаряда равна скорости его входа в грунт, а тяга двигательной установки в два раза больше статического сопротивления грунта. Из множества вариантов произведен выбор трех конструктивных схем СПАРТ в зависимости от скорости горения используемого топлива для обеспечения нормального функционирования двигателя. В результате проведенных расчетно-экспериментальных исследований по определению глубин проникания в суглинок 152,4 мм снарядов-пробойников длиной 4,6 м, запускаемых с артиллерийской установки, использующей одинаковый пороховой заряд весом 18 кг, установлено, что с момента выключения двигателя до полного останова будет  $L_{\text{полн}}^{\text{dy}} = 205,48 \text{ м}$ , что более чем в два раза превышает глубину проникания такого же снаряда-пробойника, если бы он двигался в грунте только по инерции. Результаты, изложенные в статье, могут быть полезны для научных работников, аспирантов и инженеров, занятых созданием и эксплуатацией авиационной и ракетно-космической техники, а также студентов технических вузов, обучающихся по соответствующим специальностям.*

*Ключевые слова:* пенетратор, параметры и характеристики, снаряд пробойник активно-реактивного типа.

## Selection of design parameters of active-reactive type penetrating projectiles for movement in the ground

E. V. Gusev\*, V. A. Zagovorchev, V. V. Rodchenko,  
E. R. Sadretdinova, E. A. Shipnevskaya

Moscow Aviation Institute (National Research University)  
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation  
\*E-mail: ccg-gus@mail.ru

*Abstract. The aim of the work is the calculation and experimental substantiation of the expediency of using (both on Earth and on the surface of other planets) active-reactive type penetrator projectiles (SPART) for solving a number of scientific problems related to the formation of wells in the ground and the delivery of payloads to a certain depth. Research methods: various launch schemes (options for organizing the functioning process) of SPART are considered. The depth of penetration of an active-reactive type penetrator projectile into loam is calculated for the case when SPART is fired from a ballistic launcher located in such a way that the projectile exit velocity is equal to the velocity of its entry into the ground, and the thrust of the propulsion system is twice as great as the static resistance of the soil. From a variety of options, three SPART design schemes are selected depending on the combustion rate of the fuel used to ensure normal operation of the engine. As a result of the conducted calculation and experimental studies to determine the depth of penetration into loam of 152.4 mm penetrator projectiles 4.6 m long, launched from an artillery mount using the same powder charge weighing 18 kg, it was found that from the moment the engine is turned off until it comes to a complete stop,  $L_{full}^{ps} = 205,48$  m, which is more than twice the penetration depth of the same penetrator projectile if it moved in the soil only by inertia. Conclusion: the results presented in the article can be useful for researchers, graduate students and engineers involved in the creation and operation of aviation and rocket and space technology, and can also be useful for students of technical universities studying in the relevant specialties.*

*Keywords: penetrator, parameters and characteristics, active-reactive penetrator projectile.*

### Введение

В современной практике человеческой деятельности идет ежегодное увеличение объема земляных работ, связанных с регламентированным разрушением грунтовых массивов.

На Земле подобного рода работы проводятся в дорожном и капитальном строительстве, горнодобывающей промышленности и геологических изысканиях, мелиорации, строительстве и военном деле, а на других планетах Солнечной системы с целью исследования подповерхностных слоев, образования скважин и доставки грузов в определенную точку грунтового полупространства. При этом трудоемкость работ с грунтом и целый ряд специфических факторов, присущих традиционным технологическим приемам, приводит к тому, что себестоимость этих работ чрезвычайно высока и на них затрачивается существенная доля материальных и людских ресурсов.

Рассматриваемые в настоящей работе снаряды-пробойники активно-реактивного типа (СПАРТ) относятся к автономным аппаратам, способным двигаться в грунтах с высокой скоростью и образующим скважину методом уплотнения. При этом СПАРТ устанавливается в пусковой трубе баллистической установки и с помощью метательного устройства выбрасывается из нее в нужном направлении. Движение же в грунте осуществляется как за счет кинетической энергии, накопленной при запуске СПАРТ из пускового устройства баллистической установки, так и за счет тяги ракетного двигателя, включаемого в процессе проникания снаряда-пробойника в грунт.

### Схемы запуска СПАРТ в грунт

Возможны различные схемы запусков (варианты организации процесса функционирования) СПАРТ. При этом следует иметь в виду, что на всех участках движения снаряда-пробойника

кроме сил инерции и тяги двигателя на него действует дополнительно еще и сила притяжения планеты. Эта сила зависит как от ускорения свободного падения, имеющего разные значения на разных планетах, так и от угла входа снаряда-пробойника в грунт, определяемого углом между осью вращения СПАРТ и касательной к поверхности грунта (реголита). При этом максимальным значение силы тяжести будет в случае вертикального входа и движения СПАРТ в грунте, а при горизонтальном входе и движении это значение будет равным нулю.

*Схема 1.* Пусковая труба (ствол пускового устройства) баллистической установки может быть расположена на некотором удалении от поверхности грунта. С помощью метательного устройства СПАРТ выбрасывается из нее в нужном направлении, приобретая при этом некоторую скорость входа в грунт. Для случая запуска СПАРТ с баллистической установки, расположенной на борту спускающегося с некоторой скоростью на поверхность аппарата, необходимо учитывать действующий на этот аппарат эффект торможения за счет отдачи при выстреле снаряда-пробойника.

В свою очередь двигательная установка может включаться:

1.1. В момент срабатывания метательного устройства баллистической установки. При этом двигатель работает и на участке полета снаряда-пробойника к разделу сред и на участке движения его в грунте.

1.2. В момент входа снаряда-пробойника в грунт.

1.3. На участке движения его в грунте по инерции. Для случаев 1.2 и 1.3 движение в грунте осуществляется как за счет кинетической энергии СПАРТ, так и за счет тяги работающего двигателя.

1.4. После полного останова СПАРТ при движении его в грунте по инерции. Полная глубина проникания снаряда-пробойника складывается с участков движения его сначала по инерции, а затем за счет тяги работающего двигателя.

*Схема 2.* Пусковая труба может быть расположена таким образом, что головная часть снаряда-пробойника соприкасается с поверхностью грунта (импульсное вдавливание) и в процессе срабатывания метательного устройства СПАРТ начинает движение в грунте за счет давления пороховых газов.

В этом случае двигательная установка может также включаться:

2.1. Одновременно с моментом срабатывания метательного устройства. При этом движение снаряда-пробойника в грунте происходит как за счет расширения газов в канале ствола метательного устройства, так и за счет тяги работающего двигателя СПАРТ.

2.2. На участке движения снаряда-пробойника по инерции после срабатывания метательного устройства, когда давление пороховых газов в канале ствола уже равно нулю. Движение в грунте осуществляется как за счет кинетической энергии СПАРТ, так и за счет тяги работающего двигателя.

2.3. После полного останова при движении снаряда-пробойника в грунте по инерции за счет кинетической энергии, переданной ему пороховыми газами метательного устройства. Полная глубина проникания СПАРТ складывается с участков движения его сначала по инерции, а затем за счет тяги работающего двигателя.

Независимо от схемы расположения баллистической установки относительно поверхности грунта и момента включения двигателя при прохождении СПАРТ канала пусковой трубы за счет давления пороховых газов он может либо двигаться без закрутки, либо приобретая вращение вокруг собственной оси, т. е. с закруткой [1].

Очевидно, что на глубину проникания снаряда-пробойника активно-реактивного типа будут влиять не только указанные выше варианты организации процесса его функционирования, массово-габаритные параметры и характеристики, но также и величина тяги в каждый момент времени функционирования двигателя.

В частности, если тяга двигательной установки меньше статического сопротивления реголита, то включение двигателя необходимо проводить либо в момент входа СПАРТ в грунт, либо

на участке движения его по инерции, а после останова снаряда-пробойника такое включение двигательной установки не имеет смысла.

Включение двигательной установки СПАРТ в момент срабатывания метательного устройства пусковой трубы приводит к увеличению и скорости его входа в грунт и перегрузок, действующих на конструкцию снаряда-пробойника и его полезную нагрузку.

Известно также, что для получения максимальной глубины проникания снаряда-пробойника с работающей двигательной установкой, он должен двигаться в реголите с оптимальной скоростью, которая достигается тягой двигателя, превышающей статическое сопротивление среды в два раза [2].

Ниже приведен расчет глубины проникания СПАРТ в суглинок для случая, когда СПАРТ выстреливается из баллистической установки, расположенной таким образом, что скорость выхода снаряда равна скорости его входа в грунт, а тяга двигательной установки в два раза больше статического сопротивления грунта.

### Расчет глубины проникания СПАРТ в суглинок

В результате проведения лабораторных испытаний по достижению одной и той же глубины проникания при пусках из баллистической установки снарядов с разной массой установлено [3], что требуется меньшая энергия и меньший импульс при использовании более тяжелых снарядов. В частности, при запусках  $D_n = 152,4$  мм снарядов из специального артиллерийского орудия в суглинок естественного залегания, снаряд массой 148 кг достиг  $L = 24$  м, в то время как снаряд массой 612 кг углубился на  $L = 95$  м. И в первом и во втором случаях в орудии использовался одинаковый пороховой заряд весом  $\omega = 18$  кг (см. таблицу).

### Экспериментальные и расчетные данные по прониканию снаряда диаметром 152,4 мм в суглинок

$Mg$ , кг	$\omega$ , кг	$\beta$ , гр	$L$ , м	$v_0^3$ , м/с	$v_a$ , м/с	$k_\theta$
148	18	90	24	482	787	0,61
148	23,9	36	34	640	908	0,70
612	10	36	76	191	285	0,67
612	10	36	69	191	285	0,67
612	18	36	95	274	384	0,71
612	18	36	90	274	384	0,71

Проведем расчет возможной глубины проникания указанного выше  $D_n = 152,4$  мм снаряда длиной  $l = 4,6$  м и массой  $Mg = 612$  кг, с углом раствора головной части  $\beta = 36^\circ$ , если бы он выстреливался из специального артиллерийского орудия в суглинок естественного залегания и дополнительно был бы снабжен ракетным двигателем твердого топлива (РДТТ) с массой топлива равной  $M_T = 0,1 Mg$ , единичным импульсом  $I_{ед} = 2620 \frac{Нс}{кг}$  и плотностью  $\rho_T = 1600 \frac{кг}{м^3}$ .

В качестве натурального грунта принят суглинок, в который запускались с различными скоростями артиллерийские снаряды с указанными выше параметрами.

Воспользовавшись результатами имеющихся пусков этих снарядов в грунт с различными скоростями входа, представленными в табл. 1, подставим в зависимость глубины проникания по инерции

$$L = \frac{Mg_{\text{парт}}}{2B} \ln \left[ \frac{F_0 + BV_{\text{вх}}^2}{F_0} \right] \quad (1)$$

по два значения  $v_0^3 = V_{\text{вх}}$  и  $L$  из третьей и пятой строк, соответственно. В результате совместного решения относительно неизвестных  $F_0$  и  $B$  системы этих двух логарифмических уравнений определяем

$$F_0 = 27514,68 \text{ Н} \text{ и } B = 11,087 \frac{\text{Нс}^2}{\text{м}^2}$$

в формуле сопротивления грунта движущемуся снаряду-пробойнику [2].

Для достижения максимальной глубины проникания в грунт за счет тяги работающего двигателя снаряд должен двигаться с оптимальной скоростью, определяемой по формуле [4]

$$V_{opt} = \sqrt{\frac{F_0}{B}} \text{ и равной для рассчитанных выше величин } F_0 \text{ и } B - V_{opt} = 49,816 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

При этом тяга двигательной установки в соответствии с зависимостью  $R^{opt} = 2F_0$  должна быть в два раза выше статического сопротивления грунта, т. е.  $R^{opt} = 55029,36 \text{ Н}$ .

При заданном суммарном импульсе твердого топлива  $I_{сум} = I_{ед} M_T = 160344 \text{ Нс}$  и известной тяге  $R^{opt}$ , используя формулу [2]  $T = \frac{I_{ед} M_T}{2F_0}$ , определим время работы двигателя  $T = 2,914 \text{ с}$ .

Определим, как уменьшится масса рассматриваемого снаряда с заданными параметрами за счет замены в нем стали, из которой он сделан, на твердое топливо, плотность которого меньше стали. Объем 61,2 кг твердого топлива составляет  $W_T = \frac{M_T}{\rho_T} = 0,03825 \text{ м}^3$ . Примем, что свободный объем камеры сгорания РДТТ составляет  $W_{св} = 0,1 W_T = 0,003825 \text{ м}^3$ . Общий объем камеры сгорания равен  $W_{об} = W_T + W_{св} = 0,042075 \text{ м}^3$ .

Принимая плотность стали  $\rho_{ст} = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , найдем на сколько уменьшилась масса корпуса снаряда:

а) за счет разности плотностей топлива и стали  $\Delta Mg_1 = W_T (\rho_{ст} - \rho_T) = 237,15 \text{ кг}$ ;

б) за счет свободного объема камеры сгорания  $\Delta Mg_2 = W_{св} \rho_{ст} = 29,835 \text{ кг}$ ;

в) суммарное уменьшение массы  $\Delta Mg = \Delta Mg_1 + \Delta Mg_2 = 266,985 \text{ кг}$ .

Масса СПАРТ будет на 267 кг меньше массы снаряда-пробойника таких же размеров, но выполненного из стали и использовавшегося в эксперименте, т. е.  $Mg_{парт} = 345 \text{ кг}$ .

При условии использования упомянутой выше артиллерийской системы с одинаковыми навесками  $\omega = 18 \text{ кг}$  скорость входа СПАРТ массой  $Mg_{парт} = 345 \text{ кг}$  будет равна  $v_0 = 365 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , в то время как для снаряда массой  $Mg = 612 \text{ кг}$  она равна  $v_0 = 274 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Глубина же проникания снаряда массой  $Mg = 612 \text{ кг}$  в грунт по инерции равна  $L_{полн} = 95 \text{ м}$ , а массой  $Mg_{парт} = 345 \text{ кг}$ , если бы он двигался в грунте только по инерции, равна  $L_{полн} = 62,26 \text{ м}$ .

Для достижения максимального проникания в грунт за счет тяги работающего двигателя двигательная установка СПАРТ должна быть включена на глубине:

$$L_{V_{opt}} = \frac{Mg_{парт}}{2B} \ln \left[ \frac{F_0 + BV_{вх}^2}{F_0 + BV_{opt}^2} \right] = 51,42 \text{ м}, \text{ когда скорость снаряда, движущегося по инерции,}$$

снизится до  $V_{opt} = 49,816 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  [4].

Глубина проникания СПАРТ за счет тяги двигателя при условии, что тяга РДТТ равна  $R = 2F_0 = 55029,36 \text{ Н}$  и он включается на глубине  $L_{V_{opt}} = 51,42 \text{ м}$ , будет определяться по формуле  $L_{ду} = V_{opt} T = 145,16 \text{ м}$ .

После выключения двигателя СПАРТ массой ( $Mg_{\text{парт}} = 283,8 \text{ кг}$ ) будет продолжать движение по инерции до полного останова и пройдет путь  $L_{V=0} = 8,9 \text{ м}$

Полная глубина проникания СПАРТ массой  $Mg_{\text{парт}} = 345 \text{ кг}$ , если бы он двигался в грунте на первом этапе с момента входа и до глубины 51,42 м по инерции; на втором этапе с включенной двигательной установкой при массе топлива 61,2 кг и оптимальной тяге; на третьем этапе с момента выключения двигателя до полного останова, будет  $L_{\text{полн}}^{\text{дв}} = L_{V_{\text{opt}}} + L_{\text{дв}} + L_{V=0} = 205,48 \text{ м}$ .

При проектировании двигательной установки для СПАРТ необходимо учитывать перегрузки, действующие как на его корпус, так и на топливный заряд в момент полного погружения в грунт головной части СПАРТ. В этот момент СПАРТ движется по инерции и перегрузка принимает максимальное значение:

$$n_x = -\frac{F_0 + BV_{\text{вх}}^2}{Mg_{\text{парт}}g} = -\frac{27514,68 + 11,087 \cdot 365^2}{345 \cdot 9,81} = -445,07.$$

Примем, что рабочее давление в камере сгорания равно  $P_{\text{к}} = 25 \text{ МПа}$ . Минимальную толщину стенки камеры сгорания в соответствии с теорией оболочек определим по формуле [5]

$$\delta_{\text{min}} = \frac{P_{\text{к}}}{2\sigma_{\text{в}}} r \varepsilon = 1,6 \text{ мм},$$

где  $\sigma_{\text{в}} = 6 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$  – предел прочности материала камеры сгорания на растяжение;  $r = \frac{D_{\text{н}}}{2}$  – радиус РДТТ;  $\varepsilon = 1,5$  – коэффициент безопасности.

Исходя из конструктивных и технологических соображений, выберем толщину стенки камеры сгорания  $\delta = 2,2 \text{ мм}$ . При этом внутренний диаметр камеры сгорания будет равен  $D_{\text{кс}} = D_{\text{н}} - 2\delta = 0,148 \text{ м}$ .

Для более рационального использования объема камеры сгорания целесообразно применять заливной заряд твердого топлива. В этом случае заряд определенной массы и плотности будет иметь минимальную длину. Для рассматриваемого случая, когда известен внутренний диаметр камеры сгорания, объем, масса и плотность топлива, длина топливного заряда определится по формуле  $l_{\text{тз}} = \frac{4M_{\text{т}}}{\pi\rho_{\text{т}}D_{\text{кс}}^2} = 2,22 \text{ м}$ .

### Выбор конструктивной схемы СПАРТ

В зависимости от скорости горения используемого топлива для обеспечения нормального функционирования двигателя могут быть применены РДТТ разных конструктивных схем. Ниже на рисунке представлены три конструктивные схемы [6–7].

**Схема а.** Скорость горения выбранного (быстрогогорящего) топлива при заданном давлении в камере будет равна  $U = 0,149P_{\text{к}}^{0,53} = 744 \text{ мм}$ . Толщина прогревшего слоя за полное время работы двигателя  $\Delta = UT = 2,168 \text{ м}$ .

Для обеспечения процесса движения СПАРТ в грунте за счет работающего двигателя с оптимальной скоростью можно использовать двигатель с торцевым горением заряда (сигаретное горение заряда) (см. рис. а).

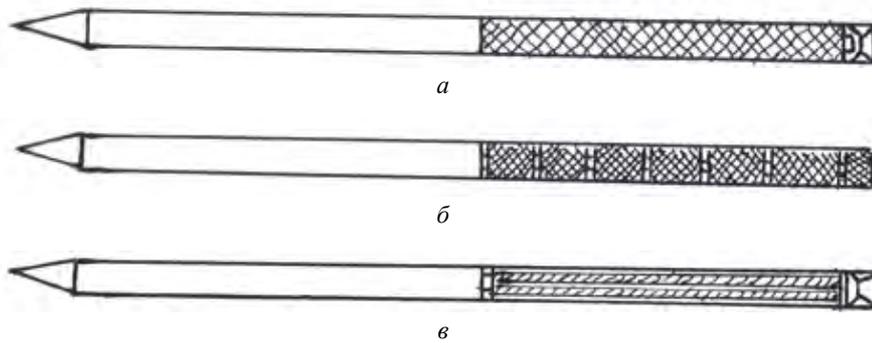
При этом поверхность горения топлива будет равна  $S_{\text{полн}} = \frac{\pi D_{\text{кс}}^2}{4} = 0,0172$ .

Суммарная площадь критических сечений всех сопел может быть определена на основании установившегося равновесия между приходом газов в камеру сгорания и их расходом по формуле [8–10]

$$F_{кр} = \frac{U\beta_p S_{полн} \rho_T}{P_k} = 0,001146 \text{ м}^2,$$

где  $\beta_p = 1400 \frac{\text{Нс}}{\text{кг}}$  – удельный импульс давления.

При выбранной конструктивной схеме СПАРТ, использующего двигатель с торцевым горением зарядов, можно использовать либо одно сопло с диаметром критического сечения 38 мм, либо сопловой блок с суммарной площадью критических сечений 1146 мм<sup>2</sup> [11–12].



Конструктивные схемы снарядов-пробойников активно-реактивного типа:  
*a* – с залитым твердотопливным зарядом; *b* – многомодульным двигателем;  
*v* – вложенным трубчатым зарядом

Constructive schemes of active-reactive type projectiles:  
*a* – with a filled solid fuel charge; *b* – with a multimodule engine; *v* – with a nested tubular charge

**Схема б.** Скорость горения выбранного топлива при заданном давлении в камере будет равна  $U = 18 + 1,76 \cdot 10^{-6} P_k = 62 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$ . Толщина сгоревшего слоя за полное время работы двигателя  $\Delta = UT = 180,668 \text{ мм}$ .

Для обеспечения процесса движения СПАРТ в грунте за счет работающего двигателя с оптимальной скоростью можно использовать шестисекционный многомодульный двигатель с торцевым горением зарядов (см. рис. б). Длина каждого заряда при этом будет равна удвоенной толщине прогоревшего слоя, т. е.  $l_{тз}^{1/6} = 2\Delta = 361,336 \text{ мм}$ .

При этом суммарная поверхность горения топлива будет равна [13–14]

$$S_{полн} = \frac{\pi D_{кк}^2}{4} n = 0,206 \text{ м}^2,$$

где  $n = 12$  – количество поверхностей горения.

Суммарная площадь критических сечений всех сопел может быть определена на основании установившегося равновесия между приходом газов в камеру сгорания и их расходом по формуле [8]

$$F_{кр} = \frac{U\beta_p S_{полн} \rho_T}{P_k} = 0,001146 \text{ м}^2.$$

При выбранной конструктивной схеме СПАРТ, использующего шестисекционный многомодульный двигатель с торцевым горением зарядов, можно использовать семь кольцевых сопел. Эти сопла целесообразно расположить в торцах каждого из шести зарядов, причем пять средних сопел должны иметь одинаковые критические сечения площадью  $0,000191 \text{ м}^2$ , а крайние сопла должны быть в два раза по площади меньше, т. е.  $0,0000955 \text{ м}^2$ .

**Схема в.** Скорость горения выбранного топлива при заданном давлении в камере будет равна  $U = 0,001P_k^{0,53} = 5,667 \text{ мм}$ . Толщина прогоревшего слоя за полное время работы двигателя  $\Delta = UT = 0,015 \text{ м}$ .

Для обеспечения процесса движения СПАРТ в грунте за счет работающего двигателя с оптимальной скоростью, в этом варианте можно использовать двигатель с вложенными трубчатыми зарядами (см. рис. в).

Основными недостатками конструктивной схемы СПАРТ, использующего двигатель с вложенными трубчатыми зарядами, является низкая степень заполнения объема камеры сгорания топливом и необходимость обеспечения устойчивости топливных зарядов при входе СПАРТ в грунт (см. рис. в) [15–17].

### Заключение

В результате проведенных расчетно-экспериментальных исследований по определению глубин проникания в суглинки  $152,4 \text{ мм}$  снарядов-пробойников длиной  $4,6 \text{ м}$ , запускаемых с артиллерийской установки, использующей одинаковый пороховой заряд весом  $18 \text{ кг}$ , установлено, что:

1. Максимальная полная глубина проникания СПАРТ, если бы он двигался в грунте:
  - на первом этапе с момента входа и до глубины  $51,42 \text{ м}$  по инерции;
  - на втором этапе с включенной двигательной установкой при массе топлива  $61,2 \text{ кг}$  и оптимальной тяге;
  - на третьем этапе с момента выключения двигателя до полного останова, будет  $L_{\text{полн}}^{\text{ду}} = 205,48 \text{ м}$ , более чем в два раза превышает глубину проникания такого же снаряда-пробойника, если бы он двигался в грунте только по инерции.
2. Установка РДТТ в задней части СПАРТ (за счет смещения центра масс вперед из-за разницы в плотностях пороха и стали) существенно увеличивают их статическую устойчивость, что при неуправляемом движении снарядов-пробойников в грунте позволяет добиться более прямолинейной траектории.
3. Целесообразно применять (как на Земле, так и на поверхности других планет) СПАРТ для решения целого ряда научных задач, связанных с образованием скважин в грунте и доставкой полезных грузов на некоторую глубину
4. Для практического использования формулы, определяющей силу сопротивления грунта при внедрении в него снарядов-пробойников, необходимо иметь массив экспериментальных значений удельных статических сопротивлений  $F_{0\text{уд}}$  и коэффициентов сопротивления  $B$  в зависимости от формы СПАРТ и скорости движения его в грунте.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (шифр FSFF-2025-0001).

**Acknowledgments.** The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (code FSFF-2025-0001).

### Библиографические ссылки

1. Влияние закрутки грунтового реактивного пенетратора на параметры его движения в лунном грунте / Е. В. Гусев, В. А. Заговорчев, В. В. Родченко и др. // Вестник НПО им. С. А. Лавочкина. 2024. № 1(63). С. 56–62.
2. Родченко В. В. Основы проектирования реактивных аппаратов для движения в грунте. М. : МАИ-Принт, 2009. 359 с.
3. Численное и экспериментальное исследование проникания снаряда-пробойника в грунтовой массив / В. Н. Аптуков, В. А. Девяткин, А. В. Фонарев, М. Ю. Александров // Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. № 4(12). С. 5–11.
4. Заговорчев В. А. Метод обоснования технических характеристик многомодульных лунных реактивных пенетраторов : дис. ... канд. техн. наук. М., 2015. 144 с.
5. Белов Г.В., Зоншайн С.И., Оскерко А.П. Основы проектирования ракет. М.: Машиностроение, 1974, 255 с.
6. Зельдович Я. Б., Ривин М. А., Франк-Каменецкий Д. А. Импульс реактивной силы пороховых ракет. М. : Оборонгиз, 1963, 190 с.
7. Заговорчев В. А., Пронина П. Ф., Родченко В. В. Расчет основных проектных параметров и конструкция реактивного пенетратора для движения в лунном грунте // Изв. вузов. Авиац. техн. 2020. № 4. С. 126–132.
8. Сагомоян А. Я. Проникание. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2014. 298 с.
9. Применение реактивных пенетраторов для движения в лунном грунте / В. В. Родченко, В. А. Заговорчев, Э. Р. Садретдинова, П. Ф. Пронина // Вестник Уфим. гос. авиац. техн. ун-та. 2019. Т. 23, № 1(83). С. 56–63.
10. Федоров С. В., Федорова Н. А. Влияние импульса реактивной тяги на глубину проникания исследовательского зонда в грунт планеты // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 1 (13). С. 29–30.
11. Велданов В. А., Даурских А. Ю. Возможности моделирования проникания тел в грунтовые среды // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 9 (21). С. 28–29.
12. Определение параметров проникания пенетраторов в грунтово-скальные преграды по различным эмпирическим зависимостям / С. В. Федоров, В. А. Велданов, А. В. Дюков, Т. А. Гущина // Инженерный журнал: наука и инновации. 2022. № 4. С. 1–2.
13. Михайловский Ю. В. Основы теории реактивных двигателей. МО СССР, 1970, 198 с.
14. Гостинцев Ю. А. Расходные характеристики сопла при истечении винтового потока газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 158–162.
15. Алемасов В. Е. Дрегалин А. Ф. Теория ракетных двигателей. М. : Машиностроение, 1969, 547 с.
16. Орлов Б. В. Мазинг Г. Ю. Термодинамические и баллистические основы проектирования РДТТ. М. : Оборонгиз, 1968. 536 с.
17. Куров В. А. Должанский Ю. М. Основы проектирования пороховых ракетных снарядов. М. : Оборонгиз, 1961. 294 с.

### References

1. Gusev E. V., Zagovorchev V. A., Rodchenko V. V. et al. [The influence of the twist of a ground jet penetrator on the parameters of its movement in the lunar soil]. *Vestnik NPO im. S. A. Lavochkina*. 2024, No. 1(63), P. 56–62 (In Russ.).
2. Rodchenko V. V. [Fundamentals of Designing Jet Apparatus for Movement in the Ground]. *Osnovy proektirovaniya reaktivnykh apparatov dlya dvizheniya v grunte*. Moscow, MAI Publ., 2009, 359 p.
3. Aptukov V. N., Devyatkin V. A., Fonarev A. V., Aleksandrov M. Yu. [Numerical and Experimental Study of Penetration of a Punching Projectile into a Soil Massif]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2012, No. 4(12), P. 5–11 (In Russ.).

4. Zagovorchev V. A. *Metod obosnovaniya tekhnicheskikh kharakteristik mnogomodul'nykh lunnykh reaktivnykh penetratorov*. Kand. Dis. [Method of substantiation of technical characteristics of multimodular lunar jet penetrators. Cand. Diss.]. Moscow, 2015, 144 p.
5. Belov G. V. et al. *Osnovy proektirovaniya raket* [Fundamentals of rocket design]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1974, 255 p.
6. Zel'dovich Ya. B. et al. *Impul's reaktivnoy sily porokhovykh raket* [Impulse of reactive force of powder rockets]. Moscow, Oborongiz Publ., 1963, 190 p.
7. Zagovorchev V. A., Pronina P. F., Rodchenko V. V. [Calculation of the main design parameters and design of a jet penetrator for movement in lunar soil]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatcionnaya tekhnika*. 2020, No. 4, P. 126–132 (In Russ.).
8. Sagomonyan A. Ya. *Pronikanie* [Penetration.]. Moscow, Izd-vo Moskovskogo un-ta Publ., 2014, 298 p.
9. Rodchenko V. V., Zagovorchev V. A., Sadretdinova E. R., Pronina P. F. [Application of Jet Penetrators for Movement in Lunar Soil]. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta*. 2019, Vol. 23, No. 1(83), P. 56–63 (In Russ.).
10. Fedorov S. V., Fedorova N. A. [Effect of jet thrust impulse on the penetration depth of a research probe into the planet's soil]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii*. 2013, No. 1 (13), P. 29–30 (In Russ.).
11. Veldanov V. A., Dauriskikh A. Yu. [Possibilities of modeling the penetration of bodies into soil environments]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii*. 2013, No. 9 (21), P. 28–29 (In Russ.).
12. Fedorov S. V., Veldanov V. A., Dyukov A. V., Gushchina T. A. [Determination of the penetration parameters of penetrators into soil-rock barriers using various empirical dependencies]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii*. 2022, No. 4, P. 1–2 (In Russ.).
13. Mikhaylovskiy Yu. V. *Osnovy teorii reaktivnykh dvigateley* [Fundamentals of the Theory of Jet Engines]. Moscow, MO SSSR Publ., 1970, 198 p.
14. Gostintsev Yu. A. [Flow Characteristics of a Nozzle during the Exhaust of a Helical Gas Flow]. *Izv. AN SSSR. MZhG*. 1969, No. 4, P. 158–162 (In Russ.).
15. Alemasov V. E., Dregalin A. F. *Teoriya raketnykh dvigateley* [Theory of Rocket Engines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969, 547 p.
16. Orlov B. V., Mazing G. Yu. *Termodinamicheskie i ballisticheskie osnovy proektirovaniya RDTT* [Thermodynamic and Ballistic Fundamentals of Designing Solid Propellant Rocket Engines]. Moscow, Oborongiz Publ., 1968, 536 p.
17. Kurov V. A., Dolzhanskiy Yu. M. *Osnovy proektirovaniya porokhovykh raketnykh snaryadov* [Dolzhansky Yu. Fundamentals of Designing Powder Rocket Projectiles]. Moscow, Oborongiz Publ., 1961, 294 p.

© Гусев Е. В., Заговорчев В. А., Родченко В. В.,  
Садретдинова Э. Р., Шипневская Е. А., 2025

---

**Гусев Евгений Владимирович** – кандидат технических наук, доцент кафедры 610 «Управление эксплуатацией ракетно-космических систем»; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). E-mail: ccg-gus@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-1634-0352>

**Заговорчев Владимир Александрович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры 610 «Управление эксплуатацией ракетно-космических систем», начальник НИО-6 аэрокосмического института; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). E-mail: zagovorchev@mai.ru. <https://orcid.org/0009-0003-9892-3742>

**Родченко Владимир Викторович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры 610 «Управление эксплуатацией ракетно-космических систем»; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). E-mail: rodchenko47@mail.ru. 0009-0004-9105-8263

**Садретдинова Эльнара Рамилевна** – кандидат технических наук, доцент, заместитель директора аэрокосмического института; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). E-mail: elnara-5@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0006-3601-9653>

**Шипневская Елизавета Алексеевна** – аспирант кафедры 610 «Управление эксплуатацией ракетно-космических систем»; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). E-mail: Shipnevskaya.E@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0001-4018-4786>

**Gusev Evgeniy Vladimirovich** – Cand. Sc., Associate Professor of Department 610 “Operation Management of Rocket and Space Systems”; Moscow Aviation Institute (National Research University). E-mail: ccg-gus@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-1634-0352>

**Zagovorchev Vladimir Aleksandrovich** – Cand. Sc., Associate Professor, Associate Professor of Department 610 “Operation Management of Rocket and Space Systems”, Head of Research Department-6 Aerospace Institute; Moscow Aviation Institute (National Research University). E-mail: zagovorchev@mai.ru. <https://orcid.org/0009-0003-9892-3742>

**Rodchenko Vladimir Viktorovich** – Dr. Sc., Professor, Professor of Department 610 “Operation Management of Rocket and Space Systems”; Moscow Aviation Institute (National Research University). E-mail: rodchenko47@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0004-9105-8263>

**Sadretdinova Elnara Ramilevna** – Cand. Sc., Associate Professor, Deputy Director of the Aerospace Institute; Moscow Aviation Institute (National Research University). E-mail: elnara-5@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0006-3601-9653>

**Shipnevskaya Elizaveta Alekseevna** – postgraduate student of Department 610 “Operation Management of Rocket and Space Systems”; Moscow Aviation Institute (National Research University). E-mail: Shipnevskaya.E@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0001-4018-4786>

---

Статья поступила в редакцию 03.12.2024; принята к публикации 18.12.2024; опубликована 11.04.2025  
The article was submitted 03.12.2024; accepted for publication 18.12.2024; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License

УДК 621.454.2

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-83-93

**Для цитирования:** Журавлев В. Ю., Манохина Э. С., Толстопятов М. И. Проектирование и испытания форсунок, изготовленных методами аддитивных технологий, для жидкостного ракетного двигателя малой тяги // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 83–93. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-83-93.

**For citation:** V. Y. Zhuravlev, E. S. Manokhina, M. I. Tolstopyatov [Design and testing of injectors manufactured using additive technologies for a low-thrust liquid rocket engine]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 83–93. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-83-93.

## **Проектирование и испытания форсунок, изготовленных методами аддитивных технологий, для жидкостного ракетного двигателя малой тяги**

В. Ю. Журавлев, Э. С. Манохина\*, М. И. Толстопятов

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31  
\*E-mail: xim96@inbox.ru

*Аннотация.* Современные жидкостные ракетные двигатели малой тяги (ЖРДМТ) представляют собой сложные инженерные конструкции, к которым предъявляются очень высокие требования по эффективности, надёжности и экономичности. Для подтверждения характеристик разрабатываемых изделий необходим комплекс испытаний опытных образцов, позволяющий проверить их работоспособность в условиях, приближенных к реальным. В рамках данной работы был проведён термодинамический расчёт контура камеры ЖРДМТ для топливных компонентов, таких как жидкий керосин и газообразный кислород.

Методика расчёта форсунок, использованная в работе, основана на применении критериев подобия. Это позволяет осуществлять переход от малогабаритных форсунок к форсункам, пригодным для испытаний в полномасштабных условиях, включая стендовые испытания с использованием метода «гидропролив». Для проведения испытаний была создана специализированная испытательная установка, позволяющая тестировать форсунки, изготовленные с применением современных аддитивных технологий, таких как 3D-печать из полимерных материалов. Это не только снижает стоимость создания прототипов, но и ускоряет процесс тестирования.

Испытания форсунок на стенде играют ключевую роль в проверке их работоспособности. Этот метод испытаний позволяет исследовать поведение форсунок в условиях, максимально приближенных к эксплуатационным. В рамках данного исследования использовались форсунки, изготовленные с применением аддитивных технологий из полимерного пластика. Применение таких материалов на начальных этапах тестирования позволило сократить затраты и временные ресурсы на производство опытных образцов. Во время испытаний форсунки подвергались воздействию жидкости под заданным перепадом давления, что позволяло оценить их работоспособность, равномерность распределения топлива.

Результаты проведённых испытаний продемонстрировали высокую степень соответствия теоретических расчётов с фактическими данными. Форсунки показали устойчивую работу, соответствующую расчетным характеристикам, а также доказали свою пригодность для дальнейших этапов разработки. Применение аддитивных технологий при изготовлении форсунок подтвердило свою эффективность, позволив сократить цикл создания прототипов и снизить затраты на их производство. Кроме того, методика «гидропролива» показала себя как надёжный способ проверки и верификации рабочих характеристик форсунок, что является важным этапом на пути к их внедрению в реальную эксплуатацию. Таким образом, предложенная методика, включающая использование критериев подобия и аддитивных технологий, позволяет существенно упростить процесс разработки и испытаний, повысить их точность и приблизить к реальным условиям эксплуа-

тации. Это особенно важно для повышения надёжности и качества конечных изделий, используемых в ракетно-космической технике, что способствует снижению рисков при эксплуатации.

*Ключевые слова:* смесеобразование, смесительная головка, жидкостной ракетный двигатель, двигатель малой тяги, испытания.

## **Design and testing of injectors manufactured using additive technologies for a low-thrust liquid rocket engine**

V. Y. Zhuravlev, E. S. Manokhina\*, M. I. Tolstopyatov

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation  
\*E-mail: xim96@inbox.ru

*Abstract.* Modern liquid rocket engines of low thrust (LRELT) represent complex engineering structures, which are subject to very high requirements in terms of efficiency, reliability, and cost-effectiveness. To confirm the characteristics of the developed designs, a comprehensive set of tests for prototype samples is required, allowing their operability to be verified under conditions close to real-life operation. As part of this work, a thermodynamic calculation of the LRELT chamber for fuel components such as liquid kerosene and gaseous oxygen was conducted. The injector calculation method used in this work is based on the application of similarity criteria. This allows the transition from small-scale injectors to those suitable for full-scale testing, including stand tests using the “hydroflush” method.

For testing, a specialized test rig was created, allowing the testing of injectors manufactured using modern additive technologies, such as 3D printing from polymer materials. This not only reduces the cost of creating prototypes but also accelerates the testing process. The injector tests on the stand play a crucial role in verifying their operability. This testing method allows studying the behavior of injectors in conditions as close to operational as possible. In this study, injectors manufactured using additive technologies from polymer plastic were used. The use of such materials in the early stages of testing helped to reduce costs and time resources for producing prototype samples. During the tests, the injectors were subjected to liquid at a specified pressure differential, which allowed their operability and fuel distribution uniformity to be assessed.

The results of the tests demonstrated a high degree of correlation between theoretical calculations and actual data. The injectors showed stable operation corresponding to the calculated characteristics, and also proved their suitability for further development stages. The use of additive technologies in the manufacturing of the injectors confirmed its effectiveness, allowing the prototype production cycle to be shortened and costs reduced. Moreover, the “hydroflush” method proved to be a reliable means of verifying and validating the working characteristics of the injectors, which is an important step toward their implementation in real-world operations.

Thus, the proposed methodology, which includes the use of similarity criteria and additive technologies, significantly simplifies the process of development and testing, improves accuracy, and brings the results closer to real operating conditions. This is especially important for increasing the reliability and quality of final products used in rocket and space technology, contributing to a reduction in operational risks.

*Keywords:* mixing, mixing head, liquid rocket engine, low-thrust engine, testing.

### **Введение**

В последние годы наблюдается значительное развитие технологий производства жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) [1–4], особенно малой тяги, которые находят широкое применение в аэрокосмической отрасли. Совершенствование этих двигателей требует не только разработки новых конструкций, но и модернизации существующих стендов для их испытаний. Использование стенда для учебно-демонстрационных занятий также позволит повысить качество подготовки

студентов, обучающихся по данному направлению. Одним из таких стендов является испытательный комплекс СибГУ им. М. Ф. Решетнева [5], предназначенный для огневых испытаний ракетных двигателей с такими компонентами, как «газообразный кислород» и «газообразный метан». Несмотря на успешное функционирование данного стенда, появилась необходимость в его модернизации для испытаний ракетных двигателей, работающих на компонентах «жидкий керосин» и «газообразный метан». Основной причиной этого является необходимость обеспечения более качественного охлаждения камеры двигателя, что в перспективе позволит увеличить время работы двигателя и обеспечит более высокое сопротивление камеры воздействию высокой температуры продуктов сгорания.

В рамках модернизации стенда для огневых испытаний жидкостных ракетных двигателей малой тяги (ЖРД МТ), предназначенных для работы на жидком керосине и газообразном метане, была проведена серия термодинамических расчетов камеры двигателя. Целью этих расчетов было определение геометрических параметров действительного соотношения компонентов топлива и их массовый расход, а также температур продуктов сгорания и удельного импульса. Термодинамический расчет осуществлен с помощью методики [6; 7], исходные данные для выполнения расчета и основные полученные результаты представлены в табл. 1. Газодинамический контур и трехмерная модель камеры двигателя, полученной в ходе расчета, представлены на рис. 1 и 2.

Таблица 1

Смесительная головка, спроектированная с учетом изготовления методом 3D-печати

Исходные данные	
Окислитель	O <sub>2</sub>
Горючее	T1
Давление в камере	1 МПа
Давление на срезе сопла	0,00084 МПа
Давление наружное	0,00001 МПа
Тяга	200 Н
Результаты расчетов	
Массовый расход	0,062 кг/с
Расход горючего	0,02 кг/с
Расход окислителя	0,042 кг/с
Температура в КС	3256 К
Температура на срезе сопла	1026 К
Удельный импульс	3480 м/с
Коэффициент избытка окислителя в ядре КС	0,909
Коэффициент избытка окислителя для пристеночного слоя	0,07
Средний коэффициент избытка окислителя	0,6

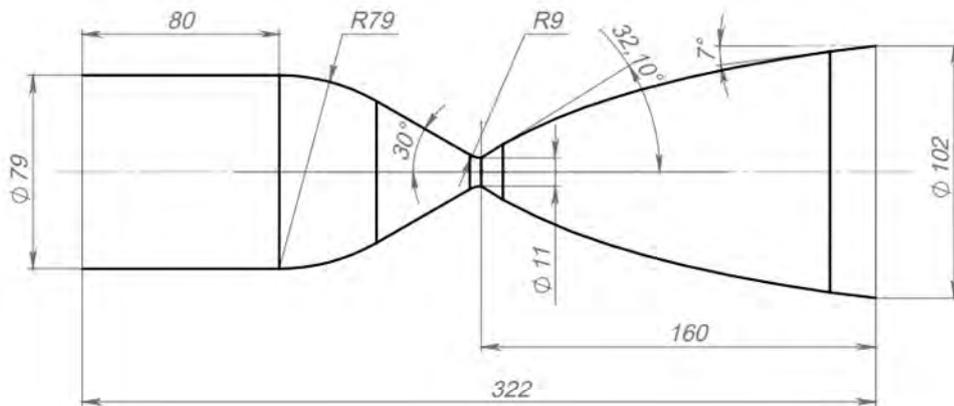


Рис. 1. Газодинамический контур камеры двигателя

Fig. 1. Gas-dynamic circuit of the engine chamber

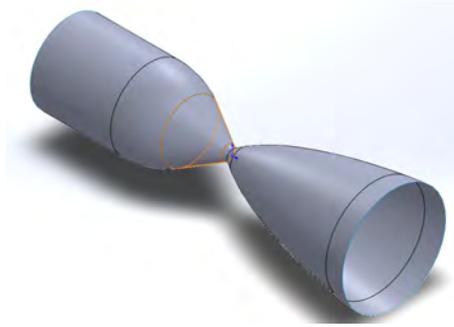


Рис. 2. 3D-модель камеры двигателя

Fig. 2. 3D model of the engine chamber

**Постановка задачи**

Проектирование новой смесительной головки для ЖРД является критически важным этапом, поскольку от эффективности смешивания компонентов топлива зависит стабильность и эффективность работы двигателя. Основная задача смесительной головки – обеспечить равномерное смешивание жидкого керосина и газообразного метана, что позволяет достичь полного и эффективного сгорания топлива. Наиболее важные и сложные процессы в двигателе протекают в камере сгорания. Их характер определяется топливом и смесительной головкой. В качестве прототипа для смесительной головки использована камера ЖРД МТ, работающая на компонентах «газообразный метан – газообразный кислород» [1–4], что позволило свести задачу о проектировании смесительной головки к задаче проектирования форсунки горючего – жидкий керосин.

В качестве форсунки горючего выбрана однокомпонентная центробежная форсунка с тангенциальным подводом компонента. Схема форсунки с основными обозначениями представлена на рис. 3.

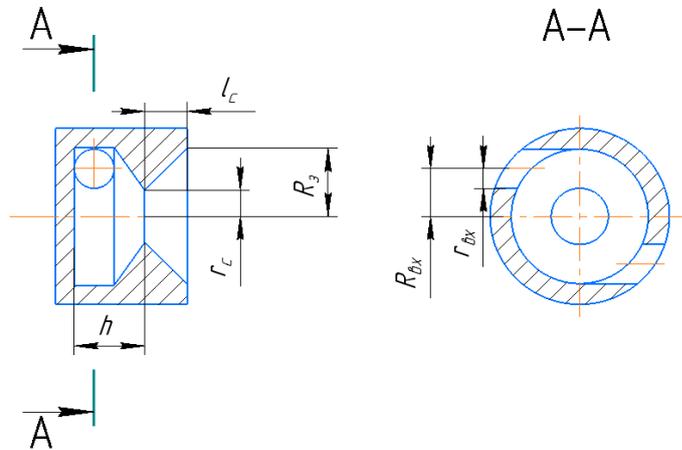


Рис. 3. Расчетная схема форсунки горючего

Fig. 3. Design diagram nozzle

При проектировании однокомпонентной форсунки учитывались различные углы раскрытия факела  $2\alpha$ , перепады давления  $\Delta P$ , геометрическая характеристика форсунки  $A$ :

$$A = \frac{R_{\text{вх}} r_c}{i_{\text{вх}} r_{\text{вх}}^2}$$

Коэффициент расхода форсунки  $\mu$ :

$$\mu = \varphi \sqrt{\frac{\varphi}{2 - \varphi}}$$

где  $\varphi$  – коэффициент живого сечения сопла форсунки:

$$\varphi = 1 - \frac{r_{\text{ж}}^2}{r_{\text{с}}^2} = \frac{1}{\left( \sqrt[3]{\frac{A_3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{A_3^2}{8} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{A_3}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{A_3^2}{8} - \frac{1}{27}}} \right)}.$$

Эквивалентная геометрическая характеристика форсунки, учитывающая влияние вязкости реальной жидкости,

$$A_3 = \frac{A}{1 + \frac{\lambda}{2} R_{\text{вх}} (R_{\text{вх}} + d_{\text{вх}} - r_{\text{с}})},$$

где  $\lambda$  – коэффициент трения, определяемый при условиях на входе в форсунку.

Коэффициент трения при условиях на входе в форсунку  $\lambda$  определяется с помощью эмпирической зависимости:

$$\lg \lambda = \frac{25,8}{(\lg R_{\text{вх}})^{2,58}} - 2.$$

Число Рейнольдса на входе в форсунку:

$$Re_{\text{вх}} = \frac{4\dot{m}_{\text{ф}}}{\pi \eta d_{\text{вх}} \sqrt{i_{\text{вх}}}},$$

где  $\eta$  – динамическая вязкость компонента топлива, подаваемого через форсунку,  $\dot{m}_{\text{ф}}$  – массовый расход компонента через форсунку.

### Параметры для выполнения расчетов

В результате расчетов по методике [8–11] были разработаны три варианта форсунки для жидкого керосина, геометрические размеры представлены в табл. 2.

Таблица 2

Геометрические размеры форсунок под керосин

Угол распыла, град	90	100	110
Внутренний радиус, гс, мм	0,56	0,6	0,7
Внешний радиус входа, R <sub>вх</sub> , мм	1,12	1,2	1,4
Внутренний радиус входа, гвх, мм	0,35	0,29	0,27
Длина сопла l <sub>с</sub> , мм	0,89	0,96	1,12
Высота форсунки, h, мм	1,12	1,2	1,4
Радиус закрутки, R <sub>з</sub> , мм	1,47	1,49	1,67

С целью подтверждения полученных результатов расчета, было принято решение о проведении испытаний форсунки на гидропролив на специальном стенде. Поскольку непосредственное использование жидкого керосина невозможно из-за конструкции стенда, исследование параметров распыла форсунки проводится на рабочей жидкости – воде.

Для подобию двух и большего количества гидродинамических процессов должны быть одинаковыми (idem) одноименные коэффициенты: критерий Эйлера – Eu и критерий Рейнольдса – Re в полостях форсунки:

$$Eu = \frac{p^*}{\rho C^2} \quad \text{и} \quad Re = \frac{CL}{\nu},$$

где C – скорость;  $\nu$  – кинематическая вязкость; L – диаметр сопла форсунки;  $\rho$  – плотность; p – давление.

Таким образом, гидродинамическое подобие полостей форсунок на воде и жидком керосине будет достигнуто соответствием коэффициентов. Для оценки результатов испытаний

на рабочем теле (вода) и пересчете на рабочее тело (жидкий керосин) использованы параметры жидкостей, представленные в табл. 3.

По полученным значениям проведено сравнение критериев подобия двух жидкостей для форсунок с различными углами раскрытия (90, 100, 110). Результаты расчетов критериев подобия форсунок представлены в табл. 4.

Таблица 3

## Параметры жидкостей

Керосин		Вода	
Кинематическая вязкость $\vartheta$ , м <sup>2</sup> /с	0,00000182	Кинематическая вязкость $\vartheta$ , м <sup>2</sup> /с	0,00000115
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	819	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1000
Диаметр сопла форсунки		Диаметр сопла форсунки	
$L_{90}$ , м	0,00112	$L_{90}$ , м	0,00107
$L_{100}$ , м	0,0012	$L_{100}$ , м	0,00117
$L_{110}$ , м	0,0014	$L_{110}$ , м	0,00131
Давление		Давление	
$P_{90}$ , МПа	1,25	$P_{90}$ , МПа	1,25
$P_{100}$ , МПа	1,4	$P_{100}$ , МПа	1,4
$P_{110}$ , МПа	1	$P_{110}$ , МПа	1

Таблица 4

## Результаты расчетов критериев подобия форсунок

<p>Для Керосина 90°</p> $Re = \frac{8,89 \cdot 0,00112}{0,00000182} = 5471$ $C = \frac{\dot{m}}{\rho F_c} = \frac{0,0072}{819 \cdot 9,883 \cdot 10^{-7}} = 8,89 \text{ м/с}$ $Eu = \frac{1,25 \cdot 10^6}{819 \cdot 8,89^2} = 19,3$	<p>Для Воды 90°</p> $Re = \frac{8,05 \cdot 0,00107}{0,00000115} = 5557$ $C = \frac{\dot{m}}{\rho F_c} = \frac{0,0072}{1000 \cdot 8,944 \cdot 10^{-7}} = 8,05 \text{ м/с}$ $Eu = \frac{1,25 \cdot 10^6}{1000 \cdot 8,05^2} = 19,3$
<p>Для Керосина 100°</p> $Re = \frac{7,78 \cdot 0,0012}{0,00000182} = 5129$ $C = \frac{\dot{m}}{\rho F_c} = \frac{0,0072}{819 \cdot 1,13 \cdot 10^{-6}} = 7,78 \text{ м/с}$ $Eu = \frac{1,4 \cdot 10^6}{819 \cdot 7,78^2} = 28,2$	<p>Для Воды 100°</p> $Re = \frac{6,73 \cdot 0,00107}{0,00000115} = 5080$ $C = \frac{\dot{m}}{\rho F_c} = \frac{0,0072}{1000 \cdot 1,07 \cdot 10^{-6}} = 6,73 \text{ м/с}$ $Eu = \frac{1,4 \cdot 10^6}{1000 \cdot 6,73^2} = 31$
<p>Для Керосина 110°</p> $Re = \frac{7,78 \cdot 0,0014}{0,00000182} = 5984$ $C = \frac{\dot{m}}{\rho F_c} = \frac{0,0072}{819 \cdot 1,54 \cdot 10^{-6}} = 5,7 \text{ м/с}$ $Eu = \frac{1 \cdot 10^6}{819 \cdot 5,7^2} = 31$	<p>Для Воды 110°</p> $Re = \frac{5,3 \cdot 0,00131}{0,00000115} = 4479$ $C = \frac{\dot{m}}{\rho F_c} = \frac{0,0072}{1000 \cdot 1,35 \cdot 10^{-6}} = 5,3 \text{ м/с}$ $Eu = \frac{1 \cdot 10^6}{1000 \cdot 5,3^2} = 31$

Отклонение коэффициентов  $Eu$  и  $Re$  не превышает 5 %, следовательно, гидродинамические процессы в полостях форсунки жидкого керосина и форсунки воды подобны. Эти результаты позволили получить геометрические размеры форсунки для испытаний при проливе водой. Геометрические размеры форсунок для гидропролива водой на испытательном стенде представлены в табл. 5, трехмерные модели форсунки для последующей печати на 3D-принтере представлены на рис. 4 и 5.

Геометрические размеры форсунок для гидропролива на стенде

Угол распыла, град	90	100	110
Внутренний радиус, $r_c$ , мм	0,53	0,58	0,65
Внешний радиус входа, $R_{вх}$ , мм	1,07	1,17	1,15
Внутренний радиус входа, $r_{вх}$ , мм	0,33	0,28	0,24
Длина сопла $l_c$ , мм	0,86	0,94	1,05
Высота форсунки, $h$ , мм	1,07	1,17	1,15
Радиус закрутки, $R_z$ , мм	1,4	1,45	1,4



Рис. 4. 3D-модель форсунки в разрезе  
Fig. 4. 3D cross-sectional model of the nozzle

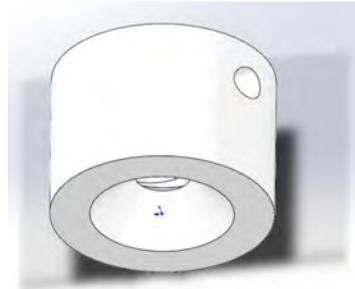


Рис. 5. 3D-модель форсунки  
Fig. 5. 3D model of nozzle

**Экспериментальное исследование**

Следующим этапом работы являлась печать на 3D принтере форсунок с разными геометрическими параметрами и углами раскрытия сопла для проведения последующих испытаний на стенде гидропролива. Целью этого исследования было проведение анализа изменения направления потоков в зависимости от геометрии и угла распыла для определения лучшей конфигурации геометрических размеров и качества распыла, а также равномерности факела форсунок. Схема установки представлена на рис. 6.

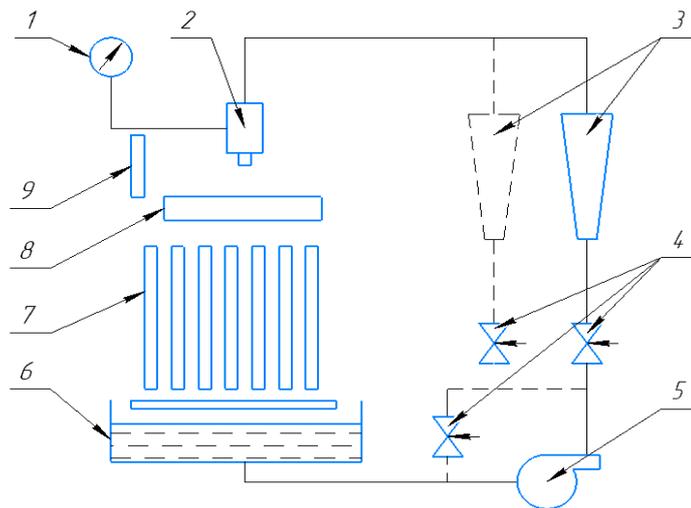


Рис. 6. Схема установки для испытания форсунок:  
1 – манометр; 2 – форсунка; 3 – ротаметр; 4 – вентиль; 5 – насос; 6 – бак с водой;  
7 – стеклянные трубки; 8 – насадки для снятия распыленной воды по радиусу или окружности;  
9 – приспособление для измерения угла факела распыла

Fig. 6. Installation diagram for testing nozzles:  
1 – pressure gauge; 2 – nozzle; 3 – rotameter; 4 – valve; 5 – pump; 6 – water tank; 7 – glass tubes; 8 – nozzles for removing sprayed water along a radius or circle; 9 – device for measuring the angle of the spray torch

Рабочим телом на установке является вода. Вода из бака 6 насосом 5 через вентиль 4 и ротаметр 3 подается на вход в форсунку 2 (рис. 7 и 8). Требуемый перепад давления на форсунке настраивается вентилем 4 и измеряется манометром 1. Расход воды измеряется ротаметром 3 или по объему слитой воды за известное время. Угол факела распыла измеряется визуальным способом с помощью специального приспособления 9 (рис. 9). Для снятия распределения распыленной жидкости по окружности или радиусу служат насадки 8, из секций которых вода сливается в стеклянные трубки 7, где измеряется ее уровень. Заливка воды в бак производится из водопровода.

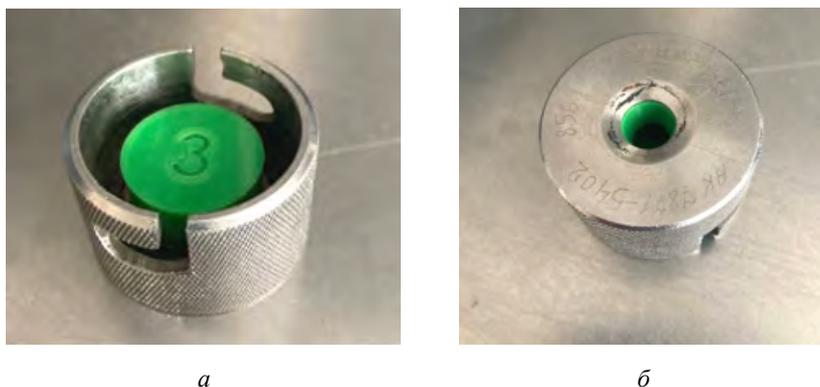


Рис. 7. Установленная форсунка во втулку для пролива

Fig. 7. Installed nozzle in the bushing for spillage



Рис. 8. Установленная втулка с форсункой на стенде

Fig. 8. Installed bushing with nozzle on a stand



Рис. 9. Пролив форсунок

Fig. 9. Nozzle testing

### Результаты исследований

Факел распыла центробежной форсунки является важным параметром, определяющим эффективность смешивания топлива с окислителем и, как следствие, качество сгорания в камере жидкостного ракетного двигателя (ЖРД). В зависимости от условий эксплуатации и конструкции форсунки, форма факела распыла может существенно изменяться, что оказывает влияние на процесс горения. Основные типы факелов включают конус, тюльпан и пузырь, которые формируются в зависимости от перепада давления и действия различных сил, таких как инерционные и силы поверхностного натяжения жидкости [12–15].

Результаты пролива трех вариантов форсунок из табл. 5 представлены в табл. 6–8. Каждый экземпляр проливался по 3 раза при различных значениях давления из заданного диапазона, чтобы определить среднее значение.

Таблица 6

**Форсунка 1, усредненные значения**

2 $\alpha$ (угол распыла), град.	40	50	50
m (массовый расход), г/с	122,15	152,55	178,6
P (давление на входе в форсунку), МПа	0,0784	0,141	0,204

Таблица 7

**Форсунка 2, усредненные значения**

2 $\alpha$ (угол распыла), град.	57,5	60	70
m (массовый расход), г/с	100,5	128,7	143,8
P (давление на входе в форсунку), МПа	0,0784	0,141	0,204

Таблица 8

**Форсунка 3, усредненные значения**

2 $\alpha$ (угол распыла), град.	67,5	75	80
m (массовый расход), г/с	80,8	104,3	131
P (давление на входе в форсунку), МПа	0,0784	0,141	0,204

**Заключение**

По представленным результатам можно сделать вывод, что наилучшими показателями обладает форсунка 3 (табл. 8). Процесс пролива данной форсунки с фиксацией угла факела распыла и формой «конус» представлен на рис. 9.

Представленная методика, включающая в себя использование критериев подобия, а также методы аддитивных технологий, позволяет существенно упростить процесс отработки и максимально приблизить процесс испытаний к реальным условиям эксплуатации форсунок.

**Библиографические ссылки**

1. Особенности проектирования камеры ракетного двигателя малой тяги при использовании аддитивных технологий / Н. С. Шестов, П. А. Бривкальн, Е. Е. Жигурова, К. Е. Мумбер // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2022. Т. 1. С. 237–239.
2. Фоменко А. А., Гордеев В. В., Бривкальн П. А. Изготовление камеры ракетного двигателя методом аддитивных технологий // Решетневские чтения : материалы XIV Междунар. науч. конф. (Красноярск, 08–10 ноября 2022) / СибГУ им. М. Ф. Решетнева. Красноярск, 2022. Ч. 1. С. 205–207.
3. Фесенко И. А., Дергач И. В., Жигурова Е. Е. Методика технологических испытаний камеры-демонстратора ракетного двигателя малой тяги, изготовленного по технологии SLM-печати // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2022. Т. 1. С. 214–216.
4. Контроль качества камеры ракетного двигателя малой тяги, изготовленной методом 3d-печати на лазерном принтере / Е. Е. Жигурова, К. Е. Мумбер, Р. А. Казаков // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2022. Т. 1. С. 179–181.
5. Манохина Э. С., Журавлев В. Ю., Коваль Р. В. Принципиальная схема стенда для ракетного двигателя-демонстратора малой тяги // Испытания, диагностика, надежность. Теория и практика. 2023. С. 135–138.
6. Васильев А. П., Кудрявцев В. М., Кузнецов В. А. Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей. М. : Высш. шк., 1983. 703 с.
7. Добровольский М. В. Жидкостные ракетные двигатели. Основы проектирования. М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. 464 с.
8. Салич В. Л., Семкин Е. В. Расчетно-теоретические и экспериментальные исследования центробежной форсунки ракетного двигателя тягой 13 Н // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». 2013. Т. 13, № 1. С. 4–12.

9. Егорычев В. С. Проектный расчет двухкомпонентной центробежной эмульсионной форсунки // Проблемы и перспективы развития двигателестроения : материалы докладов междунар. науч.-техн. конф. (Самара, 24–26 июня 2009) / СГАУ. В 2 ч. Самара, 2009. Ч. 1. С. 151–152.
10. Салич В. Л. Экспериментальные исследования по созданию ракетного двигателя малой тяги на топливе «газообразный кислород + керосин» // Вестник Самарского ун-та. Аэрокосмич. техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17, № 4. С. 129–140.
11. ГОСТ Р 56463-2015 Двигатели ракетные жидкостные малой тяги. Общие требования к изготовлению, испытаниям и контролю качества при поставках в эксплуатацию. М. : Стандартинформ, 2015. 45 с.
12. Акбулатов Э. Ш., Назаров В. П. Исследование и разработка передовых аддитивных технологий производства изделий ракетно-космической техники // Созвездие Роскосмоса: траектория науки : материалы II Отраслевой науч.-практич. конф. (04–06 октября 2023, Красноярск) / СибГУ им. М. Ф. Решетнева. Красноярск, 2023. С. 32–34.
13. ГОСТ Р 59036–2020. Аддитивные технологии. Производство на основе селективного лазерного сплавления металлических порошков. Общие положения. М. : Стандартинформ, 2020. 22 с.
14. Разработка и реализация инновационных аддитивных технологий 3D-печати ракетных двигателей малой тяги / Э. Ш. Акбулатов, В. П. Назаров, А. Н. Щелканов и др. // Решетневские чтения : материалы XV Междунар. науч. конф. (Красноярск, 08–10 ноября 2023) / СибГУ им. М. Ф. Решетнева. Красноярск, 2023. Т. 1. С. 149–151.
15. Акбулатов Э. Ш., Назаров В. П., Герасимов Е. В. Исследование характеристик ракетного двигателя малой тяги, изготовленного методом аддитивной SLM-технологии // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24, № 4. С. 682–696.

## References

1. Shestov N. S., Brivkaln P. A., Zhigurova E. E., Mumber K. E. [Features of designing the chamber of a low-thrust rocket engine using additive technologies]. *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики*. 2022, Vol. 1, P. 237–239 (In Russ.).
2. Fomenko A. A., Gordeev V. V., Brivkaln P. A. [Manufacturing of a rocket engine chamber by the method of additive]. *Materialy XIV Mezhdunar. nauch. konf. "Reshetnevskie chteniya"* [Materials XIV Intern. Scientific. Conf "Reshetnev reading"]. Krasnoyarsk, 2022, Vol. 1, P. 205–207 (In Russ.).
3. Fesenko I. A., Dergach I. V., Zhigurov E. E. [The methodology of technological tests of the low-thrust rocket engine demonstrator chamber manufactured using SLM printing technology]. *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики*. 2022. Vol. 1, P. 214–216 (In Russ.).
4. Zhigurova E. E., Mumber K. E., Kazakov R. A. [Quality control of the chamber of a low-thrust rocket engine manufactured by 3d printing on a laser printer]. *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики*. 2022, Vol. 1, P. 179–181 (In Russ.).
5. Manokhina E. S., Zhuravlev V. Y., Koval R. V. [Schematic diagram of a stand for a low-thrust rocket engine demonstrator]. *Ispytaniya, diagnostika, nadezhnost'. Teoriya i praktika*. 2023. P. 135–138 (In Russ.).
6. Vasiliev A. P., Kudryavtsev V. M., Kuznetsov V. A. *Osnovy teorii i rascheta zhidkostnykh raketnykh dvigatelei* [Fundamentals of theory and calculation of liquid rocket engines]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1983, 703 p.
7. Dobrovolsky M. V. *Zhidkostnyye raketnyye dvigateli. Osnovy proyektirovaniya* [Liquid rocket engines. Fundamentals of Design]. Moscow, MSTU im. N. E. Bauman Publ., 2015, 464 p.
8. Salich V. L., Semkin E. V. [Computational, theoretical and experimental studies of the centrifugal nozzle of a rocket engine thrust]. *Vestnik YuUrGU Series "Mechanical Engineering"*. 2013, Vol. 13, No. 1, P. 4–12 (In Russ.).
9. Egorychev V. S. [Design calculation of a two-component centrifugal emulsion nozzle]. *Problemy i perspektivy razvitiya dvigatelestroyeniya : materialy dokladov mezhdunar. nauch.-tekhn. konf.* [Problems and prospects of engine building development: Materials of reports of the International Scientific and Technical conf.]. Samara, 2009. Part 1. P. 151–152 (In Russ.).

10. Salich V. L. [Experimental studies on the creation of a low-thrust rocket engine powered by "gaseous oxygen + kerosene"]. *Vestnik of the Samara University. Aerospace engineering, technology and mechanical engineering*. 2018, Vol. 17, No. 4, P. 129–140 (In Russ.).

11. *GOST R 56463-2015 Dvigateli raketnye zhidkostnye maloy tyagi. Obshchie trebovaniya k izgotovleniyu, ispytaniyam i kontrolyu kachestva pri postavkakh v ekspluatatsiyu* [State Standard R 56463-2015 Low-thrust liquid rocket engines. General requirements for manufacturing, testing and quality control during commissioning]. Moscow, Standartinform Publ., 2015. 45 p.

12. Akbulatov E. Sh., Nazarov V. P. [Research and development of advanced additive technologies for the production of rocket and space technology products]. *Sozvezdiye Roskosmosa: trayektoriya nauki : Materialy II Otrasleyoy nauchno-prakticheskoy konf.* [Roscosmos constellation: trajectory of science: Proceedings of the II Industry Scientific and Practical Conf.]. Krasnoyarsk, 2023. P. 32–34 (In Russ.).

13. *GOST R 59036–2020. Additivnye tekhnologii. Proizvodstvo na osnove selektivnogo lazernogo splavleniya metallicheskih poroshkov. Obshchie polozeniya* [State Standard R 59036-2020. Additive technologies. Production based on selective laser melting of metal powders. General provisions]. Moscow, Standartinform Publ., 2020, 22 p.

14. Akbulatov E. Sh., Nazarov V. P., Shchelkanov A. N. [Development and implementation of innovative additive technologies for 3D printing of low-thrust rocket engines]. *Materialy XV Mezhdunar. nauch. konf. "Reshetnevskie chteniya"* [Materials XV Intern. Scientific. Conf "Reshetnev reading"]. Krasnoyarsk, 2023, Vol. 1, P. 149–151 (In Russ.).

15. Akbulatov E. Sh., Nazarov V. P., Gerasimov E. V. Study of the characteristics of a low-thrust rocket engine manufactured by additive SLM technology. *Siberian Aerospace Journal*. 2023, Vol. 24, No. 4, P. 682–696.

© Журавлев В. Ю., Манохина Э. С., Толстопятов М. И., 2025

---

**Журавлев Виктор Юрьевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры двигателей летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: vz@sibsau.ru.

**Манохина Эльвира Сергеевна** – старший лаборант, кафедра двигателей летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: xim96@inbox.ru. <https://orcid.org/0009-0007-7269-7248>.

**Толстопятов Михаил Игоревич** – кандидат технических наук, доцент кафедры двигателей летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: 8913039999@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-4325-8189>.

**Zhuravlev Viktor Yuryevich** – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of Aircraft Engines, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: vz@sibsau.ru.

**Manokhina Elvira Sergeevna** – senior lab tech, Department of Aircraft Engines; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: xim96@inbox.ru. E-mail: xim96@inbox.ru. <https://orcid.org/0009-0007-7269-7248>.

**Tolstopiatov Mikhail Igorevich** – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of Aircraft Engines; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: 8913039999@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-4325-8189>.

---

Статья поступила в редакцию 10.10.2024; принята к публикации 11.11.2024; опубликована 11.04.2025  
The article was submitted 10.10.2024; accepted for publication 11.11.2024; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License

УДК 539.3

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-94-106

**Для цитирования:** Нестеров В. А., Никишев А. А. Анализ устойчивости и жесткости композитной сетчатой конической оболочки с закрепленным малым основанием // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 94–106. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-94-106.

**For citation:** Nesterov V. A., Nikishev A. A. [Buckling and stiffness analysis of a composite anisogrid conical shell with a fixed small base]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 94–106. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-94-106.

## **Анализ устойчивости и жесткости композитной сетчатой конической оболочки с закрепленным малым основанием**

В. А. Нестеров<sup>\*</sup>, А. А. Никишев

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

<sup>\*</sup>E-mail: nesterov@mail.sibsau.ru

*Аннотация.* Силовые элементы конструкций в виде конструктивных анизогридных оболочек вращения часто используются в производстве ракетно-космической техники (РКТ). Это обусловлено, прежде всего, высокими удельными механическими свойствами композитов, позволяющими изготавливать конструкции с высокой степенью весового совершенства. Кроме того, они достаточно технологичны, так как применяемый при их производстве метод непрерывной намотки композитных волокон широко распространен и хорошо отработан. Вопросам проектирования композитных сетчатых конструкций в последние годы уделяется пристальное внимание.

Актуальным примером анизогридных цилиндрических и конических оболочек является адаптер космических аппаратов для вывода на орбиту спутников системы ГЛОНАСС, различные варианты которых до сих пор производятся в цехах АО «Решетнёв». Оболочки однотипны, но отличаются по размерам (диаметрам и длинам цилиндрических и конических частей) и несущей способности. Для композитных элементов РКТ характерно наличие большого перечня варьируемых параметров, определение оптимального сочетания которых выливается каждый раз в комплексную задачу научного поиска.

Разработаны алгоритм и программа построения конечно-элементной (КЭ) модели анизогридных конических оболочек, изготавливаемых методом непрерывной намотки композитного волокна. Малое основание закреплено, а большое усилено шпангоутом и нагружено сосредоточенными усилиями и моментами. С помощью КЭ модели выполнено численное исследование устойчивости, жесткости и напряженно-деформированного состояния конструкции при варьировании параметров формирования ее сетчатой структуры.

*Ключевые слова:* сетчатая коническая оболочка, композиционные материалы, МКЭ.

## **Buckling and stiffness analysis of a composite anisogrid conical shell with a fixed small base**

V. A. Nesterov<sup>\*</sup>, A. A. Nikishev

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

<sup>\*</sup>E-mail: nesterov@mail.sibsau.ru

*Abstract. Power elements of structures in the form of structural anisogrid shells of rotation are often used in the production of rocket and space technology. This is due, first of all, to high specific mechanical properties of composites, which allow to manufacture structures with a high degree of weight perfection. In addition, they are quite technological, as the method of continuous winding of composite fibers used in their production is widespread and well developed. In recent years, close attention has been paid to the design of composite mesh structures.*

*An actual example of anisogrid cylindrical and conical shells is a spacecraft adapter for GLONASS satellites orbit launching, different variants of which are still produced in the workshops of Reshetnev JSC. The shells are of the same type, but differ in dimensions (diameters and lengths of cylindrical and conical parts) and bearing capacity. For composite elements of rocket-space technology it is characterized by the presence of a large list of variable parameters, the determination of the optimal combination of which every time results in a complex problem of scientific search.*

*An algorithm and a program for building a finite element model of anisogrid conical shells made by continuous winding of composite fiber have been developed. The small base is fixed and the large base is reinforced by a spandrel and loaded by concentrated forces and moments. Numerical investigation of stability, stiffness and stress-strain state of the structure under varying parameters of its mesh structure formation is carried out with the help of FE model.*

*Keywords: anisogrid conical shell, composite materials, FEM.*

## **Введение**

Вопросам проектирования композитных сетчатых конструкций в последние годы уделяется пристальное внимание [1–11]. В ряде предыдущих работ [12–14] представлены результаты обширного исследования о влиянии базовых проектных параметров анизогридных цилиндрических и конических оболочек на их жесткость и несущую способность при торцевом нагружении разнообразными силовыми факторами. В частности, в работе [13] рассматривалась сетчатая коническая оболочка, являющаяся нижним силовым элементом адаптера (рис. 1). Нижним основанием коническая оболочка прикрепляется к шпангоуту ракетносителя. Инерционная нагрузка от верхней цилиндрической части адаптера со спутниками имитируется комплексом силовых усилий на малом основании конуса. В работе показано, что для конкретного вида торцевого нагружения (или комбинации силовых факторов) имеются оптимальные значения проектных параметров, таких как количество и углы намотки спиральных ребер, которые, будучи согласованы с размерами поперечного сечения ребер и механическими свойствами композиционного материала, позволяют минимизировать массу конструкции адаптера при сохранении функциональной работоспособности.

В некоторых космических аппаратах применяются рамные или ферменные силовые элементы конического вида (рис. 2), в которых закреплено малое основание, а силовое воздействие, которое также можно имитировать системой торцевых усилий, приложено к большему основанию. Альтернативой для такого вида конструкций могут выступать анизогридные конические оболочки обратной конусности.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния основных проектных параметров сетчатой конической оболочки с закрепленным малым основанием на жесткость и несущую способность при торцевом нагружении усилиями и моментами, сосредоточенными на большем основании.

## **Моделирование сетчатой конической оболочки и алгоритмизация численного исследования**

Коническая анизогридная оболочка (рис. 3) образуется двумя семействами спиральных ребер, выкладываемых под углами  $\pm\varphi$  по геодезическим линиям поверхности, и семейством кольцевых ребер, повышающих окружную жесткость и улучшающих совместность работы. Характерной особенностью конических оболочек является переменность угла  $\varphi$  (ориентации

спиральных рёбер) вдоль образующей. Это обязательно должно учитываться, хотя немного усложняет алгоритм геометрического моделирования. Процедура построения основывается на использовании типовых элементов (рис. 4), ряд которых формируется вдоль образующей конуса, а затем копируется вращением вокруг продольной оси.

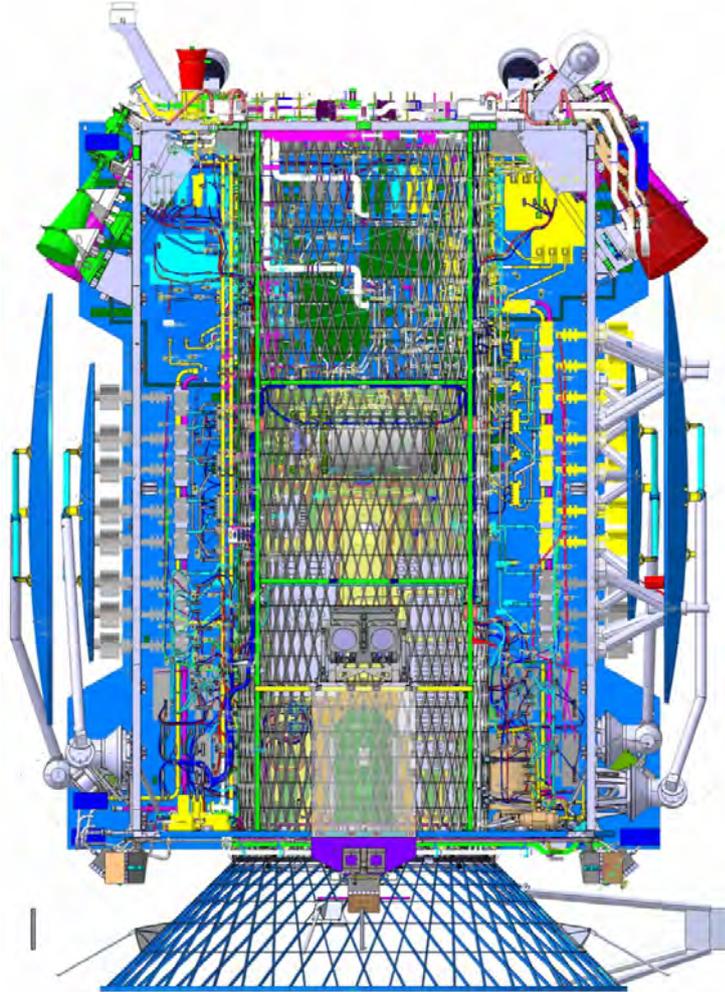


Рис. 1. Адаптер для вывода спутников системы ГЛОНАСС

Fig. 1. Adapter for displaying satellites of the GLONASS system



Рис. 2. Ферменная конструкция разгонного блока типа «ФРЕГАТ»

Fig. 2. Truss structure of the FREGAT type upper stage

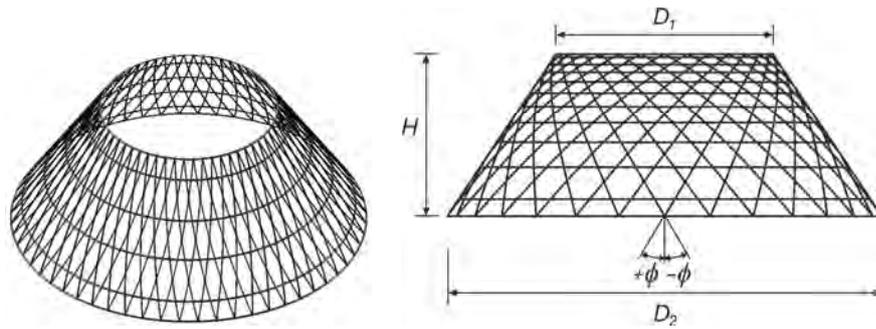


Рис. 3. Геометрическая модель сетчатой конической оболочки

Fig. 3. Geometric model of anisogrid conical shell

Определение оптимальных проектных параметров осуществляется по результатам комплексного численного эксперимента. Он предполагает выполнение серии типовых расчётов с различным сочетанием проектных параметров. Поэтому, прежде всего, в среде интегрированного пакета (COSMOS/M) разрабатываются алгоритм и программа построения в автоматическом режиме геометрической и конечно-элементной моделей.

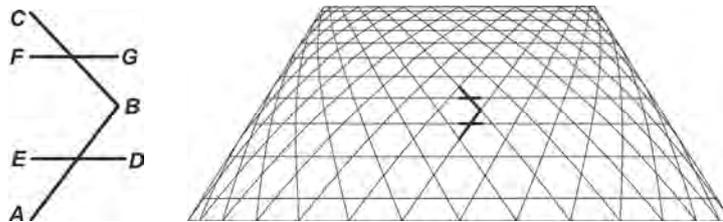


Рис. 4. Типовой элемент сетчатой структуры конической оболочки

Fig. 4. Typical element of the anisogrid conical shell structure

К числу базовых проектных параметров анизогридных конических оболочек относятся:

- диаметры оснований и высота оболочки;
- число спиральных рёбер;
- угол ориентации спиральных рёбер на большом основании;
- размеры сечения рёбер;
- свойства материала.

Для определённого вида расчёта можно автоматизировать задание нагрузок и граничных условий (рис. 5).

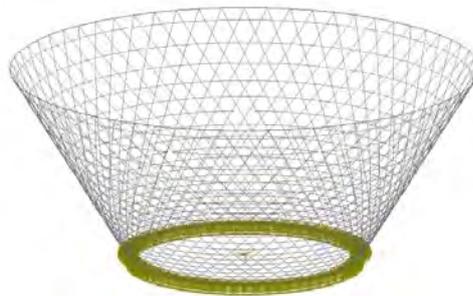


Рис. 5. Модель сетчатой конической оболочки с закрепленным малым основанием

Fig. 5. Model of anisogrid conical shell with a fixed small base

При фиксированных габаритных размерах сетчатой конической оболочки важнейшими параметрами, влияющими на несущую способность, являются углы намотки, число и размер сечения спиральных рёбер.

Изменение углов намотки рёбер существенно влияет на несущую способность оболочек. Это, в частности, хорошо заметно по результатам численного эксперимента, выполненного при анализе устойчивости при осевом сжатии сетчатых цилиндрических оболочек различного удлинения (рис. 6). По представленным графикам видно, что для моделей различных габаритов имеются свои оптимальные значения углов намотки спиральных ребер, незначительные отклонения от которых приводят к значительному снижению несущей способности оболочек.

Большое исследование устойчивости сетчатых конических оболочек с торцевой нагрузкой на малом основании и закрепленным большим основанием выполнено авторами работы [13]. В нем выявлено влияние разнообразных факторов (углы намотки, число и ориентация сечения спиральных рёбер) на несущую способность оболочек при различных вариантах нагружения малого основания (рис. 7).

В рассматриваемом случае модели конической сетчатой оболочки, когда малое основание закреплено, а большое усилено шпангоутом и нагружено сосредоточенными усилиями и моментами, следует ожидать некоторой аналогичности влияния варьирования определенных проектных параметров (например, величины углов намотки, числа спиральных рёбер и ориентации их сечения) на жесткость и несущую способность конструкции. Однако для точного описания тенденций, основанных на действительных значениях критической нагрузки и частот собственных колебаний (жесткостной анализ), и нового вида расчетной схемы (см. рис. 5) требуется отдельное комплексное численное исследование.

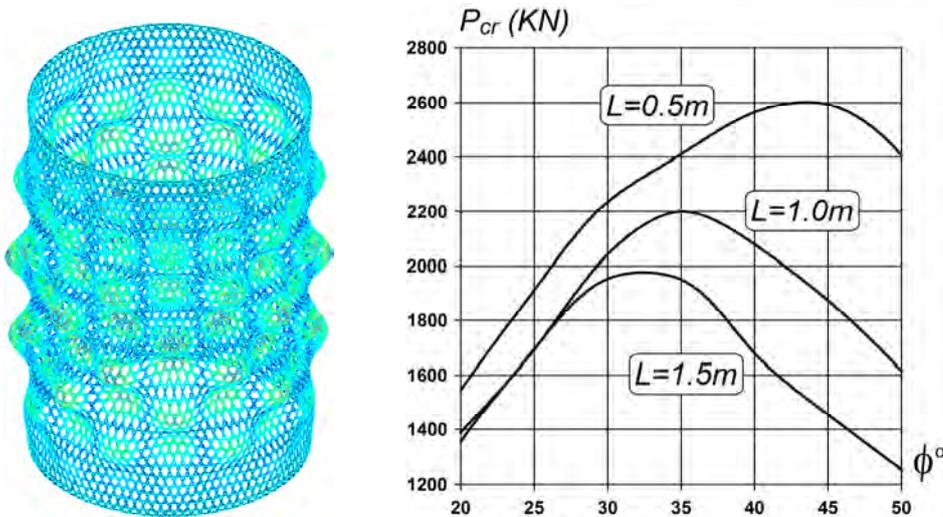


Рис. 6. Форма потери устойчивости цилиндрической сетчатой оболочки при осевом сжатии и графики зависимости критического усилия ( $P_{cr}$ ) от величины углов намотки спиральных ребер ( $\phi^\circ$ ) для моделей различной длины ( $L$ )

Fig. 6. The form of buckling of a cylindrical mesh shell under axial compression and graphs of the dependence of the critical force ( $P_{cr}$ ) on the magnitude of the winding angles of the spiral ribs ( $\phi^\circ$ ) for models of various lengths ( $L$ )

### Численное исследование

Различные модели отличаются углами намотки спиральных рёбер. В каждом отдельном случае задается значение угла ориентации спирального ребра по отношению к образующей конической поверхности. Этот угол будем называть углом захода. Спиральные ребра укладываются по геодезическим линиям конической поверхности. При этом по мере приближения к малому основанию угол ориентации ребер увеличивается (по закону Клеро). В предельном случае

угол ориентации на малом основании равен  $90^\circ$ . Угол захода при этом имеет предельно возможное значение. При выбранном соотношении диаметров оснований конуса ( $D1/D2 = 2$ ) предельное значение угла захода ( $\varphi$ ) равно  $30^\circ$ .

По мере увеличения углов захода увеличивается густота сетки у малого основания (рис. 8). Соответственно растет и масса конструкции.

Первое исследование связано с анализом жёсткости конструкции, которая оценивается по величине наименьших частот собственных колебаний. Рассматривались моды изгибных, продольных, оболочечных (рис. 9) и крутильных колебаний (вокруг продольной оси конуса).

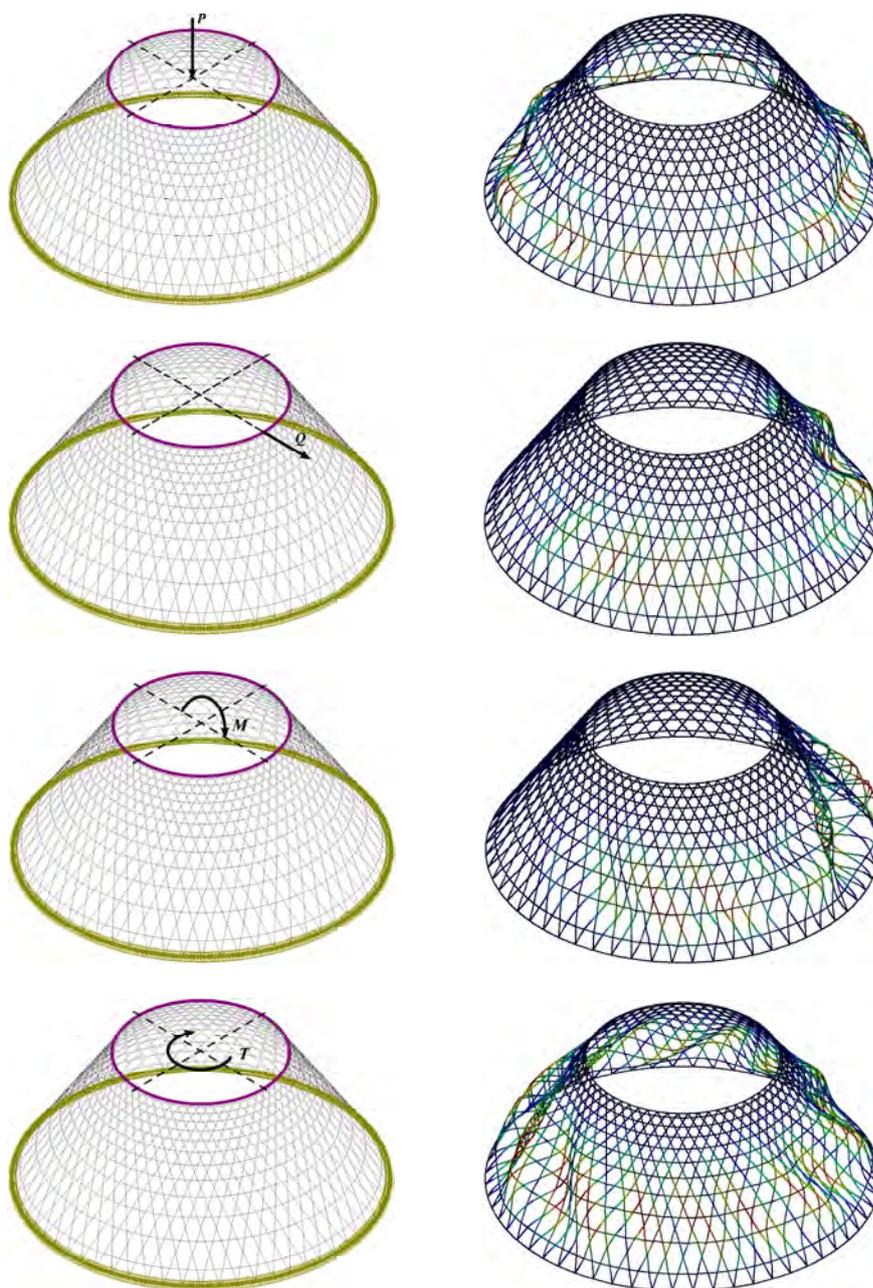


Рис. 7. Расчетные схемы (слева) и формы потери устойчивости (справа) в анализе устойчивости сетчатой конической оболочки с вариантами торцевой нагрузки на малом основании и закрепленным большим основанием

Fig. 7. Design diagrams (left) and buckling modes (right) in the stability analysis of a mesh conical shell with end load cases on a small base and a fixed large base

Проанализируем модели с пятью фиксированными значениями угла захода ( $\varphi = 11^\circ, 14^\circ, 17^\circ, 20^\circ$  и  $23^\circ$ ). Этого достаточно, чтобы отследить тенденции.

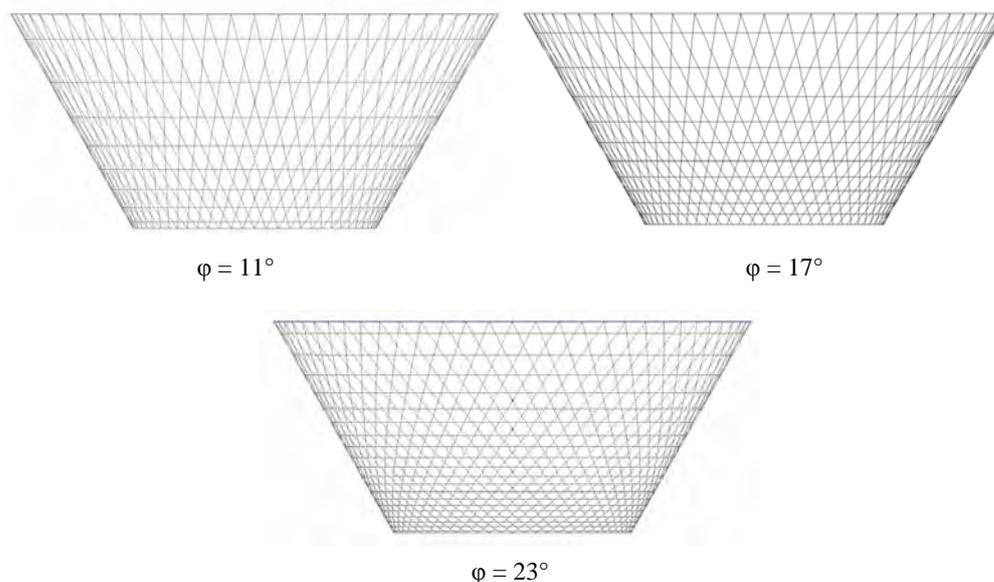


Рис. 8. Модели с различными значениями углов намотки спиральных ребер

Fig. 8. Models with different winding angles of spiral fins

Выявлено (табл. 1), что жёсткость конструкции по двум видам колебаний (изгибных и крутильных) растёт по мере сгущения сетки, оболочечная жёсткость почти неизменна, а продольная жёсткость падает. Это объясняется большими значениями продольной жёсткости оболочки в модели с малыми углами ориентации спиральных ребер.

Таблица 1

**Частоты собственных колебаний и коэффициенты запаса устойчивости сетчатых конических оболочек с различными углами намотки спиральных ребер**

φ, град	m, кг	Частоты собственных колебаний, Гц				Запас устойчивости, K, P = Kmg
		изгибные	крутильные	оболочечные	продольные	
11	39,02	22,24	34,86	58,56	146,81	316,6
14	41,95	27,02	43,53	59,04	139,90	418,1
17	45,22	31,20	51,88	59,40	131,83	525,8
20	49,58	33,77	59,21	59,43	120,66	632,2
23	56,01	34,55	65,72	59,14	107,52	735,2

Параллельно исследовалась устойчивость оболочки при продольном сжатии осевой инерционной нагрузкой. Форма потери устойчивости (рис. 10) показывает, что потеря устойчивости происходит по балочному типу с деформацией отрезков ребер в зоне с малой плотностью сетки у большого основания. Повышению критического усилия способствовало бы увеличение числа и мощности ребер, чтобы выпучивание происходило по оболочечной форме, как в моделях на рис. 7.

При увеличении угла захода  $\varphi = 11^\circ$  до  $\varphi = 23^\circ$  в нашей модели критическая осевая нагрузка возрастает почти в 2,5 раза (см. табл. 1, последний столбец). Это происходит за счёт укорочения отрезков ребер в опасной зоне.

Влияние сгущения сетки (за счет увеличения угла захода  $\varphi$ ) и перехода балочной локальной формы потери устойчивости в оболочечную хорошо заметно в исследовании устойчивости

оболочки при нагружении поперечным усилием на большом основании (рис. 11). Критические величины усилия (табл. 2) в моделях с углами захода  $\varphi = 11^\circ$  и  $\varphi = 23^\circ$  отличаются более, чем в 5 раз.

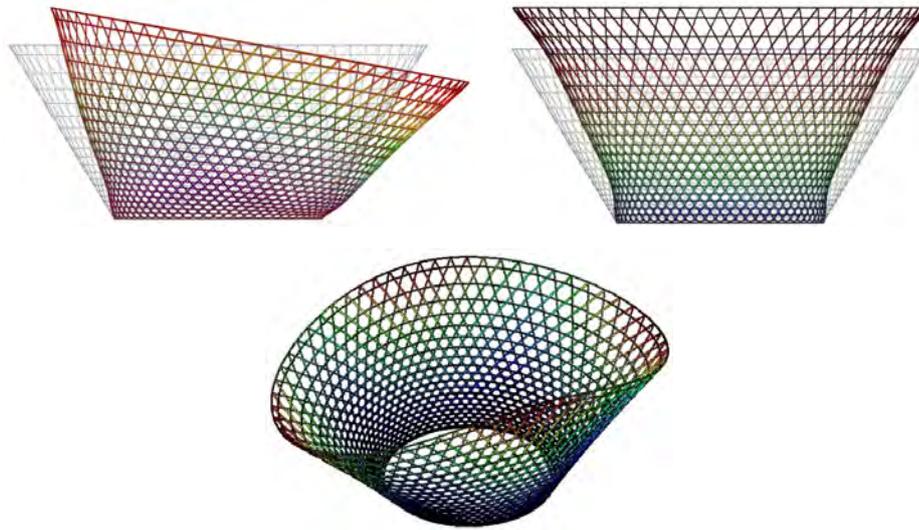


Рис. 9. Моды колебаний: изгибных, продольных и оболочечных

Fig. 9. Vibration modes: bending, longitudinal and shell

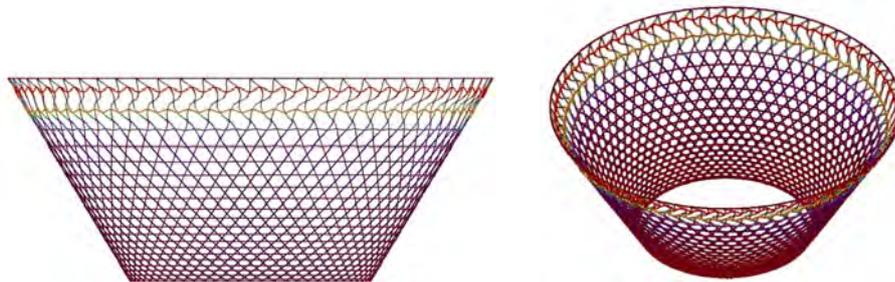


Рис. 10. Форма потери устойчивости при воздействии осевой перегрузки

Fig. 10. Form of buckling under axial overload

Таблица 2

**Коэффициент запаса устойчивости при нагружении поперечным торцевым усилием в моделях с различным углом намотки спиральных ребер**

φ, град	m, кг	K 10 <sup>3</sup>
11	39,02	284
14	41,95	528
17	45,22	864
20	49,58	1289
23	56,01	1519

Такие же тенденции (табл. 3) обнаружены в задачах по устойчивости при торцевом нагружении на большом основании изгибающим моментом (рис. 12). Здесь более густая сетка, как и при осевом нагружении, предпочтительнее. Формы потери устойчивости сетчатых конических оболочек с различными углами захода спиральных ребер подобны той, что представлена на рис. 12 для модели с  $\varphi = 11^\circ$ . Перехода на оболочечную форму потери устойчивости и, следовательно, увеличения критической нагрузки можно добиться увеличением числа спиральных ребер и их мощности.

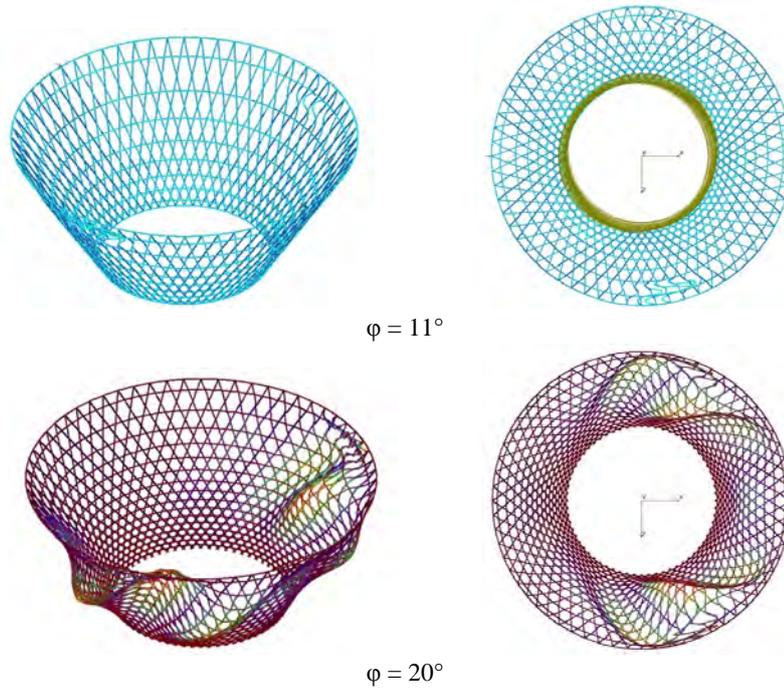


Рис. 11. Формы потери устойчивости моделей с углами захода  $\varphi = 11^\circ$  и  $\varphi = 20^\circ$  при нагружении поперечной силой на большом основании

Fig. 11. Forms of buckling of models with approach angles  $\varphi = 11^\circ$  and  $\varphi = 20^\circ$  when loaded with lateral force on a large base

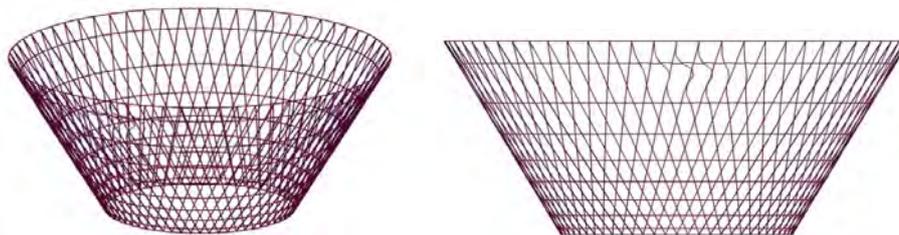


Рис. 12. Форма потери устойчивости модели с углом захода  $\varphi = 11^\circ$  при нагружении изгибающим моментом на большом основании

Fig. 12. Buckling mode of a model with an approach angle  $\varphi = 11^\circ$  when loaded with a bending moment on a large base

Таблица 3

**Коэффициент запаса устойчивости при нагружении изгибающим моментом в моделях с различным углом намотки спиральных ребер**

$\varphi$ , град	$m$ , кг	$K \cdot 10^3$
11	39,02	449
14	41,95	771
17	45,22	1030
20	49,58	1290
23	56,01	1555

Схожие закономерности (табл. 4) имеют место в исследовании устойчивости при торцевом нагружении крутящим моментом (рис. 13).

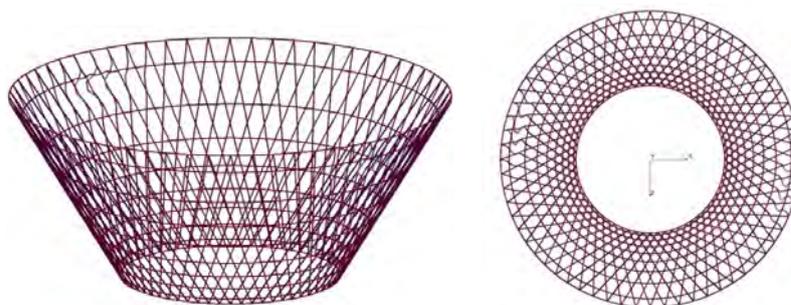


Рис. 13. Форма потери устойчивости модели с углом захода  $\varphi = 11^\circ$  при нагружении крутящим моментом на большом основании

Fig. 13. Buckling shape of a model with an approach angle  $\varphi = 11^\circ$  when loaded with torque on a large base

Формы потери устойчивости оболочек с различными углами захода спиральных ребер соответствуют той, что показана на рис. 13 для модели с  $\varphi = 11^\circ$ . Эта форма локальной потери устойчивости. Варьированием числа спиральных ребер, высотой и шириной их сечения, а также углом захода можно привести ее к оболочечной форме, повышая таким образом удельные величины критического усилия.

Таблица 4

**Коэффициент запаса устойчивости при нагружении крутящим моментом в моделях с различным углом намотки спиральных ребер**

$\varphi$ , град	$m$ , кг	$K \cdot 10^3$
11	39,02	471
14	41,95	837
17	45,22	1318
20	49,58	1927
23	56,01	2405

Следующее модальное исследование проведено для сетчатой конической оболочки с закрепленным малым основанием и заданным грузом 5225 кг на свободном (большом) основании. Как и ранее, исследовались жесткости оболочки и несущая способность при осевой перегрузке. На характер поведения полученных параметров: частот собственных колебаний различного вида (см. рис. 9) и критических величин осевой перегрузки (табл. 5) оказывают влияние взаимнообратные тенденции изменения продольной и изгибной жесткости: по мере увеличения угла захода  $\varphi$  изгибная жесткость растёт, а продольная – падает. В общем случае увеличение угла захода  $\varphi$  целесообразно и для повышения критического усилия от осевой перегрузки, которое для двух вариантов модели ( $\varphi = 11^\circ$  и  $\varphi = 23^\circ$ ) различаются в 4 раза.

Анализ полученных в численном эксперименте результатов (табл. 1–5) показывает, что несущая способность сетчатых конических оболочек, малое основание которых закреплено, а на большем приложены сосредоточенные усилия и моменты, зависит от угла намотки спиральных ребер. При этом наибольшие критические величины нагрузок соответствуют моделям с наибольшим углом захода, при которых формируется более мелкая сетчатая структура, и реализуются оболочечные формы потери устойчивости. Однако вывод о том, что анизогридные конические оболочки с большими углами намотки всегда предпочтительны, в общем случае не верен. Данные табл. 1 и 5 свидетельствуют о том, что продольная жесткость выше у моделей с малыми углами намотки спиральных ребер, и, если этот параметр регламентируется, следует выбирать именно такие модели, которые к тому же существенно легче, чем оболочки с большими значениями углов намотки.

Таблица 5

**Частоты собственных колебаний и коэффициенты запаса устойчивости сетчатых конических оболочек с грузом на большом основании и различными углами намотки спиральных ребер**

φ, град	m, кг	Частоты собственных колебаний, Гц			Коэффициент запаса устойчивости
		изгибные	крутильные	продольные	
11	39,02	9,76	15,25	65,14	1,44
14	41,95	11,89	19,05	62,12	2,43
17	45,22	13,71	22,71	58,55	3,60
20	49,58	14,84	25,93	53,60	4,86
23	56,01	15,19	28,79	47,79	5,61

Кроме того, как показали расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) (рис. 14) сетчатых конических оболочек, нагруженных изгибающим моментом на свободном (большем) торце, максимальные эквивалентные напряжения реализовались в модели с более густой сеткой ( $\varphi = 23^\circ$ ), а минимальные – в модели с углом захода  $\varphi = 14^\circ$ , причём разница в этих напряжениях превысила 50 % (табл. 6).

Таблица 6

**Величины максимальных напряжений по Мизесу в моделях с различным углом намотки спиральных ребер при нагружении изгибающим торцевым моментом**

φ, град	m, кг	Напряжения по Мизесу, МПа
11	39,02	432,28
14	41,95	382,94
17	45,22	402,55
20	49,58	479,44
23	56,01	612,72

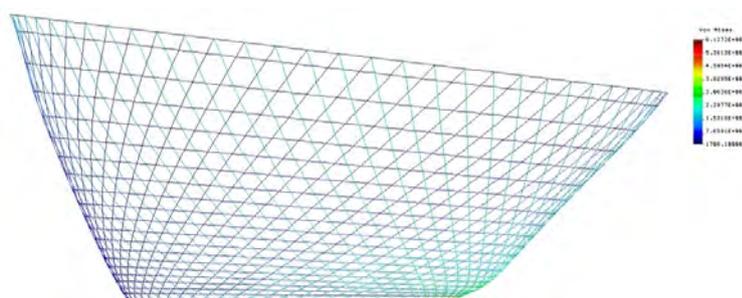


Рис. 14. Распределение эквивалентных напряжений в модели с углом захода  $\varphi = 23^\circ$  при нагружении изгибающим моментом на большом основании

Fig. 14. Distribution of equivalent stresses in a model with an approach angle  $\varphi = 23^\circ$  when loaded with a bending moment on a large base

**Заключение**

В результате работы определены зависимости величин критических усилий, параметров жесткости и НДС сетчатых конических оболочек, закрепленных малым основанием и нагруженных силовыми факторами на большом основании. Исследование продемонстрировало необходимость проведения комплексного численного эксперимента на этапе проектирования анизотропных композитных силовых конструкций для определения оптимального сочетания многочисленных проектных параметров. Поскольку это сочетание почти всегда уникально (соответствует определенным, каждый раз разным ГТХ), традиционная задача проектирования элементов конструкции РКТ возрастает до масштабов научного поиска.

### Библиографические ссылки

1. Vasiliev V. V., Barynin V. A., Rasin A. F. Anisogrid lattice structures – survey of development and application // *Composite Structures*. 2001. Vol. 54, Iss. 2–3. P. 361–370.
2. Vasiliev V. V., Rasin A. F. Anisogrid composite lattice structures for spacecraft and aircraft applications // *Composite Structures*. 2006. Vol. 76, Iss. 1–2. P. 182–189.
3. Азаров А. В., Разин А. Ф. Континуальная модель сетчатой композитной структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2020. Т. 26, № 2. С. 269–280.
4. Анизогридные композитные сетчатые конструкции – разработка и приложение к космической технике / В. В. Васильев, В. А. Барынин, А. Ф. Разин и др. // *Композиты и наноструктуры*. 2009. № 3. С. 38–50.
5. Азаров А. В. К теории сетчатых композитных оболочек // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2013. № 1. С. 71–83.
6. Азаров А. В. Континуальная модель композитных сетчатых оболочек, образованных системой спиральных ребер // *Композиты и наноструктуры*. 2015. Т. 7, № 3(27). С. 151–161.
7. Азаров А. В. Проблема проектирования аэрокосмических сетчатых композитных конструкций // *Механика твердого тела*. 2018. № 4. С. 85–93.
8. Васильев В. В. Оптимальное проектирование композитной сетчатой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением // *Механика твердого тела*. 2020. № 3. С. 5–11.
9. Васильев В. В., Разин А. Ф., Азаров А. В. Композитные сетчатые конструкции – проектирование, расчет и изготовление. М. : Инновационное машиностроение, 2023. 488 с.
10. Vasiliev V. V., Barynin V. A., Rasin A. F. Anisogrid composite lattice structures – Development and aerospace applications // *Composite Structures*. 2012. Vol. 94, Iss. 3, P. 1117–1127.
11. Хахленкова А. А., Лопатин А. В. Обзор конструкций адаптеров современных космических аппаратов // *Космические аппараты и технологии*. 2018. Т. 2, № 3. С. 134–146. DOI: 10.26732/2618-7957-2018-3-134-146.
12. Morozov E. V., Lopatin A. V., Nesterov V. A. Finite-element modelling and buckling analysis of anisogrid composite lattice cylindrical shells // *Composite Structures*. 2011. Vol. 93, Iss. 2. P. 308–323.
13. Morozov E. V., Lopatin A. V., Nesterov V. A. Buckling analysis and design of anisogrid composite lattice conical shells // *Composite Structures*. 2011. Vol. 93, Iss. 12. P. 3150–3162.
14. Morozov E. V., Lopatin A. V., Nesterov V. A. Finite-element modeling and buckling analysis of anisogrid composite lattice cylindrical shells // *IV European Conference on Computational Mechanics*. Palais des Congres. Paris, France, May 16–21, 2010.

### References

1. Vasiliev V. V., Barynin V. A., Rasin A. F. Anisogrid lattice structures – survey of development and application. *Composite Structures*. 2001, Vol. 54, Iss. 2–3, P. 361–370.
2. Vasiliev V. V., Rasin A. F. Anisogrid composite lattice structures for spacecraft and aircraft applications. *Composite Structures*. 2006, Vol. 76, Iss. 1–2, P. 182–189.
3. Azarov A. V., Razin A. F. [Continuum model of a mesh composite structure]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov I konstruktsiy*. 2020, Vol. 26, No. 2, P. 269–280 (In Russ.).
4. Vasiliev V. V., Barynin V. A., Razin A. F. et al. [Anisogrid composite mesh structures – development and application to space technology]. *Kompozity I nanostruktury*. 2009, No. 2, P. 38–50 (In Russ.).
5. Azarov A. V. [On the theory of mesh composite shells]. *Mekhanika tverdogo tela*. 2013, No. 1, P. 71–83 (In Russ.).
6. Azarov A. V. [Continuum model of composite mesh shells formed by a system of spiral ribs]. *Kompozity I nanostruktury*. 2015, Vol. 7, No. 3 (27), P. 151–161 (In Russ.).
7. Azarov A. V. [The problem of designing aerospace mesh composite structures]. *Mekhanika tverdogo tela*. 2018, No. 4, P. 85–93 (In Russ.).

8. Vasiliev V. V. [Optimal design of a composite mesh cylindrical shell loaded with external pressure]. *Mekhanika tverdogo tela*. 2020, No. 3, P. 5–11 (In Russ.).
9. Vasiliev V. V., Razin A. F., Azarov A. V. *Kompozitnye setchatye konstruksii – proektirovanie, raschet i izgotovlenie* [Composite mesh structures – design, calculation and manufacturing]. Moscow, Innovatsionnoye mashinostroyeniye Publ., 2023, 448 p. (In Russ.).
10. Vasiliev V. V., Barynin V. A., Rasin A. F. Anisogrid composite lattice structures – Development and aerospace applications. *Composite Structures*. 2012, Vol. 94, Iss. 3, P. 1117–1127.
11. Khakhlenkova A. A., Lopatin A. V. [Review of adapter designs for modern spacecraft]. *Kosmicheskiye apparaty I tekhnologii*. 2018, Vol. 2, No. 3, P. 134–146 (In Russ.). DOI: 10.26732/2618-7957-2018-3-134-146.
12. Morozov E. V., Lopatin A. V., Nesterov V. A. Finite-element modelling and buckling analysis of anisogrid composite lattice cylindrical shells. *Composite Structures*. 2011, Vol. 93, Iss. 2, P. 308–323.
13. Morozov E. V., Lopatin A. V., Nesterov V. A. Buckling analysis and design of anisogrid composite lattice conical shells. *Composite Structures*. 2011, Vol. 93, Iss. 12, P. 3150–3162.
14. Morozov E. V., Lopatin A. V., Nesterov V. A. Finite-element modeling and buckling analysis of anisogrid composite lattice cylindrical shells. *IV European Conference on Computational Mechanics*. Palais des Congres. Paris, France, May 16–21, 2010.

© Нестеров В. А., Никишев А. А., 2025

---

**Нестеров Владимир Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: nesterov@mail.sibsau.ru. <https://orcid.org/0009-0003-6384-3849>.

**Никишев Андрей Александрович** – доцент кафедры летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: anikandrey26@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0000-3507-8420>.

**Nesterov Vladimir Anatolievich** – Cand. Sc., Associate Professor; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: nesterov@mail.sibsau.ru. <https://orcid.org/0009-0003-6384-3849>.

**Nikishev Andrey Aleksandrovich** – Associate Professor; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: anikandrey26@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0000-3507-8420>.

---

Статья поступила в редакцию 14.11.2024; принята к публикации 20.11.2024; опубликована 11.04.2025  
The article was submitted 14.11.2024; accepted for publication 20.11.2024; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License

УДК 629.7.015.7

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-107-125

**Для цитирования:** Соколов И. А., Цеханович Г. С. Анализ модели движения космического аппарата на околоземной орбите // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 107–125. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-107-125.

**For citation:** Sokolov I. A., Tsekhanovich G. S. [Analysis of the movement model of a spacecraft in earth orbit]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 107–125. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-107-125.

## Анализ модели движения космического аппарата на околоземной орбите

И. А. Соколов<sup>1, 2\*</sup>, Г. С. Цеханович<sup>1</sup>

<sup>1</sup>АО “Конструкторское бюро навигационных систем”  
Российская Федерация, 121170, г. Москва, ул. Кульнева, 3

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет  
Российская Федерация, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

\*E-mail ivansokolof1997@mail.ru

*Аннотация. Реализация моделей движения космического аппарата в условиях работы навигационных модулей в режиме реального времени сталкивается с принципиальными ограничениями, связанными с необходимостью балансировки между точностью вычислений и доступной вычислительной мощностью. Одновременное выполнение параллельных задач, таких как обработка навигационных измерений, определение координат объекта по сигналам ГНСС, фильтрация шумов, преобразование данных и их архивация, требует оптимизации алгоритмов для минимизации задержек и ресурсозатрат. В таких условиях классические высокоточные модели, основанные на сложных дифференциальных уравнениях или учете множества возмущающих факторов, становятся неприменимыми из-за их вычислительной ёмкости. Предложенная в работе модель движения, внедренная в навигационные модули производства АО “Конструкторское бюро навигационных систем” (АО «КБ НАВИС»), демонстрирует эффективный компромисс: она сохраняет достаточную точность прогнозирования траектории, адаптируясь к ограничениям аппаратной платформы. Модель основана на комбинации кинематических уравнений с корректировками, учитывающими основные динамические воздействия (гравитационные аномалии, атмосферное сопротивление, влияние гравитации Солнца и Луны, давление солнечного света), но исключает избыточные расчеты, характерные для полномасштабных симуляций. Успешная апробация в реальных условиях доказывает, что предложенный подход может служить базой для дальнейшего развития алгоритмов навигации, особенно в контексте малых космических аппаратов с ограниченными ресурсами. В статье представлены физическая и математическая постановка задачи прогноза состояния космического аппарата, что позволяет более глубоко понять влияние различных факторов на точность навигации. В заключительной части работы приведены результаты моделирования отклонений параметров объекта для разных классов орбит, а также данные, полученные в ходе обработки реальных летных испытаний, подтверждающие возможность и необходимость учёта всех параметров для достижения высокой точности навигации. Совокупность приведенных данных является информационной основой для настройки алгоритма прогноза в соответствии с конкретными требованиями точности.*

*Ключевые слова: спутниковая навигация, аппаратура спутниковой навигации, модель движения, математическое моделирование, варьирование параметров.*

## Analysis of the movement model of a spacecraft in earth orbit

I. A. Sokolov<sup>1,2\*</sup>, G. S. Tsekhanovich<sup>1</sup>

<sup>1</sup>JSC “Design Bureau of Navigation Systems”  
3, Kulneva St., Moscow, 121170, Russian Federation

<sup>2</sup>St. Petersburg University  
7-9, Universitetskaya Embankment, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

\*E-mail ivansokolof1997@mail.ru

*Abstract.* The implementation of spacecraft motion models under real-time navigation module operation faces fundamental limitations associated with the need to balance computational accuracy and available processing power. The simultaneous execution of parallel tasks – such as processing navigation measurements, determining object coordinates via GNSS signals, noise filtering, data conversion, and archiving – requires algorithm optimization to minimize delays and resource consumption. Under these constraints, classical high-precision models based on complex differential equations or the inclusion of multiple perturbing factors become impractical due to their computational intensity. The motion model proposed in this study, integrated into navigation modules produced by JSC “KB NAVIS”, demonstrates an effective compromise: it retains sufficient trajectory prediction accuracy while adapting to hardware platform limitations. The model combines kinematic equations with adjustments accounting for primary dynamic effects (e.g., gravitational anomalies, atmospheric drag, solar and lunar gravitational influences, solar radiation pressure) but eliminates redundant calculations typical of full-scale simulations. Successful real-world testing proves that this approach can serve as a foundation for further development of navigation algorithms, particularly for small spacecraft with limited resources. The article presents the physical and mathematical formulation of the spacecraft state prediction problem, enabling a deeper understanding of how various factors affect navigation accuracy. The concluding section provides results from parameter deviation simulations and data from actual flight tests, confirming the feasibility and necessity of accounting for all parameters to achieve high navigation precision. The compiled dataset serves as an informational basis for configuring the prediction algorithm according to specific accuracy requirements.

*Keywords:* satellite navigation, satellite navigation equipment, motion model, mathematical modeling, parameter variation.

### Введение

Спутниковая навигация (СН) стала неотъемлемой частью современной жизни. От мобильных приложений для ориентации в городе до точного позиционирования в морской, авиационной и космической отраслях СН обеспечивает надежное и точное определение местоположения, скорости и времени [1]. Эти достоинства особенно полезны для автономной навигации, автоматического пилотирования, картографии и других приложений, которые только начинают активно развиваться [2].

Однако эта технология не является идеальной и имеет свои собственные проблемы, которые могут повлиять на ее эффективность и надежность:

1) сигнальные помехи: спутниковые сигналы, передаваемые навигационными системами, могут подвергаться различным помехам, таким как многолучевое распространение, шумы и блокирование сигнала. Это может вызывать искажение сигналов и снижать точность определения местоположения;

2) географические ограничения: в некоторых местах на Земле, таких как глубокие долины, горные районы или густо застроенные города, сигналы от спутников могут быть ослаблены или полностью заблокированы. Это приводит к проблемам с получением надежного сигнала навигации. Похожая проблема наблюдается в космическом пространстве для космических аппаратов (КА) на геостационарной орбите (ГСО), когда имеющегося числа видимых навигационных космических аппаратов (НКА) недостаточно для точного определения состояния КА;

3) зависимость от состояния НКА: СН полностью зависит от функционирования глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) [3]. Любые погрешности, технические сбои, сбои в спутниковых сетях или намеренные акты вмешательства могут привести к недоступности или неадекватной работе СН.

Необходимо отметить, что существуют методы и технологии, которые помогают справиться с проблемами СН. Например, существуют методы подавления помех, улучшающие качество принимаемых сигналов, защитные меры для снижения уязвимости системы, а также альтернативные навигационные системы, например, инерциальные. При комплексном использовании с ГНСС инерциальная система обеспечивает потребителя координатно-скоростными данными при отсутствии приема сигналов ГНСС.

Мгновенное (одномоментное) КСВ-решение по ГНСС – это метод, позволяющий определять положение объекта (вектор состояния объекта – координаты, скорость и время) в реальном времени. Этот метод удовлетворяет требованиям большинства приземных пользователей, а совместно с инерциальной системой позволяет преодолеть большинство проблем СН.

Мгновенное КСВ-решение для объектов на околоземных орбитах (ОО) аналогично «приземному», при этом особенностью орбитального движения, отличающей его от движения приземных объектов, является высокая предсказуемость – высокая точность прогноза движения, определяемого через параметры гравитации Земли, Луны, Солнца, сопротивления атмосферы, светового давления и др.

Для навигации на ОО прогноз дает возможность:

- 1) рассчитывать в реальном времени движение на интервалах потери слежения за сигналами НКА (подобно инерциальной навигационной системе), а также прогнозировать (предсказывать) движение в будущем;
- 2) рассчитывать по мгновенным координатам и скоростям (КС) среднюю на интервале орбиту ( $SrO$ ), которая может быть точнее каждого из исходных мгновенных КС-решений;
- 3) использовать рекурсивные алгоритмы [4–7], позволяющие в режиме реального времени учитывать различные источники погрешностей, такие как ошибки измерений, шумы, межпространственные помехи, систематические ошибки в координатах НКА.

Современные исследования в области моделирования орбитальной динамики КА на околоземных орбитах сталкиваются с необходимостью балансировки между точностью прогнозирования и вычислительной сложностью, обусловленной спецификой прикладных задач. В работах [8–9] представлены упрощенные модели, ориентированные на краткосрочное прогнозирование траекторий объектов на низкой круговой (НКО) и средневысокой околоземной орбитах (СОО), что актуально для задач наведения антенн с широким углом охвата. В частности, в [8] продемонстрировано применение модели SGP (Simplified General Perturbations) для расчета азимута и угла места КА на основе данных TLE (Two-Line Elements), с оценкой погрешностей относительно более точной модели. Исследование [9] предлагает алгоритм определения положения и ориентации Земли относительно КА, что критично для симуляции процессов стыковки. В отличие от указанных работ, исследование [10] фокусируется на траекториях межпланетных миссий (на примере экспедиции к астероиду Апофис), где набор возмущающих факторов включает гравитационные влияния удаленных небесных тел, несферичность астероида и давление солнечного света. В работах [11; 12] рассматриваются методы оптимизации траекторий, включая псевдоспектральный метод Гаусса и релятивистские модели распространения, однако их вычислительная сложность ограничивает применимость в режиме реального времени для ресурсограниченных систем.

Дополняя существующие исследования, в работе [13] предложен новый подход к моделированию орбитальной динамики с использованием машинного обучения для повышения точности прогнозирования траекторий космических аппаратов. Авторы демонстрируют, что интеграция нейронных сетей с классическими методами орбитальной механики позволяет значительно снизить вычислительную нагрузку, сохраняя при этом высокую точность прогноза, однако вся обработка происходит вне режима реального времени.

Следует отметить, что большинство существующих исследований игнорируют ГСО, ограничиваясь НКО и СОО. Целью данной работы является комплексное описание модели движения КА, реализованной в навигационных модулях производства АО «КБ НАВИС», с акцентом на анализ влияния погрешностей параметров движения на точность прогнозирования для различных классов орбит. Представлены результаты численного моделирования отклонений траекторных параметров, а также данные летных испытаний, подтверждающие необходимость и возможность учета динамических возмущений в режиме реального времени.

### 1. Физическая модель прогноза вектора состояния КА

В качестве системы координат в целях геодезического обеспечения орбитальных полётов и решения навигационных задач были выбраны WGS 84 и ПЗ-90. Обе характеризуются тем, что начало системы расположено в центре масс Земли. Ось координат  $Z$  в соответствии с рекомендациями международной службы вращения Земли (IERS) направлена к среднему северному полюсу. Ось координат  $X$  лежит в плоскости земного экватора этой же эпохи, образуя пересечение с плоскостью начального меридиана, установленного все той же IERS, и определяет положение нуль-пункта принятой системы счета. Ось  $Y$  дополняет систему координат до правой.

Разница двух систем координат состоит в дальнейшем только в значениях набора констант. В основном используется WGS 84, поэтому приведен пример для этой системы координат:

- угловая скорость вращения Земли  $\omega_3 = 7,292115 \times 10^{-5}$  рад/с;
- радиус Земли  $R_3$  (большая полуось  $a_e$ ) = 6378137 м;
- гравитационная постоянная  $\mu = 398600,4418 \times 10^9$  м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>;
- эксцентриситет орбиты Земли  $6,69437999013 \times 10^{-3}$ .

Предполагается, что КА не испытывает управляющих воздействий, т. е. не задействует управляющие двигатели, имеет постоянную массу. Таким образом, на положение и скорость КА в каждый момент времени будут оказывать воздействие следующие составляющие:

- 1) сила притяжения сферической и однородной модели Земли;
- 2) центробежная сила и сила Кориолиса, обусловленные вращением Земли и движением КА;
- 3) аномальная сила притяжения Земли, вызванная отличием Земли от сферической и однородной массы [14];
- 4) сопротивление атмосферы;
- 5) притяжение Солнца;
- 6) притяжение Луны;
- 7) давление солнечного света.

### 2. Математическая постановка задачи прогноза вектора состояния КА

#### 2.1. Общая система уравнений

Прогнозирование параметров движения КА на ОО от момента времени  $t_0$  до момента  $t$  выполняется путем численного интегрирования следующих дифференциальных уравнений движения в прямоугольной геоцентрической системе координат (ГСК) для определения координат положения  $(x, y, z)$  и составляющих скорости  $(V_x, V_y, V_z)$ :

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y, \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z, \quad (3)$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \cdot x + \omega_3^2 \cdot x + 2 \cdot \omega_3 \cdot V_y + \ddot{x}_a + \ddot{x}_s + \ddot{x}_c + \ddot{x}_m + \ddot{x}_l, \quad (4)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \cdot y + \omega_3^2 \cdot y + 2 \cdot \omega_3 \cdot V_x + \ddot{y}_a + \ddot{y}_s + \ddot{y}_c + \ddot{y}_m + \ddot{y}_l, \quad (5)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \cdot z + \ddot{z}_a + \ddot{z}_s + \ddot{z}_c + \ddot{z}_m + \ddot{z}_l, \quad (6)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – радиус-вектор положения КА;  $\ddot{x}_a, \ddot{y}_a, \ddot{z}_a$  – составляющие вектора ускорения, вызванные отличием модели Земли от сферической;  $\ddot{x}_s, \ddot{y}_s, \ddot{z}_s$  – составляющие вектора ускорения, вызванные аэродинамическим торможением КА в атмосфере Земли;  $\ddot{x}_c, \ddot{y}_c, \ddot{z}_c$  – составляющие вектора ускорения, вызываемые притяжением Солнца;  $\ddot{x}_m, \ddot{y}_m, \ddot{z}_m$  – составляющие вектора ускорения, вызываемые притяжением Луны;  $\ddot{x}_l, \ddot{y}_l, \ddot{z}_l$  – составляющие вектора ускорения, обусловленные давлением солнечного света.

Сила притяжения сферической и однородной модели Земли соответствует первому слагаемому в уравнениях (4)–(6). Центробежная сила соответствует второму, а сила Кориолиса третьему слагаемому формул (4)–(5).

## 2.2. Определение ускорений КА, обусловленных геопотенциалом

Составляющие вектора ускорения КА, вызванные отличием модели Земли от сферической, сначала определяются в топоцентрической системе координат (ТСК) через коэффициенты геопотенциала [14], после чего преобразуются в ГСК-составляющие  $\ddot{x}_a, \ddot{y}_a, \ddot{z}_a$ :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_a \\ \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x}{r} & \frac{x \cdot z}{r \cdot r_1} & \frac{-y}{r_1} \\ -\frac{y}{r} & \frac{y \cdot z}{r \cdot r_1} & \frac{x}{r_1} \\ -\frac{z}{r} & \frac{r_1}{r} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{U}_r \\ \dot{U}_\phi \\ \dot{U}_\lambda \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $\dot{U}_r, \dot{U}_\phi, \dot{U}_\lambda$  – составляющие вектора ускорения в ТСК: по радиус-вектору  $r$ , по широте  $\phi$  и долготе  $\lambda$ ;  $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Составляющие вектора ускорения  $\ddot{U}_r, \ddot{U}_\phi, \ddot{U}_\lambda$  определяются как суммы тригонометрического ряда:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_r &= \mu / r^2 \sum_{n=2}^N (a_e / r)^n (n+1) \sum_{m=0}^n A_{nm} \bar{P}_{nm}, \\ \ddot{U}_\phi &= \mu / r^2 \sum_{n=2}^N (a_e / r)^n \sum_{m=0}^n A_{nm} \cdot \bar{P}'_{nm}, \\ \ddot{U}_\lambda &= \frac{\mu}{r^2 \cdot \cos \phi} \sum_{n=2}^N (a_e / r)^n \sum_{m=0}^n m B_{nm} \bar{P}_{nm}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sin \phi &= z / r, \\ \cos \phi &= r_1 / r, \\ A_{nm} &= \bar{C}_{nm} \cdot \cos(m \cdot \lambda) + \bar{S}_{nm} \cdot \sin(m \cdot \lambda), \\ B_{nm} &= \bar{S}_{nm} \cdot \cos(m \cdot \lambda) - \bar{C}_{nm} \cdot \sin(m \cdot \lambda). \end{aligned}$$

$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  – нормированные коэффициенты разложения потенциала Земли.

Тригонометрические функции углов, кратных  $\lambda$ , вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\sin(m \cdot \lambda) &= \sin(\lambda) \cdot \cos([m-1] \cdot \lambda) + \cos(\lambda) \cdot \sin([m-1] \cdot \lambda), \\ \cos(m \cdot \lambda) &= \cos(\lambda) \cdot \cos([m-1] \cdot \lambda) - \sin(\lambda) \cdot \sin([m-1] \cdot \lambda), \\ \cos \lambda &= x / r_1, \sin \lambda = y / r_1.\end{aligned}$$

Нормированные полиномы Лежандра  $\bar{P}_{nm}$  являются функциями от  $\sin(\phi)$ ,  $\cos(\phi)$  и определяются по следующим рекуррентным зависимостям:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{nm} &= \sqrt{\frac{2 \cdot n + 1}{2 \cdot n}} \cdot \cos(\phi) \cdot \bar{P}_{n-1, m-1}, & n = m > 1, \\ \bar{P}_{nm} &= \sqrt{\frac{2 \cdot n + 1}{n^2 - m^2}} \left[ \sqrt{2 \cdot n - 1} \cdot \sin(\phi) \cdot \bar{P}_{n-1, m} - \sqrt{\frac{(n-m-1) \cdot (n+m-1)}{2 \cdot n - 3}} \cdot \bar{P}_{n-2, m} \right], & n > m, \\ \bar{P}_{nm} &= 0, & m > n.\end{aligned}$$

Начальные значения:  $\bar{P}_{00} = 1, \bar{P}_{10} = \sqrt{3} \sin \phi, P_{11} = \sqrt{3} \cos \phi$ .

Производные от нормированных полиномов Лежандра  $\bar{P}_{nm}$  по  $\phi$  определяются по следующим рекуррентным зависимостям:

$$\begin{aligned}\bar{P}'_{nm} &= \sqrt{\frac{2 \cdot n + 1}{2 \cdot n}} \cdot (\cos(\phi) \cdot \bar{P}'_{n-1, m-1} - \sin(\phi) \cdot \bar{P}_{n-1, m-1}), & n = m > 1, \\ \bar{P}'_{nm} &= \sqrt{\frac{2 \cdot n + 1}{n^2 - m^2}} \cdot \left[ \sqrt{2 \cdot n - 1} (\sin(\phi) \cdot \bar{P}'_{n-1, m} + \cos(\phi) \cdot \bar{P}_{n-1, m}) - \sqrt{\frac{(n-m-1) \cdot (n+m-1)}{2 \cdot n - 3}} \cdot \bar{P}'_{n-2, m} \right], & n > m, \\ \bar{P}'_{nm} &= 0, & m > n.\end{aligned}$$

Начальные значения:  $\bar{P}'_{00} = 0, \bar{P}'_{10} = \sqrt{3} \cdot \cos(\phi), P'_{11} = -\sqrt{3} \cdot \sin(\phi)$ .

### 2.3. Определение ускорений КА, обусловленных торможением в атмосфере

Составляющие вектора ускорения  $\ddot{x}_s, \ddot{y}_s, \ddot{z}_s$ , вызванные аэродинамическим торможением КА в атмосфере Земли [14], вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\ddot{x}_s &= -S_b \cdot \rho \cdot V \cdot V_x, \\ \ddot{y}_s &= -S_b \cdot \rho \cdot V \cdot V_y, \\ \ddot{z}_s &= -S_b \cdot \rho \cdot V \cdot V_z,\end{aligned}\tag{8}$$

где  $\rho$  – плотность верхней атмосферы из национальной стандартной модели (ГОСТ Р 25645.166–2004);  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$  – модуль вектора скорости КА;  $S_b = C_x S_m / 2m$  – баллистический коэффициент;  $m$  – масса КА;  $C_x$  – аэродинамический коэффициент лобового сопротивления;  $S_m$  – площадь Миделева сечения КА.

Значения аэродинамического коэффициента  $C_x$  и площади Миделева сечения  $S_m$  определяются размером и формой конкретного КА.

### 2.4. Определение ускорений КА, обусловленных притяжением Солнца

Составляющие вектора ускорения  $\vec{r}_c = (\ddot{x}_c, \ddot{y}_c, \ddot{z}_c)$ , вызванные возмущениями от Солнца [14], определяются по следующим формулам:

$$\vec{r}_c = \frac{\mu_c \cdot (\vec{r}_c - \vec{r})}{|\vec{r}_c - \vec{r}|^3} - \frac{\mu_c \cdot \vec{r}_c}{|\vec{r}_c|^3},$$

где  $\mu_c$  – произведение гравитационной постоянной на массу Солнца;  $\vec{r}_c$  – вектор положения Солнца относительно Земли;  $\vec{r}$  – вектор положения объекта относительно Земли.

Расчет эклиптических и геоцентрических координат Солнца [15] использует в качестве констант средние элементы орбиты Солнца, определенные на эпоху J2000. Оцениваемая погрешность расчета – не более 10 угловых мин.

Прямоугольные экваториальные координаты Солнца вычисляются при помощи радиус-вектора, долготы и наклона эклиптики к экватору. При расчете координат Солнца на текущую дату учитывается его эллиптическое движение. Радиус-вектор Солнца и долгота Солнца на текущую дату определяются через ряды по средней аномалии. Средняя аномалия на текущую дату определяется от средней аномалии на эпоху J2000 с учетом среднего движения на эпоху J2000 и времени в юлианских столетиях от эпохи J2000. Наклон эклиптики к экватору на текущую дату определяется от наклона эклиптики на J2000 и изменения наклона за время в юлианских столетиях от эпохи J2000.

Координаты Солнца в прямоугольной геоцентрической системе координат на текущую дату определяются через экваториальные координаты поворотом на гринвичский часовой угол. Гринвичский часовой угол на текущую дату определяется без учета движения полюсов, прецессии и нутации от гринвичского часового угла на эпоху J2000 с учетом его изменения за время после эпохи J2000.

Экваториальные координаты Солнца определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(L), \\y &= r \cdot \sin(L) \cdot \cos(EPs), \\z &= r \cdot \sin(L) \cdot \sin(EPs),\end{aligned}$$

где  $r$  – расстояние до Солнца:

$$r = [149,619 - 2,499 \cdot \cos(M) - 0,021 \cdot \cos(2 \cdot M)] \cdot 10^9,$$

$M$  – средняя аномалия:

$$M = 357^\circ,528 + 35999^\circ,05 \times T,$$

$L$  – долгота Солнца с учетом прецессии:

$$L = 282^\circ,94 + M + [6892'' \cdot \sin(M) + 72'' \times \sin(2 \cdot M)] / 3600 + 1^\circ 3972 \cdot T,$$

$EPs$  – наклон эклиптики к экватору:

$$EPs = 23^\circ,43929111 - 46'',8150 \cdot T - 0'',00059 \cdot T^2 + 0'',001813 \cdot T^3,$$

$T$  – время в юлианских столетиях от эпохи J2000.

Координаты Солнца (вектор Солнца  $\vec{R}_S = [x_S \ y_S \ z_S]$ ) в прямоугольной геоцентрической СК определяются по формулам

$$\begin{aligned}x_S &= x \cdot \cos(Tgr) + y \cdot \sin(Tgr), \\y_S &= y \cdot \cos(Tgr) - x \cdot \sin(Tgr), \\z_S &= z,\end{aligned}$$

где  $Tgr$  – гринвичский часовой угол от эпохи J2000:

$$Tgr = 280^\circ,46061837504 + 360^\circ,9856473662862 \cdot d,$$

$$i = Tgr / 360,$$

$$RAD = 180 / \pi,$$

$$Tgr = (Tgr - i \cdot 360) / RAD, \text{ если } Tgr < 0, \text{ то } Tgr = Tgr + 2\pi,$$

$$d = (MJD - 51544) + (FMJD \cdot 86400 - dUTC) / 86400 - 0,5;$$

$MJD$  – число дней от начала эпохи J2000,

$FMJD$  число секунд от начала эпохи,

$dUTC$  поправка времени к шкале UTC.

Расчет экваториальных координат Солнца проверялся по Астрономическому ежегоднику СССР на 1983 г. и контрольным точкам с сайта NASA. Примеры расчета представлены в табл. 1.

Таблица 1

## Оценка ошибки расчета координат Солнца

Расчет экваториальных координат Солнца на 21.11.2010 12:00:00			
Экваториальные координаты Солнца	X, км	Y, км	Z, км
Сайт NASA	-7,6318610 E+07	-1,1610898 E+08	-5,0335183 E+07
Расчет по формулам	-7,6038571 E+07	-1,1626342 E+08	-5,0402949 E+07
Ошибка расчета	0,0280039 E+07	0,0015444 E+08	0,0067766 E+07
Мах ошибка	0,3269033 E+06 км=0,00218=7,5 угловых мин		

Расчет экваториальных координат Солнца на 21.06.2011 12:00:00			
Экваториальные координаты Солнца	X, км	Y, км	Z, км
Сайт NASA	9,9620932 E+05	1,3947997 E+08	6,0467823 E+07
Расчет по формулам	6,4872767 E+05	1,3948265 E+08	6,0468820 E+07
Ошибка расчета	3,4748165 E+05	0,0000268 E+08	0,0000997 E+07
Мах ошибка	0,347493 E+06 км = 0,00232 = 8,0 угловых мин		

## 2.5. Определение ускорений КА, обусловленных притяжением Луны

Составляющие вектора ускорения  $\vec{r}_m = (\ddot{x}_m, \ddot{y}_m, \ddot{z}_m)$ , вызванные возмущениями от Луны [14], аналогично Солнцу, определяются по следующим формулам:

$$\vec{r}_m = \frac{\mu_m \cdot (\vec{r}_m - \vec{r})}{|\vec{r}_m - \vec{r}|^3} - \frac{\mu_m \cdot \vec{r}_m}{|\vec{r}_m|^3},$$

где  $\mu_m$  – произведение гравитационной постоянной на массу Луны;  $\vec{r}_m = (x_m, y_m, z_m)$  – вектор положения Луны относительно Земли;  $\vec{r}$  – вектор положения КА относительно Земли.

Для расчета координат Луны [15] надо знать текущее время в формате год, месяц, день, час, минута, секунда, поправка к ШВ UTC (US).

Порядок расчета и формулы следующие:

перевод текущей даты и времени во время в юлианских столетиях  $T$  от эпохи J2000 аналогично Солнцу;

расчет средней долготы Луны  $el0$  (в градусах):

$$el0 = 218,31617 + 481267,88088 \cdot T - 1,3972 \cdot T^2;$$

средняя аномалия Луны  $el$  (в градусах):

$$el = 134,96292 + 477198 / 86753 \cdot T;$$

средняя аномалия Солнца  $elp$  (в градусах):

$$elp = 357,528 + 35999,04944 \cdot T;$$

среднее угловое расстояние  $f$  Луны от восходящего узла (в градусах):

$$f = 93,27283 + 483202,01873 \cdot T;$$

разность средних долгот Солнца и Луны (в градусах):

$$d = 297,85027 + 445267,11135 \cdot T;$$

истинная эклиптическая долгота Луны (эпоха J2000) отличается от средней долготы периодическими членами  $Lon$  и  $dLon$  (в градусах):

$$Lon = el0 + dlon$$

$$dlon = [22640 \cdot \sin(el) + 769 \cdot \sin(2 \cdot el) - 4586 \cdot \sin(el - 2 \cdot d) + \\ + 2370 \cdot \sin(2 \cdot d) - 668 \cdot \sin(elp) - 412 \cdot \sin(2 \cdot f) - 212 \cdot \sin(2 \cdot el - 2 \cdot d) - \\ - 206 \cdot \sin(el + elp - 2 \cdot d) + 192 \cdot \sin(el + 2 \cdot d) - 165 \cdot \sin(elp - 2 \cdot d) + 148 \cdot \sin(el - elp) - \\ - 125 \cdot \sin(d) - 110 \cdot \sin(el + elp) - 55 \cdot \sin(2 \cdot f - 2 \cdot d)] / 3600$$

истинная эклиптическая широта Луны  $Lat$  (эпоха J2000) (в градусах):

$$Lat = [18520 \cdot \sin(f + Lon - el0 + q) - 526 \cdot \sin(f - 2 \cdot d) + 44 \cdot \sin(el + f - 2 \cdot d) - \\ - 31 \cdot \sin(-el + f - 2 \cdot d) - 25 \cdot \sin(-2 \cdot el + f) - 23 \cdot \sin(elp + f - 2 \cdot d) + \\ + 21 \cdot \sin(-el + f) + 11 \cdot \sin(-elp + f - 2 \cdot d)] / 3600,$$

где  $q = 412 / 3600 \cdot \sin(2 \cdot f) + 541 / 3600 \cdot \sin(elp)$  ;

расстояние  $Rse$  от центра Земли до Луны (в метрах):

$$Rse = [38500 - 20905 \cdot \cos(el) - 3699 \cdot \cos(2 \cdot d - el) - 2956 \cdot \cos(2 \cdot d) - \\ - 570 \cdot \cos(2 \cdot el) + 46 \times \cos(2el - 2d) - 20 \times 5 \cos(elp - 2d) - \\ - 171 \times \cos(el + 2d) + 2 - 152 \times \cos(el + elp - 2d)] \times 1000;$$

истинная эклиптическая долгота Луны с учетом прецессии (в градусах):

$$Lon = Lon + 1,3972 \times T ;$$

наклон эклиптики к экватору  $Obe$  (в градусах):

$$Obe = 23,43929111 ;$$

эклиптические координаты Луны  $xse, yse, zse$ :

$$xse = Rse \cdot \cos(Lon) \cdot \cos(Lat), \\ yse = Rse \cdot \sin(Lon) \cdot \cos(Lat), \\ zse = Rse \cdot \sin(Lat);$$

экваториальные координаты Луны  $xse, yse, zse$ :

$$xse = xse \\ yse = yse \cdot \cos(Obe) - zse \cdot \sin(Obe), \\ zse = zse \cdot \cos(Obe) + yse \cdot \sin(Obe);$$

координаты Луны в прямоугольной геоцентрической СК:

$$x_m = xse \cdot \cos(Tgr) + yse \cdot \sin(Tgr), \\ y_m = yse \cdot \cos(Tgr) - xse \cdot \sin(Tgr), \\ z_m = zse,$$

где гринвичский часовой угол  $Tgr$  от эпохи J2000 рассчитывается по формулам аналогичным Солнцу.

## 2.6. Определение ускорений КА, обусловленных давлением солнечного света

Для вычисления ускорений КА, обусловленных действием светового давления [14], надо знать коэффициент эффективного отражения  $Crefl$ , зависящий от площади поперечного сечения, массы и других свойств поверхности. Составляющие вектора ускорения  $\vec{j}_l = (\ddot{x}_l, \ddot{y}_l, \ddot{z}_l)$ , вызванные давлением солнечного света определяются по следующей формуле:

$$\ddot{\vec{r}}_i = Crefl \cdot \left( \frac{1.4959787 \cdot 10^8}{|\vec{r}_c|} \right)^2 \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_c)}{|\vec{r}_c|}, \quad (9)$$

где  $|\vec{r}_c|$  – расстояние от Солнца до КА.

## 2.7. Метод Рунге – Кутта четвертого порядка

Численное интегрирование системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений движения КА (1)–(6) вида  $y'_j = f_j(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$  осуществляется методом Рунге – Кутта четвертого порядка с постоянным шагом [16] ( $j = 1, \dots, 6$  – число уравнений, описывающих движение КА).

Для  $k$ -го шага и  $j$ -го уравнения обозначим

$$y_{jk} = y_j(t_k), \quad f_{jk} = f_j(t_k, y_{1k}, y_{2k}, y_{3k}, y_{4k}, y_{5k}, y_{6k}).$$

На шаге  $k+1$  интегрирования значение искомым функций рассчитывается по формуле:

$$y_{j,k+1} = y_{j,k} + h/6 \cdot (k_{1j} + 2 \cdot k_{2j} + 2 \cdot k_{3j} + k_{4j}),$$

где  $h$  – шаг интегрирования,

$$k_{1j} = f_j(t_k, y_{1k}, y_{2k}, y_{3k}, y_{4k}, y_{5k}, y_{6k}),$$

$$k_{2j} = f_j\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{1k} + \frac{h}{2} \cdot k_{11}, y_{2k} + \frac{h}{2} \cdot k_{12}, y_{3k} + \frac{h}{2} \cdot k_{13}, y_{4k} + \frac{h}{2} \cdot k_{14}, y_{5k} + \frac{h}{2} \cdot k_{15}, y_{6k} + \frac{h}{2} \cdot k_{16}\right),$$

$$k_{3j} = f_j\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{1k} + \frac{h}{2} \cdot k_{21}, y_{2k} + \frac{h}{2} \cdot k_{22}, y_{3k} + \frac{h}{2} \cdot k_{23}, y_{4k} + \frac{h}{2} \cdot k_{24}, y_{5k} + \frac{h}{2} \cdot k_{25}, y_{6k} + \frac{h}{2} \cdot k_{26}\right),$$

$$k_{4j} = f_j\left(t_k + h, y_{1k} + h \cdot k_{31}, y_{2k} + h \cdot k_{32}, y_{3k} + h \cdot k_{33}, y_{4k} + h \cdot k_{34}, y_{5k} + h \cdot k_{35}, y_{6k} + h \cdot k_{36}\right).$$

При численном интегрировании на большом числе шагов происходит значительная потеря точности вследствие накопления ошибок округления. Считается, что накопление ошибок округления в координатах пропорционально количеству шагов интегрирования в степени  $3/2$ :

$$\varepsilon_n^i \approx 3n^{3/2} \cdot \varepsilon(0),$$

где  $\varepsilon(0)$  – точность вычисления на каждом шаге.

## 3. Погрешности прогноза движения КА по ОО при наличии ошибок

Приведенные выше уравнения прогноза были запрограммированы в среде MATLAB и выполнены расчеты:

- для НКО с периодом обращения вокруг Земли 1,5 ч и высотой орбиты над уровнем Мирового океана 500 км;
- СОО с периодом 12 ч и высотой 20000 км;
- ГСО с периодом 24 ч и высотой 35777 км.

В качестве эталонных данных использовались результаты прогноза от гармоник потенциала Земли до 64 порядка с учетом ускорений от Солнца и Луны, с равным нулю баллистическим коэффициентом и нулевым коэффициентом эффективного отражения.

Параметры движения (в том числе стартовая точка прогноза) варьировались, и оценивалась погрешность прогноза. Совокупность полученных данных позволяет в первом приближении, исходя из допустимой погрешности прогноза, оценить точности, с которой должны быть известны используемые при прогнозе параметры.

### 3.1. Погрешности прогноза от ошибки начального положения

Для того чтобы оценить влияние ошибки в координатах и скоростях по разным осям, было задано равномерное распределение смещения начального вектора состояния с указанным

модулем отдельно для координат (табл. 2) и скоростей (табл. 3) и затем выбран максимальный результат погрешности прогноза.

Таблица 2

**Погрешность прогноза от ошибок в начальных координатах**

НКО. Период орбиты: T = 1,5 ч. Высота 500 км. Погрешность прогноза, м:					
Модуль ошибки, м	Интервал прогноза, ч				
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0
0,5	2,1	5,5	8,0	15,7	30,8
2	9,7	27,3	36,6	73,1	145,6
10	39,2	101,7	144,6	286,5	566,9
30	118,5	267,2	301,0	619,4	1256,9

СОО. Период орбиты: T = 12 ч. Высота 20000 км. Погрешность прогноза, м:							
Модуль ошибки, м	Интервал прогноза, ч						
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
0,5	0,5	0,5	0,7	1,8	5,6	8,7	17,7
2	2,0	2,2	2,5	6,0	18,2	38,6	76,3
10	10,4	12,1	15,7	38,3	120,9	202,6	407,0
30	32,2	39,4	51,8	122,9	399,0	730,2	1461,4

ГСО. Период орбиты: T = 24 ч. Высота 35777 км. Погрешность прогноза, м:							
Модуль ошибки, м	Интервал прогноза, ч						
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
0,5	0,5	0,5	0,6	0,9	2,6	10,0	18,7
2	2,0	2,0	2,2	2,9	7,3	29,4	55,9
10	10,1	10,6	11,3	16,3	43,3	166,2	310,6
30	30,6	32,4	35,5	53,9	145,1	555,2	1036,8

Таблица 3

**Погрешность прогноза от начальных ошибок в скоростях**

НКО. Период орбиты: T = 1,5 ч. Высота 500 км. Погрешность прогноза, м:					
Модуль ошибки, м/с:	Интервал прогноза, ч				
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0
0,0001	0,3	1,4	1,7	3,4	6,8
0,0005	1,9	6,9	8,6	17,0	33,6
0,0020	7,7	28,1	34,7	68,7	135,8
0,0050	19,8	67,2	86,1	170,2	336,3

СОО. Период орбиты: T = 12 ч. Высота 20000 км. Погрешность прогноза, м:							
Модуль ошибки, м/с	Интервал прогноза, ч						
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
0,0001	0,1	0,3	0,6	1,4	6,7	12,4	24,5
0,0005	0,9	1,9	3,1	9,3	34,5	65,7	130,1
0,0020	3,6	7,7	12,7	34,3	131,4	261,4	517,3
0,0050	9,1	19,2	30,6	94,5	352,4	621,9	1232,9

ГСО. Период орбиты: T = 24 ч. Высота 35777 км. Погрешность прогноза, м:							
Модуль ошибки, м/с	Интервал прогноза, ч						
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
0,0001	0,1	0,3	0,5	1,2	3,6	14,7	25,8
0,0005	0,9	1,8	2,8	6,4	19,6	74,6	129,4
0,0020	3,6	7,3	11,1	24,9	76,5	268,1	507,2
0,0050	9,0	18,3	28,3	64,9	180,2	625,7	1277,6

В реальных условиях погрешности положения и скорости действуют комплексно. Исходя из начальных погрешностей и требуемого интервала прогноза, по приведенным ниже данным можно оценить необходимость учета прочих параметров прогноза и степень их точности.

### 3.2. Ошибки прогноза от разного числа учтенных гармоник геопотенциала

Аномальная сила притяжения Земли (7) зависит от числа учтенных гармоник геопотенциала. Погрешность счисления координат с учетом разного числа гармоник потенциала Земли от начальных координат и скоростей представлена в табл. 4.

Для достижения минимальных ошибок прогноза для НКО нужно учитывать наибольшее число гармоник потенциала Земли. С ростом высоты орбиты необходимое число гармоник уменьшается, однако 8 гармоник является необходимым минимумом.

Таблица 4

#### Ошибки прогноза от числа учтенных гармоник геопотенциала

НКО. Период орбиты: $T = 1,5$ ч. Высота 500 км. Ошибки прогноза, м:					
Число гармоник:	Интервал прогноза, ч				
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0
32	1,1	1,4	1,4	4,4	14,4
16	5,3	14,8	24,4	19,0	25,2
8	20,8	65,1	66,7	140,2	197,2
2	100,2	236,6	236,6	451,9	626,1

СОО. Период орбиты: $T = 12$ ч. Высота 20000 км. Ошибки прогноза, м:							
Число гармоник:	Интервал прогноза, ч						
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
32	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
16	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,3	0,8
2	0,1	0,7	1,5	5,6	12,4	27,6	32,0

ГСО. Период орбиты: $T = 24$ ч. Высота 35777 км. Ошибки прогноза, м:							
Число гармоник:	Интервал прогноза, ч						
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
32	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
16	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1
2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,6	3,3	21,3

### 3.3. Влияние сопротивления атмосферы

Состояние атмосферы учитывалось по ГОСТ Р 25645.166–2004. Варьирование баллистического коэффициента  $Sb$  в (8) сильнее влияет на низкой орбите [17] в силу более плотной атмосферы. Поэтому дополнительно рассмотрены несколько НКО (табл. 5).  $Sb$  линейно связан с ускорением, а значит в (1)–(6) ошибка координат будет иметь такую же зависимость, несмотря на нелинейность орбиты, что показано для одной НКО.

Таблица 5

#### Влияние сопротивления атмосферы

Sb	Интервал прогноза, ч				
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0
НКО. Период орбиты: $T = 1,45$ ч. Высота 200 км. Ошибки прогноза, м:					
6,25e-05	1,3	11,8	36,6	143,5	570,6
6,25e-04	13,6	118,9	366,5	1437,7	5722,7
6,25e-03	136,2	1191,2	3683,4	>10000	>10000
6,25e-02	1364,6	>10000	>10000	>10000	>10000

Sb	Интервал прогноза, ч				
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0
НКО. Период орбиты: T = 1,49 ч. Высота 288 км. Ошибки прогноза, м:					
6,25e-03	7,8	67,8	190,0	766,8	3098,1
НКО. Период орбиты: T = 1,50 ч. Высота 500 км. Ошибки прогноза, м:					
6,25e-03	0,1	0,8	3,1	12,2	48,9
НКО. Период орбиты: T = 1,68 ч. Высота 600 км. Ошибки прогноза, м:					
6,25e-03	0,1	0,2	0,7	2,7	10,9
НКО. Период орбиты: T = 1,76 ч. Высота 1000 км. Ошибки прогноза, м:					
6,25e-03	0,0	0,0	0,1	0,1	0,4

В табл. 5 видно ослабевание влияния баллистического коэффициента с ростом высоты орбиты. Также заметно, что увеличение баллистического коэффициента на порядок приводит к увеличению ошибки прогноза на порядок.

В силу отсутствия атмосферы выше 3000 км отсутствует и ее влияние на ошибку прогноза для СОО и ГСО. Однако для НКО учет баллистического коэффициента необходим, а для эллиптических орбит, совмещающих свойства НКО и СОО, необходим в пределах указанной высоты.

### 3.4. Ошибки прогноза от притяжения Солнца

В оценке влияния притяжения Солнца на прогноз положения КА рассматривается 2 параметра (табл. 6):

– ошибка углового определения положения Солнца. Для того чтобы задать угловую ошибку в координатах Солнца (ошибку влияния притяжения), координаты смещались на равномерно распределенную случайную величину так, чтобы угол смещения был равен указанному значению, затем был выбран максимальный результат погрешности прогноза среди равных значений угла смещения;

– ошибка определения расстояния до Солнца из-за периодического (год) изменения радиуса орбиты Земли от 147098 до 152098 тыс. км.

Также приведена ошибка прогноза в случае, когда влияние притяжения Солнца не учтено.

Из данных табл. 6 следует, что вариацию расстояния объект – Солнце из-за положения объекта на орбите практически можно не учитывать.

Таблица 6

### Ошибки прогноза от притяжения Солнца

НКО. Период орбиты: T = 1,5 ч. Высота 500 км. Погрешности прогноза, м:						
Параметр ошибки		Интервал прогноза, ч				
		0,5	1,0	1,5	3,0	6,0
Угол, градусы	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1
	0,5	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1
	2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3
	10	0,5	1,0	1,0	1,4	2,5
Расстояние, тыс. км	20	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	100	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	500	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1
	2500	0,0	0,1	0,1	0,2	0,4
Без учета $\ddot{r}_c$		0,6	2,2	2,3	4,1	7,6

СОО. Период орбиты: $T = 12$ ч. Высота 20000 км. Погрешности прогноза, м:								
Параметр ошибки		Интервал прогноза, ч						
		0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
Угол, градусы	0,1	0,0	0,0	0,1	0,2	1,0	2,2	2,6
	0,5	0,1	0,2	0,5	1,1	4,6	8,5	14,9
	2	0,2	0,6	1,4	4,9	18,5	33,7	58,3
	10	1,0	3,9	8,5	25,2	74,2	173,4	222,3
Расстояние, тыс. км	20	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3
	100	0,0	0,0	0,0	0,2	0,6	0,8	1,6
	500	0,0	0,1	0,2	0,8	3,2	3,9	7,9
	2500	0,1	0,4	0,9	4,1	16,4	19,8	40,6
Без учета $\vec{r}_c$		2,0	7,9	17,6	78,9	314,4	379,3	778,3
ГСО. Период орбиты: $T = 24$ ч. Высота 35777 км. Ошибки прогноза, м:								
Параметр ошибки		Интервал прогноза, ч						
		0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
Угол, градусы	0,1	0,021	0,084	0,2	0,7	2,2	9,9	43,3
	0,5	0,114	0,455	1,0	4,0	13,4	52,4	210,3
	2	0,401	1,578	3,5	13,1	39,9	189,2	755,1
	10	1,756	6,871	15,4	62,6	216,0	940,6	3986,0
Расстояние, тыс. км	20	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,9	0,976
	100	0,0	0,0	0,1	0,3	0,8	4,5	4,9
	500	0,0	0,2	0,4	1,3	4,5	22,8	24,6
	2500	0,2	0,8	1,8	6,5	21,6	109,5	118,1
Без учета $\vec{r}_c$		4,5	17,4	38,2	135,2	451,0	2284,5	2464,0

### 3.5. Ошибки прогноза от притяжения Луны

В оценке влияния притяжения Луны на прогноз положения КА рассматривается 2 параметра (табл. 7):

- ошибка углового определения Луны аналогично Солнцу;
- ошибка определения расстояния до Луны из-за периодического изменение радиуса лунной орбиты от 356410 до 406740 км.

Также приведена ошибка прогноза в случае, когда влияние притяжения Луны не учтено.

Таблица 7

#### Погрешности прогноза от притяжения Луны

НКО. Период орбиты: $T = 1,5$ ч. Высота 500 км. Погрешности прогноза, м:						
Параметр ошибки		Интервал прогноза,				
		0,5	1,0	1,5	3,0	6,0
Угол, градусы	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,5	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2
	2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,6
	10	1,2	1,6	1,9	3,6	6,5
Расстояние, км	200	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	1000	0,0	0,1	0,1	0,1	0,2
	5000	0,1	0,3	0,3	0,5	0,9
	25000	0,3	1,4	1,5	2,6	4,9
Без учета $\vec{r}_m$		1,3	5,9	6,1	10,8	20,4

СОО. Период орбиты: T = 12 ч. Высота 20000 км. Погрешности прогноза, м:								
Параметр ошибки		Интервал прогноза, ч						
		0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
Угол, градусы	0,1	0,0	0,1	0,2	0,7	3,0	5,4	6,0
	0,5	0,2	0,6	1,1	3,0	11,9	21,9	31,8
	2	0,6	2,1	4,4	14,0	69,4	121,1	133,1
	10	2,6	9,7	20,3	73,0	255,4	570,3	570,3
Расстояние, км	200	0,0	0,0	0,1	0,4	1,2	1,4	3,0
	1000	0,0	0,2	0,4	1,8	6,2	6,9	15,2
	5000	0,2	0,8	1,9	8,6	30,2	34,0	74,5
	25000	1,2	5,0	11,4	51,3	178,9	200,1	442,6
Без учета $\ddot{r}_m$		5,1	20,4	46,6	210,8	758,7	885,9	1855,5

ГСО. Период орбиты: T = 24 ч. Высота 35777 км. Ошибки прогноза, м:								
Параметр ошибки		Интервал прогноза, ч						
		0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
Угол, градусы	0,1	0,0	0,1	0,2	0,7	3,0	18,6	24,4
	0,5	0,1	0,3	0,8	2,7	12,6	92,4	140,7
	2	0,5	2,0	4,3	15,8	71,1	452,0	590,0
	10	2,8	11,1	24,5	89,3	413,5	2373,7	4052,2
Расстояние, км	200	0,0	0,0	0,1	0,3	1,2	5,0	15,7
	1000	0,0	0,2	0,4	1,5	6,1	25,1	78,0
	5000	0,2	0,9	1,9	7,7	30,7	127,2	394,8
	25000	0,3	1,2	2,6	10,3	41,2	170,8	530,3
Без учета $\ddot{r}_m$		5,9	22,9	50,6	204,8	831,2	3355,3	>10000

Влияние Солнца и Луны на КА зависит от типа орбиты – низкая или высокая. Для НКО точность вычислений положения Луны и Солнца может не быть критически важной, требуется минимальная точность для достижения оптимальных результатов. Для высоких орбит влияние этих небесных тел становится гораздо более значимым, требуя более точных моделей и расчетов. При движении на орбитах, имеющих свойства ГСО и НКО, например, высоких эллиптических, необходимо учитывать особенности каждой орбиты в зависимости от фазы движения объекта.

### 3.6. Влияние давления солнечного света

Варьирование коэффициента эффективного отражения  $C_{refl}$  относительно нулевого значения дает следующие результаты (табл. 8).

Таблица 8

#### Ошибки прогноза от $C_{refl}$

НКО. Период орбиты: T = 1,5 ч. Высота 500 км. Ошибки прогноза, м:							
$C_{refl}$	Интервал прогноза, ч						
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
$10^{-8}$	0,0	0,1	0,3	0,6	0,9	0,9	0,9
$10^{-7}$	0,2	0,9	3,0	5,7	9,3	9,3	9,3
$10^{-6}$	1,6	9,4	30,4	57,0	93,1	93,1	93,1
$10^{-5}$	16,0	94,3	303,8	570,3	931,0	931,0	931,0
СОО. Период орбиты: T = 12 часов Высота 20000 км. Ошибки прогноза, м:							
$C_{refl}$	Интервал прогноза, часы						
	0,5	1,0	1,5	3,0	6,0	12,0	24,0
$10^{-8}$	0,0	0,1	0,1	0,55	2,6	8,4	16,9
ГСО. Период орбиты: T = 24 часа Высота 35777 км. Ошибки прогноза, м:							
$10^{-8}$	0,0	0,1	0,1	0,6	2,0	13,2	61,2

При прогнозах движения по НКО следует не забывать исключать ускорения из-за светового давления на участках затенения Солнца Землей.

Как и в случае баллистического коэффициента, увеличение на порядок ошибки коэффициента эффективного отражения увеличивает на порядок ошибку прогноза, что также подтверждается линейной зависимостью в (9) и не зависит от нелинейности орбиты.

#### 4. Использование модели прогноза при обработке реальных данных

В ходе проведения летных испытаний объекта на НКО с помощью спутниковой навигации был получен набор мгновенных КС-решений. В силу, прежде всего, погрешностей эфемеридно-временного обеспечения ГНСС последовательность мгновенных КС-решений должна представлять собой пилообразную ломаную вокруг реальной траектории. Поэтому в качестве эталона была использована СрО, рассчитанная по мгновенным КС-решениям методом МНК с использованием прогноза (для сведения отдельных КС-решений к общему моменту) и последующим «размножением» рассчитанной СрО на все исходные мгновенные КС-решения.

Параметры прогноза были выбраны по вышеприведенным в разделе 3 данным для интервала прогноза 4,5 ч, ожидаемой точности мгновенного положения 15 м ( $3\sigma$ ) и допустимой погрешности прогноза не более 2 м:

- гармоники потенциала Земли до 32 порядка;
- учет ускорений от притяжения Солнца и Луны без погрешностей;
- баллистический коэффициент 0,000625;
- коэффициент эффективного отражения  $10^{-7}$ .

График отклонений мгновенных КС-решений от рассчитанной СрО представлен на рисунке.

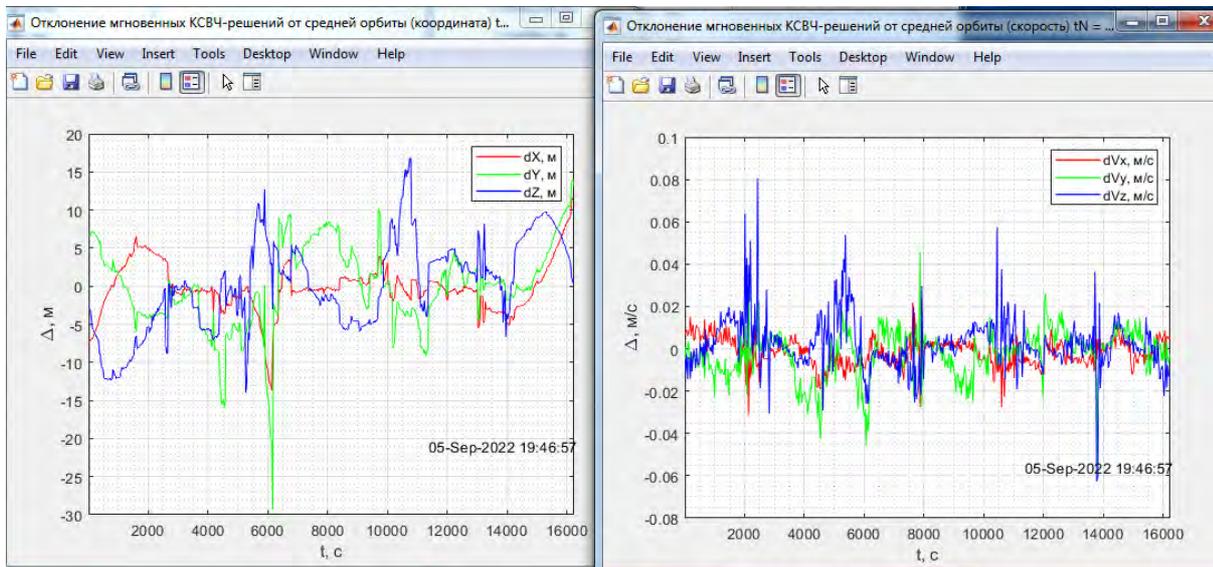


График отклонений реальных мгновенных КС-решений объекта на НКО от рассчитанной СрО (3 витка – 4,5 ч)

Graph of deviation of change of instantaneous KS-solutions of the object on NKO from the calculated SRO (3 seconds – 4.5 hours)

Из рисунка видно, что характер мгновенных КС-решений соответствует ожидаемому, отсутствует явное ухудшение точности со временем, что свидетельствует о корректном выборе параметров прогноза движения. Погрешность реальных КС-решений относительно рассчитанной СрО 15 м и 4 см/с ( $3\sigma$ ).

## Заключение

Изложенные в работе результаты демонстрируют, что поставленная задача разработки модели движения КА для навигационных модулей, работающих в режиме реального времени, успешно решена. Предложенная модель обеспечивает эффективный компромисс между точностью прогнозирования траектории и вычислительной сложностью, что особенно важно для аппаратов с ограниченными ресурсами.

Основными результатами работы являются:

- разработка модели, основанной на кинематических уравнениях с корректировками, учитывающими основные динамические воздействия (гравитационные аномалии, атмосферное сопротивление, влияние гравитации Солнца и Луны, давление солнечного света);
- успешная апробация модели в реальных условиях, подтверждающая её применимость для задач навигации, особенно для малых КА;
- результаты, полученные путем варьирования параметров модели, которые демонстрируют влияние неполных данных о параметрах и условиях движения КА, навигация которых осуществляется при помощи аппаратуры спутниковой навигации.

Эта статья служит основой для дальнейшего изучения методов и алгоритмов, направленных на определение местоположения на основе актуальных навигационных данных. Следует отметить, что модель движения является базой, на которой в качестве навигационного алгоритма может эффективно использоваться фильтр Калмана [18], позволяя улучшить точность и надежность навигационных систем.

В перспективе возможно дальнейшее совершенствование модели и оптимизации вычислительных процессов, например за счет исследования и перехода к регулярным кватернионным уравнениям в других переменных [19].

## Библиографические ссылки

1. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / В. С. Шебшаевич, П. П. Дмитриев и др. М. : Радио и связь, 1993. 408 с.
2. Перспективные системы навигации летательных аппаратов с использованием измерений потенциальных физических полей / Е. В. Каршаков, Б. В. Павлов, М. Ю. Тхоренко, И. А. Папуша // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29, № 1 (112). С. 32–51. DOI: 10.17285/0869-7035.0055.
3. Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ (редакция 5.1). М., 2008.
4. Джильден-Гулер Д., Гаджиев Ч. Применение обобщенного фильтра Калмана с сингулярной декомпозицией при оценке ориентации наноспутников на основе кинематических и динамических моделей // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31, № 4 (123). С. 138–156.
5. Lefferts E. J., Markley F. L., Shuster M. D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1982. No. 5, P. 417–429. DOI: 10.2514/3.56190.
6. Алгоритм полиномиальной фильтрации в задачах обработки навигационной информации при квадратичных нелинейностях в уравнениях динамики и измерений. Ч. I. Описание и сопоставление с алгоритмами калмановского типа / О. А. Степанов, Ю. А. Литвиненко, В. А. Васильев и др. // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29, № 3 (114). С. 3–33. DOI:10.17285/0869-7035.0068.
7. Кануж М. М., Клоков А. В. Адаптивный ансамбльный фильтр Калмана для слежения за GPS-сигналами при неизвестной и изменяющейся во времени ковариации шума // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29, № 3 (114). С. 34–51. DOI: 10.17285/0869-7035.0069.
8. Чагина В. А., Гришко Д. А., Майорова В. И. Расчет движения космического аппарата на околокруговой орбите по данным TLE по упрощенной модели SGP // Наука и образование. 2016. № 01. С. 52–66. DOI: 10.7463/0116.0830533/.
9. Тимохин П. Ю. Моделирование полета космического аппарата по околоземной орбите в космическом тренажерном комплексе [Электронный ресурс] // Программные продукты и сис-

темы. 2010. № 4. URL: <https://swsys.ru/index.php?page=article&id=2607> (дата обращения: 02.01.2025).

10. Аньци Л. Анализ космических траекторий для экспедиции Земля-Апофис-Земля и движение космического аппарата вокруг астероида Апофис // Инженерный журнал: наука и инновации. 2017. № 7(67). С. 1. DOI: 10.18698/2308-6033-2017-7-1635.

11. Zhang L., Ge P. Trajectory Optimization and Orbit Design of Spacecraft in Hovering Mission // *J. Astronaut Sci.* 2020. No. 67. P. 1344–1373. DOI: 10.1007/s40295-020-00226-z.

12. O’Leary J., Barriot J. P. An application of symplectic integration for general relativistic planetary orbitography subject to non-gravitational forces // *Celest Mech Dyn Astr.* 2021. Vol. 133, No. 56. DOI: 10.1007/s10569-021-10051-7.

13. Бордовицына Т. В., Авдюшев В. А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.

14. Монтенбрук О., Пфлегер Т. Астрономия с персональным компьютером. СПб. : Питер. 2002. 320 с.

15. Бахвалов Н. С. Численные методы. М. : Наука. 1973. 636 с.

16. Саввина Е. В. Построение траектории перелета космического аппарата между околоземными эллиптическими орбитами методом перебора значений параметров внутри сетки данных // *Проблемы управления.* 2023. № 2. С. 65–74. DOI: 10.25728/ru.2023.2.6

17. Thangavel K., Sabatini R., Gardi A. et al. Artificial Intelligence for Trusted Autonomous Satellite Operations / K. Thangavel, R. Sabatini, A. Gardi et al. // *Progress in Aerospace Sciences.* 2024. Vol. 144. DOI: 10.1016/j.paerosci.2023.100960.

18. Russell Paielli, Range Filtering for Sequential GPS Receivers with External Sensor Augmentation. NASA Technical Memorandum 89418, April 1987.

19. Челноков Ю. Н., Сапунков Я. Г., Логинов М. Ю. и др., Прогноз и коррекция орбитально-го движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустаанхеймо – Штифеля и изохронных производных // *Прикладная математика и механика.* 2023. Т. 87, № 2. С. 124–156. DOI: 10.31857/S0032823523020054.

## References

1. Shebshaevich V. S., Dmitriev P. P. et al., *Setevye sputnikovye radionavigatsionnye sistemy* [Network satellite radio navigation systems], Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1993, 408 p.

2. Karshakov E. V., Pavlov B. V., Thorenko M. Yu., Papusha I. A. [Promising aircraft navigation systems using measurements of potential physical fields]. *Giroskopiya i navigatsiya.* 2021, Vol. 29, No. 1 (112), P. 32–51 (In Russ.).

3. Global navigation satellite system GLONASS. Interface Control Document (Revision 5.1). Moscow, 2008.

4. Gilden-Guler D., Gadzhiev Ch. [Application of the Generalized Kalman Filter with Singular Value Decomposition in Estimating the Attitude of Nanosatellites Based on Kinematic and Dynamic Models] *Giroskopiya i navigatsiya.* 2023, Vol. 31, No. 4 (123), P. 138–156 (In Russ.).

5. Lefferts E. J., Markley F. L., Shuster M. D. Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation. *Journal of Guidance, Control and Dynamics.* 1982, No. 5, P. 417–429. DOI: 10.2514/3.56190.

6. Stepanov O. A., Litvinenko Yu. A., Vasiliev V. A. et al. [Polynomial filtering algorithm in problems of processing navigation information with quadratic nonlinearities in the equations of dynamics and measurements. Part I. Description and comparison with Kalman-type algorithms]. *Giroskopiya i navigatsiya.* 2021, Vol. 29, No. 3 (114), P. 3–33 (In Russ.).

7. Kanuzh M. M., Klokov A. V. [Adaptive Kalman anscent filter for tracking GPS signals with unknown and time-varying noise covariance]. *Giroskopiya i navigatsiya.* 2021, Vol. 29, No. 3 (114), P. 34–51 (In Russ.).

8. Chagina V. A., Grishko D. A., Mayorova V. I. [Calculation of spacecraft motion in a near-circular orbit based on TLE data using a simplified SGP model]. *Nauka i obrazovanie.* 2016, No. 01, P. 52–66 (In Russ.).

9. Timokhin P. Yu. [Simulation of spacecraft flight in near-earth orbit in a space training complex] *Programmnye produkty i sistemy*. 2010, No. 4, P. 8 (In Russ.). Available at: <https://swsys.ru/index.php?page=article&id=2607> (accessed: 02.01.2025).
10. Anqi L. [Analysis of space trajectories for the Earth-Apophis-Earth expedition and the motion of the spacecraft around the Apophis asteroid]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii*. 2017, No. 7(67). P. 1 (In Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2017-7-1635.
11. Zhang L., Ge P. Trajectory Optimization and Orbit Design of Spacecraft in Hovering Mission. *J. Astronaut Sci.* 2020, No. 67, P. 1344–1373. DOI: 10.1007/s40295-020-00226-z.
12. O’Leary J., Barriot J. P. An application of symplectic integration for general relativistic planetary orbitography subject to non-gravitational forces. *Celest Mech Dyn Astr.* 2021, Vol. 133, No. 56. DOI: 10.1007/s10569-021-10051-7.
13. Bordovitsyna T. V., Avdyushev V. A. *Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli. Analiticheskie i chislennye metody* [Theory of motion of artificial Earth satellites. Analytical and numerical methods]. Tomsk, 2007, 178 p.
14. Montenbruk O., Pfleger T. *Astronomiya s personal'nyim komp'yuterom* [Astronomy with a personal computer]. St. Petersburg, Piter Publ., 2002, 320 p.
15. Bakhvalov N. S. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 636 p.
16. Savvina E. V. [Construction of a spacecraft flight trajectory between near-Earth elliptical orbits by enumerating parameter values within a data grid]. *Problemy upravleniya*. 2023, No. 2, P. 65–74. DOI: 10.25728/pu.2023.2.6 (In Russ.).
17. Thangavel K., Sabatini R., Gardi A. et al. Artificial Intelligence for Trusted Autonomous Satellite Operations. *Progress in Aerospace Sciences*. 2024, Vol. 144. DOI: 10.1016/j.paerosci.2023.100960.
18. Paielli R. Range Filtering for Sequential GPS Receivers with External Sensor Augmentation. NASA Technical Memorandum 89418, April 1987.
19. Chelnokov Yu. N., Sapunkov Ya. G., Loginov M. Yu. et al. [Forecast and correction of spacecraft orbital motion using regular quaternion equations and their solutions in Kustaanheimo-Stiefel variables and isochronous derivatives]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2023, Vol. 87, No. 2, P. 124–156 (In Russ.). DOI: 10.31857/S0032823523020054.

© Соколов И. А., Цеханович Г. С., 2025

---

**Соколов Иван Александрович** – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; ведущий инженер лаборатории базового программного обеспечения навигационной аппаратуры пользователей космического назначения; АО «Конструкторского бюро навигационных систем». E-mail: [ivansokolof1997@mail.ru](mailto:ivansokolof1997@mail.ru). <https://orcid.org/0009-0008-2709-7080>.

**Цеханович Геннадий Стефанович** – кандидат технических наук, начальник лаборатории базового программного обеспечения навигационной аппаратуры пользователей космического назначения; АО «Конструкторского бюро навигационных систем». E-mail: [ggsstt49@mail.ru](mailto:ggsstt49@mail.ru). <https://orcid.org/0009-0007-3748-7704>.

**Sokolov Ivan Aleksandrovich** – postgraduate student, St. Petersburg State University; leading engineer of the laboratory of basic software for navigation equipment for space users, JSC “Design Bureau of Navigation Systems”. E-mail: [ivansokolof1997@mail.ru](mailto:ivansokolof1997@mail.ru). <https://orcid.org/0009-0008-2709-7080>.

**Tsekhanovich Gennady Stefanovich** – Cand. Sc., head of the laboratory of basic software for navigation equipment for space users; JSC “Design Bureau of Navigation Systems”. E-mail: [ggsstt49@mail.ru](mailto:ggsstt49@mail.ru). <https://orcid.org/0009-0007-3748-7704>.

---

Статья поступила в редакцию 29.01.2025; принята к публикации 03.02.2025; опубликована 11.04.2025  
The article was submitted 29.01.2025; accepted for publication 03.02.2025; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License

УДК 629.7.036.54

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-126-137

**Для цитирования:** Шоронов С. В., Тимушев С. Ф. Сравнительный анализ методов увеличения напора осевых насосов низкой быстроходности систем питания двигателей летательных аппаратов // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 126–137. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-126-137.

**For citation:** Shoronov S. V., Timushev S. F. [Comparative analysis of methods for increasing the pressure of low-speed axial pumps in power supply systems for aircraft engines]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 126–137. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-126-137.

## Сравнительный анализ методов увеличения напора осевых насосов низкой быстроходности систем питания двигателей летательных аппаратов

С. В. Шоронов\*, С. Ф. Тимушев

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Российская Федерация, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4  
\*E-mail: shoronov-97@yandex.ru

*Аннотация.* В данной статье проведен сравнительный анализ двух методов увеличения напора в зоне западания энергетических характеристик осевого насоса низкой быстроходности: установка входного лопаточного устройства и надроторное устройство с осевыми проточками.

Осевые насосы нашли широкое применение в системах питания жидкостных ракетных двигателей, а также в самолетных гидравлических системах питания. Современные двигатели летательных аппаратов глубоко дросселируются, что выдвигает важное требование к высокооборотным насосам – многорежимность, т. е. способность работать в широком диапазоне расходов и оборотов. Актуальность работы обусловлена тем, что напорные характеристики осевых насосов в подавляющем большинстве случаев имеют западающие (немонотонные) кривые, что осложняет процесс их проектирования и регулирования. Увеличение напора в зоне западания и стремление к монотонно падающей напорной характеристике осевого насоса является одной из важнейших целей при проектировании агрегата.

В работе методом численного компьютерного моделирования получены энергетические характеристики осевого насоса с установленным входным лопаточным устройством в виде направляющих лопаток, которые создают предварительную закрутку потока на периферийных сечениях во входной магистрали и оптимальным надроторным устройством в виде осевых проточек. Показано их влияние на энергетические характеристики объекта исследования и величину обратных токов, а также проведено сравнение с результатами исследований зарубежных и отечественных авторов.

*Ключевые слова:* осевой насос, надроторное устройство, осевые канавки (проточки), лопаточное входное устройство, закрутка потока на входе, напорные характеристики, кавитационные характеристики.

## Comparative analysis of methods for increasing the pressure of low-speed axial pumps in power supply systems for aircraft engines

S. V. Shoronov\*, S. F. Timushev

Moscow Aviation Institute (National research university)  
4, Volokolamskoe highway, Moscow, 125993, Russian Federation  
\*E-mail: shoronov-97@yandex.ru

*Abstract. In this article, a comparative analysis of two methods of increasing the pressure in the zone of subsidence of the energy characteristics of a low-speed axial pump is carried out: the installation of an inlet guide vanes (IGV) and an upper-rotor device with axial grooves (J-Grooves). Axial pumps are widely used in power systems for liquid rocket engines, as well as in aircraft hydraulic power systems. Modern aircraft engines are capable of deep throttling, which puts forward important requirements for high-speed pumps. One of these requirements is multi-mode – the ability to work in a wide range of costs and operating speeds. The relevance of the work is due to the fact that the pressure characteristics of axial pumps in the vast majority of cases have non-monotonic curves, which complicates the process of their design and regulation. Increasing the head in the area of falling productivity and striving for a monotonically falling pressure characteristic of the axial pump is one of the most important goals in the design of the unit.*

*In this work, the energy characteristics of an axial pump with an inlet vane device installed in the form of guide vanes (IGV), which create a preliminary twist of the flow at the peripheral sections in the inlet line and an optimal upper-rotor device (J-Grooves) in the form of axial ducts, were obtained by numerical computer modeling. Their influence on the energy characteristics of the object of study and the magnitude of reverse currents is shown, and a comparison is made with the research results of foreign and domestic authors.*

*Keywords: axial pump, above-rotor device, axial grooves (J-Grooves), inlet guide vanes (IGV), flow twist at the inlet, pressure characteristics, cavitation characteristics.*

## Введение

Высокооборотные осевые насосы являются часто используемыми видами лопастных машинных агрегатов, которые применяются в системах питания жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) [1], например, в составе турбонасосных агрегатов (ТНА) двигателей Raptor, J-2 [2] и в бустерных турбонасосных агрегатах (БТНА) отечественных ЖРД. Кроме того, они находят применение в самолетных гидравлических системах [3; 4]. Осевые насосы просты по конструкции, имеют малые массы и габариты, обладают высокой экономичностью. Приводом для этих насосов могут быть газовые или гидравлические турбины, а также электродвигатели [5]. Одним из главных требований к высокооборотным насосам является их многорежимность, т. е. в ходе эксплуатации они должны работать в широком диапазоне режимов по расходам и оборотам, так как современные отечественные ЖРД большой тяги с принципом дросселирования могут регулировать тягу от 30 до 110 % от номинального уровня [6].

Форма энергетических характеристик осевых насосов обладает определёнными особенностями. Осевые насосы низкой быстроходности в большинстве случаев имеют западающие (немонотонные) кривые [7], что осложняет процесс их проектирования и регулирования. Область западания распространяется вплоть до значений расходов 0,6–0,8 от номинального режима. Наличие этой зоны обусловлено геометрией проточной части, когда из-за различной длины линий тока у втулки и периферии разные элементы лопасти совершают разное приращение энергии [8].

Формы характеристик осевых насосов с западающими энергетическими характеристиками представлены на рис. 1. На напорной ( $H$ , м) и мощностной ( $N$ , Вт) характеристике находится «завал» на левой части КПД характеристики (показано красным), начало «завала» напорной характеристики показано зеленым, а окончание – синим. Начало «завала» – уменьшение величины перепада давления (напора) при уменьшении расхода насоса ( $Q$ , л/ч). Окончание «завала» – увеличение величины перепада давления (напора) при увеличении расхода насоса.

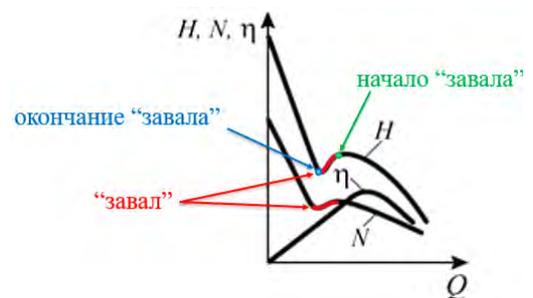


Рис. 1. Форма характеристик осевых насосов с низкой быстроходностью [9]

Fig. 1. Characteristics of axial pumps with low-speed [9]

Известно, что периферийные сечения межлопастного канала осевых рабочих колес насосов являются наиболее напорными и играют важную роль в образовании зоны западания. Одним из методов для увеличения напора в этой зоне является установка надроторных устройств (НрУ) с осевыми или наклонными проточками [10; 11] и входных лопаточных устройств (ВЛУ) с различной густотой [12; 13].

### Постановка задачи и описание объекта исследования

Целью работы является выявление причин увеличения напора в зоне западания энергетических характеристик осевого насоса низкой быстроходности при установке надроторных или входных лопаточных устройств.

Задачи:

- 1) методом численного компьютерного моделирования получить напорные, мощностные и КПД характеристики осевого насоса;
- 2) провести сравнительный анализ энергетических характеристик осевого насоса с установленным оптимальным НрУ и ВЛУ с различной густотой лопаточной решетки;
- 3) определить влияние установки НрУ и ВЛУ на величину обратных токов.

Объектом исследования в данной работе является гидротурбонасос, представляющий собой осевое рабочее колесо насоса с лопаточным осевым отводом, рабочей жидкостью которого является керосин. Приводом рабочего колеса насоса служит гидравлическая турбина, установленная на бандаже. Насос предназначен для подкачки топлива из расходного бака к двигателю самолета. Аналогичные конструкции насосов используется в БТНА ЖРД. На рис. 2 показан эскиз объекта исследования, где 1 – ротор; 2 – осевое рабочее колесо насоса; 3 – гидравлическая турбина; 4 – сопловой аппарат; 5 – спрямляющий аппарат; А – вход в насос; Б – выход из насоса; В – подвод активной рабочей жидкости к рабочим лопаткам ротора (турбины 3); Г – отвод активной рабочей жидкости от рабочих лопаток ротора (турбины 3). Основные параметры осевого рабочего колеса, спрямляющего аппарата насоса и другие параметры агрегата показаны в табл. 1 для режима максимума КПД. На входе в насос радиальный зазор между ротором и корпусом (до густоты решетки на периферии  $\tau \approx 0,5$ ), относительная величина радиального зазора  $\Delta_{отн} = 0,023$ , а далее зазор равен 0 из-за установленного бандажа. Эскиз исследованных ВЛУ и НрУ показан на рис. 3.

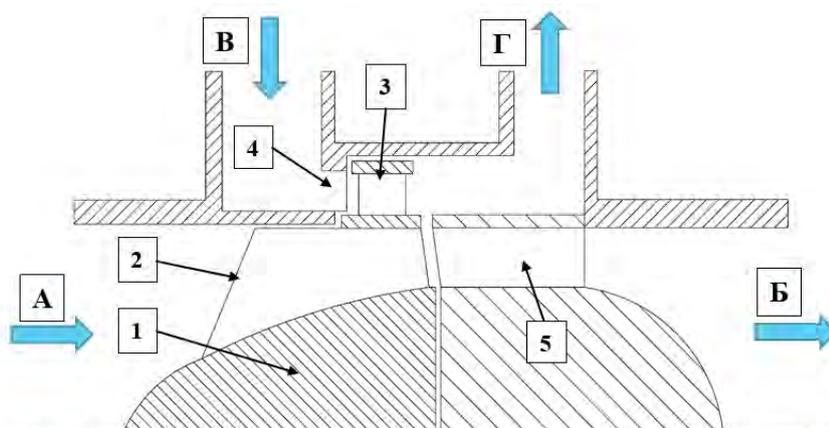


Рис. 2. Эскиз объекта исследования

Fig. 2. Sketch of the research object

Для изучения энергетических характеристик в работе рассмотрены варианты ВЛУ с числом лопаток  $z = 72, 41$  и  $24$  шт. и оптимальное НрУ Х47L27 (где  $L$  – осевая длина проточки, мм, а  $X$  – их количество, шт.), которое было определено в работе [10].

Ряд геометрических и других параметров объекта исследования

Наименование параметра	Величина	Ед. изм.
Коэффициент быстроходности насоса, $n_s$	540	–
Максимальный КПД агрегата	0,35	–
Расход насоса, приведенный к оборотам на номинальном режиме, $Q/n$	13	л/ч/об.·мин
Втулочное отношение на входе, $d_{1вт}$	0,44	–
Втулочное отношение на выходе, $d_{2вт}$	0,65	–
Коэффициент эквивалентного диаметра на входе, $K_{Dэ1}$	4,57	–
Коэффициент эквивалентного диаметра на выходе, $K_{Dэ2}$	3,85	–
Угол атаки на среднем диаметре, $i_{ср}$	1,71*	град
Число лопаток, $z_k$	5	шт.
Густота рабочего колеса насоса на среднем диаметре, $\tau_{ср}$	1,27	–
Угол атаки на входе в СА на среднем диаметре, $i_{3ср}$	4,25	град
Густота СА, $\tau_{СА ср}$	2,08	–
Втулочное отношение СА, $d_{1вт СА}$	0,65	–
Число лопаток СА, $z_{СА}$	12	шт.

\*Примечание – Углы атаки по высоте рабочей лопатки на других сечениях отличаются примерно на 1 градус.

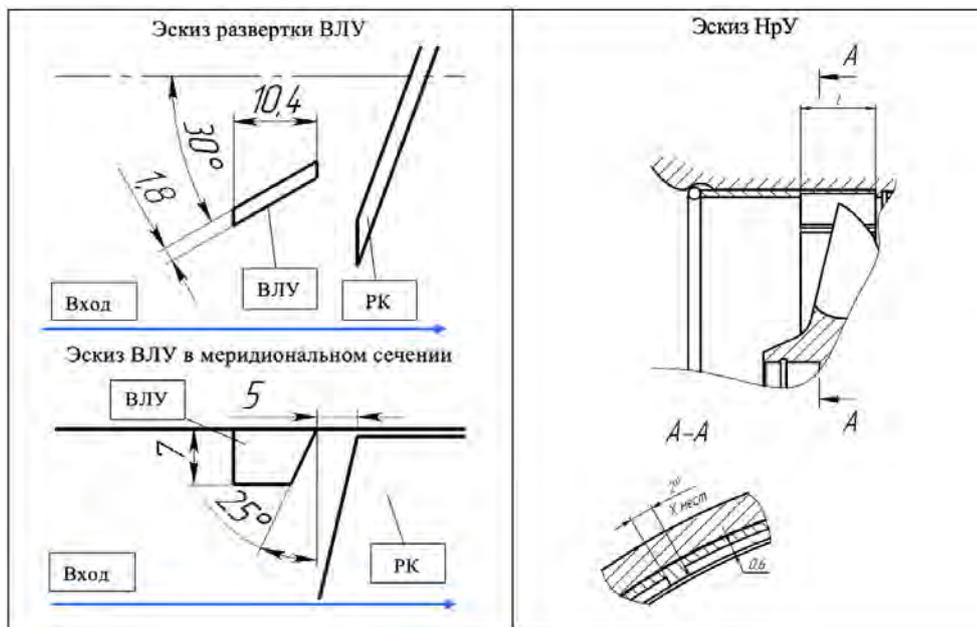


Рис. 3. Эскиз исследованных ВЛУ и НрУ [10; 11; 13]

Fig. 3. Sketch of the investigated IGV and J-Grooves [10; 11; 13]

Для выявления причин влияния установки оптимального НрУ и ВЛУ с различным числом лопаток на напор насоса в зоне западания напорных характеристик проведен расчет методом численного компьютерного моделирования. Расчет проводился путём решения осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса в нестационарной постановке в программном обеспечении ANSYS CFX.

В расчетах использовалась модель турбулентности Shear Stress Transport (SST). Расчетная сетка подготавливалась средствами ANSYS Mesh для вариантов насоса без доработок и с НрУ, а для вариантов насоса с ВЛУ – средствами ANSYS Mesh + TurboGrid. Итоговая размерность

составляет  $\approx 36$  млн ячеек, а среднее значение безразмерного расстояния первой ячейки от стенки  $y^+$  в значимых местах не превышает 10 во всех расчетных областях, что удовлетворяет требованиям выбранной модели турбулентности. Часть сеточной модели показана на рис. 4. Поля распределения  $y^+$  на роторе насоса приведены на рис. 5.

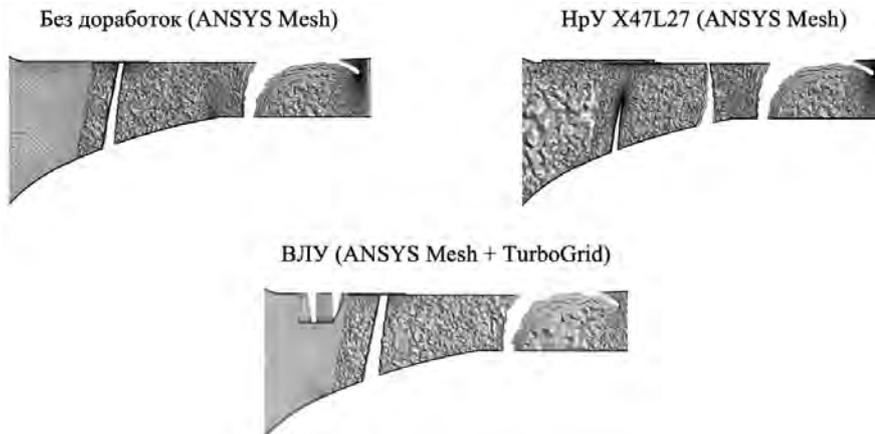


Рис. 4. Сеточная модель в меридиональном сечении

Fig. 4. The grid model in the meridional section

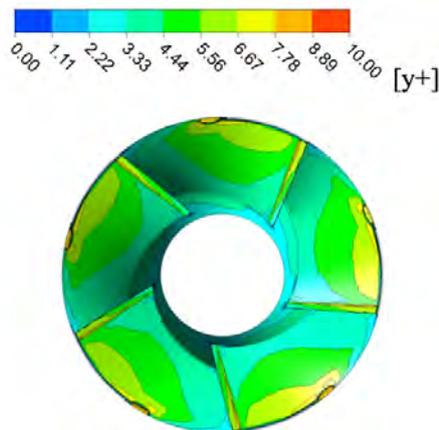


Рис. 5. Поля распределения величины  $y^+$  на поверхностях ротора

Fig. 5.  $y^+$  distribution fields on rotor surfaces

Для проведения исследования в расчетных областях установлены следующие граничные условия и настройки решателя:

- 1) рабочая жидкость ЖЕТ А-1 при температуре 25 °С;
- 2) полное давление на входе (Opening Pres. and Dirn);
- 3) объемный расход рабочей жидкости на выходе из насоса.

В расчетной модели были приняты следующие допущения:

- 1) все стенки заданы как гладкие (Smooth Wall);
- 2) не учитывались утечки от турбины, установленной на бандаже;
- 3) подогрев рабочей жидкости в процессе перекачивания насосом не учитывался.

Для построения энергетических характеристик и дальнейшего их анализа определялось статическое давление  $p_{ст}$  методом осреднения по площади на сечениях, расположенных на входе и выходе из расчетной области. Внутренняя мощность насоса определялась как

$$N = M_{\text{ротора}} \cdot \omega,$$

где  $M_{\text{ротора}}$  – момент с вращающихся поверхностей осевого насоса, Н·м;  $\bar{\omega}$  – угловая скорость вращения, рад/с.

Внутренний КПД насоса определялся как  $\eta_{\text{вн}}$ :

$$\eta_{\text{вн}} = (\Delta p_{\text{н}} \cdot Q) / N,$$

где  $\Delta p_{\text{н}}$  – перепад статического давления на насосе, кгс/см<sup>2</sup>.

### Валидация численной модели

Для валидации полученных расчетных моделей проведено сравнение универсальных напорных характеристик, полученных методом численного моделирования с характеристиками, полученными на экспериментальном стенде в работах [10; 13]. Результаты представлены на рис. 6.

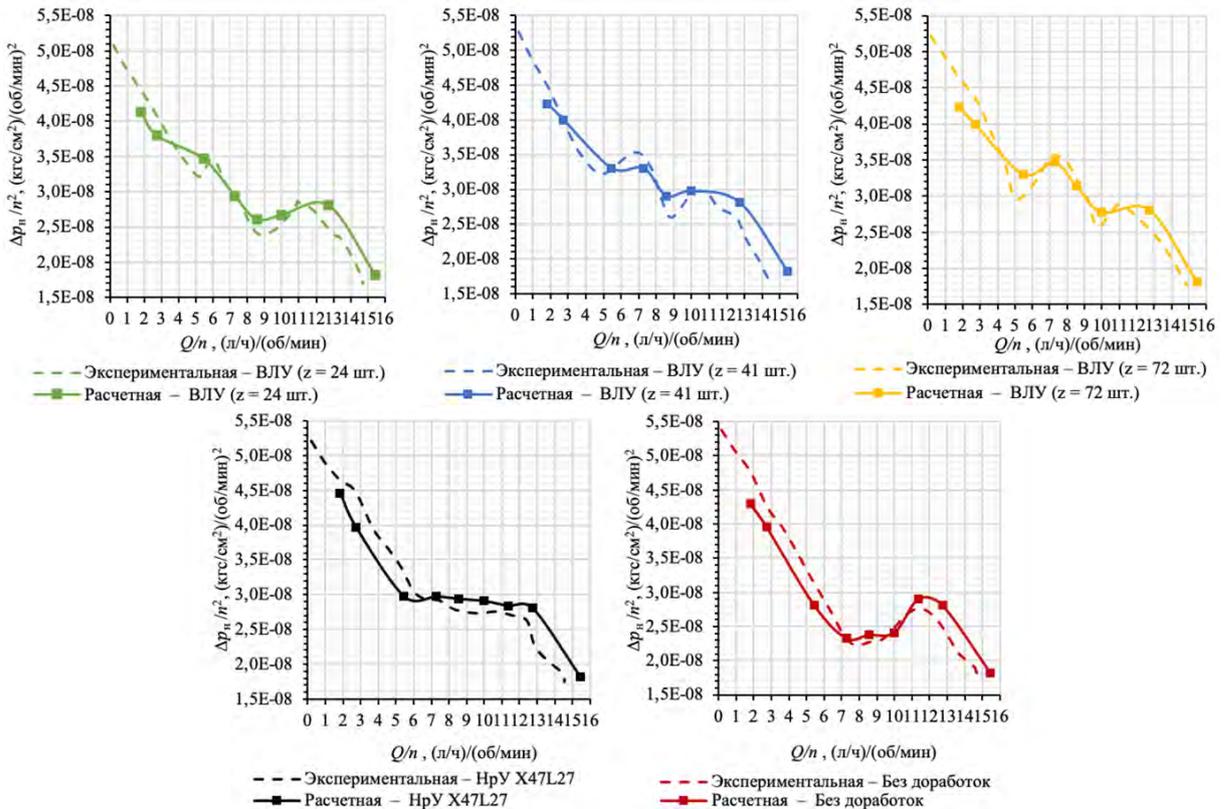


Рис. 6. Валидация расчетных моделей по экспериментальным данным

Fig. 6. Validation of computational models based on experimental data

Исходя из полученных характеристик, видно, что получено хорошее качественное и количественное совпадение полученных результатов, величина отклонений составляет не более 8 %. Погрешность расчета обусловлена принятыми допущениями в расчётной модели, а также зависит от особенностей реальной геометрии, получаемой при производстве методом литья.

### Результаты

В результате проведенных расчетов были получены напорные, мощностные и КПД характеристики насоса, показанные на рис. 7.

Из полученных характеристик видно, что установка НрУ полностью устраняет западание напорной характеристики, а ВЛУ с различным числом лопаток увеличивает напор насоса в локальном месте зоны западания. Увеличение перепада в зоне западания приводит к увеличению мощности. В случаях установки оптимального НрУ или ВЛУ при  $z = 72$  и 24 шт. увеличение

перепада давления практически соответствует величине увеличения мощности, в результате чего КПД остается практически неизменным. При установке ВЛУ с количеством лопаток 41 шт. перепад давления увеличивается в большей степени, чем мощность, что приводит к повышению КПД на 3–5 % в зависимости от расхода в диапазоне от 5 до 11 по  $Q/n$ .

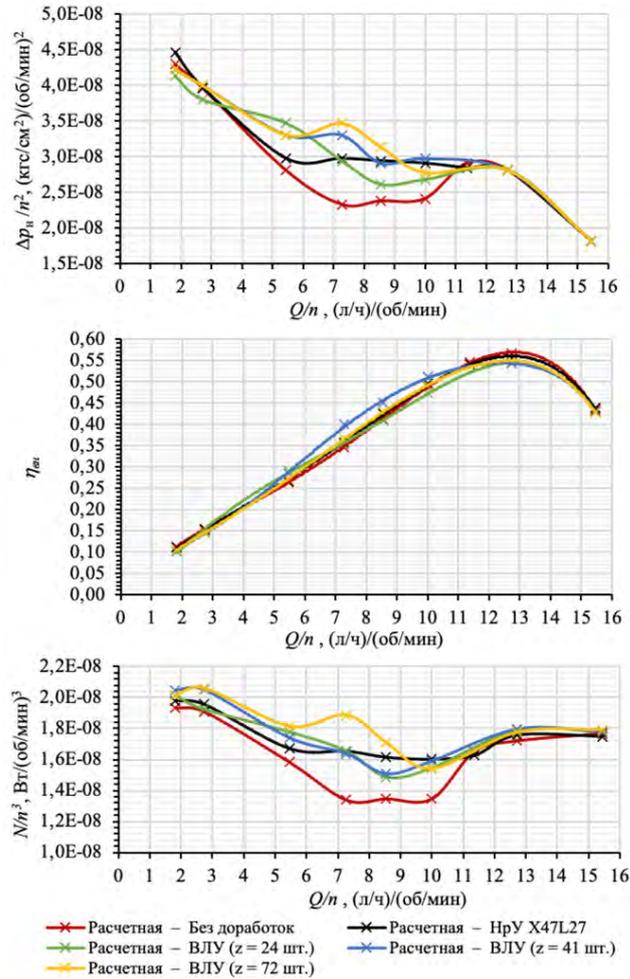


Рис. 7. Энергетические характеристики исследованных вариантов насоса, полученные методом численного моделирования

Fig. 7. Energy characteristics of the investigated pump variants obtained by numerical simulation

Установка оптимального НрУ не влияет на величину КПД на режиме его максимума, а установка ВЛУ с различным числом лопаток уменьшает максимальный КПД примерно на 2 %.

Изменение мощности может происходить из-за влияния НрУ и ВЛУ на величину и интенсивность обратных токов. Как известно, если ликвидировать или уменьшить величину закрутки обратных токов, то момент на валу осевого колеса  $M_{ш}$  возрастет на величину момента количества движения обратных токов. Возрастание момента  $M_{ш}$  произойдет также за счет увеличения момента сил трения обратных токов  $M_{тр}$ , при установке различных лопаточных решёток во входном патрубке, а также при сложной конфигурации самого патрубка [5].

Для изучения влияния на обратные токи определена длина зоны обратного течения по сечениям, которые располагаются во входной магистрали на различных расстояниях от входной кромки лопаток рабочего колеса насоса. На рис. 8 визуальным образом представлен метод определения длины при обработке результатов расчета, где показан объём обратного течения, а также сами сечения, площадь которых равна площади обратного течения. Данный метод позволяет с доста-

точной точностью определить начало образования обратных токов на входе в осевое рабочее колесо насоса.

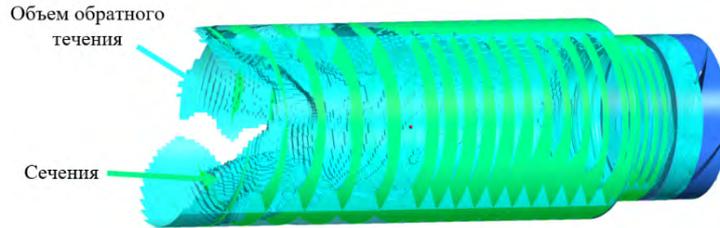


Рис. 8. Метод определения длины распространения обратных токов

Fig. 8. Method for determining the propagation length of the reverse flow

Российские учёные В. И. Петров и В. Ф. Чебаевский проводили экспериментальное исследование распространения зоны обратных токов во входной магистрали насоса. Для определения расстояния, на которое распространяется зона обратных токов от входных кромок, они использовали метод, основанный на отклонении положения гибких шёлковых нитей, которые были наклеены по длине прозрачной части входной магистрали насоса [5].

Для оценки влияние ВЛУ и оптимального НрУ на длину распространения обратных токов на рис. 9 приведен график зависимости расходного параметра на входе  $q_1$  от длины распространения зоны обратных токов  $l_{o,t}$  в сравнении с экспериментальными данными, полученными В. И. Петровым и В. Ф. Чебаевским для шнека с густотой 1,2 и постоянным втулочным отношением равным 0,44.

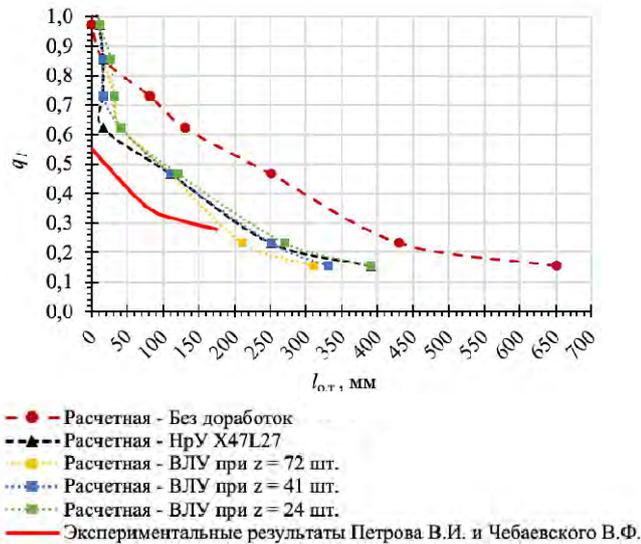


Рис. 9. График влияния установки ВЛУ и НрУ на длину распространения зоны обратных токов [5]

Fig. 9. The effect of the IGW and J-Grooves installation on the propagation length of the backflow zone

Из рис. 9 видно, что экспериментальные данные имеют качественное совпадение с формой кривой насоса без доработок, полученной методом численного моделирования. Количественные отличия обусловлены различием геометрических параметров самих объектов исследования, а также в методах проведения исследования.

Для более полной оценки влияния установки НрУ и ВЛУ на обратные токи на рис. 10 приведена зависимость относительной площади обратных токов от расходного параметра  $q_1$

варианта насоса без доработок в сравнении с экспериментальными результатами В. И. Петрова и В. Ф. Чебаевского, а также результатами исследований французских ученых, где  $S_{o,t}$  – площадь обратного течения,  $S_{вх}$  – площадь входного сечения насоса.

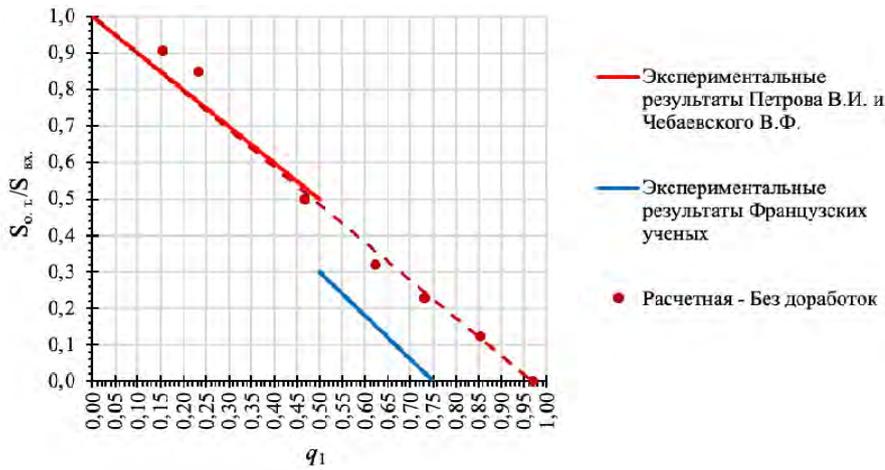


Рис. 10. Зависимость относительных площадей зон обратных токов и активного потока от параметра  $q_1$  в сравнении с экспериментальными данными [14; 15]

Fig. 10. Dependence of the relative areas of the reverse and active flow zones on the  $q_1$  parameter in comparison with experimental data [14; 15]

Указанные на рис. 10 осредненные экспериментальные зависимости В. И. Петрова и В. Ф. Чебаевского были ими получены на основании обработки результатов измерений полей скоростей на входе в различные осевые, диагональные и центробежные рабочие колеса [14]. Методика получения площади обратного течения применена с допущением, граница обратного и возвратного потока принята окружностью, а минимальное расстояние от замеров до входной кромки лопаток составляло 1 диаметр входной магистрали, из-за чего график обрывается при  $q_1 = 0,5$ .

Французские ученые продлили линию российских исследователей, применив метод фотофиксации для получения площадей. Данный метод более точно отражает границу обратного и возвратного потока, но исследование было проведено при развитой кавитации, а, как известно, кавитационные явления в обратных токах могут влиять на их величину и поэтому данные из источника [15] лежат ниже.

На рис. 11 эскизно представлен метод определения площади обратного течения согласно источнику [15], где  $S_{cav} = S_{o,t}$  – площадь обратного течения,  $S_{flow} = S_{вх}$  – площадь входа в насос,  $S_{back}$  – суммарная площадь обратного и возвратного потока.

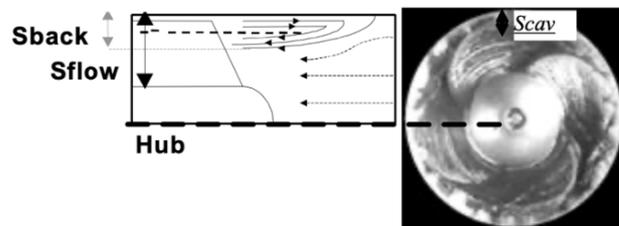


Рис. 11. Метод определения площади обратного течения французскими учеными [15]

Fig. 11. The method of determining the area of the reverse flow by French scientists [15]

Из рис. 10 видно, что данные полученные методом численного моделирования, хорошо коррелируют с данными, полученными в [14], расчетные данные варианта насоса без доработок

имеют хорошее качественное и количественное совпадение с результатами экспериментальных исследований российских ученых. Величина отклонений на низких расходах (при  $q_1 < 0,25$ ) не более чем 7 %, а на расходах при  $q_1 > 0,25$  отклонения составляют не более чем 3 %. Благодаря численному методу проведения исследования удалось продлить линию, полученную в [14].

Площадь обратного течения  $S_{o,t}$  при проведении исследования методом численного моделирования вычислялась как средняя площадь обратного течения на сечениях, расположенных по всей входной магистрали насоса (см. рис. 8), а площадь входа  $S_{вх}$  определялась непосредственно на входе в лопатки рабочего колеса.

На рис. 12 представлена зависимость относительных площадей зон обратных токов от параметра  $q_1$  в сравнении для всех исследованных вариантов ВЛУ и оптимального НрУ. Видно, что установка ВЛУ и НрУ не влияет на начало образования обратных токов, они образуются аналогично варианту насоса без доработок при  $q_1 < 0,97$ .

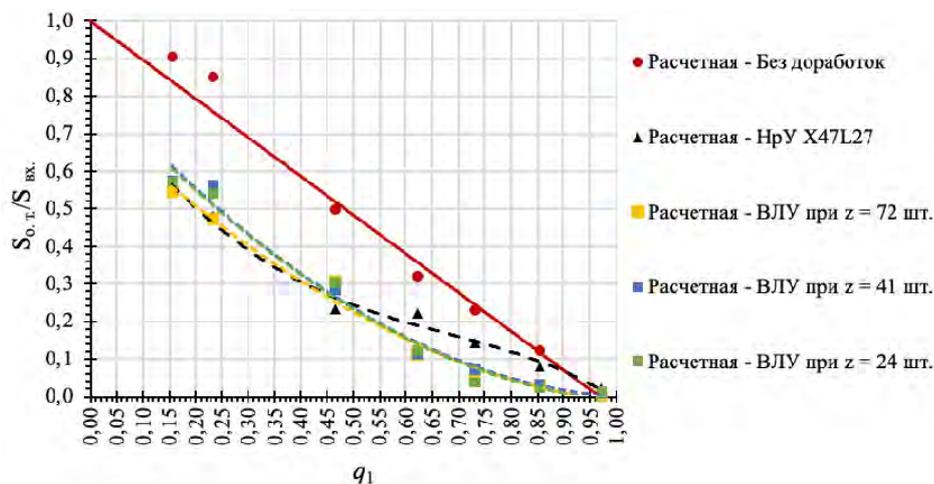


Рис. 12. Зависимость относительных площадей зон обратных токов и активного потока от параметра  $q_1$  в сравнении с ВЛУ и НрУ

Fig. 12. The dependence of the relative areas of the reverse and active flow zones on the  $q_1$  parameter in comparison with the IGV and J-Grooves

Из рис. 12 видно, что установка ВЛУ и НрУ уменьшает величину  $S_{o,t}$  (начиная с  $q_1 = 0,85$ ) в сравнении с вариантом насоса без доработок. Это объясняется тем, что установка НрУ или ВЛУ уменьшает величину и интенсивность обратных токов на входе, что, в свою очередь, является одной из причин увеличения напора осевого насоса в зоне западания напорной характеристики.

### Заключение

В результате проведенного методом численного моделирования исследования можно сделать следующие выводы:

1. Рост величины перепада в зоне западания напорной характеристики сопровождается увеличением мощности насоса, изменение которой, в свою очередь, происходит из-за влияния НрУ и ВЛУ на величину и интенсивность обратных токов, а также за счет увеличения момента сил трения обратных токов  $M_{тр}$  при установке различных НрУ или ВЛУ во входном патрубке.

2. Установка НрУ или ВЛУ приводит к уменьшению величины и интенсивности обратных токов на входе с уменьшением расходного параметра  $q_1 < 0,85$ .

3. Оптимальная геометрия НрУ не влияет на величину максимального КПД насоса, а установка ВЛУ с различным числом лопаток уменьшает максимальный КПД примерно на 2 %.

Исходя из проведенного исследования, можно сделать вывод, что для многорежимных насосов предпочтительнее использовать НрУ, так как его установка полностью убирает западание напорной характеристики. Применение ВЛУ возможно для увеличения напора насоса в локальной зоне. Уменьшение величины обратных токов может способствовать снижению вибрации и пульсаций давления и вследствие этого приводить к улучшению надежности и ресурса агрегатов системы питания.

### Библиографические ссылки

1. Овсянников Б. В., Боровский Б. И. Теория и расчет агрегатов питания жидкостных ракетных двигателей. М. : Машиностроение, 1971. 540 с.
2. Иванов А. В., Белоусов А. И., Дмитренко А. И. Турбонасосные агрегаты кислородно-водородных ЖРД. Воронеж : Воронежский гос. технич. ун-т, 2011. 284 с.
3. Авиационные центробежные насосные агрегаты / Л. С. Аринушкин и др. М. : Машиностроение, 1967. 255 с.
4. Епифанов С. Ф. Авиационные топливные системы. Харьков : Нац. аэро-косм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т», 2018. 558 с.
5. Высокооборотные лопаточные насосы / Б. И. Боровский, Н. С. Ершов, Б. В. Овсянников и др. М. : Машиностроение, 1975. 336 с.
6. Бруев В. Н., Козловский Л. Н. Принцип дросселирования в отечественных жидкостных ракетных двигателях // Аллея науки. 2023. № 1(76). С. 3.
7. Кивченко Г. И. Насосы и гидротурбины. М. : Энергия. 1970. 447 с.
8. Свобода Д. Г., Жарковский А. А., Иванов Е. А. О проектировании проточной части осевого насоса низкой быстроходности // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2017. № 2(23). С. 41–52. DOI: <https://doi.org/10.18721/JEST.230204>.
9. Валюхов С. Г., Демьяненко Ю. В., Петров В. И. Высокооборотные лопатные оседагональные насосы: теория, расчет характеристик, проектирование и изготовление. Воронеж : Изд-во Воронежского гос. ун-та, 1996. 264 с.
10. Шоронов С. В., Казеннов И. С., Истомин Е. А. Влияние надроторного устройства на напорные характеристики осевого насоса // Изв. вузов. Машиностроение. 2024. № 5. С. 78–89.
11. Шоронов С. В., Казеннов И. С., Истомин Е. А. Влияние надроторного устройства с осевыми и наклонными проточками на кавитационные характеристики осевого насоса // Изв. вузов. Машиностроение. 2024. № 10. С. 85–95.
12. Zhi-Wei Guo, Jing-Ye Pan, Zhong-Dong Qian. The effects of the inlet guide vanes on an axial pump under off design points // ASME, 2018. 5 p. DOI: 10.1115/FEDSM2018-83071.
13. Шоронов С. В., Казеннов И. С., Истомин Е. А. Влияние входного лопаточного устройства на напорные характеристики осевого насоса с учетом влияния на антикавитационные качества. // Изв. вузов. Машиностроение. 2024. № 12. С. 70–79.
14. Петров В. И., Чебаевский В. Ф. Кавитация в высокооборотных лопатных насосах. М. : Машиностроение, 1982. 192 с.
15. Jousselein F., Courtot Y., Coutier-Delgosha O., Rebound J. L. Cavitating inducer instabilities: experimental analysis and 2D numerical simulation of unsteady flow in blade cascade // Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels. 2001. 8 p.

### References

1. Ovsyannikov B. V., Borovskiy B. I. *Teoriya i raschet agregatov pitaniya zhidkostnykh raketnykh dvigateley* [Theory and calculation of power units for liquid rocket engines]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1971, 540 p.
2. Ivanov A. V., Belousov A. I., Dmitrenko A. I. *Turbonasosnyye agregaty kislorodno-vodorodnykh ZHRD* [Turbopump units of oxygen-hydrogen rocket engines]. Voronezh, Voronezhskiy gosudarstvennyy tekhnicheskii universitet Publ., 2011, 284 p.

3. Arinushkin L. S. et al. *Aviatsionnyye tsentrobezhnnyye nasosnyye agregaty* [Aviation centrifugal pumping units]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1967, 255 p.
4. Epifanov S. F. *Aviatsionnyye toplivnyye sistemy* [Aviation fuel systems]. Khar'kov, Nats. aerokosm. un-t im. N. E. Zhukovskogo "Khar'kov. aviats. in-t" Publ., 2018, 558 p.
5. Borovskiy B. I., Yershov N. S., Ovsyannikov B. V. et al. *Vysokooborotnyye lopatochnyye nasosy* [High-speed paddle pumps]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1975, 336 p.
6. Bruyev V. N., Kozlovskiy L. N. [The principle of throttling in domestic liquid rocket engines]. *Alleya nauki*. 2023, No 1(76), P. 3 (In Russ.).
7. Kivchenko G. I. *Nasosy i gidroturbiny* [Pumps and hydraulic turbines]. Moscow, Energiya Publ., 1970, 447 p.
8. Svoboda D. G., Zharkovskiy A. A., Ivanov E. A. [About designing the flow part of a low-speed axial pump]. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbPU. Yestestvennyye i inzhenernyye nauki*. 2017, No. 2(23), P. 41–52 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18721/JEST.230204>.
9. Valyukhov S. G., Dem'yanenko Yu. V., Petrov V. I. *Vysokooborotnyye lopastnyye osediagonal'nyye nasosy: Teoriya, raschet kharakteristik, proyektirovaniye i izgotovleniye* [High-speed vane axial-diagonal pumps: Theory, calculation of characteristics, design and manufacture.]. Voronezh, Izd-vo Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta Publ., 1996, 264 p.
10. Shoronov S. V., Kazennov I. S., Istomin E. A. [Influence of the upper-rotor device on the axial flow pump head characteristics]. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2024, No. 5, P. 78–89 (In Russ.).
11. Shoronov S. V., Kazennov I. S., Istomin E. A. [Influence of the upper-rotor device with axial and inclined grooves on the axial-flow pump cavitation characteristics]. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2024, No. 10, P. 85–95 (In Russ.).
12. Zhi-Wei Guo, Jing-Ye Pan, Zhong-Dong Qian. The effects of the inlet guide vanes on an axial pump under off design points. *ASME*, 2018, 5 p.
13. Shoronov S. V., Kazennov I. S., Istomin E. A. [Influence of the inlet vane mechanism on the axial pump pressure characteristics taking into account the anti-cavitation qualities]. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2024, No. 12, P. 70–79 (In Russ.).
14. Petrov V. I., Chebayevskiy V. F. *Kavitatsiya v vysokooborotnykh lopastnykh nasosakh* [Cavitation in high-speed vane pumps]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1982, 192 p.
15. Joussellin F., Courtot Y., Coutier-Delgosha O., Rebound J. L. Cavitating inducer instabilities: experimental analysis and 2D numerical simulation of unsteady flow in blade cascade. *Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels*. 2001, 8 p.

© Шоронов С. В., Тимушев С. Ф., 2025

---

**Шоронов Сергей Валерьевич** – аспирант, кафедра 202; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). E-mail: [shoronov-97@yandex.ru](mailto:shoronov-97@yandex.ru). <https://orcid.org/0009-0003-0341-4807>.

**Тимушев Сергей Федорович** – доктор технических наук, профессор кафедры 202; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). E-mail: [irico.harmony@gmail.com](mailto:irico.harmony@gmail.com). <https://orcid.org/0000-0003-1708-8187>.

**Shoronov Sergey Valeryevich** – postgraduate student, Department 202; Moscow Aviation Institute (National Research University). E-mail: [shoronov-97@yandex.ru](mailto:shoronov-97@yandex.ru). <https://orcid.org/0009-0003-0341-4807>.

**Timushev Sergey Fedorovich** – Dr. Sc., Professor of the Department 202; Moscow Aviation Institute (National Research University). E-mail: [irico.harmony@gmail.com](mailto:irico.harmony@gmail.com). <https://orcid.org/0000-0003-1708-8187>.

---

Статья поступила в редакцию 30.01.2025; принята к публикации 18.02.2025; опубликована 11.04.2025  
The article was submitted 30.01.2025; accepted for publication 18.02.2025; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License





ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ  
ПРОЦЕССЫ  
И МАТЕРИАЛЫ

TECHNOLOGICAL  
PROCESSES  
AND MATERIALS SCIENCE



УДК 621.923.01

Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-140-152

**Для цитирования:** Влияние обработки абразивным потоком на шероховатость и микротвердость поверхности малых каналов (отверстий) в образцах заготовок из стали 12X18H10T / В. А. Левко, О. В. Литовка, А. Е. Петецкая и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2025. Т. 26, № 1. С. 140–152. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-140-152.

**For citation:** Levko V. A., Litovka O. V., Petetskaya A. E., Ivanov P. A., Snetkov P. A. [Effect of abrasive flow machining on the roughness and microhardness the small channels (holes) surface in samples of 12X18N10T steel workpieces]. *Siberian Aerospace Journal*. 2025, Vol. 26, No. 1, P. 140–152. Doi: 10.31772/2712-8970-2025-26-1-140-152.

## **Влияние обработки абразивным потоком на шероховатость и микротвердость поверхности малых каналов (отверстий) в образцах заготовок из стали 12X18H10T**

В. А. Левко<sup>\*</sup>, О. В. Литовка, А. Е. Петецкая, П. А. Иванов, П. А. Снетков

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

<sup>\*</sup>E-mail: levko@sibsau.ru

*Аннотация. Статья содержит результаты исследований по влиянию обработки абразивным потоком на шероховатость и микротвердость поверхности малых каналов (отверстий) в образцах заготовок из стали 12X18H10T. Получены эмпирические зависимости изменения шероховатости и микротвёрдости поверхности малого канала от степени наполнения рабочей среды пластификатором и давления сдвига гидравлической системы с экстремумами данных функций в исследуемой области. На основе этих зависимостей выбран состав рабочей среды: степень наполнения основы рабочей среды (при неизменном содержании белого электрокорунда – 30 %) пластификатором в виде алмазной пасты (АСН 60/40 ВОРМ Г) Ка 40 % и каучука СКТ 30 % соответственно. В результате обработки абразивным потоком удалось уменьшить величину шероховатости поверхностного слоя с  $Ra = 0,49–0,62$  мкм до  $Ra = 0,047–0,06$  мкм, а также увеличить микротвёрдость поверхности от величины  $h = 188–192$  НВ до  $h = 213–220$  НВ. Величина упрочненного слоя  $\approx 7,24$  мкм. Анализ профилограмм поверхности показывает, что в результате обработки абразивным потоком существенно уменьшились как высотные параметры шероховатости (средние –  $Ra$ ,  $Rz$ ,  $Rp$ ; максимальные –  $Rmax$ ), так и глубинные параметры шероховатости ( $Rk$ ). При помощи электронной микроскопии (SEM MAG) проведена качественная оценка структуры поверхностного слоя малого канала. Полученные результаты показывают хорошую обрабатываемость абразивным потоком заготовок из аустенитных сталей, в частности стали 12X18H10T.*

*Ключевые слова:* обработка абразивным потоком, сталь 12X18H10T, шероховатость, микротвёрдость, малый канал.

## **Effect of abrasive flow machining on the roughness and microhardness the small channels (holes) surface in samples of 12X18N10T steel workpieces**

V. A. Levko<sup>\*</sup>, O. V. Litovka, A. E. Petetskaya, P. A. Ivanov, P. A. Snetkov

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

<sup>\*</sup>E-mail: levko@sibsau.ru

*Abstract. The article contains the results of research on the effect of abrasive flow machining on the roughness and microhardness of the surface of small channels (holes) in samples of workpieces made of 12X18N10T steel. Empirical dependences of the change in roughness and microhardness of the surface of a small channel on the degree of filling of the working medium with a plasticizer and the shear pressure of the hydraulic system with the extrema of these functions in the studied area are obtained. Based on these dependencies, the composition of the working environment was selected: the degree of filling of the working media base (with a constant content of white electro corundum – 30 %) with a plasticizer in the form of diamond paste (ASN 60/40 VOM G) Ka 40 % and SKT rubber 30 %, respectively. As a result of abrasive flow machining, it was possible to reduce the roughness of the surface layer from  $Ra = 0.49...0.62 \mu m$  to  $Ra = 0.047...0.06 \mu m$ , and also to increase the microhardness of the surface from  $h = 188...192 HB$  to  $h = 213...220 HB$ . The thickness of the hardened layer is  $\approx 7.24 \mu m$ . Analysis of surface profilograms shows that as a result of abrasive flow machining, both the height roughness parameters (average –  $Ra$ ,  $Rz$ ,  $Rp$ ; maximum –  $Rmax$ ) and the depth roughness parameters ( $Rk$ ) were significantly reduced. Using electron microscopy (SEM MAG), a qualitative assessment of the structure of the surface layer of the small channel was carried out. The obtained results show good machinability by abrasive flow of austenitic steel blanks, in particular 12X18N10T steel.*

*Keywords: abrasive flow machining, 12X18N10T steel, roughness, microhardness, small channel.*

### **Введение**

В настоящее время одной из проблем в производстве деталей из аустенитных сталей остается окончательная обработка внутренних поверхностей каналов (отверстий) с малой площадью поперечного сечения. Так, при оценке качества выполнения отверстия малого диаметра основными критериями являются точность, форма, наличие и размер конусности по глубине канала, шероховатость поверхности, наличие микротрещин, грата [1].

Для формообразования таких поверхностей широко применяют различные способы: резание (сверление) сверлами малого диаметра, лазерным и электронным лучом; электроэрозионную обработку; электрохимическую и ультразвуковую обработку; струйно-абразивную обработку и др., каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки [2]. Одним из недостатков является невысокое качество поверхности таких каналов.

В машиностроении для уменьшения шероховатости и повышения микротвердости поверхностного слоя деталей из аустенитных сталей применяют такие отделочно-упрочняющие технологии, как ультразвуковое ударное упрочнение бойками [3] и шариками в вакууме [4], комплексное жидкостное [5] и плазменное азотирование [6], лазерное упрочнение [7], фрикционную [8], дробеструйную [9] и ионно-плазменную обработку [10]. Однако в случае обработки таких труднодоступных поверхностей, как отверстия и каналы малых поперечных сечений, вышеперечисленные технологии имеют целый ряд ограничений.

Для окончательной обработки малых отверстий и каналов все более широкое применение находит обработка абразивным потоком (abrasive flow machining (AFM)), при которой высоковязкий материал (рабочая среда), равномерно наполненный абразивными частицами, возвратно-поступательно перемещается поршнями рабочих цилиндров через обрабатываемую деталь. При таком течении среда копирует форму обрабатываемого канала, создавая сжимающее давление на обрабатываемую поверхность и осуществляя абразивный контакт [11].

Начиная с 80-х гг. прошлого века, метод AFM стал применяться для удаления дефектного слоя в отверстиях охлаждения лопаток и дисков, обработанных лазером или электроэрозионной обработкой, снятия заусенцев в отверстиях форсунок для распыления топлива и полирования литых поверхностей лопаток, колёс компрессора и рабочих колёс [12].

В настоящее время данная технология все чаще применяется для уменьшения шероховатости и повышения микротвердости закрытых каналов деталей из аустенитно-мартенситных сталей [13], в том числе полученных методом селективного лазерного сплавления [14].

Обработкой абразивным потоком внутренних каналов образцов из мартенситностареющей стали 300, полученных селективным лазерным сплавлением, удалось повысить усталостную

прочность на 26 %. Однако при уменьшении диаметра обрабатываемых отверстий до 3 мм и менее возникли проблемы с течением среды в этих отверстиях [15].

Эти проблемы связаны с высокой вязкостью рабочей среды традиционного состава. Известно, что для обработки таких отверстий в небольших по размеру деталях широко применяют метод *micro AFM*, в котором в качестве основы рабочей среды используют низкомолекулярные неньютоновские среды [16]. Однако применение технологии *micro AFM* относительно деталей из труднообрабатываемых сплавов ведет к снижению производительности обработки, так как низкомолекулярные среды слабо проявляют упругие свойства [17].

Добавление в высокомолекулярную среду алмазной пасты позволяет управлять вязкостью рабочей среды относительно геометрических характеристик обрабатываемого канала и осуществлять окончательную обработку двунаправленной АФМ.

Цель работы – исследование влияния обработки абразивным потоком рабочей среды средней вязкости на шероховатость и микротвердость внутренней поверхности малых каналов образцов из аустенитной стали 12Х18Н10Т.

### Методика проведения исследований

В результате предыдущих исследований процесса абразивно-экструзионной обработки малых отверстий экспериментально определен такой состав рабочей среды, при котором сохраняется возможность ее сдвигового течения в отверстиях с малым поперечным сечением и максимальное по величине напряженно-деформированное состояние, позволяющее добиваться максимальной производительности обработки малых каналов в образцах из алюминиевого сплава АМг6. Состав среды (весовой): каучук СКТ – 40 %, алмазная паста – 60 %, дисперсность белого электрокорунда  $Va = 40 - 63$  мкм. Использована паста АСН 60/40 ВОМ Г –  $Ka = 28$  %. Сдвигающее давление  $P_{вх} = 12$  МПа. Время обработки – 60 с. Обработка проведена на установке УЭШ-25 [17].

За методическую основу данных исследований была принята вышеописанная методика с учетом того, что полученные ранее зависимости шероховатости обработанного отверстия  $Ra$  монотонно убывают на всем исследуемом интервале, а величина удаленного слоя металла  $\Delta l$  при обработке монотонно возрастает, т. е. экстремумы не определены [17].

Для поиска экстремумов эмпирических зависимостей шероховатости  $Ra$  от состава рабочей среды и давления сдвига гидравлической системы  $P_{сд}$  предложено расширить интервал варьирования параметров весового содержания компонентов рабочей среды.

Эксперименты проведены по плану Коно ( $m = 2$ , число повторений на одном уровне – 6). Варьируемые факторы: степень наполнения основы рабочей среды (при неизменном содержании белого электрокорунда – 30 %) пластификатором в виде алмазной пасты (АСН 60/40 ВОМ Г)  $Ka - 30, 40, 50$  % и каучука СКТ – 40, 30 и 20 % соответственно; давление сдвига гидравлической системы  $P_{сд} - 8, 10, 12$  МПа. В качестве наполнителя использованы зерна нормального электрокорунда. Зернистость зерен  $Va = 63$  мкм определена по рекомендациям выбора вида и величины зерна наполнителя при обработке абразивным потоком [18]. Время обработки и величина сдвигающего давления остались такими же, как и в предыдущем исследовании. Для математической обработки произведено кодирование переменных  $x_1 = Ka, x_2 = Va, y_1 = Ra, y_2 = h$ .

Из свойств стали 12Х18Н10Т необходимо отметить следующие: плотность –  $7,9$  г/см<sup>3</sup>; модуль упругости (модуль Юнга) – 193 ГПа; предел прочности на растяжение – в отожженном состоянии около 520–680 МПа, после термообработки до 900 МПа; предел текучести в отожженном состоянии 205 МПа, после упрочнения до 600 МПа; относительное удлинение после разрыва – 40–60 %; ударная вязкость – 600–1000 кДж/м<sup>2</sup>; твердость по Бринеллю – в отожженном состоянии 140–180 НВ, после термообработки до 300 НВ.

54 образца (рис. 1, а) выполнены из листового отожженного проката аустенитной стали 12Х18Н10Т (ГОСТ 5632–2014). Малый канал 1 (рис. 1, б) получен фрезерованием концевой фрезой за один проход, реперная точка 2 предназначена для контроля величины съема металла по результатам обработки абразивным потоком.

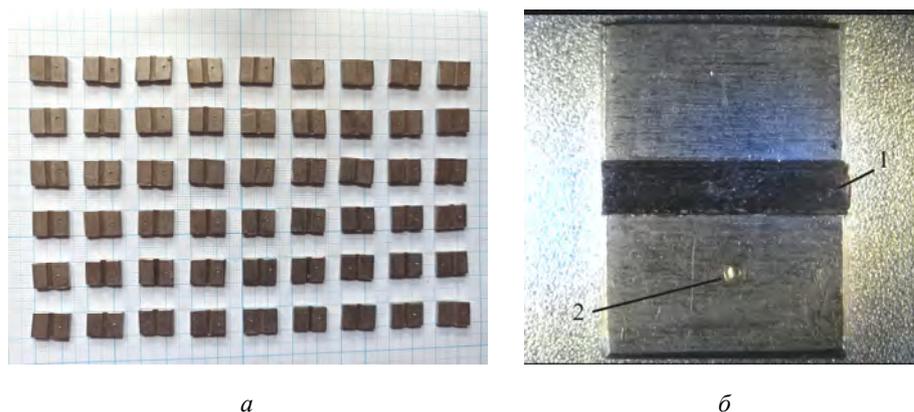


Рис. 1. Образцы заготовок из стали 12X18N10T с малыми каналами:  
 а – набор из 54 образцов; б – единичный образец; 1 – малый канал; 2 – реперная точка

Fig. 1. Samples of 12X18N10T steel workpieces with small channels:  
 а – set of 54 samples; б – single sample; 1 – small channel; 2 – reference point

Геометрические характеристики обрабатываемого канала длина  $L_k = 10$  мм, размеры сечения (ширина  $\times$  высота)  $2 \times 0,625$  мм, площадь поперечного сечения  $S_{сеч} = 1,25$  мм<sup>2</sup>. Форма, размер и угол входного и выходного сечения канала идентичны.

Исходная шероховатость поверхности образцов варьировалась в интервале  $Ra = 1,2-1,4$  мкм, исходная шероховатость поверхности малого канала после фрезерования –  $Ra = 0,49-0,62$  мкм.

Исходная микротвердость поверхности образцов варьировалась в интервале  $h = 175-179$  НВ. После фрезерования микротвердость поверхности малых каналов в образцах увеличилась и варьировалась в интервале  $h = 188-192$  НВ.

### Результаты исследования и их обсуждение

Результаты обработки абразивным потоком 54 образцов с малыми каналами в зависимости от факторов X1 и X2 приведены в табл. 1 и 2.

График зависимости изменения шероховатости поверхности малого канала в образце из стали 12X18N10T от степени наполнения рабочей среды пластификатором  $Ka$  (X1) и давлением сдвига гидравлической системы  $P_{сд}$  (рис. 2, а) показывает наличие экстремумов эмпирических зависимостей в области 40 % наполнения рабочей среды пластификатором (алмазной пастой) для всего рассматриваемого интервала давлений сдвига.

Таблица 1

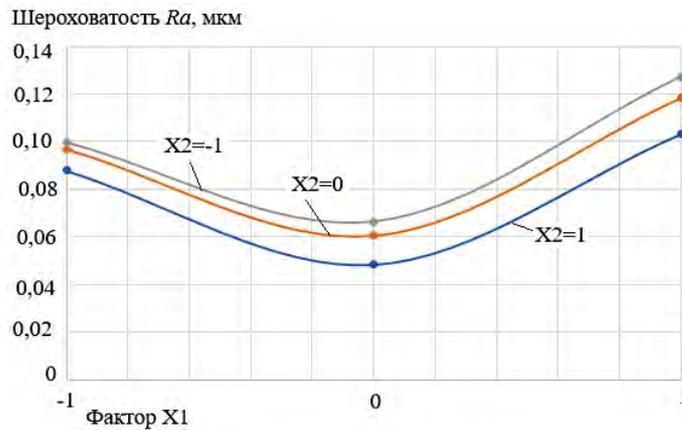
**Шероховатость поверхности малых каналов после обработки абразивным потоком в зависимости от степени наполнения рабочей среды пластификатором и давлением сдвига гидравлической системы**

Факторы		Шероховатость $Ra$ , мкм						Среднее значение по 6 опытам $Ra$ , мкм
X1	X2	1	2	3	4	5	6	
1	1	0,102	0,099	0,105	0,106	0,098	0,106	0,103
-1	1	0,088	0,094	0,086	0,086	0,090	0,086	0,088
1	-1	0,120	0,130	0,123	0,135	0,127	0,125	0,127
-1	-1	0,099	0,095	0,095	0,101	0,105	0,105	0,100
1	0	0,120	0,123	0,118	0,120	0,121	0,117	0,120
-1	0	0,095	0,098	0,091	0,095	0,095	0,103	0,096
0	1	0,047	0,050	0,050	0,048	0,048	0,049	0,049
0	-1	0,065	0,067	0,069	0,070	0,065	0,065	0,067
0	0	0,060	0,055	0,065	0,060	0,059	0,061	0,06

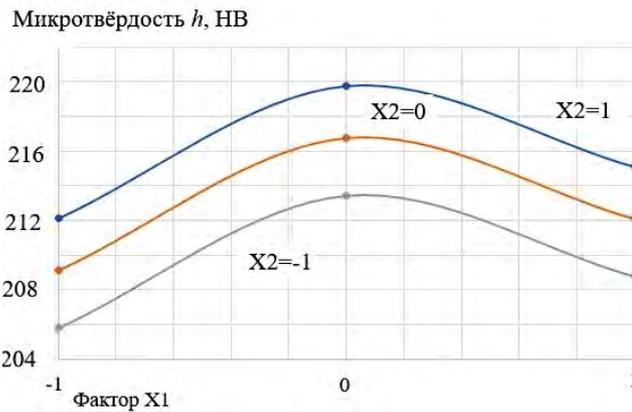
Таблица 2

Микротвёрдость поверхности малых каналов после обработки абразивным потоком в зависимости от степени наполнения рабочей среды пластификатором и давлением сдвига гидравлической системы

Факторы		Микротвёрдость $h$ , НВ						Среднее значение по 6 опытам $h$ , НВ
X1	X2	1	2	3	4	5	6	
1	1	215	213	216	216	214	216	215
-1	1	212	211	210	213	213,00	213	212
1	-1	209	210	208	209	208	210	209
-1	-1	206	206	205	205	207	207	206
1	0	212	212	211	213	213	211	212
-1	0	209	207	210	210	209	209	209
0	1	220	221	218	221	220	220	220
0	-1	213	211	214	214	213	213	213
0	0	217	218	218	216	216	217	217



а



б

Рис. 2. График зависимости показателей поверхности малого канала в образце из стали 12X18N10Т от степени наполнения рабочей среды пластификатором  $Ka$  ( $X1$ ) и давлением сдвига гидравлической системы  $P_{сд}$  ( $X2$ ):

а – шероховатости; б – микротвердости

Fig. 2. Graph of the dependence of the small channel surface parameters in a 12X18N10T steel sample on the degree of filling of the working medium with plasticizer  $Ka$  ( $X1$ ) and the shear pressure of the hydraulic system  $P_{сд}$  ( $X2$ ):

а – roughness; б – microhardness

При таких соотношениях регулируемых факторов  $X_1$  и  $X_2$  рабочая среда в обрабатываемом образце осуществляет сдвиговое течение с лучшими сочетаниями вязких и упругих свойств. Для показателя микротвердости (рис. 2, б) экстремум эмпирической зависимости также наблюдается для области 40 % наполнения рабочей среды пластификатором и максимальной величины давления сдвига.

В кодированном выражении эмпирическая зависимость шероховатости определена как

$$\text{шероховатость: } Y_1 = 60,63 + 10,8X_1 - 8,9X_2 + 47,1X_1^2 - 3,1X_2^2 - 3,1X_1X_2. \quad (1)$$

Статистические характеристики: максимальная дисперсия  $S^2_{\max} = 0,236$ ; дисперсия воспроизводимости среднего значения  $S^2(y) = 0,261$ ; дисперсия откликов первого рода  $S_1^2 = 293,99$  (отлична от нуля, так как  $S_1^2/S^2(y) = 1126,4 > F_{0,05}(2;18) = 3,55$ ); дисперсия откликов второго рода  $S_2^2 = 148567$  (значительно отлична от нуля, так как  $S_2^2/S^2(y) = 569222 > F_{0,05}(3;18) = 5,09$ ); остаточная дисперсия  $S^2_{\text{ост}} = 1,389$ ; значение критерия Фишера при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  равняется  $F_{\text{ад}} = 1,389/1,564 = 0,89$ , что меньше 5,09. Полученное уравнение адекватно описывает экспериментальные данные.

$$\text{Микротвёрдость: } Y_1 = 216,8 + 1,5X_1 + 3,2X_2 - 6,2X_1^2 - 0,2X_2^2. \quad (2)$$

Статистические характеристики: максимальная дисперсия  $S^2_{\max} = 1,333$ ; дисперсия воспроизводимости среднего значения  $S^2(y) = 0,16$ ; дисперсия откликов первого рода  $S_1^2 = 198,9$  (отлична от нуля, так как  $S_1^2/S^2(y) = 1243,1 > F_{0,05}(2;18) = 3,55$ ); дисперсия откликов второго рода  $S_2^2 = 126601$  (значительно отлична от нуля, так как  $S_2^2/S^2(y) = 791256 > F_{0,05}(3;18) = 5,09$ ); остаточная дисперсия  $S^2_{\text{ост}} = 0,148$ ; значение критерия Фишера при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  равняется  $F_{\text{ад}} = 0,148/1,564 = 0,09$ , что меньше 5,09. Полученное уравнение адекватно описывает экспериментальные данные.

По результатам исследования и полученных зависимостей (1) и (2) обработку абразивным потоком малых каналов в образцах из стали 12Х18Н10Т рекомендовано проводить с рабочей средой следующего состава: степень наполнения основы рабочей среды (при неизменном содержании белого электрокорунда – 30 %) пластификатором в виде алмазной пасты (АСН 60/40 ВОМ Г)  $Ka$  40 % и каучука СКТ 30 % соответственно. Максимальное давление сдвига гидравлической системы  $P_{\text{сд}}$  12 МПа ограничено техническими возможностями установки.

Дальнейшие исследования по качественной и количественной оценке изменения структуры поверхностного слоя были проведены на образцах, обработанных на условиях  $Ka$  ( $X_1$ ) = 40 % и  $P_{\text{сд}}$  ( $X_2$ ) = 12 МПа. Количественная оценка изменения шероховатости поверхностного слоя проведена на основе протоколов профилограмм (рис. 3), полученных на профилометре MarSurf M300. Сравнительная характеристика шероховатости поверхностного слоя малого канала представлена в табл. 3.

Сравнение двух полученных профилограмм показывает, что в результате обработки абразивным потоком существенно уменьшились как высотные параметры шероховатости (средние –  $Ra$ ,  $Rz$ ,  $Rp$ ; максимальные –  $R_{\max}$ ), так и глубинные параметры шероховатости ( $Rk$ ).

Увеличение материальных составляющих  $Mr_1$  и  $Mr_2$  с 7 до 10 % и с 72 до 87 % соответственно показывает, что в ходе обработки присутствовали такие виды контакта, как микрорезание и пластическая деформация. Этот факт подтверждается возрастанием микротвёрдости поверхности канала после обработки абразивным потоком на 12–15 % (для рассматриваемых образцов с 189–191 до 213–220 НВ).

Качественная оценка изменения состояния поверхностного слоя малых каналов образцов из сплава 12Х18Н10Т была проведена на основании изображений, полученных на оптическом микроскопе (рис. 4). При помощи электронной микроскопии (SEM MAG) получено изображение профиля поперечного сечения канала после АФМ (рис. 5), структуры поверхностного слоя канала после фрезерования (рис. 6) и обработки абразивным потоком (рис. 7). Для исследования изменения структуры материала образца после обработки абразивным потоком исследован микршлиф канала (рис. 8), разрезанного вдоль осевой линии.

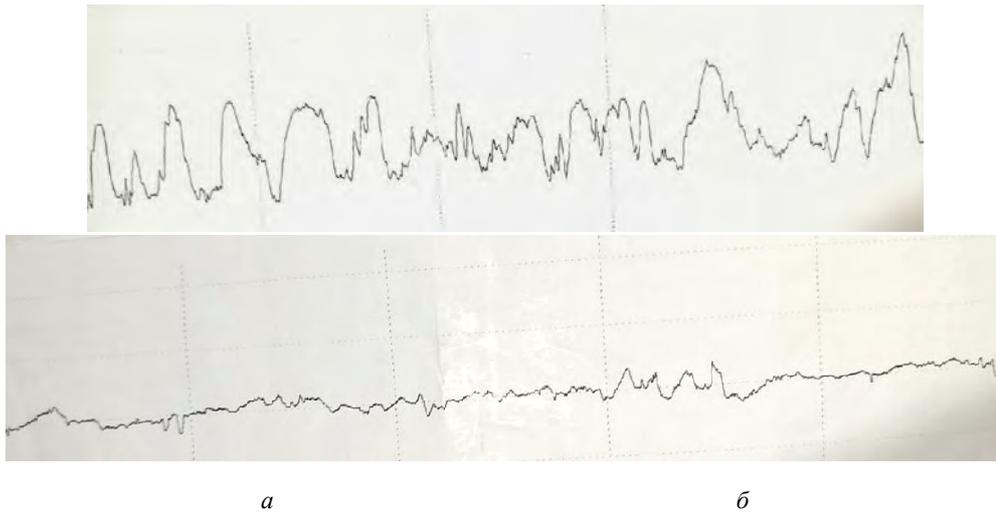


Рис. 3. Профилограмма поверхности канала:  
 а – после фрезерования; б – после обработки абразивным потоком

Fig. 3. Profile of the channel surface:  
 а – after milling; б – after AFM

Таблица 3

**Сравнительная характеристика шероховатости поверхностного слоя малого канала после фрезерования и обработки абразивным потоком по протоколам профилограмм**

Наименование параметров шероховатости	Численное значение параметров	
	после фрезерования	после AFM
Средняя арифметическая шероховатость, $R_a$ , мкм	0,464	0,047
Средняя высота неровности, $R_z$ , мкм	1,954	0,345
Максимальная высота шероховатости, $R_{max}$ , мкм	2,484	0,757
Средняя высота выступов профиля, $R_p$ , мкм	0,883	0,133
Глубина шероховатости сердцевины, $R_k$ , мкм	1,187	0,154
Материальная составляющая определяется для линии разреза, которая отделяет выступающие пики от основного профиля шероховатости; $Mr1$ , %	7	10
Материальная составляющая определяется для линии разреза, которая отделяет глубокие впадины от основного профиля шероховатости; $Mr2$ , %	72	87

Для структуры поверхности образцов в исходном состоянии (рис. 4, а) характерны следы проката в продольном направлении, образующие регулярную шероховатость. На поверхности также видны царапины от механического воздействия при перемещении образцов и их формообразования. После фрезерования структура поверхности малого канала (рис. 4, б) претерпела ряд изменений. Она представлена комплексом параллельных царапин и впадин следа фрезы, которые подтверждаются протоколом профилограммы поверхности (см. рис. 3, а).

В целом поверхность малого канала соответствует типовой структуре поверхности деталей из стали 12Х18Н10Т после фрезерной обработки.

После обработки абразивным потоком направление шероховатости поверхности не изменилось (рис. 4, в), но глубина царапин существенно уменьшилась. Микронеровности следа от фрезы полностью удалены. Это подтверждено протоколом профилограммы (см. рис. 3, б), а также уменьшением показателей  $R_{max}$  с 2,484 до 0,757 мкм,  $R_p$  с 0,883 до 0,133 мкм и  $R_k$  с 1,187 до 0,154 мкм.

Увеличение с 72 до 87 % материальной составляющей для линии разреза, отделяющей глубокие впадины от основного профиля шероховатости, позволяет сделать вывод о том, что

дефектные слои от предшествующих операций проката и фрезерования полностью удалены. Увеличение материальной составляющей для линии разреза, отделяющей выступающие пики от основного профиля шероховатости, с 7 до 10 % также свидетельствует о выравнивании структуры микронеровностей поверхностного слоя.

После обработки абразивным потоком была получена равномерная структура поверхностного слоя. При этом величина шероховатости была уменьшена с  $Ra = 0,49-0,62$  мкм до  $Ra = 0,047-0,06$  мкм. Микротвёрдость поверхности в результате АФМ увеличилась от величины  $h = 188-192$  НВ до  $h = 213-220$  НВ.

В целом в структуре поверхности наблюдается слоистость материала и наличие микровключений, характерных для основного слоя материала образца на микрошлифах (рис. 8).

Форма поперечного сечения малого канала соответствует профилю концевой фрезы. Анализ геометрического контура профиля выходной кромки поперечного сечения канала после АФМ (рис. 5) показывает равномерность обработки всего профиля в пределах заданных допусков на обработку.

Изображение поверхностного слоя канала после фрезерования (рис. 6) также показывает наличие ряда микронеровностей разной высоты и длины.

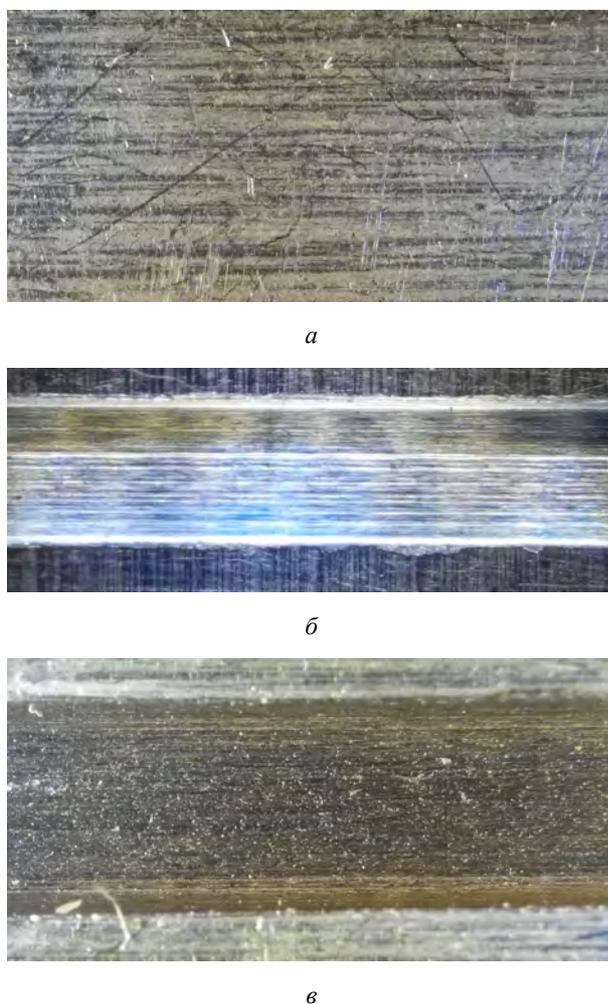


Рис. 4. Структура поверхности канала:  
*a* – поверхность образца до формообразования канала; *б* – после фрезерования;  
*в* – после 60 с обработки абразивным потоком

Fig. 4. Structure of the channel surface:  
*a* – sample surface before channel formation; *б* – after milling;  
*в* – after 60 seconds of AFM

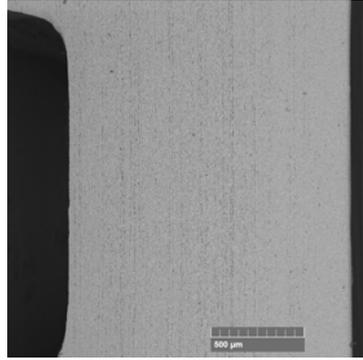


Рис. 5. Геометрический контур профиля поперечного сечения канала после AFM (142 x)

Fig. 5. Geometrical contour of the channel cross-section profile after AFM (142 x)

Структура поверхностного слоя канала после обработки абразивным потоком, полученная при помощи электронной микроскопии (SEM MAG) (рис. 7), показывает наличие упрочненного слоя. Изображение с увеличением 710 x (рис. 7, а) показывает относительную равномерность этого слоя относительно всей поверхности канала, а изображение с увеличением 4,33 kx (рис. 7, б) дало возможность установить толщину упрочненного слоя  $\approx 7,24$  мкм. Топография обработанной поверхности (рис. 7) также демонстрирует увеличение материальных составляющих  $Mr1$  и  $Mr2$ .

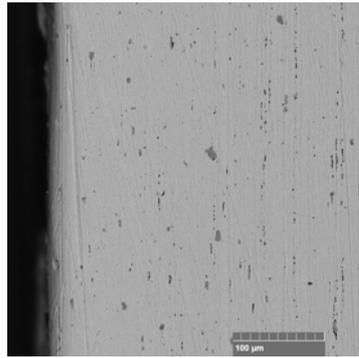


Рис. 6. Структура поверхностного слоя канала после фрезерования (708x)

Fig. 6. Structure of the surface layer of the channel after milling (708x)

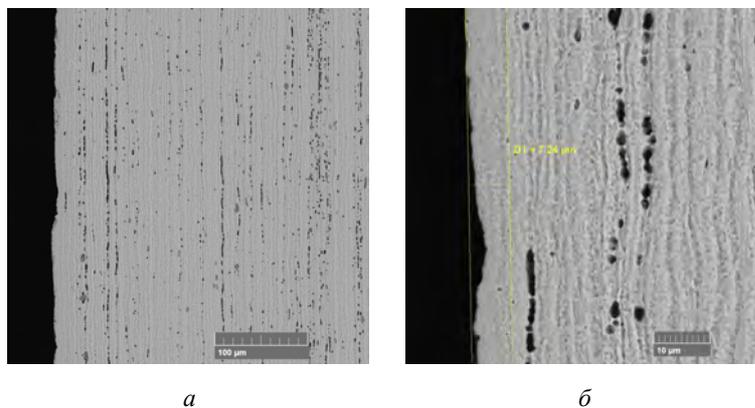


Рис. 7. Структура поверхностного слоя канала после обработки абразивным потоком:  
а – увеличение 710 x; б – увеличение 4,33 kx

Fig. 7. Structure of the surface layer of the channel after AFM:  
а – magnification 710 x; б – magnification 4.33 kx

Микрошлиф образца (рис. 8), демонстрирующий структуру его материала, также подтверждает увеличение микротвёрдости поверхностного слоя. Так, основной материал имеет слоистую структуру зоны 1, характерную для стали 12Х18Н10Т. В поверхностном слое зоны 2 толщины слоев уменьшаются, что свидетельствует об их деформации. Область 3 соответствует радиусу скругления боковой стенки канала.

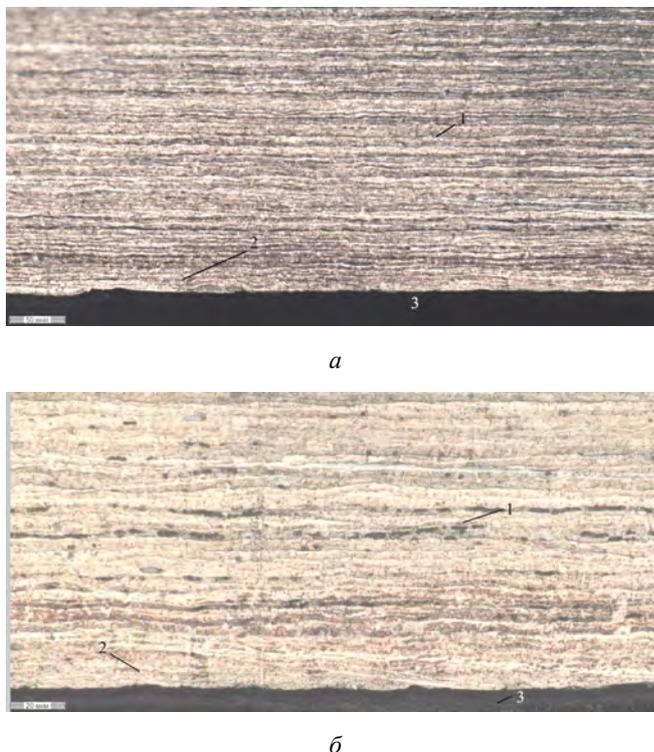


Рис. 8. Структура материала образца, разрезанного вдоль осевой линии канала (микрошлиф):  
а – увеличение 1,52 кх; б – увеличение 3,81 кх

Fig. 8. Structure of the sample material cut along the channel centerline after AFM (microsection)  
of the channel surface cut: a – magnification 1.52 kx; b – magnification 3.81 kx

Таким образом, в результате обработки абразивным потоком рабочей среды установленного состава за один этап удалось обеспечить существенное уменьшение шероховатости поверхностного слоя малого канала и увеличить его микротвёрдость. Это показывает хорошую обрабатываемость стали 12Х18Н10Т в отличие от сталей аустенитно-мартенситного типа и сплавов порошкового молибдена, обработка которых проводилась в два этапа [13; 19].

### Заключение

В результате исследований зависимости изменения шероховатости и микротвёрдости поверхности малого канала в образце из стали 12Х18Н10Т от степени наполнения рабочей среды пластификатором и давления сдвига гидравлической системы получены эмпирические зависимости с экстремумами данных функций в исследуемой области.

Это позволило рекомендовать обработку абразивным потоком рабочей среды следующего состава: степень наполнения основы рабочей среды (при неизменном содержании белого электрокорунда – 30 %) пластификатором в виде алмазной пасты (АСН 60/40 ВОМ Г) Ка 40 % и каучука СКТ 30 % соответственно.

В результате обработки абразивным потоком удалось уменьшить величину шероховатости поверхностного слоя с  $Ra = 0,49–0,62$  мкм до  $Ra = 0,047–0,06$  мкм, а также увеличить микротвёрдость поверхности от величины  $h = 188–192$  НВ до  $h = 213–220$  НВ. Величина упрочненно-

го слоя  $\approx 7,24$  мкм. Анализ профилограмм поверхности показывает, что в результате обработки абразивным потоком существенно уменьшились как высотные параметры шероховатости (средние –  $Ra$ ,  $Rz$ ,  $Rp$ ; максимальные –  $Rmax$ ), так и глубинные параметры шероховатости ( $Rk$ ).

Полученные результаты показывают хорошую обрабатываемость абразивным потоком заготовок из стали 12X18H10T.

### Библиографические ссылки

1. Широкожухова А. А., Юхневич С. С. Комбинированные методы обработки при изготовлении отверстий малого диаметра // Перспективы развития двигателестроения : материалы междунар. науч.-технич. конф. им. Н. Д. Кузнецова, Самара, 21–23 июня 2023 года / Самар. нац. исслед. ун-т им. ак. С. П. Королева. Т. 1. Самара, 2023. С. 339–341.
2. Бойцов А. Г. Современные технологии обработки отверстий малого диаметра // РИТМ машиностроения. 2020. № 5. С. 22 [Электронный ресурс]. URL: <https://ritm-magazine.com/ru/public/sovremennye-tehnologii-obrabotki-otverstiy-malogo-diametra>.
3. Mordyuk V. N., Prokopenko G. I. Ultrasonic impact peening for the surface properties' management // Journal of Sound and Vibration. 2007. Vol. 308, Iss. 3–5. P. 855–866. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.03.054.
4. Sun Y. Sliding wear behavior of surface mechanical attrition treated AISI 304 stainless steel // Tribology International. 2013. Vol. 57. P. 67–75. DOI: 10.1016/j.triboint.2012.07.015.
5. Advance Complex Liquid Nitriding of Stainless Steel AISI 321 Surface at 430 °C / Y. Lin, J. Wang, D. Zeng, R. Huang, H. Fan // Journal of Materials Engineering and Performance. 2013. Vol. 22, No. 9. P. 2567–2573. DOI: 10.1007/s11665-013-0545-8.
6. Effect of nanostructured grains on martensite formation during plasma nitriding of AISI 321 austenitic stainless steel / M. Golzar Shahri, M. Salehi, S. R. Hosseini, M. Naderi // Surface and Coatings Technology. 2017. Vol. 310. P. 231–238. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2016.12.019.
7. Laser Surface Hardening of Austenitic Stainless Steel / S. M. Levcovici, D. T. Levcovici, V. Munteanu et al. // Journal of Materials Engineering and Performance. 2000. Vol. 9, No. 5. P. 536–540. DOI: 10.1361/105994900770345665.
8. Повышение трибологических свойств аустенитной стали 12X18H10T наноструктурирующей фрикционной обработкой / А. В. Макаров, П. А. Скорынина, А. Л. Осинцева и др. // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). 2015. № 4(69). С. 80–92. DOI 10.17212/1994-6309-2015-4-80-92.
9. Influence of peening on corrosion properties of AISI 304 stainless steel / H. Lee, D. Kim, J. Jung, Y. Pyoun, K. Shin // Corrosion science. 2009. Vol. 51, Iss. 12. P. 2826–2830.
10. Загибалова Е. А., Москвина В. А., Майер Г. Г. Влияние метода и температуры ионно-плазменной обработки на физико-механические свойства поверхностных слоев в аустенитной нержавеющей стали // Frontier Materials & Technologies. 2021. № 4. С. 17–26. DOI 10.18323/2782-4039-2021-4-17-26.
11. McCarty R. W. Method of honing by extruding. Patent US, no. 3521412, 1970 (Publ. 21.07.1970).
12. Rhoades L. J. Abrasive flow machining for automatic surface finishing and capacitance technology for in-process surface and dimensional metrology // Surface Engineering. Dordrecht: Springer, 1990. P. 456–467. DOI: 10.1007/978-94-009-0773-7\_46.
13. Обработка абразивным потоком высоковязкой рабочей среды образцов литых заготовок из аустенитно-мартенситной стали / В. А. Левко, Н. С. Теряев, О. В. Литовка, П. А. Иванов // Вестник Самарского ун-та. Аэрокосмич. техника, технологии и машиностроение. 2023. Т. 22, № 3. С. 122–132. DOI 10.18287/2541-7533-2023-22-3-122-132.
14. Manufacturing of Closed Impeller for Mechanically Pump Fluid Loop Systems Using Selective Laser Melting Additive Manufacturing Technology / A. Adiaconitei, I. S. Vintila, R. Mihalache et al. // Materials. 2021. No. 14. P. 5908. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14205908>.

15. Effect of abrasive flow machining (AFM) finish of selective laser melting (SLM) internal channels on fatigue performance / Sangil Han, Ferdinando Salvatore, Joël Rech et al. // *Journal of Manufacturing Processes*. 2020. Vol. 59. P. 248–257. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2020.09.065>.

16. Greenslet J. M., Rhoades L. J. Method and apparatus for measuring flow rate through and polishing a workpiece orifice. Patent US, no 6953387, 2004 (Publ. 11.10.2005).

17. Левко В. А., Левко А. А. Исследование процесса абразивно-экструзионной обработки малых отверстий // *Вестник СибГАУ*. 2011. № 4(37). С. 169–173.

18. Иванов П. А., Левко В. А. Выбор вида и величины зерна наполнителя при обработке абразивным потоком прямоугольных заготовок из цветных сплавов // *Вестник ИжГТУ им. М. Т. Калашникова*. 2022. Т. 25, № 2. С. 6–13. DOI 10.22213/2413-1172-2022-2-6-13.

19. Левко В. А., Савин Д. И., Литовка О. В. Контактные взаимодействия при обработке абразивным потоком средой высокой вязкости заготовок из сплавов порошкового молибдена // *Вестник Иркут. гос. технич. ун-та*. 2020. Т. 24, № 1(150). С. 36–51. DOI 10.21285/1814-3520-2020-1-36-51.

## References

1. Shirokozhukhova A. A., Yukhnevich S. S. [Combined processing methods in the small diameter holes manufacture]. *Perspektivy razvitiya dvigatelestroyeniya : materialy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii imeni N. D. Kuznetsova* [Prospects for the Development of Engine Building: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference named after N. D. Kuznetsov]. Samara, 2023, Vol. 1. P. 339–341 (In Russ.).

2. Boytsov A. G. [Modern technologies for processing small diameter holes]. *RITM mashinostroyeniya*. 2020. No. 5. P. 22 (In Russ.). Available at: <https://ritm-magazine.com/ru/public/sovremennye-tehnologii-obrabotki-otverstiy-malogo-diametra>.

3. Mordyuk B. N., Prokopenko G. I. Ultrasonic impact peening for the surface properties' management. *Journal of Sound and Vibration*. 2007, Vol. 308, Iss. 3–5, P. 855–866. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.03.054.

4. Sun Y. Sliding wear behavior of surface mechanical attrition treated AISI 304 stainless steel. *Tribology International*. 2013, Vol. 57, P. 67–75. DOI: 10.1016/j.triboint.2012.07.015.

5. Lin Y., Wang J., Zeng D., Huang R., Fan H. Advance Complex Liquid Nitriding of Stainless Steel AISI 321 Surface at 430 °C. *Journal of Materials Engineering and Performance*. 2013, Vol. 22, No. 9, P. 2567–2573. DOI: 10.1007/s11665-013-0545-8.

6. Golzar Shahri M., Salehi M., Hosseini S. R., Naderi M. Effect of nanostructured grains on martensite formation during plasma nitriding of AISI 321 austenitic stainless steel. *Surface and Coatings Technology*. 2017, Vol. 310, P. 231–238. DOI:10.1016/j.surfcoat.2016.12.019.

7. Levcovici S. M., Levcovici D. T., Munteanu V. et al. Laser Surface Hardening of Austenitic Stainless Steel. *Journal of Materials Engineering and Performance*. 2000, Vol. 9, No. 5, P. 536–540. DOI: 10.1361/105994900770345665.

8. Makarov A. V., Skorynina P. A., Osintseva A. L., Yurovskikh A. S., Savrai R. A. [Improving the tribological properties of austenitic 12Kh18N10T steel by nanostructuring frictional treatment]. *Obrabotka metallov*. 2015, Vol. 69, No. 4, P. 80–92 (In Russ.).

9. Influence of peening on corrosion properties of AISI 304 stainless steel / H. Lee, D. Kim, J. Jung, Y. Pyoun, K. Shin. *Corrosion science*. 2009, Vol. 51, Iss. 12, P. 2826–2830.

10. Zagibalova E. A., Moskvina V. A., Mayer G. G. The influence of method and temperature of ion-plasma treatment on physical and mechanical properties of surface layers in austenitic stainless steel. *Frontier Materials & Technologies*. 2021, No. 4, P. 17–26. DOI: 10.18323/2782-4039-2021-4-17-26.

11. McCarty R. W. Method of honing by extruding. Patent US, no. 3521412, 1970.

12. Rhoades L. J. Abrasive flow machining for automatic surface finishing and capacitance technology for in-process surface and dimensional metrology. *Surface Engineering*. Dordrecht: Springer, 1990, P. 456–467. DOI: 10.1007/978-94-009-0773-7\_46.

13. Levko V. A., Teryaev N. S., Litovka O. V., Ivanov P. A. Abrasive flow machining of specimens of cast billets from austenomartensitic steel with high-viscosity media. *Vestnik of Samara Uni-*

versity. *Aerospace and Mechanical Engineering*. 2023, Vol. 22, No. 3, P. 122–132. DOI: 10.18287/2541-7533-2023-22-3-122-132.

14. Adiaconitei A., Vintila I. S., Mihalache R. et al. Manufacturing of Closed Impeller for Mechanically Pump Fluid Loop Systems Using Selective Laser Melting Additive Manufacturing Technology. *Materials*. 2021, No. 14, P. 5908. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14205908>.

15. Sangil Han, Ferdinando Salvatore, Joël Rech et al. Effect of abrasive flow machining (AFM) finish of selective laser melting (SLM) internal channels on fatigue performance. *Journal of Manufacturing Processes*. 2020, Vol. 59, P. 248–257. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2020.09.065>.

16. Greenslet J. M., Rhoades L. J. Method and apparatus for measuring flow rate through and polishing a workpiece orifice. Patent US, no 6953387, 2004.

17. Levko V. A., Levko A. A. [Study of the process of abrasive extrusion machining of small holes] *Vestnik SibGAU*. 2011, Vol. 37, No. 4, P. 169–173 (In Russ.).

18. Ivanov P. A., Levko V. A. [Type and Size Filler Grain Selection During Abrasive Flow Machining of Non-Ferrous Alloys Rectangular Parts]. *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*. 2022, Vol. 25, No. 2, P. 6–13 (In Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2022-2-6-13.

19. Levko V. A., Savin D. I., Litovka O. V. Powder molybdenum alloy workpieces contact interactions under abrasive flow machining by high viscosity media. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2020, Vol. 24, No. 1(150), P. 36–51 (In Russ.). DOI 10.21285/1814-3520-2020-1-36-51.

© Левко В. А., Литовка О. В., Петецкая А. Е., Иванов П. А., Снетков П. А., 2024

---

**Левко Валерий Анатольевич** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры технологии машиностроения; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: [levko@sibsau.ru](mailto:levko@sibsau.ru). <https://orcid.org/0009-0001-0209-9927>

**Литовка Ольга Владимировна** – ассистент кафедры технологии машиностроения; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: [litovka.9518@gmail.com](mailto:litovka.9518@gmail.com).

**Петецкая Ангелина Евгеньевна** – аспирант кафедры двигателей летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: [petetskaya\\_ae@sibsau.ru](mailto:petetskaya_ae@sibsau.ru).

**Иванов Павел Андреевич** – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры технологии машиностроения; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: [ivanov.pasch.iva@yandex.ru](mailto:ivanov.pasch.iva@yandex.ru).

**Снетков Павел Алексеевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологии машиностроения; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: [snetkov@list.ru](mailto:snetkov@list.ru).

**Levko Valery Anatolyevich** – Dr. Sc. (Technical), Associate Professor, Professor of the Department of Mechanical Engineering Technology; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: [levko@sibsau.ru](mailto:levko@sibsau.ru). <https://orcid.org/0009-0001-0209-9927>

**Litovka Olga Vladimirovna** – assistant of the Department of Mechanical Engineering Technology; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: [litovka.9518@gmail.com](mailto:litovka.9518@gmail.com).

**Petetskaya Angelina Evgenievna** – postgraduate student of the Department of Aircraft Engines; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: [petetskaya\\_ae@sibsau.ru](mailto:petetskaya_ae@sibsau.ru).

**Ivanov Pavel Andreevich** – Cand. Sc. (Technical), Senior Lecturer of the Department of Mechanical Engineering Technology; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: [ivanov.pasch.iva@yandex.ru](mailto:ivanov.pasch.iva@yandex.ru).

**Snetkov Pavel Alekseevich** – Cand. Sc. (Technical), associate professor, associate professor of the department of mechanical engineering technology; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: [snetkov@list.ru](mailto:snetkov@list.ru).

---

Статья поступила в редакцию 02.11.2024; принята к публикации 25.11.2024; опубликована 11.04.2025  
The article was submitted 02.11.2024; accepted for publication 25.11.2024; published 11.04.2025

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0  
The article can be used under the Creative Commons Attribution 4.0 License

