

ISSN 2712-8970



# СИБИРСКИЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

## SIBERIAN AEROSPACE JOURNAL

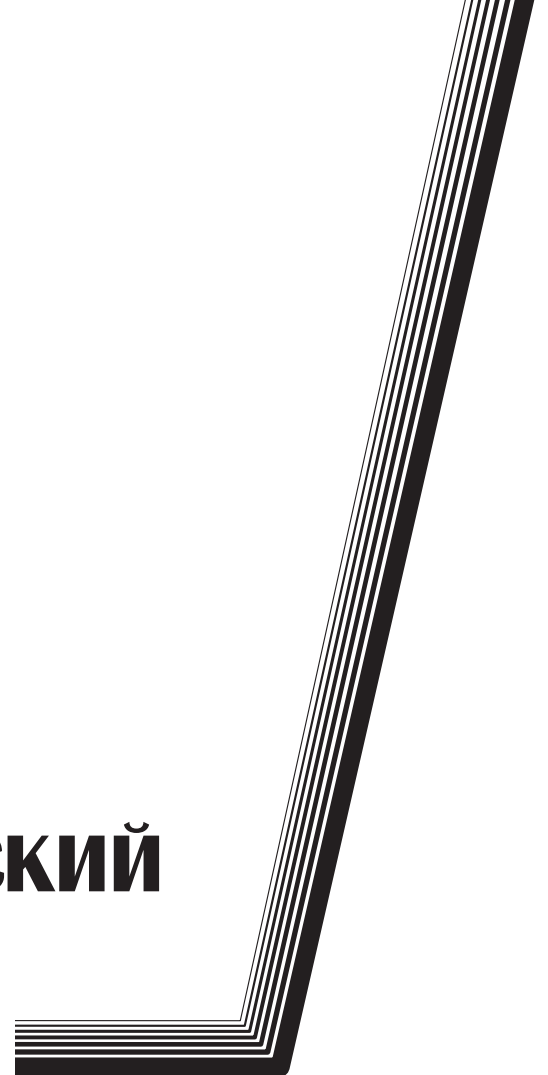
Том  
Vol. 23, № 3

КРАСНОЯРСК 2022

# **СИБИРСКИЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ**

Том 23, № 3

Красноярск 2022



# СИБИРСКИЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 23, № 3

*Главный редактор*

**Аплеснин Сергей Степанович**, доктор физико-математических наук, профессор  
(СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

*Заместители главного редактора*

**Логинов Юрий Юрьевич**, доктор физико-математических наук, профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Мурыгин Александр Владимирович**, доктор технических наук, профессор, ответственный  
за подготовку выпусков журнала, содержащих секретные сведения (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Сенашов Сергей Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Галеев Р. Г.**, доктор технических наук  
(АО «НПП «Радиосвязь»)

**Головенкин Е. Н.**, доктор технических наук,  
профессор (АО «ИСС»)

**Левко В. А.**, доктор технических наук, доцент  
(СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Лившиц А. В.**, доктор технических наук, доцент  
(ИрГУПС)

**Максимов И. А.**, доктор технических наук  
(АО «ИСС»)

**Медведев А. В.**, доктор технических наук,  
профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Михеев А. Е.**, доктор технических наук,  
профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Москвичев В. В.**, доктор технических наук,  
профессор (СКТБ «Наука» ИВТ СО РАН)

**Садовский В. М.**, член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук, профессор  
(ИВМ СО РАН)

**Сафонов К. В.**, доктор физико-математических  
наук, доцент (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Сильченко П. Н.**, доктор технических наук,  
профессор (СФУ)

**Смирнов Н. А.**, доктор технических наук,  
профессор (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

**Терсков В. А.**, доктор технических наук,  
профессор (КриЖТ ИрГУПС)

**Чеботарев В. Е.**, доктор технических наук,  
доцент (АО «ИСС»)

**Шайдуров В. В.**, член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук, профессор  
(ИВМ СО РАН)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Васильев С. Н.**, академик РАН, доктор физико-  
математических наук, профессор (Москва)

**Дегерменджи А. Г.**, академик РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (Красноярск)

**Дегтерев А. С.**, доктор технических наук,  
профессор (Красноярск)

**Колмыков В. А.**, кандидат технических наук,  
профессор (Химки)

**Миронов В. Л.**, член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (Красноярск)

**Романски Р. П.**, доктор наук, профессор  
(Технический университет Софии, Болгария)

**Семенкин Е. С.**, доктор технических наук,  
профессор (Красноярск)

**Тестоедов Н. А.**, академик РАН,  
доктор технических наук, профессор  
(Железногорск)

**Фошнер М.**, доктор, доцент (Марибор, Словения)

**Шабанов В. Ф.**, академик РАН, доктор физико-  
математических наук, профессор (Красноярск)

**Швенкер Ф.**, доктор наук, профессор  
(Институт нейроинформатики Университета Ульма,  
Германия)

# SIBERIAN AEROSPACE JOURNAL

Vol. 23, No 3

---

*Chief Editor:*

**Aplesnin S. S.**, Dr.Sc., Professor (Reshetnev University)

*Deputy Chief Editors*

**Loginov Y. Y.**, Dr.Sc., Professor (Reshetnev University)

**Murygin A. V.**, Dr.Sc., Professor (Reshetnev University)

**Senashov S. I.**, Dr.Sc., Professor (Reshetnev University)

---

## EDITORIAL BOARD

**Galeev R. G.**, Dr.Sc.

(JSC "NPP "Radiosvyaz")

**Golovenkin E. N.**, Dr.Sc., Professor

(ISS-Reshetnev Company)

**Levko V. A.**, Dr.Sc., Professor

(Reshetnev University)

**Livshits A. V.**, Dr.Sc., Professor

(Irkutsk State Transport University)

**Maksimov I. A.**, Dr.Sc.

(ISS-Reshetnev Company)

**Medvedev A. V.**, Dr.Sc., Professor

(Reshetnev University)

**Mikheev A. E.**, Dr.Sc., Professor

(Reshetnev University)

**Moskvichev V. V.**, Dr.Sc., Professor

(SDTB Nauka KSC SB RAS)

**Sadovsky V. M.**, Corresponding Member

of the Russian Academy of Sciences,

Dr.Sc., Professor (ICM SB RAS)

**Safonov K. V.**, Dr.Sc., Professor

(Reshetnev University)

**Silchenko P. N.**, Doctor of Technical

Sciences, Professor (SibFU)

**Smirnov N. A.**, Dr.Sc., Professor

(Reshetnev University)

**Terskov V. A.**, Dr.Sc., Professor

(Irkutsk State Transport University)

**Chebotarev V. Y.**, Dr.Sc., Professor

(ISS-Reshetnev Company)

**Shaidurov V. V.**, Corresponding Member

of the Russian Academy of Sciences,

Dr.Sc., Professor (ICM SB RAS)

## EDITORIAL COUNCIL

**Vasiliev S. N.**, Academician of the Russian

Academy of Sciences, Dr.Sc., Professor (Moscow)

**Degermendzhi A. G.**, Academician

of the Russian Academy of Sciences, Dr.Sc.,

Professor (Krasnoyarsk)

**Degterev A. S.**, Dr.Sc., Professor (Krasnoyarsk)

**Kolmykov V. A.**, Cand.Sc., Professor (Khimki)

**Mironov V. L.**, Corresponding Member

of the Russian Academy of Sciences, Dr.Sc.,

Professor (Krasnoyarsk)

**Romansky R. P.**, Dr.Sc., Professor

(Technical University of Sofia, Bulgaria)

**Semenkin E. S.**, Dr.Sc., Professor (Krasnoyarsk)

**Testoedov N. A.**, Academician of the Russian

Academy of Sciences, Dr.Sc., Professor

(Zheleznogorsk)

**Fošner M.**, Ph.D. Associate Professor

(Maribor, Slovenia)

**Shabanov V. F.**, Academician of the Russian

Academy of Sciences, Dr.Sc., Professor (Krasnoyarsk)

**Schwenker F.**, Dr.Sc., Professor (Institute

for Neuroinformatics, University of Ulm, Germany)

## К СВЕДЕНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ

«Сибирский аэрокосмический журнал» является научным, производственно-практическим рецензируемым изданием. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77-80539 от 01.03.2021 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

ISSN 2712-8970

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» — 39263.

Зарегистрирован в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Включен в базу данных Ulrich's Periodicals Directory американского издательства Bowker.

Входит в перечень журналов ВАК по следующим научным специальностям:

2.3.1 Системный анализ, управление и обработка информации (технические науки);

2.3.5 Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей (физико-математические науки);

2.5.13 Проектирование, конструкция и производство летательных аппаратов (технические науки);

2.5.15 Тепловые, электроракетные двигатели и энергоустановки летательных аппаратов (технические науки);

05.07.07 Контроль и испытание летательных аппаратов и их систем (технические науки).

Издается с 2000 года. 2000 — «Вестник Сибирской аэрокосмической академии имени академика М. Ф. Решетнева» (Вестник САА); 2002 — «Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева» (Вестник СибГАУ); 2017 — «Сибирский журнал науки и технологий» (СибЖНТ); с 01.03.2021 — «Сибирский аэрокосмический журнал» (САЖ).

Каждый выпуск журнала включает три раздела:

1 раздел. Информатика, вычислительная техника и управление.

2 раздел. Авиационная и ракетно-космическая техника.

3 раздел. Технологические процессы и материалы.

Статьи публикуются бесплатно после обязательного рецензирования и при оформлении их в соответствии с требованиями редакции ([www.vestnik.sibsau.ru](http://www.vestnik.sibsau.ru)). Журнал выходит 4 раза в год.

Электронная версия журнала представлена на сайте Научной электронной библиотеки (<http://www.elibrary.ru>) и сайте журнала ([www.vestnik.sibsau.ru](http://www.vestnik.sibsau.ru))

При перепечатке или цитировании материалов из журнала «Сибирский аэрокосмический журнал» ссылка обязательна.

### Учредитель и издатель

ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева» (СибГУ им. М. Ф. Решетнева)

АДРЕС РЕДАКЦИИ, УЧРЕДИТЕЛЯ И ИЗДАТЕЛЯ:

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, проспект имени газеты «Красноярский Рабочий», 31. Тел. (391) 290-42-31. E-mail: [vestnik@sibsau.ru](mailto:vestnik@sibsau.ru)

*Редактор* Н. Н. ГОЛОСКОКОВА  
*Ответственный редактор английского текста*  
Н. А. ШУМАКОВА

*Оригинал-макет и верстка* Л. В. ЗВОНАРЕВОЙ  
Подписано в печать 26.09.2022. Формат 70×108/16.  
Бумага офсетная. Печать плоская. Усл. печ. л. 25,1.  
Уч.-изд. л. 23,3. Тираж 100 экз. Заказ 3235. С 523/22.

Редакционно-издательский отдел СибГУ им. М.Ф. Решетнева.

Отпечатано в редакционно-издательском центре  
СибГУ им. М.Ф. Решетнева.

Российская Федерация, 660037, г. Красноярск,  
просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31.

Дата выхода в свет: 28.10.2022. Свободная цена

## INFORMATION FOR AUTHORS AND SUBSCRIBERS

*Siberian Aerospace Journal* is a research, production and practical peer-reviewed journal. Included by the Higher Attestation Commission of the Russian Federation in the Index of Leading Russian Peer-Reviewed Journals and Periodicals, in which significant scientific dissertation results should be published when applying for a Dr.Sc. degree.

The journal is the official periodical of Reshetnev Siberian State University of Science and Technology.

Certificate of Registration as a Mass Media Resource. Certificate: PI No. FC 77-80539, dated 01 March 2021, given by Federal Supervision Agency for Information Technology, Communications and Mass Media. ISSN 2712-8970.

The Journal is included in the following subscription catalogue 39263 — Pressa Rossii.

The journal is registered in the Russian Science Citation Index (RSCI). The journal is indexed in the database of Ulrich's Periodicals Directory.

The journal was first published in 2000. 2000 — Vestnik Sibirskoy aerokosmicheskoy akademii imeni akademika M. F. Reshetneva (Vestnik SAA); 2002 — Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni akademika M. F. Reshetneva (Vestnik SibGAU); 2017 — Siberian Journal of Science and Technology (SZHT); from 01.03.2021 — Siberian Aerospace Journal (SAJ).

The Journal is recommended for publishing the main results of research when applying for Cand. Sc. degree and Dr. Sc. degree upon the following specialties:

2.3.1 System Analysis, Management and Information Processing (Engineering Sciences);

2.3.5 Mathematical Support and Software for Computers, Computer Systems and Computer Networks (Physical and Mathematical Sciences);

2.5.13 Engineering, Design and Manufacturing of Aircraft (Engineering Sciences);

2.5.15 Thermal Electric Jet Engines and Power Facilities of Aircraft (Engineering Sciences);

05.07.07 Control and Testing of Aircraft and its Systems (Engineering Sciences).

Each issue consists of three parts:

Part 1. Informatics, computer technology and management.

Part 2. Aviation and Spacecraft Engineering.

Part 3. Technological Processes and Material Science.

Papers prepared in accordance with the editorial guidelines ([www.vestnik.sibsau.ru](http://www.vestnik.sibsau.ru)) are published free of charge after being peer reviewed.

The journal is published four times a year.

An online version can be viewed at <http://www.elibrary.ru> *Siberian Aerospace Journal* should be cited when reprinting or citing materials from the journal.

CONTACTS. Website: [www.vestnik.sibsau.ru](http://www.vestnik.sibsau.ru)

Address: Reshetnev Siberian State University of Science and Technology.

31, Krasnoyarsky Rabochoy prospekt., Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation.

Tel. (391) 290-42-31; e-mail: [vestnik@sibsau.ru](mailto:vestnik@sibsau.ru)

*Editor* N. N. GOLOSOKOVA  
*Executive editor (English Language)* N. A. SHUMAKOVA  
*Layout original* L. V. ZVONAREVA

Signed (for printing): 26.09.2022. Format 70×108/16.  
Offset Paper. Print flat. 25,1. Published sheets 23,3.  
100 copies. Order 3235. С 523/22.

Printing and Publication Department  
Reshetnev University.

Printed in the Department of copying and duplicating  
equipment Reshetnev University.

31, Krasnoyarsky Rabochoy prospekt, Krasnoyarsk,  
660037, Russian Federation.

Date of publication: 28.10.2022. Free price

# СОДЕРЖАНИЕ

## Раздел 1. ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

<b>Евтихов Д. О., Яхно А. Н., Савостьянова И. Л.</b> О построении линий разрыва напряжений для двумерной пластической области .....	364
<b>Матвеев А. Д.</b> Построение высокоточных многосеточных конечных элементов малой размерности с применением локальных аппроксимаций и образующих конечных элементов .....	372
<b>Мусонов В. М., Романов А. П.</b> Поиск широкополосных сигналов наземной радионавигационной системы .....	391
<b>Сенашов В. И.</b> Оценка количества аperiодических слов .....	409
<b>Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.</b> Законы сохранения и решения первой краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости .....	417

## Раздел 2. АВИАЦИОННАЯ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА

<b>Беляков В. А.</b> Выбор энергетических параметров кислородно-водородного безгазогенераторного жидкостного ракетного двигателя .....	424
<b>Зуев А. А., Арнгольд А. А., Фалькова Е. В., Толстопятов М. И., Дубынин П. А.</b> Локальные параметры теплоотдачи на участках развивающегося температурного пограничного слоя в полостях газовых турбин .....	437
<b>Кольга В. В., Лыкум А. И., Марчук М. Е., Филипсон Г. Ю.</b> Проектирование узла крепления оттяжек на силовой спице рефлектора .....	451
<b>Кудрявцев И. В., Рабецкая О. И., Митяев А. Е.</b> Аппроксимация значений коэффициентов опор балки при колебаниях и потери устойчивости .....	461
<b>Кузнецов В. И., Макаров В. В.</b> Метод расчета термодинамических характеристик вихревого эжектора при известных геометрических размерах .....	475
<b>Лукьянов М. М., Прохоров Г. П., Куценко В. С., Карпов Е. С., Паршин А. С., Зуев Д. М.</b> Концепция научно-образовательного эксперимента по проведению летного тестирования различных типов фотоэлектрических преобразователей .....	486
<b>Торгашин А. С., Жуйков Д. А., Назаров В. П., Бегишев А. М.</b> Способ обработки результатов кавитационных испытаний насосов турбонасосных агрегатов с целью получения аппроксимирующей функции .....	498
<b>Чеботарев В. Е., Зимин И. И., Внуков А. А., Шангина Е. А.</b> Методические принципы формирования ряда унифицированных космических платформ спутников связи .....	508
<b>Шелудько М. Л., Назаров В. П., Зенюк К. О., Назарова Л. П.</b> Моделирование и верификация параметров рабочего процесса в газогенераторах наддува топливных баков жидкостных ракетных двигательных установок .....	520

## Раздел 3. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И МАТЕРИАЛЫ

<b>Бордонский Г. С., Гурулев А. А., Орлов А. О., Цыренжапов С. В.</b> Изучение фактора потерь льда наледи из пресной воды в миллиметровом диапазоне .....	532
<b>Иванов Р. Д., Даныкина Г. Б., Пискажова Т. В., Колмакова Л. П.</b> Разработка человеко-машинного интерфейса для управления каскадом мельниц при получении шихты нефелиновой руды .....	542
<b>Тихомиров А. А., Трифионов С. В., Морозов Е. А., Мурыгин А. В.</b> Разработка принципов управления блоком обессоливания для замкнутых систем жизнеобеспечения космического назначения .....	551
<b>Удод Л. В., Романова О. Б., Ситников М. Н, Абдельбаки Х.</b> Магнитные свойства и электрическая поляризация при гетерогенном замещении в пиростаннате висмута $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Me}_{0,1})_2\text{O}_7$ , $\text{Me} = \text{Cr}^{3+}, \text{Fe}^{3+}$ .....	561

# CONTENTS

## Part 1. INFORMATICS, COMPUTER TECHNOLOGY AND MANAGEMENT

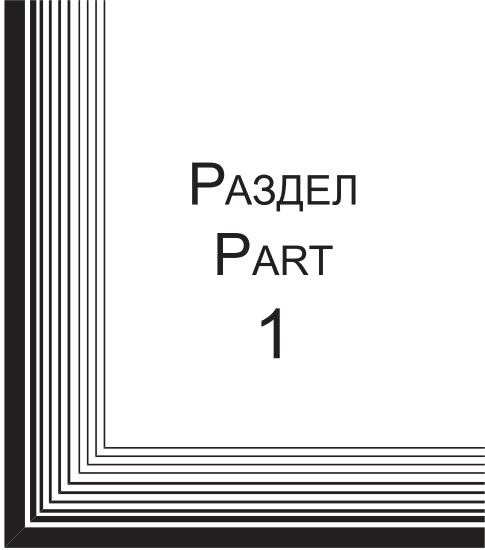
<b>Evtikhov D. O., Yakhno A. N., Savostyanova I. L.</b> On the construction of stress discontinuity lines for a two-dimensional plastic region .....	364
<b>Matveev A. D.</b> Construction of high-precision low-dimensional MgFE using local approximations and generating FE .....	372
<b>Musonov V. M., Romanov A. P.</b> Search for broadband signals ground-based radio navigation system .....	391
<b>Senashov V. I.</b> Estimation of the number of aperiodic words .....	409
<b>Senashov S. I., Savostyanova I. L.</b> Conservation laws and solutions of the first boundary value problem for equations of two-dimensional elasticity theory .....	417

## Part 2. AVIATION AND SPACECRAFT ENGINEERING


<b>Belyakov V. A.</b> The choice of the energy parameters of an oxygen-hydrogen propellant expander cycle rocket engine .....	424
<b>Zuev A. A., Arngold A. A., Falkova E. V., Tolstopyatov M. I., Dubynin P. A.</b> Local heat transfer parameters in the areas of the developing temperature boundary layer in the cavities of gas turbines local heat transfer parameters in the areas of the developing temperature boundary layer in the cavities of gas turbines .....	437
<b>Kolga V. V., Lykum A. I., Marchuk M. E., Filipson G. U.</b> Design of the fastening assembly of the guys on the power spokes reflector .....	451
<b>Kudryavtsev I. V., Rabetskaya O. I., Mityaev A. E.</b> Approximation of beam support coefficient values at vibrations and buckling .....	461
<b>Kuznetsov V. I., Makarov V. V.</b> Method for calculating the thermodynamic characteristics of a vortex ejector with known geometric dimensions .....	475
<b>Lukyanov M. M., Prokhorov G. P., Kutsenko V. S., Karpov E. S., Parshin A. S., Zuev D. M.</b> The concept of an educational and scientific experiment for conducting on-orbit testing of any types of photovoltaic cell .....	486
<b>Torgashin A. S., Zhujkov D. A., Nazarov V. P., Begishev A. M.</b> Method for processing the results of cavitation tests of TNA pumps in order to obtain an approximating function .....	498
<b>Chebotarev V. E., Zimin I. I., Vnukov A. A., Shangina E. A.</b> Methodological principles for the formation of a number of unified space communication satellite platforms .....	508
<b>Sheludko M. L., Nazarov V. P., Zenyuk K. O., Nazarova L. P.</b> Modeling and verification of working process parameters in gas generators for pressurizing fuel tanks of liquid propellant rocket propulsion systems .....	520

## Part 3. TECHNOLOGICAL PROCESSES AND MATERIAL SCIENCE

<b>Bordonskiy G. S., Gurulev A. A., Orlov A. O., Tsyrenzhapov S. V.</b> Studying the factor of ice of icing field loss from fresh water in the millimeter range .....	532
<b>Ivanov R. D., Danykina G. B., Piskazhova T. V., Kolmakova L. P.</b> Development of a human-machine interface for cascade control mills in obtaining nepheline ore charge .....	542
<b>Tikhomirov A. A., Trifonov S. V., Morozov Ye. A., Murygin A. V.</b> Development of control principles for the desalination unit for closed life support systems for space purposes .....	551
<b>Udod L. V., Romanova O. B., Sitnikov M. N., Abdelbaki H.</b> Magnetic properties and electric polarization at heterogeneous substitution in bismuth pyrostannate $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.9}\text{Me}_{0.1})_2\text{O}_7$ , $\text{Me} = \text{Cr}^{3+}, \text{Fe}^{3+}$ .....	561



РАЗДЕЛ  
PART  
1



ИНФОРМАТИКА,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ  
ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,  
COMPUTER TECHNOLOGY  
AND MANAGEMENT





УДК 539.374

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-364-371

**Для цитирования:** Евтихов Д. О., Яхно А. Н., Савостьянова И. Л. О построении линий разрыва напряжений для двумерной пластической области // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 364–371. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-364-371.

**For citation:** Evtikhov D. O., Yakhno A. N., Savostyanova I. L. [On the construction of stress discontinuity lines for a two-dimensional plastic region]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 364–371. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-364-371.

## О построении линий разрыва напряжений для двумерной пластической области

Д. О. Евтихов<sup>1\*</sup>, А. Н. Яхно<sup>2</sup>, И. Л. Савостьянова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

<sup>2</sup>Университетский центр CUCEI Университета Гвадалахары  
Мексика, 44000, Халиско, Гвадалахара, просп. Хуарес, 976

\*E-mail: devtikhov@yandex.ru

*В статье рассматриваются уравнения пластичности в двумерном случае и строятся линии разрыва напряжений. Построение линий разрыва напряжений основывается на факте: они находятся в точке пересечения линий одного семейства (характеристик) и направлены по биссектрисе угла образованными этими характеристиками. Поэтому для нахождения этих линий построены характеристики. Подобная задача проще решается в случае пластического кручения, тогда характеристика только одна и она направлена по нормали к внешнему контуру, и найти линии скольжения и их точки пересечения достаточно просто. Поэтому большинство работ, посвященных построению линий разрыва напряжений, решает задачу именно пластического кручения для изотропных и анизотропных сред. Для задач плоской деформации пластического материала этот метод не достаточно развит. Это объясняется сложностью построения линий скольжения для таких задач и наличием двух семейств линий скольжения.*

*В данной работе построена гомотопия двух известных точных решений: Прандтля и Надаи, т. е. непрерывная трансформация одного решения в другое. При этом можно наблюдать эволюцию характеристик, которые зависят от группового параметра  $a$ : при  $a = 1$  получают характеристики решения Прандтля; при  $a = 0$  – характеристики решения Надаи, при  $a = 0,5$  характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений. Эти линии построены в данной работе.*

*Ключевые слова:* линия разрыва напряжений, уравнения пластичности, гомотопия решений.

## On the construction of stress discontinuity lines for a two-dimensional plastic region

D. O. Evtikhov<sup>1\*</sup>, A. N. Yakhno<sup>2</sup>, I. L. Savostyanova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

<sup>2</sup>Department of Mathematics, CUCEI, University of Guadalajara  
976, Juárez Av., Colonia Centro, C. P. 44100, Guadalajara, Jalisco, 44000, Mexico

\*E-mail: devtikhov@yandex.ru

*We consider the plasticity equations in the two-dimensional case and construct stress discontinuity lines in this paper. The construction of stress rupture lines has a fact: the rupture lines are located at the intersection point of lines of the same family (characteristics) and are directed along the angle bisector formed by these characteristics. To find these lines, we have constructed characteristics. Such a task is easier to solve in the case of plastic torsion, at that moment there is only one characteristic, and it is directed along the normal to the outer contour, and it is quite simple to find the sliding lines and their intersection points. Most of the works devoted to the construction of stress rupture lines solve the problem of plastic torsion for isotropic and anisotropic media. For problems of plane deformation of plastic material, this method is not sufficiently developed. This is the complexity of constructing sliding lines for such tasks and the presence of two families of sliding lines.*

*A homotopy of two known exact solutions is constructed: Prandtl and Nadai, that is, a continuous transformation of one solution into another in this article. We obtain the characteristics of the Prandtl solution at  $a=1$ . We obtain the characteristics of Nadai's solution at  $a=0$ . The characteristics of one family begin to intersect and stress discontinuity lines appear at  $a = 0,5$ . These lines are constructed in this work.*

*Keywords: stress discontinuity line, plasticity equations, homotopy of solutions.*

## **Введение**

Линия разрыва напряжений – это некоторая линия (поверхность) в теле, на которой напряжения терпят разрыв. Причина появления разрывов при плоской деформации – переопределённость граничной задачи в окрестности особой точки с какой-либо одной стороны от контактной границы. Как правило, линии разрыва расположены в более прочной части соединения [1–2]. При исследовании критического состояния и прочности конструкций необходимо учитывать это явление. То же относится и к стержневым конструкциям [1–5], и тонкостенным цилиндрическим оболочкам, где также имеет место переопределённость граничной задачи. Задача осложняется, если материал полосы неоднороден в менее прочной или (и) в более прочной части соединения [6].

Для построения линий разрыва напряжений, в случае плоской деформации, необходимо учитывать, что они находятся в точке пересечения линий характеристик одного семейства и направлены по биссектрисе угла образованными этими характеристиками. Поэтому для нахождения этих линий необходимо построить характеристики. Проще всего это сделать для задачи кручения, поскольку в этом случае характеристика направлена по нормали к внешнему контуру и найти линии скольжения и их точки пересечения достаточно просто. Этому посвящено достаточное количество работ о пластическом кручении изотропных цилиндрических и призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от касательных нагрузок, а также в случае, когда боковая поверхность стержня находится под действием внешнего переменного давления [7; 8]. Кручение анизотропных цилиндрических и призматических стержней исследовано в [9–11]. В [12] определено предельное состояние сектора анизотропного кругового кольца при кручении. В [13] показано построение полей характеристик для цилиндрического стержня по произвольной поверхности текучести. В [14–17] рассматривались поверхности разрывов деформаций в упругопластических средах.

Для задач плоской деформации пластичного материала разрывные решения построить не просто. Это объясняется необходимостью рассматривать два семейства характеристик и сложностью построения этих линий скольжения. Для решения этой задачи построим непрерывную деформацию двух точных решений: гомотопию решений Прандтля и Надаи. Найдем точки пересечения линий скольжения одного семейства и построим линии разрыва.

## **Гомотопия решений Прандтля и Надаи**

Рассмотрим систему плоской идеальной пластичности Треска – Сен-Венана – Мизеса, состоящую из двух уравнений равновесия и условия пластичности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты тензора напряжений;  $k$  – предел текучести при чистом сдвиге.

Заменой, продолженной М. Леви,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma + k \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta, \end{aligned}$$

система (1) сводится к квазилинейной системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) = 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

в которой  $\sigma$  – гидростатическое давление;  $\theta - \frac{\pi}{4}$  – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью  $OX$ .

Решение Прандтля часто используется для описания сжатия жесткопластического материала шероховатыми плитами. Предполагается, что слой имеет значительно большую длину по сравнению с его толщиной. Это решение приближено описывает реальную ситуацию в некотором отдалении от центра слоя, если начало координат расположено в центре слоя.

В терминах переменных  $\sigma, \theta$  для системы (2) это решение имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma = -p_1 - k \left( \frac{x}{h} - \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} \right), \\ y = h \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $h = \text{const}$ ;  $y = \pm h$  – границы плит;  $p_1 = \text{const}$ .

Граничные решения примут вид

$$\begin{aligned} \theta|_{y=h} = \pi n, n \in Z, \\ \sigma|_{y=h} = -p_1 - k \frac{x}{h}. \end{aligned} \quad (4)$$

Характеристики решения имеют следующий вид:

$$x = h(2\theta - \sin 2\theta) - h \left( 2c_i + \frac{p_1}{k} \right), \quad y = \pm h \cos 2\theta, i = 1, 2, \quad (5)$$

где  $c_i = \text{const}$ .

Решение Надаи описывает пластическое положение вокруг круглого отверстия радиуса  $R$ , нагруженного равномерно распределённым нормальным давлением  $p_1 = \text{const}$  и нулевым касательным напряжением на контуре отверстия. Данное решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \theta = \varphi + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma = -p_2 + k + k \ln \frac{x^2 + y^2}{R^2} = -p_2 + k + k \ln \frac{r^2}{R^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $r; \varphi$  – полярные координаты.

Граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \theta|_{r=R} &= \varphi + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma|_{r=R} &= p_2 + k. \end{aligned} \quad (7)$$

Получившиеся линии скольжения имеют следующей вид:

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{4}, \quad r = R \exp\left(\pm\theta + \frac{p_2 - k}{2k} + c_i\right), \quad (8)$$

где  $c_i - \text{const}; i = 3, 4$ .

Выразим решение Надаи и Прандтля как решение линеаризованной системы:

$$x = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}}, \quad (9)$$

$$y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}},$$

$$x = -\frac{h\sigma}{k} - \frac{p_1 h}{k} - h \sin 2\theta, \quad (10)$$

$$y = h \cos 2\theta.$$

Выполняем гомотопическую линейную комбинацию решений Прандтля и Надаи:

$$x = a\left(-\frac{h\sigma}{k} - \frac{p_1 h}{k} - h \sin 2\theta\right) + (1-a) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}}, \quad (11)$$

$$y = h \cos 2\theta - (1-a) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}},$$

где  $a$  – групповой параметр.

Получаем граничную кривую для решения (10):

$$\sigma = -p_1 + k; \quad \theta = \varphi + \frac{\pi}{4}.$$

Подставляя  $\sigma = 2k(a + \theta)$  в систему (3), получаем параметрические уравнения семейства линий скольжения:

$$\begin{aligned} x &= ah\left(2(c_1 + \theta) + \frac{p_1}{k} + \sin 2\theta\right) + (1-a) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{a+\theta}, \\ y &= ah \cos 2\theta + (1-a) \text{Re} \frac{p_2 - k}{2k} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{a+\theta}. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом мы можем наблюдать эволюцию характеристик, которые зависят от группового параметра  $a$ , при  $a = 1$  получаются характеристики решения Прандтля (рис. 1).

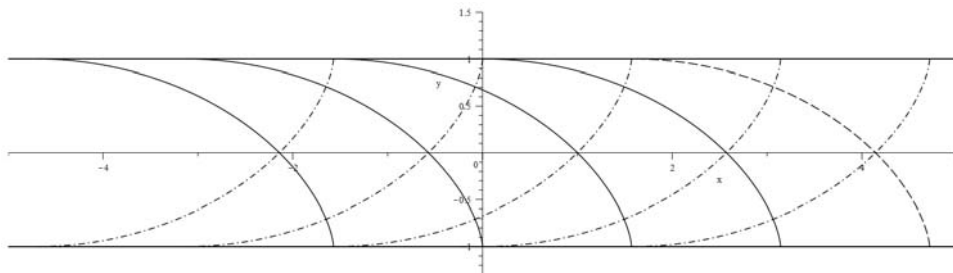


Рис. 1. Преобразованные линии скольжения:  $h = 1; p_1 = p_2; a = 1$

Fig. 1. Transformed sliding lines:  $h = 1; p_1 = p_2; a = 1$

При  $a = 0$  характеристики решения Надаи представлены на рис. 2.

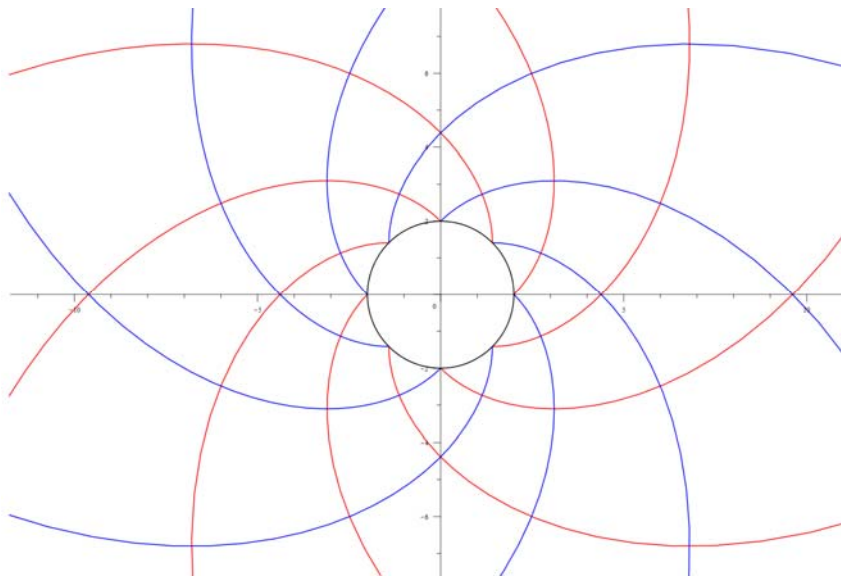


Рис. 2. Преобразованные линии скольжения:  $a = 0$   
 Fig. 2. Transformed sliding lines:  $a = 0$

При  $a = 0,5$  характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений, как на рис. 3.

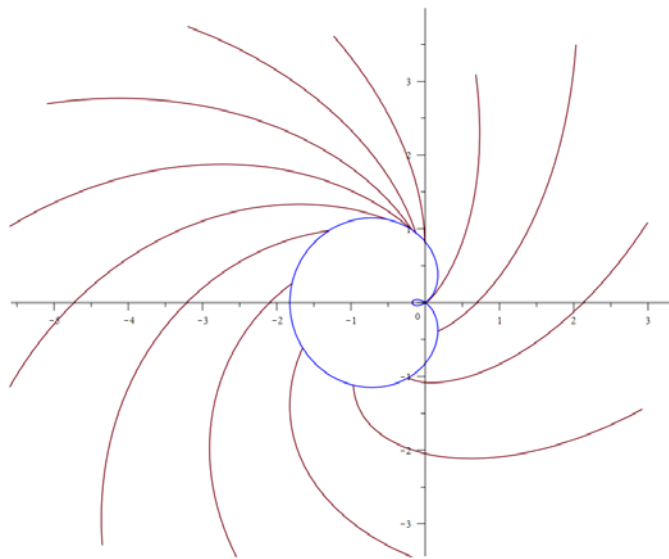


Рис. 3. Пересечение линий скольжения для отверстия в виде улитки Паскаля  $a = 0,5$

Fig. 3. The intersection of the sliding lines for the hole in the form of a Pascal snail  $a = 0,5$

Так как характеристики одного семейства пересекаются, то значения вдоль них различны, и решение задачи Коши после точки пересечения не может быть продолжено непрерывно, возникает линия разрыва напряжений. Эта линия разрыва проходит по биссектрисе угла, образованного пересекающимися характеристиками, и выходит из точки их пересечения в координатах  $[-0,183; 0,991]$  (рис. 4).

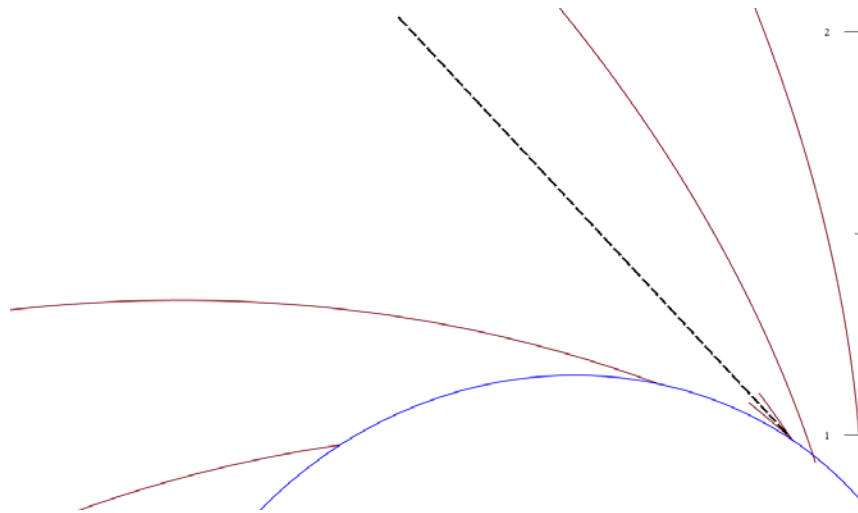


Рис. 4. Линия разрыва напряжений

Fig. 4. Stress discontinuity line

### Заключение

В данной работе построена гомотопия двух известных точных решений: Прандтля и Надаи, т. е. непрерывная трансформация одного решения в другое. При этом можно наблюдать эволюцию характеристик, которые зависят от группового параметра  $a$ : при  $a=1$  получаются характеристики решения Прандтля; при  $a=0$  – характеристики решения Надаи; при  $a=0,5$  характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений, которые проходят по биссектрисе угла пересечения характеристик и выходят из точки их пересечения. Если продолжить увеличение параметра  $a$  пересекающихся характеристик становится больше что усложняет построение линии разрыва напряжений. Решение этой проблемы будет рассмотрено в дальнейших работах.

### Библиографические ссылки

1. Дильман В. Л., Ерошкина Т. В. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях : монография. Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2011. 276 с.
2. Ерошкина Т. В., Дильман В. Л. Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне // Известия ВУЗов. Математика. 2011. № 11. С. 1–11.
3. Дильман В. Л., Ерошкина Т. В. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2009. Вып. 4, № 37 (170). С. 65–77.
4. Eroshkina T. V., Dilman V. L. Mathematical modeling of the state stress of a transverse plastic layer in a round rod // Russian Mathematics. 2011. Vol. 55, Is. 11, P. 9–17.
5. Ерошкина Т. В. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородных цилиндрических стержней : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск, 2010. 103 с.
6. Носачева А. И. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородной полосы с наружным макродефектом // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2013. Т. 6, № 3. С. 79–84.
7. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 231 с.
8. Миронов Б. Г. О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2006. № 1 (48). С. 98–100.

9. Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия «Механика предельного состояния». 2010. № 2 (8). С. 576–579.
10. Козлова Л. С. Предельное состояние призматических стержней при кручении / Чуваш. гос. пед. ун-т им. И. Я. Яковлева. М., 2010. 7 с.
11. Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. Деформированное состояние трансляционно-анизотропных тел при кручении // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2011. № 4 (72). С. 57–60.
12. Козлова Л. С., Миронов Б. Г. Кручение сектора анизотропного кругового кольца при действии переменного давления // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2010. № 4 (68). С. 132–136.
13. Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2012. № 4 (76). С. 108–112.
14. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Рычков В. А. Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред // Проблемы механики сплошных сред : сб. науч. работ. Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 1996. С. 116–128.
15. Быковцев, Г. И., Кретова Л. Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // ППМ. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 106–116.
16. Лимарев, А. Е., Чернышев А. Д. О распространении ударных волн в упругопластической среде с упрочнением // ПММ. 1971. Т. 35, вып. 6. С. 1083–1088.
17. Садовский В. М. К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах // ЖПМТФ. 1994. № 5. С. 166–172.

## References

1. Dilman V. L., Eroshkina T. V. *Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyanij myagkih prosloek v neodnorodnykh soedineniyah* [Mathematical modeling of critical states of soft interlayers in inhomogeneous compounds: monograph]. Chelyabinsk, YUUrGU Publ. 2011, 276 p.
2. Eroshkina T. V., Dilman V. L. [Mathematical modeling of the stress state of a transverse plastic layer in a round rod]. *Izvestiya VUZov. Mathematics*. 2011, No. 11, P. 1–11 (In Russ.).
3. Dilman V. L., Eroshkina T. V. [Investigation of mathematical models of the stress state of an inhomogeneous transverse layer in a round rod]. *Bulletin of YUUrGU. Mathematical modeling and programming*. 2009, Is. 4, No. 37 (170), P. 65–77 (In Russ.).
4. Eroshkina T. V., Dilman V. L. [Mathematical modeling of the state stress of a transverse plastic layer in a round rod]. *Russian Mathematics*. 2011, Vol. 55, Is. 11, P. 9–17.
5. Eroshkina T. V. *Matematicheskoe modelirovanie napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnykh cilindricheskikh sterzhney. Kand. Dis.* [Mathematical modeling of the stress state of inhomogeneous cylindrical rods.]. Chelyabinsk, 2010, 103 p.
6. Nosacheva A. I. [Mathematical modeling of the stress state of an inhomogeneous strip with an external macrodefect]. *Bulletin of YUUrGU. Mathematical modeling and programming*. 2013, Vol. 6, No. 3, P. 79–84 (In Russ.).
7. Ivlev D. D. *Teoriya ideal'noj plastichnosti* [Theory of ideal plasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 231 p.
8. Mironov B. G. [On torsion of prismatic rods under the influence of pressure linearly varying along the generatrix]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva*. 2006, No. 1 (48), P. 98–10 (In Russ.).
9. Ivlev, D. D. [On the relations of translational ideal-plastic anisotropy in torsion] *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Series : Mechanics of the limit state*. 2010, No. 2 (8), P. 576–579 (In Russ.).

10. Kozlova L. S. *Predel'noe sostoyanie prizmaticheskikh sterzhnej pri kruchenii* [The limiting state of prismatic rods during torsion]. Chuvash State Pedagogical University, 2010, 7 p. Bibliogr.: 3 titles. Rus. Dept. in VINITI 29.04.10, No. 232-V2010.
11. Mironov B. G., Mitrofanova T. V. [Deformed state of translationally anisotropic bodies under torsion]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universitetaim. I. Ya. Yakovleva*. 2011, No. 4 (72), P. 57–60 (In Russ.).
12. Kozlova L. S., Mironov B. G. [Torsion of the sector of an anisotropic circular ring under the action of variable pressure]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universitetaim. I. Ya. Yakovleva*. 2010, No. 4 (68), P. 132–136 (In Russ.).
13. Mironov B. G. [On general relations of the theory of torsion of anisotropic rods]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universitetaim. I. YA. Yakovleva*. 2012, No. 4 (76), P. 108–112 (In Russ.).
14. Burenin A. A., Bykovtsev G. I., Rychkov V. A. [Surfaces of velocity discontinuities in the dynamics of irreversibly compressible media]. *Problemy mekhaniki sploshnyh sred: Sbornik nauchnyh rabot*. Vladivostok, IAPU DVO RAN Publ., 1996, P. 116–128.
15. Bykovtsev G. I., Kretova L. D. [On the propagation of shock waves in elastic-plastic media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1972, Vol. 36, Is. 1, P. 106–116 (In Russ.).
16. Limarev A. E., Chernyshev A. D. [On propagation of shock waves in an elastic-plastic medium with hardening]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1971, Vol. 35, Is. 6, P. 1083–1088 (In Russ.).
17. Sadovsky V. M. [On the theory of propagation of elastic-plastic waves in hardening media]. *Zhurnal Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 1994, No. 5, P. 166–172 (In Russ.).

© Евтихов Д. О., Яхно А. Н., Савостьянова И. Л., 2022

---

**Евтихов Денис Олегович** – ассистент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: devtikhov@yandex.ru.

**Яхно Александр Николаевич** – кандидат физико-математических наук, профессор математического факультета университетского центра CUCEI Университета Гвадалахары, Мексика. E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx.

**Савостьянова Ирина Леонидовна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

**Evtkhov Denis Olegovich** – assistant at the Department of IES; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: devtikhov@yandex.ru.

Yakhno Alexander Nikolaevich – Cand. Sc., Department of Mathematics, CUCEI, University of Guadalajara, Mexico. E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx.

Savostyanova Irina Leonidovna – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of IES, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

---



УДК 539.3

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-372-390

**Для цитирования:** Матвеев А. Д. Построение высокоточных многосеточных конечных элементов малой размерности с применением локальных аппроксимаций и образующих конечных элементов // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 372–390. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-372-390.

**For citation:** Matveev A. D. [Construction of high-precision low-dimensional MgFE using local approximations and generating FE]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 372–390. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-372-390.

## Построение высокоточных многосеточных конечных элементов малой размерности с применением локальных аппроксимаций и образующих конечных элементов

А. Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН  
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44  
E-mail: mtv241@mail.ru

*Композитные конструкции (тела) широко применяются в авиационной и ракетно-космической технике. Для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих композитных тел (КТ) эффективно применяется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ), который реализуется на основе функционала Лагранжа (в перемещениях). При построении по известным процедурам многосеточного конечного элемента (МнКЭ), кратко – стандартного МнКЭ, используются мелкая (базовая) сетка, которая может быть сколь угодно мелкой, и крупные сетки, вложенные в мелкую. Мелкая сетка порождена базовым разбиением МнКЭ, которое учитывает в рамках микроподхода его неоднородную, микронеоднородную структуру. Крупные сетки используются для понижения размерности МнКЭ. Для стандартного МнКЭ характерно следующее. Всякая крупная сетка стандартного МнКЭ и отвечающие ей аппроксимации перемещений определяются на всей его области. Это приводит к увеличению размерности стандартного МнКЭ при повышении его порядка точности, так как в этом случае на крупных сетках определяются аппроксимации перемещений высокого порядка. Для уменьшения погрешности решений применяются высокоточные МнКЭ, т. е. высокого порядка точности, которые имеют большую размерность. Однако, применение высокоточных МнКЭ затруднительно, так как они образуют дискретные модели тел высокой размерности.*

*В данной работе предлагается метод локальных аппроксимаций (МЛА) для построения высокоточных МнКЭ малой размерности (кратко – малоразмерных МнКЭ), которые используются для расчета НДС по ММКЭ упругих однородных и КТ. Рассмотрены два типа малоразмерных МнКЭ. Малоразмерные МнКЭ 1-го типа проектируются на базе стандартных с применением локальных аппроксимаций перемещений, которые определяются на подобластях стандартных МнКЭ, 2-го типа – с применением образующих конечных элементов (КЭ). Краткая суть построения малоразмерных МнКЭ 1-го типа состоит в следующем. Согласно МЛА на области  $V_0$  стандартного МнКЭ определяем более мелкую сетку  $H$ , чем его базовая. Область  $V_0$  представляем граничными и внутренними областями. Граничные (внутренние) области имеют общую границу (не имеют общей границы) с областью  $V_0$ , общие границы с областью  $V_0$  не вырождаются в точку. На граничных (внутренних) областях определяем крупные сетки, которые вложены в мелкую сетку  $H$  и порождают локальные аппроксимации перемещений малого (высокого) порядка. На области  $V_0$ , используя локальные аппроксимации перемещений граничных и внутренних областей, строим МнКЭ. Затем с помощью метода конденсации выражаем перемещения внутренних узлов МнКЭ через*

перемещения узлов, лежащих на его границе, т. е. на границе области  $V_0$ . В результате получаем высокоточный МНКЭ  $V_p$  малой размерности, т. е. малоразмерный МНКЭ 1-го типа, размерность которого равна размерности стандартного. Важно отметить, что при увеличении порядка точности МНКЭ  $V_p$  размерность его не меняется, т. е. не увеличивается, и поэтому он называется высокоточным МНКЭ малой размерности. Подробно изложена процедура построения малоразмерных МНКЭ 1-го типа. Как известно, расчет на статическую прочность упругих конструкций сводится к определению для них максимальных эквивалентных напряжений, определение которых с малой погрешностью для КТ в настоящее время является актуальной проблемой.

Расчеты показывают, что малоразмерные МНКЭ 1-го типа порождают в КТ максимальные эквивалентные напряжения, погрешности которых в 25–50 раз меньше погрешностей аналогичных напряжений, полученных с помощью стандартных, на базе которых построены малоразмерные, т. е. малоразмерные МНКЭ 1-го типа более эффективны, чем стандартные. Применение в расчетах по ММКЭ малоразмерных МНКЭ 1-го типа позволяет для крупных дискретных моделей КТ определять максимальные эквивалентные напряжения с малой погрешностью.

Показано построение малоразмерных МНКЭ 2-го типа, которые проектируются на базе стандартных высокоточных МНКЭ с применением образующих КЭ. Малоразмерный МНКЭ 2-го типа имеет такой же порядок точности, как стандартный, но размерность его меньше размерности стандартного. Достоинство малоразмерных МНКЭ 2-го типа состоит в том, что они порождают дискретные модели КТ меньшей размерности, чем стандартные.

*Ключевые слова:* упругость, композиты, стандартные и малоразмерные МНКЭ, локальные аппроксимации, образующие КЭ.

## **Construction of high-precision low-dimensional MgFE using local approximations and generating FE**

A. D. Matveev

Institute of Computational Modeling SB RAS  
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation  
E-mail: mtv241@mail.ru

*Composite structures (bodies), in particular, plates, beams, shells, are widely used in aviation and rocket and space technology. To analyze the stress state of elastic composite bodies (CB), the method of multigrid finite elements (MMFE) is effectively used, which is implemented on the basis of the Lagrange functional (in displacements). When constructing a multigrid finite element (MgFE), briefly a standard MgFE, using known procedures, a small base grid is used, which can be arbitrarily small, and large ones nested in a small one. The fine grid is generated by the partition of the MgFE, which takes into account its inhomogeneous, micro-inhomogeneous structure within the framework of the micro-passage. Large grids are used to reduce the dimension of the MgFE. The following is typical for a standard MgFE. Any large grid of a standard MgFE and corresponding approximations of displacements are determined on its entire area. This leads to an increase in the dimension of the standard MgFE with an increase in its order of accuracy, since in this case approximations of high-order displacements are determined on large grids. To reduce the error of solutions, high-precision MgFE are used, i. e., of a high order of accuracy, which have a large dimension. However, the use of high-precision MgFE is difficult, since they form discrete models of high-dimensional bodies.*

*In this paper, we propose a method of local approximations (MLA) for constructing high-current MgFE of small dimension (short - small-sized MgFE), which are used to calculate elastic homogeneous and CB by MgFE. Two types of small-sized MgFE are considered. Small-sized MgFE of the 1st type are designed on the basis of standard ones with the use of local approximations of displacements, which are determined*

on the subdomains of standard MgFE, of the 2nd type - with the use of finite element generators (FE). The brief essence of the construction of small-sized MgFE of the 1st type is as follows. According to the MLA, we define a smaller  $H$  grid on the  $V_0$  area of the standard MgFE than its base one. The  $V_0$  region is represented by the boundary and inner regions. The boundary (inner) regions have a common boundary, which does not degenerate into a point (do not have a common boundary), with the  $V_0$  region. On the boundary (inner) regions, we define large grids that are embedded in a small  $H$  grid and generate local approximations of small (high) order displacements. On the  $V_0$  region, using local approximations of the displacements of the boundary and inner regions, we construct the MgFE. Then, using the condensation method, we express the movements of the internal nodes of the MgFE through the movements of the nodes lying on its boundary, i.e. on the boundary of the  $V_0$  region. As a result, we obtain a high-precision  $V_p$  MgFE of small dimension, i.e. a small-sized MgFE of the 1st type, the dimension of which is equal to the dimension of the standard one. It is important to note that with an increase in the order of accuracy of the  $V_p$  MgFE, its dimension does not change, i.e. it does not increase, and therefore it is called a high-precision MgFE of small dimension, i.e. small-sized. The procedure for constructing small-sized MgFE of the 1st type is described in detail. As is known, the calculation of the static strength of structures is reduced to determining the maximum equivalent stresses for them, the determination of which with a small error for CB is an urgent problem.

Calculations show that small-sized MgFE of the 1st type generate maximum equivalent stresses in CB, the errors of which are 25 ÷ 50 smaller than the errors of analogous stresses obtained using standard ones, on the basis of which small-sized, i.e. small-sized MgFE of the 1st type are more effective than standard ones. The use of small-sized MgFE of the 1st type in MMFE calculations makes it possible to determine the maximum equivalent stresses with a small error for large CB partitions.

The construction of small-sized MgFE of the 2nd type is shown, which are designed on the basis of standard high-precision MgFE with the use of generating FE. A small-sized MgFE of the 2nd type has the same order of accuracy as the standard one, but its dimension is smaller than the dimension of the standard one. The advantage of small-sized MgFE of the 2nd type is that they give rise to discrete CB models of smaller dimension than standard ones.

*Keywords: elasticity, composites, standard and small-sized MgFE, local approximations, generating FE.*

## **Введение**

В современной авиационной и ракетно-космической технике широко применяются упругие конструкции, пластины, балки, оболочки, имеющие неоднородную (волоконистую) структуру. При анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих конструкций (тел) активно используется метод конечных элементов (МКЭ) [1–7]. Базовые дискретные модели (БМ) тел, которые учитывают их неоднородную, микрон неоднородную структуру в рамках микроподхода [8] с помощью конечных элементов (КЭ) 1-го порядка, имеют очень высокую размерность.

Для понижения размерностей дискретных моделей очень результативно используется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [9–11]. Особенно эффективно ММКЭ используется при решении задач теории упругости [12–16] для композитных тел (КТ). ММКЭ реализуется на основе функционала Лагранжа (т. е. в перемещениях) [17] с применением многосеточных конечных элементов (МнКЭ) [18–21]. Поскольку при построении  $n$ -сеточного КЭ используется не одна, а  $n$  вложенных сеток ( $n \geq 2$ ), то ММКЭ можно считать обобщением МКЭ, т. е. МКЭ – частный случай ММКЭ. Отсюда следует, что если в расчетах тел по МКЭ применяются МнКЭ, то в этом случае, по сути, реализуется ММКЭ. Неоднородные, микрон неоднородные структуры КТ учитываются в рамках микроподхода с помощью МнКЭ. Существующие подходы и численные методы решения задач упругости для КТ имеют сложные формулировки и труднореализуемы [22–30]. Для тел с неоднородной регулярной структурой с различными коэффициентами заполнения, которые с позиций макроподхода рассматриваются как изотропные однородные тела, НДС определяется с помощью фиктивных модулей упругости. Процедуры

нахождения фиктивных модулей упругости показаны в работе [31] для двумерных композитов, в [32] – для трехмерных. Основные достоинства ММКЭ состоят в том, что он порождает для КТ дискретные модели малой размерности и реализуется на базе процедур МКЭ.

При построении по известным процедурам многосеточного конечного элемента (кратко – стандартного МнКЭ) используются мелкая сетка и крупные, вложенные в мелкую. Мелкая (базовая) сетка порождена базовым разбиением, которое учитывает неоднородную, микронеоднородную структуру стандартного МнКЭ, крупные сетки применяются для понижения его размерности. Для стандартных МнКЭ характерно следующее. Всякая крупная сетка стандартного МнКЭ и отвечающие ей аппроксимации перемещений определяются на всей его области. Это приводит к увеличению размерности стандартного МнКЭ при повышении его порядка точности, так как в этом случае на крупных сетках используются аппроксимации перемещений высокого порядка. Для уменьшения погрешности приближенных решений используются (стандартные) высокоточные МнКЭ, т. е. МнКЭ высокого порядка точности, которые имеют большую размерность. Однако применение высокоточных МнКЭ затруднительно, так как они порождают дискретные модели тел высокой размерности.

Основной недостаток МКЭ и ММКЭ состоит в том, что при построении по МКЭ, ММКЭ решений с малой погрешностью для КТ с помощью известных односеточных КЭ, МнКЭ необходимо применять дискретные модели тел высокой размерности. Для решения данной проблемы здесь предлагается использовать высокоточные МнКЭ малой размерности, которые позволяют для крупных дискретных моделей КТ определять напряжения с малой погрешностью.

В данной работе предлагается метод локальных аппроксимаций (МЛА) для построения высокоточных МнКЭ малой размерности (кратко – малоразмерных МнКЭ), которые применяются при расчете НДС по ММКЭ упругих однородных и КТ. МЛА применяется для КТ, которые удовлетворяют следующим основным положениям.

Положение 1. КТ состоят из разномодульных изотропных однородных тел, связи между которыми идеальны, т. е. на общих границах разномодульных изотропных однородных тел функции перемещений и напряжений являются непрерывными.

Положение 2. Перемещения, деформации и напряжения разномодульных изотропных однородных тел отвечают соотношениям Коши и закону Гука трехмерной задачи линейной теории упругости [16].

Следует отметить, что МЛА, по сути, порождает новые подходы построения МнКЭ. Рассмотрены два подхода, т. е. два типа малоразмерных МнКЭ. Малоразмерные МнКЭ 1-го типа проектируются на базе стандартных с применением локальных аппроксимаций перемещений, которые определяются на подобластях стандартных МнКЭ, 2-го типа – с применением образующих КЭ. Краткая суть построения малоразмерных МнКЭ 1-го типа состоит в следующем. Согласно МЛА в центральной части области  $V_0$  стандартного МнКЭ применяются локальные аппроксимации перемещений высокого порядка (построенные на крупных сетках), в окрестности границы области  $V_0$  – малого порядка, что позволяет проектировать высокоточный МнКЭ  $V_p$  малой размерности, т. е. малоразмерный МнКЭ 1-го типа, размерность которого равна размерности стандартного. Следует отметить следующее. При увеличении порядка точности МнКЭ  $V_p$  размерность его не меняется, т. е. не увеличивается, и поэтому он называется высокоточным МнКЭ малой размерности. Подробно изложена процедура построения малоразмерных МнКЭ 1-го типа. Как известно, расчет на статическую прочность упругих конструкций сводится к нахождению для них максимальных эквивалентных напряжений, определение которых с малой погрешностью для КТ является в настоящее время актуальной проблемой.

Расчеты показывают, что малоразмерные МнКЭ 1-го типа порождают в КТ максимальные эквивалентные напряжения, погрешности которых в 25–50 раз меньше погрешностей аналогичных напряжений, полученных с применением стандартных МнКЭ, которые имеют такие же формы, характерные размеры, размерности, неоднородную структуру и образуют такие же

дискретные модели, как малоразмерные МКЭ. Приведенный пример расчета КТ по МКЭ с применением малоразмерных МКЭ 1-го типа показывает их высокую эффективность.

Основные достоинства малоразмерных МКЭ 1-го типа состоят в следующем. Во-первых, малоразмерные МКЭ 1-го типа порождают в КТ максимальные эквивалентные напряжения с меньшей погрешностью, чем стандартные, и образуют дискретные модели КТ малой размерности. Во-вторых, применение в расчетах по МКЭ малоразмерных МКЭ 1-го типа позволяет для крупных дискретных моделей КТ определять максимальные эквивалентные напряжения с малой погрешностью. Отсюда следует, что малоразмерные МКЭ 1-го типа более эффективны, чем стандартные (на базе которых построены малоразмерные).

Кратко показана процедура построения малоразмерных МКЭ 2-го типа на базе стандартных высокоточных МКЭ с применением образующих КЭ. Малоразмерные МКЭ 2-го типа имеют такой же порядок точности, как стандартные, но размерность их меньше размерности стандартных. Поэтому малоразмерные МКЭ 2-го типа порождают дискретные модели КТ меньшей размерности, чем стандартные.

### 1. Процедура построения стандартных многосеточных конечных элементов

Основные положения построения стандартных МКЭ на основе функционала Лагранжа, не теряя общности суждений, покажем на примере лагранжевого двухсеточного конечного элемента (2сКЭ)  $V_d^{(2)}$  размерами  $8h \times 8h \times 8h$  (рис. 1),  $h$  – задано. Здесь и далее МКЭ на рисунках показаны в локальной декартовой системе координат  $Oxyz$ . Рассматриваемый 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  армирован непрерывными волокнами сечением  $h \times h$ , которые параллельны оси  $Oy$ , расстояние между которыми равно  $h$ . На рис. 2 показано сечение 2сКЭ в плоскости  $Oxz$ , сечения волокон закрашены. Считаем, что между компонентами неоднородной структуры 2сКЭ связи идеальны, а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающие трехмерной задаче линейной теории упругости [12–16], т. е. во всей области 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  реализуется трехмерное НДС [16]. Область 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  представляем БМ  $R_d$ , состоящей из однородных односеточных КЭ (1сКЭ)  $V_j^h$  первого порядка формы куба со стороной  $h$  [6; 7],  $j = 1, \dots, M$ ;  $M$  – общее число 1сКЭ  $V_j^h$ , для рис. 1 имеем  $M = 512$ . На рис. 1 показана БМ  $R_d$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$ , которая учитывает неоднородную структуру 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  и порождает мелкую (базовую) узловую равномерную сетку  $h_d$  размерности  $9 \times 9 \times 9$  с шагом  $h$ .

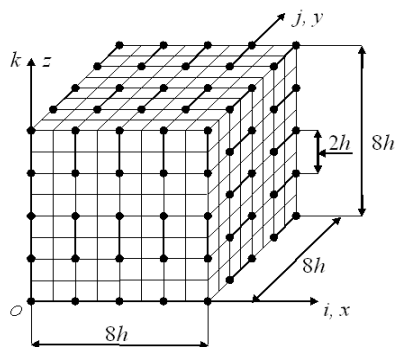


Рис. 1. Сетки 2сКЭ  $V_d^{(2)}$

Fig. 1. Grids 2gFE  $V_d^{(2)}$

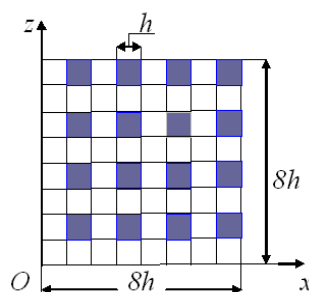


Рис. 2. Сечение 2сКЭ  $V_d^{(2)}$

Fig. 2. Section 2gFE  $V_d^{(2)}$

На мелкой сетке  $h_d$  определяем крупную равномерную сетку  $H_d^{(2)}$  размерности  $5 \times 5 \times 5$  с шагом  $2h$ . На рис. 1 узлы крупной сетки  $H_d^{(2)}$  отмечены точками – 125 узлов. Полную потен-

циальную энергию  $\Pi_d$  базового разбиения  $R_d$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$  (т. е. функционал Лагранжа [17]) представим в матричной форме [6; 7]:

$$\Pi_d = \sum_{j=1}^M \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}_j^T [K_j^h] \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T \mathbf{P}_j \right), \quad (1)$$

где  $[K_j^h]$  – матрица жесткости;  $\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j$  – векторы узловых сил и неизвестных 1сКЭ  $V_j^h$ ;  $T$  – транспонирование;  $M$  – общее число 1сКЭ  $V_j^h$ .

С помощью полиномов Лагранжа [6] на сетке  $H_d^{(2)}$  определяем аппроксимирующие функции  $u_2, v_2, w_2$  для перемещений  $u, v, w$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$ , которые запишем в форме

$$u_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} w_{ijk}, \quad (2)$$

где  $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$  – искомые значения функций  $u_2, v_2, w_2$  в узле  $i, j, k$  сетки  $H_d^{(2)}$ ;  $i, j, k$  – координаты целочисленной системы координат  $ijk$ , которая введена для узлов крупной сетки  $H_d^{(2)}$  (рис. 1);  $N_{ijk} = N_{ijk}(x, y, z)$  – базисная функция узла  $i, j, k$  сетки  $H_d^{(2)}$ ,  $i, j, k = 1, \dots, 5$ , где

$$N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z), \quad (3)$$

где  $L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^5 \frac{x-x_\alpha}{x_i-x_\alpha}$ ;  $L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^5 \frac{y-y_\alpha}{y_j-y_\alpha}$ ;  $L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^5 \frac{z-z_\alpha}{z_k-z_\alpha}$ ,  $x_i, y_j, z_k$  – координаты

узла  $i, j, k$  сетки  $H_d^{(2)}$  в системе координат  $Oxyz$ .

Обозначим:  $N_\beta = N_{ijk}$ ,  $u_\beta = u_{ijk}$ ,  $v_\beta = v_{ijk}$ ,  $w_\beta = w_{ijk}$ , где  $i, j, k = 1, \dots, 5$ , т. е.  $\beta = 1, \dots, 125$ . Тогда выражения (2) принимают вид

$$u_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta u_\beta, \quad v_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta v_\beta, \quad w_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta w_\beta. \quad (4)$$

Обозначим:  $\mathbf{q}_d = \{u_1, \dots, u_{125}, v_1, \dots, v_{125}, w_1, \dots, w_{125}\}^T$  – вектор узловых перемещений крупной сетки  $H_d^{(2)}$ , т. е. вектор неизвестных 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ . Используя (4), компоненты вектора  $\mathbf{q}_j$  узловых неизвестных 1сКЭ  $V_j^h$  выражаем через компоненты вектора  $\mathbf{q}_d$ , в результате получим

$$\mathbf{q}_j = [A_j^d] \mathbf{q}_d, \quad (5)$$

где  $[A_j^d]$  – прямоугольная матрица;  $j = 1, \dots, M$ .

Подставляя (5) в выражение (1), из условия  $\partial \Pi_d / \partial \mathbf{q}_d = 0$  получаем матричное соотношение вида  $[K_d] \mathbf{q}_d = \mathbf{F}_d$ , где

$$[K_d] = \sum_{j=1}^M [A_j^d]^T [K_j^h] [A_j^d], \quad \mathbf{F}_d = \sum_{j=1}^M [A_j^d]^T \mathbf{P}_j, \quad (6)$$

где  $[K_d]$ ,  $\mathbf{F}_d$  – матрица жесткости (размерности  $375 \times 375$ ) и вектор узловых сил (размерности 375) стандартного 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ .

Особенность стандартных МНКЭ заключается в том, что всякая крупная сетка стандартного МНКЭ и отвечающие ей аппроксимации перемещений определяются на всей его области.

Стандартный 2сКЭ формы куба, имеющий равномерную крупную сетку размерности  $(n+1) \times (n+1) \times (n+1)$ , называется 2сКЭ  $n$ -го порядка. Поскольку равномерная крупная сетка  $H_d^{(2)}$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$  имеет размерность  $5 \times 5 \times 5$ , то 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  называется 2сКЭ 4-го порядка. Отметим, что размерность лагранжевого 2сКЭ  $n$ -го порядка формы куба при использовании крупной равномерной сетки равна  $3(n+1)^3$ , т. е. с увеличением порядка  $n$  размерность 2сКЭ резко возрастает.

Замечание 1. Решение, построенное для крупной сетки  $H_d^{(2)}$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$ , с помощью формулы (5) проецируется на мелкую сетку  $h_d$  базового разбиения  $R_d$  2сКЭ, что дает возможность вычислять напряжения в любом 1сКЭ  $V_j^h$  разбиения  $R_d$ , следовательно, можно определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ .

Замечание 2. В силу (5) размерность вектора  $\mathbf{q}_d$  (размерность 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ ) не зависит от числа  $M$ , т. е. от размерности разбиения  $R_d$ . Следовательно, для учета в 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  сложной неоднородной (микронеоднородной) структуры, можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения  $R_d$ , состоящие из 1сКЭ  $V_j^h$ . В этом случае в 1сКЭ  $V_j^h$  сколь угодно точно описывается трехмерное напряженное состояние (без упрощающих гипотез).

Замечание 3. Отметим случай, когда 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  имеет сложную форму и его крупная сетка имеет внешние узлы, которые совпадают с узлами крупных сеток соседних с ним 2сКЭ. В этом случае при построении 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  во всех узлах его мелкой сетки искомые перемещения  $u, v, w$  выражаются через узловые перемещения крупной сетки  $H_d^{(2)}$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$ , кроме тех узлов мелкой сетки, которые совпадают с узлами (со стыковочными узлами) крупных сеток соседних 2сКЭ и сетки  $H_d^{(2)}$ , что обеспечивает стыковку 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  с соседними с ним 2сКЭ.

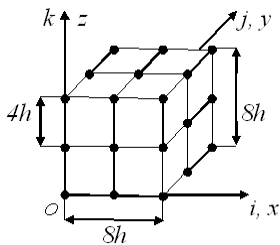


Рис. 3. Крупная сетка  $H_d^{(3)}$

Fig. 3. Large grid  $H_d^{(3)}$

При построении (трехсеточного) 3сКЭ используем конечное число 2сКЭ, их крупные сетки образуют мелкую сетку 3сКЭ, на которой определяем крупную сетку для 3сКЭ. Процедура построения 3сКЭ изложена в работах [9; 19]. Рассмотрим частный случай, когда построение 3сКЭ  $V_d^{(3)}$  проводится на базе одного 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ . Крупную сетку  $H_d^{(2)}$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$  считаем мелкой сеткой 3сКЭ. На сетке  $H_d^{(2)}$  для 3сКЭ  $V_d^{(3)}$  определяем крупную сетку  $H_d^{(3)}$ . На рис. 3 узлы равномерной сетки  $H_d^{(3)}$  с шагом  $4h$  отмечены точками – 27 узлов.

Затем по выше описанной процедуре определяем матрицу жесткости и вектор узловых сил стандартного 3сКЭ  $V_d^{(3)}$ . Построение стандартного 3сКЭ (МнКЭ) на базе одного стандартного 2сКЭ целесообразно применять в случае, когда стандартный 2сКЭ имеет большие геометрические характерные размеры.

## 2. Построение малоразмерных МнКЭ с применением локальных аппроксимаций

Малоразмерные МнКЭ 1-го типа проектируются на базе стандартных с применением локальных аппроксимаций перемещений, которые определяются на подобластях стандартных МнКЭ. Рассмотрим процедуру построения малоразмерных МнКЭ 1-го типа.

Предлагаемая процедура реализуется на базе более мелкой сетки, чем мелкая базовая сетка стандартного МнКЭ. Основные положения рассматриваемой процедуры кратко заключаются в следующем. Согласно МЛА на области  $V_0$  стандартного МнКЭ определяем более мелкую сетку  $H$ , чем базовая сетка  $H_0$ ,  $H_0 \subset H$ . Область  $V_0$  представляем  $n$  тонкостенными гранич-

ными и  $m$  внутренними областями. Граничные (внутренние) области имеют общую границу (не имеют общей границы) с областью  $V_0$  (общие границы областей не вырождаются в точку). На граничных (внутренних) областях определяем  $n(m)$  крупных сеток, которые вложены в мелкую сетку  $H$  и порождают аппроксимации перемещений малого (высокого) порядка. На границе области  $V_0$  число узлов крупных сеток мало. На граничных и внутренних областях, используя их мелкие и крупные сетки, строим  $n$  граничных и  $m$  внутренних 2сКЭ, которые образуют высокоточный  $p$ -сеточный КЭ (рскЭ), где  $p = 1 + n + m$ . Отметим, что при построении рскЭ используются одна мелкая сетка  $H$  и  $n + m$  (в общем случае различных) крупных сеток. Выражая в рскЭ перемещения внутренних узлов крупных сеток (с помощью метода конденсации [6]) через перемещения граничных узлов, получаем высокоточный рскЭ малой размерности, т. е. малоразмерный МНКЭ 1-го типа. Следует отметить, что математические операции метода конденсации являются математическими тождественными преобразованиями, т. е. они не влияют на погрешность решения.

Для простоты изложения, рассмотрим стандартный МНКЭ, мелкая базовая сетка  $H$  которого имеет большую размерность. На мелкой сетке  $H$  определяем крупную сетку на всей области МНКЭ, которая также имеет высокую размерность. Тогда в центральной части области МНКЭ на крупной сетке определяем аппроксимации перемещений высокого порядка, в окрестности границы области – малого порядка, что позволяет с помощью различных локальных аппроксимаций варьировать размерность и порядок точности малоразмерного МНКЭ. Основные положения процедуры построения малоразмерных МНКЭ 1-го типа показаны в примере 1.

**Пример 1.** Рассмотрим модельную задачу определения НДС по ММКЭ для тела  $V_0^1$  с неоднородной (волоконистой) структурой размерами  $16h \times 64h \times 16h$ , которое лежит в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  (рис. 4), где  $h$  – задано. В расчетах тела  $V_0^1$  используем его БМ  $R_0$  и дискретные модели  $R_1$  и  $R_2$ , состоящие соответственно из стандартных и малоразмерных МНКЭ 1-го типа. Тело  $V_0^1$  армировано непрерывными волокнами сечением  $h \times h$ , параллельными оси  $Oy$ , расстояние между волокнами равно  $h$  при  $y = 0: u, v, w = 0$ , т. е. при  $y = 0$  тело жестко закреплено. Для модельной задачи имеем следующие исходные данные:

$$h = 0,5; E_c = 1, E_v = 10, \nu_c = \nu_v = 0,3, \quad (7)$$

где  $E_c, E_v$  ( $\nu_c, \nu_v$ ) – модули Юнга (коэффициенты Пуассона) соответственно связующего материала и волокна; в точках тела  $V_0^1$  с координатами  $x_i, y_j, z$ , где  $z = 16h, x_i = 8h(i-1), i = 1, 2, 3, y_j = 8hj, j = 1, \dots, 8$ , действует нагрузка  $F_z = 0,35$  (рис. 4). Сечение тела  $V_0^1$  в плоскости  $Oxz$  показано на рис. 5, сечения волокон закрашены.

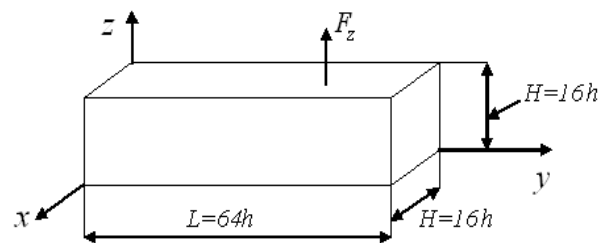


Рис. 4. Размеры КТ  $V_0^1$

Fig. 4. Sizes CB  $V_0^1$

БМ  $R_0$  КТ  $V_0^1$  состоит из односеточных конечных элементов (1сКЭ)  $V_j^h$  1-го порядка формы куба со стороной  $h$  (в которых реализуется трехмерное НДС [16]). БМ  $R_0$  учитывает в рамках микроподхода неоднородную структуру КТ  $V_0^1$  и порождает равномерную (базовую) сетку с шагом  $h$  размерности  $17 \times 65 \times 17$ .

Дискретную модель  $R_1$  КТ  $V_0^1$  образуют четыре одинаковых стандартных 2сКЭ  $V_q^{(2)}$  4-го порядка формы куба, построенных на области  $V_q$  размерами  $16h \times 16h \times 16h$  (рис. 6). На рис. 5, 6



показаны сечение 2сКЭ  $V_q^{(2)}$  и его крупная равномерная сетка с шагом  $4h$ , узлы крупной сетки отмечены точками – 125 узлов. Матрицу жесткости (размерности  $375 \times 375$ ) и вектор узловых сил (размерности 375) 2сКЭ  $V_q^{(2)}$  определяем по процедуре п. 1.

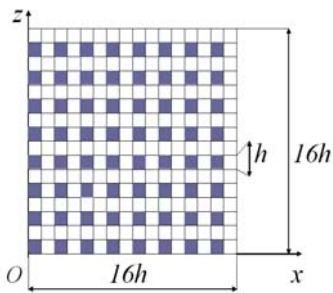


Рис. 5. Сечение КТ  $V_0^1$  (МнКЭ  $V_p^1$ )  
Fig. 5. Section CB  $V_0^1$  (MgFE  $V_p^1$ )

Дискретная модель  $R_2$  КТ  $V_0^1$  состоит из 4-х одинаковых малоразмерных МнКЭ  $V_p^1$  (1-го типа) размерами  $16h \times 16h \times 16h$ , сечения которых показаны на рис. 5. Согласно МЛА, построение МнКЭ  $V_p^1$  1-го типа (рис. 6) на базе стандартного 2сКЭ  $V_q^{(2)}$ , т. е. на области  $V_q$  размерами  $16h \times 16h \times 16h$ , сводится к следующему. В центральной части области  $V_q$  выделяем внутреннюю область  $V_1$  размерами  $12h \times 12h \times 12h$  (рис. 7), которая состоит из восьми одинаковых внутренних 2сКЭ  $V_1^{(2)}$  3-го порядка размерами  $6h \times 6h \times 6h$  (рис. 8).

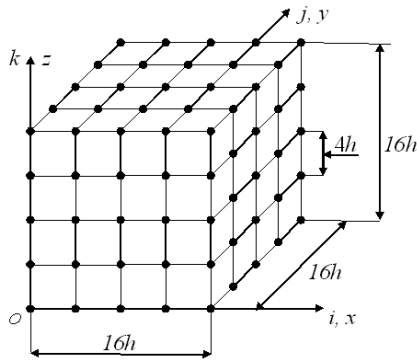


Рис. 6. Область  $V_q$ , 2сКЭ  $V_q^{(2)}$ , МнКЭ  $V_p^1$   
Fig. 6. Region  $V_q$ , 2gFE  $V_q^{(2)}$ , MgFE  $V_p^1$

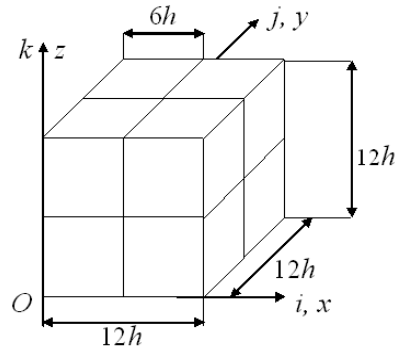


Рис. 7. Внутренняя область  $V_1$   
Fig. 7. Inner region  $V_1$

Крупная и мелкая сетки и сечение 2сКЭ  $V_1^{(2)}$  показаны на рис. 8, 9, сечения волокон (параллельных оси  $Oy$ ) размерами  $h \times h$  закрашены, узлы крупной сетки отмечены точками, 64 узла. Матрицу жесткости (размерности  $192 \times 192$ ) и вектор узловых сил (размерности 192) 2сКЭ  $V_1^{(2)}$  находим по процедуре п. 1. Внутреннюю область  $V_1$  окружают восемь одинаковых по форме и характерным размерам  $8h \times 8h \times 8h$  граничных тонкостенных областей  $V_2$  сложной формы, толщиной  $2h$  (рис. 10). На области  $V_2$  строим граничный 2сКЭ  $V_2^{(2)}$ , используя крупную (равномерную) сетку  $H_2^{(2)}$  размерами  $8h \times 8h \times 8h$  с шагом  $4h$ , т. е. малой размерности  $3 \times 3 \times 3$  (рис. 11), узлы крупной сетки  $H_2^{(2)}$  отмечены точками – 27 узлов. На рис. 10 представлена мелкая равномерная сетка 2сКЭ  $V_2^{(2)}$  с шагом  $h$ . Отметим, что 8 узлов крупной сетки  $H_2^{(2)}$  лежат вне области  $V_2$ , но совпадают с узлами крупной сетки 2сКЭ  $V_1^{(2)}$ .

При построении 2сКЭ  $V_2^{(2)}$  во всех узлах его мелкой сетки искомые перемещения  $u, v, w$  выражаем через узловые перемещения крупной сетки  $H_2^{(2)}$ , кроме тех узлов мелкой сетки, которые совпадают с узлами сетки  $H_2^{(2)}$  (27 узлов) и с граничными узлами крупной сетки 2сКЭ

$V_1^{(2)}$  (37 узлов), которые обеспечивают стыковку 2сКЭ  $V_1^{(2)}$  и  $V_2^{(2)}$ . На рис. 10 эти стыковочные узлы 2сКЭ  $V_1^{(2)}$  отмечены точками (см. замечание 3 п. 1). Итак, 2сКЭ  $V_2^{(2)}$  имеет 64 узла, в которых определяются перемещения, т. е. 2сКЭ  $V_2^{(2)}$  имеет матрицу жесткости размерности  $192 \times 192$  и вектор узловых сил размерности 192. В области  $V_q$  восемь одинаковых внутренних 2сКЭ  $V_1^{(2)}$  и восемь граничных 2сКЭ типа  $V_2^{(2)}$  образуют высокоточный МНКЭ  $R_p^1$ .

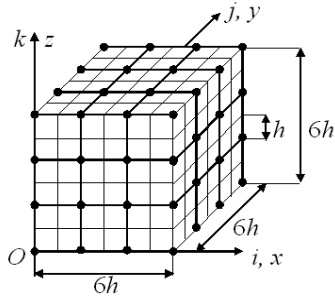


Рис. 8. Сетки внутреннего 2сКЭ  $V_1^{(2)}$

Fig. 8. Grids of the inner 2gFE  $V_1^{(2)}$

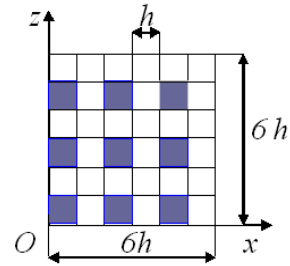


Рис. 9. Сечение 2сКЭ  $V_1^{(2)}$

Fig. 9. Section 2gFE  $V_1^{(2)}$

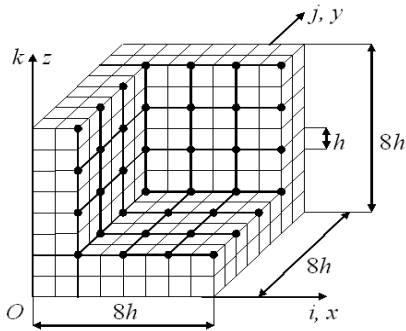


Рис. 10. Граничная область  $V_2$  (2сКЭ  $V_2^{(2)}$ )

Fig. 10. Boundary region  $V_2$  (2gFE  $V_2^{(2)}$ )

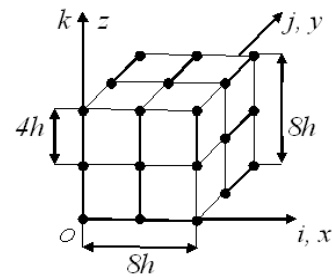


Рис. 11. Сетка  $H_2^{(2)}$  2сКЭ  $V_2^{(2)}$

Fig. 11. Grid  $H_2^{(2)}$  of the 2gFE  $V_2^{(2)}$

Выражая в МНКЭ  $R_p^1$  перемещения внутренних узлов (с помощью метода конденсации [6]) через перемещения граничных узлов МНКЭ  $R_p^1$ , получаем малоразмерный МНКЭ  $V_p^1$  1-го типа. Отметим, что МНКЭ  $V_p^1$  1-го типа имеет такую же размерность, как стандартный МНКЭ  $V_q^{(2)}$  (рис. 6), в котором с помощью метода конденсации исключены перемещения внутренних узлов.

Результаты расчетов КТ  $V_0^1$  по ММКЭ с применением дискретных моделей  $R_0$ ,  $R_1$  и  $R_2$  даны в таблице, где  $\sigma_n$  – максимальное эквивалентное напряжение модели  $R_n$  (напряжение  $\sigma_n$  определяется по 4-й теории прочности [33]),  $N_n^o$  и  $b_n^o$  – размерность и ширина ленты системы уравнений ММКЭ модели  $R_n$ ,  $n = 0, 1, 2$ . Считаем, что БМ  $R_0$  КТ  $V_0^1$  порождает точное решение, т. е. напряжение  $\sigma_0$  отвечает точному решению. Тогда относительная погрешность  $\delta_n(\%)$  для напряжения  $\sigma_n$ , отвечающего модели  $R_n$ , где  $n = 1, 2$ , определяется по формуле

$$\delta_n(\%) = 100\% \times |\sigma_0 - \sigma_n| / \sigma_0. \quad (8)$$

Анализ результатов таблицы показывает, что погрешность напряжения  $\sigma_2$ , которое отвечает модели  $R_2$ , состоящей из малоразмерных МКЭ  $V_p^1$  1-го типа, в  $k_1 = \delta_1(\%) / \delta_2(\%) = 25,122$  раз меньше погрешности напряжения  $\sigma_1$ , отвечающего модели  $R_1$ , состоящей из стандартных 2сКЭ  $V_q^{(2)}$ . Для приближенных решений используются скорректированные условия прочности, которые учитывают погрешность напряжений и представлены в следующей теореме.

Результаты расчетов моделей  $R_0, R_1, R_2$ 

$n$	$R_n$	$\sigma_n$	$\delta_n(\%)$	$N_n^o$	$b_n^o$
0	$R_0$	4,999	–	55488	924
1	$R_1$	4,374	12,511	1200	375
2	$R_2$	5,0246	0,498	1200	375

**Теорема.** Пусть для коэффициента запаса  $n_0$  упругого тела  $V_0$  заданы условия прочности

$$n_1 \leq n_0 \leq n_2, \quad (9)$$

где  $n_1, n_2$  – заданы,  $n_1 > 1$ ,  $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$ ,  $\sigma_T$  – предельное напряжение тела  $V_0$ ,  $\sigma_0$  – максимальное эквивалентное напряжение тела  $V_0$ , которое отвечает точному решению задачи теории упругости, построенному для тела  $V_0$ .

Пусть коэффициент запаса  $n_b$  тела  $V_0$ , отвечающий приближенному решению задачи теории упругости, удовлетворяет скорректированным условиям прочности вида

$$\frac{n_1}{1 - \delta_\alpha} \leq n_b \leq \frac{n_2}{1 + \delta_\alpha}. \quad (10)$$

Тогда коэффициент запаса  $n_0$  тела  $V_0$ , отвечающий точному решению задачи теории упругости, удовлетворяет заданным условиям прочности (9), где  $n_b = \sigma_T / \sigma_b$ ,  $\sigma_b$  – максимальное эквивалентное напряжение тела  $V_0$ , отвечающее приближенному решению задачи теории упругости, построенному для тела  $V_0$ , и найденное с такой погрешностью  $\delta_b$ , что

$$|\delta_b| \leq \delta_\alpha < C_\alpha = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} < 1, \quad (11)$$

где  $\delta_\alpha$  – верхняя оценка относительной погрешности  $\delta_b$ ,  $\delta_\alpha$  – задано, погрешность  $\delta_b$  для напряжения  $\sigma_b$  определяется по формуле  $\delta_b = (\sigma_0 - \sigma_b) / \sigma_0$ ,  $0 < \delta_\alpha < 1$ .

Теорема доказана в работе [34].

Следует отметить, что с увеличением погрешности  $\delta_b$ , т. е. с увеличением оценки  $\delta_\alpha$ , диапазон для коэффициента запаса  $n_b$  в скорректированных условиях прочности (10) уменьшается, становится меньше диапазона заданных условий прочности (9). Например, согласно (11), при  $\delta_\alpha = C_\alpha$  диапазон для скорректированных условий прочности вырождается в точку, что трудно выполнить на практике. Поэтому для практики важно применять приближенные решения с малой погрешностью. Напряжение  $\sigma_2$ , отвечающее модели  $R_2$ , отличается от напряжения  $\sigma_0$  базовой модели  $R_0$  (которое считаем точным) на 0,498 % (см. таблицу). Для малых значений погрешности максимальных эквивалентных напряжений, меньше одного процента, оценку  $\delta_\alpha$  можно принять  $\delta_\alpha(\%) = 1\%$ , т. е.  $\delta_\alpha = 0,01$ . При  $\delta_\alpha = 0,01$  диапазон  $\Delta_1$  скорректированных условий прочности (10) мало отличается от диапазона  $\Delta_2$  заданных условий прочности (9), т. е.

$$\Delta_1 \approx \Delta_2, \text{ где } \Delta_1 = n_2 / (1 + \delta_\alpha) - n_1 / (1 - \delta_\alpha), \Delta_2 = n_2 - n_1.$$

Дискретная модель  $R_2$  (и модель  $R_1$ ) требует в  $k_2 = (N_0 \times b_0) / (N_1^o \times b_1^o) = 113,94$  раз меньше объема памяти ЭВМ, т. е. почти в 114 раз меньше, чем БМ  $R_0$  КТ  $V_0^1$  (см. таблицу). Анализ результатов расчетов показывает, что предлагаемые малоразмерные МнКЭ  $V_p^1$  (1-го типа) более эффективны, чем стандартные 2сКЭ  $V_q^{(2)}$ , которые имеют такие же форму, характерные размеры, размерность и такую же неоднородную структуру, как малоразмерные.

Важно отметить следующее. Согласно замечанию 2 (см. п. 1), при построении МнКЭ можно использовать сколь угодно мелкую базовую сетку. Тогда крупные сетки малоразмерного МнКЭ (1-го типа) могут иметь сколь угодно высокую размерность и, следовательно, порождать на внутренних областях МнКЭ локальные аппроксимации перемещений сколь угодно высокого порядка и число внутренних областей в МнКЭ возрастает. При этом порядок локальных аппроксимаций перемещений на граничных областях и их число не меняется. Это приводит к увеличению порядка точности малоразмерных МнКЭ при постоянстве их размерности. Однако порядок точности малоразмерных МнКЭ не может быть сколь угодно большим, так как реализация метода конденсации, связанная с матрицами высокого порядка, в этом случае требует большого объема памяти ЭВМ, который ограничен.

### 3. Построение малоразмерных МнКЭ с применением образующих КЭ

Основные положения процедуры построения малоразмерных МнКЭ 2-го типа с применением образующих КЭ показаны в следующем примере.

**Пример 2.** Основные положения построения малоразмерных МнКЭ 2-го типа с применением образующих КЭ покажем на примере высокоточного лагранжевого 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  размерами  $9h \times 10h \times 9h$  (рис. 12), где  $h$  – задано, который расположен в декартовой системе координат  $Oxyz$ . Рассматриваемый 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  армирован непрерывными волокнами сечением  $h \times h$ , которые параллельны оси  $Oy$ . На рис. 13 показано сечение 2сКЭ  $V_3^{(2)}$ , сечения волокон закрашены, расстояние между волокнами равно  $h$ . Считаем, что между компонентами неоднородной структуры 2сКЭ связи идеальны, а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающие трехмерной задаче линейной теории упругости [16], т. е. в области 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  реализуется трехмерное НДС.

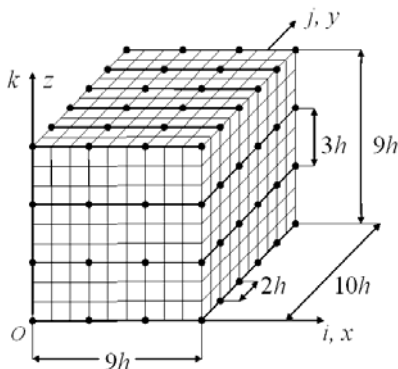


Рис. 12. Сетки 2сКЭ  $V_3^{(2)}$   
Fig. 12. Grids of the 2gFE  $V_3^{(2)}$

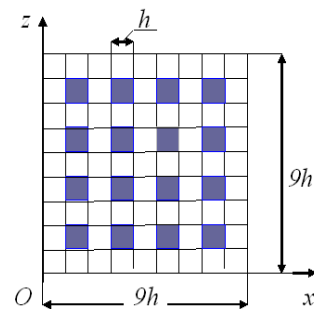


Рис. 13. Сечение 2сКЭ  $V_3^{(2)}$   
Fig. 13. Section of the 2gFE  $V_3^{(2)}$

Область 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  представляем БМ  $R_d^3$ , состоящей из однородных 1сКЭ  $V_j^h$  первого порядка формы куба со стороной  $h$  [6; 7], в которых реализуется трехмерное НДС [16]. На рис. 12

показано базовое разбиение  $R_d^3$  2сКЭ  $V_3^{(2)}$ , которое учитывает неоднородную структуру 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  и порождает мелкую (базовую) узловую равномерную сетку  $h_d^3$  размерности  $10 \times 11 \times 10$  с шагом  $h$ . На мелкой сетке  $h_d^3$  определяем крупную равномерную сетку  $H_d^3$  размерности  $4 \times 6 \times 4$  с шагом  $3h$  по осям  $Ox$ ,  $Oz$  и с шагом  $2h$  по оси  $Oy$ . На рис. 12 узлы крупной сетки  $H_d^3$  отмечены точками – 96 узлов. В данном случае с помощью полиномов Лагранжа [6] на крупной сетке  $H_d^3$  аппроксимирующие функции  $u_2, v_2, w_2$  для перемещений  $u, v, w$  2сКЭ  $V_3^{(2)}$  представим в форме

$$u_2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^4 N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^4 N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^4 N_{ijk} w_{ijk}, \quad (12)$$

где  $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$  – искомые значения функций  $u_2, v_2, w_2$  в узле  $i, j, k$  крупной сетки  $H_d^3$ ;  $i, j, k$  – координаты целочисленной системы координат  $ijk$ , которая введена для узлов крупной сетки  $H_d^3$  (рис. 12);  $N_{ijk}$  – базисная функция узла  $i, j, k$  сетки  $H_d^3$ ,  $i, k = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 6$ , где

$$N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z), \quad (13)$$

где  $L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^4 \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}$ ,  $L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^6 \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}$ ,  $L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^4 \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}$ ;  $x_i, y_j, z_k$  – координаты

узла  $i, j, k$  крупной сетки  $H_d^3$  в системе координат  $Oxyz$ .

Введем обозначения:  $N_\beta = N_{ijk}$ ,  $u_\beta = u_{ijk}$ ,  $v_\beta = v_{ijk}$ ,  $w_\beta = w_{ijk}$ , где  $i, k = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 6$ , т. е. имеем  $\beta = 1, \dots, 96$ . Тогда выражения (12) принимают вид

$$u_2 = \sum_{\beta=1}^{96} N_\beta u_\beta, \quad v_2 = \sum_{\beta=1}^{96} N_\beta v_\beta, \quad w_2 = \sum_{\beta=1}^{96} N_\beta w_\beta. \quad (14)$$

Используя (12)–(14), по процедуре п. 1 для 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  определяем матрицу жесткости (размерности  $288 \times 288$ ) и вектор узловых сил (размерности 288), т. е. размерность 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  равна 288. Для понижения размерности 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  применяем метод конденсации [6]. Выражаем перемещения внутренних узлов крупной сетки  $H_d^3$  через перемещения узлов сетки  $h_d^3$ , которые лежат на границе 2сКЭ  $V_3^{(2)}$ . В результате получаем 2сКЭ  $V_3^{(2)}$ , который имеет 240 узловых неизвестных. Итак, размерность 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  равна 240. Отметим, что 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  является высокоточным, так как он имеет 3-й порядок аппроксимации перемещений по осям  $Ox, Oz$  и 5-й порядок – по оси  $Oy$ .

Кратко рассмотрим процедуру построения малоразмерного 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  2-го типа на основе высокоточного стандартного лагранжевого 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  (рис. 12), т. е. высокого порядка точности, с применением образующего КЭ  $V_L$  размерами  $9h \times 9h$ . На рис. 14 показаны мелкая сетка, отвечающая 2сКЭ  $V_3^{(2)}$ , и сетка КЭ  $V_L$ , узлы которой отмечены точками – 12 узлов.

Согласно методу образующих КЭ [21], область 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  получается путем параллельного перемещения образующего КЭ  $V_L$  квадратной формы вдоль оси  $Oy$  на заданное расстояние  $d = 10h$  (рис. 15). Сетка образующего КЭ  $V_L$  образует крупную сетку  $H_d^4$  2сКЭ  $V_4^{(2)}$ . Отметим, что неоднородные структуры 2сКЭ  $V_3^{(2)}$  и  $V_4^{(2)}$  одинаковы. Поэтому БМ  $R_d^4$  2сКЭ  $V_4^{(2)}$ , как и

БМ 2сКЭ  $V_3^{(2)}$ , состоит из однородных 1сКЭ  $V_j^h$  1-го порядка формы куба со стороной  $h$ , где  $j=1, \dots, M$ , где  $M$  – общее число 1сКЭ  $V_j^h$ ,  $M=810$ . БМ  $R_d^4$  учитывает неоднородную структуру и сложную форму 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  и порождает мелкую сетку  $h_d^4$ .

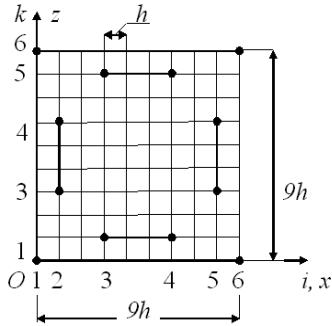


Рис. 14. Сетки образующего КЭ  $V_L$   
 Fig. 14. Grids of the generating FE  $V_L$

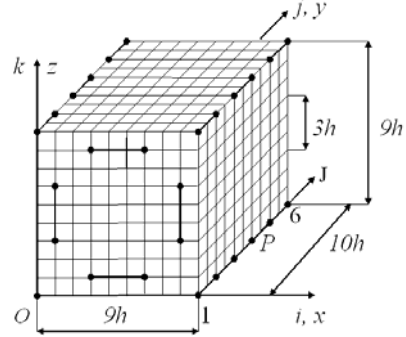


Рис. 15. Сетки 2сКЭ  $V_4^{(2)}$   
 Fig. 15. Grids of the 2gFE  $V_4^{(2)}$

Согласно методу образующих КЭ, общее число узлов  $N_d$  крупной сетки  $H_d^4$  2сКЭ  $V_4^{(2)}$ , которая вложена в мелкую сетку  $h_d^4$ , определяется по формуле  $N_d = n_{xz}n_y$ , где  $n_{xz}$  – число узлов образующего КЭ  $V_L$ , для которого  $n_{xz} = 12$ ,  $n_y$  – число узлов крупной сетки  $H_d^4$ , лежащих на оси  $Oy$  (на оси  $j$ ), 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  имеет 6 узлов на оси  $Oy$ , т. е.  $n_y = 6$ , тогда  $N_d = 12 \times 6 = 72$ . Узлы крупной сетки  $H_d^4$  равномерно расположены по оси  $Oy$  с шагом  $2h$ . На рис. 15 узлы сетки  $H_d^4$  отмечены точками – 72 узла. Для 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  введены две локальные системы координат: декартова  $Oxyz$  и для узлов крупной сетки  $H_d^4$  – целочисленная  $ijk$ , где  $i, j, k = 1, \dots, 6$  (рис. 14, 15). В области 1сКЭ  $V_j^h$  НДС описывается уравнениями трехмерной задачи линейной теории упругости [16]. Следовательно, в области 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  реализуется трехмерное НДС.

Поскольку сетка образующего КЭ  $V_L$  имеет 12 узлов (построенная на мелкой сетке 2сКЭ  $V_3^{(2)}$ , т. е. на мелкой сетке образующего КЭ  $V_L$ ), которые на рис. 14 отмечены точками, то для описания перемещений в образующем КЭ  $V_L$  используем полином  $P(x, z)$  3-го порядка, который в локальной декартовой системе координат  $Oxz$  (рис. 14) имеет вид [6]:

$$P(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2 + a_9xz^3 + a_{10}x^3z + a_{11}x^3 + a_{12}z^3, \tag{15}$$

где  $a_i$  – постоянные,  $i = 1, \dots, 12$ .

Базисную функцию  $N_{ijk}$  для узла  $i, j, k$  крупной сетки  $H_d^4$  согласно методу образующих КЭ [20; 21] определяем в виде

$$N_{ijk}(x, y, z) = N_{ik}(x, z)L_j(y), \tag{16}$$

где  $N_{ik}$  – базисная функция узла  $i, k$  образующего КЭ  $V_L$ , отвечающая полиному  $P(x, z)$  вида (15),  $i, k = 1, \dots, 6$ ,  $L_j(y)$  – полином Лагранжа 5-го порядка:

$$L_j(y) = \prod_{p=1, p \neq j}^6 \frac{y - y_p}{y_j - y_p}, \tag{17}$$

где  $y_p$  – координата  $p$ -го узла сетки  $H_d^4$ , лежащего на оси  $J$ ,  $j // J$ ;  $p, j = 1, \dots, 6$ ,  $J = \overline{1, 6}$  (рис. 15).

Используя (15) – (17), на крупной сетке  $H_d^4$  аппроксимирующие функции  $u_2, v_2, w_2$  для перемещений  $u, v, w$  2сКЭ  $V_4^{(2)}$  формально представим

$$u_2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 N_{ijk} w_{ijk}, \quad (18)$$

где  $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$  – искомые значения функций  $u_2, v_2, w_2$  в узле  $i, j, k$  крупной сетки  $H_d^4$ ;  $i, j, k$  – координаты целочисленной системы координат  $ijk$ , которая введена для узлов крупной сетки  $H_d^4$  (рис. 15);  $N_{ijk}$  – базисная функция узла  $i, j, k$  сетки  $H_d^4$ ,  $i, k, j = 1, \dots, 6$ .

Обозначим  $N_\beta = N_{ijk}$ ,  $u_\beta = u_{ijk}$ ,  $v_\beta = v_{ijk}$ ,  $w_\beta = w_{ijk}$ , где  $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$  – искомые перемещения в узле  $i, j, k$  сетки  $H_d^4$ ;  $i, k = 1, 6$ ;  $i = 3, 4$ ,  $k = 2, 5$ ;  $i = 2, 5$ ,  $k = 3, 4$ ;  $j = 1, \dots, 6$ , рис. 14, 15, т. е.  $\beta = 1, \dots, 72$ . Тогда функции перемещений (18) для сетки  $H_d^4$  принимают вид

$$u_2 = \sum_{\beta=1}^{72} N_\beta u_\beta, \quad v_2 = \sum_{\beta=1}^{72} N_\beta v_\beta, \quad w_2 = \sum_{\beta=1}^{72} N_\beta w_\beta, \quad (19)$$

где  $N_\beta, u_\beta, v_\beta, w_\beta$  – базисная функция и перемещения  $\beta$ -го узла сетки  $H_d^4$ ,  $\beta = \overline{1, 72}$ .

Используя (15)–(19), по процедуре п. 1 для 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  определяем матрицу жесткости (размерности  $216 \times 216$ ) и вектор узловых сил (размерности 216). Для понижения размерности 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  применяем метод конденсации [6], т. е. выражаем перемещения внутренних узлов крупной сетки  $H_d^4$  через перемещения узлов сетки  $H_d^4$ , которые лежат на границе 2сКЭ  $V_4^{(2)}$ . В результате получаем 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  (2-го типа), имеющий 120 узловых неизвестных. Итак, размерность 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  равна 120. В силу (15)–(17) 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  имеет 3-й порядок аппроксимации перемещений по осям  $Ox, Oz$  и 5-й порядок – по оси  $Oy$ , т. е. является высокоточным. Отметим, что 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  имеет такой же порядок аппроксимаций перемещений по осям  $Ox, Oy, Oz$ , такие же размеры  $9h \times 10h \times 9h$  и неоднородную структуру, как стандартный 2сКЭ  $V_3^{(2)}$ , но размерность 2сКЭ  $V_4^{(2)}$ , равная 120, в 2 раза меньше размерности 2сКЭ  $V_3^{(2)}$ , размерность которого равна 240. Итак, малоразмерные 2сКЭ  $V_4^{(2)}$  2-го типа порождают дискретные модели КТ меньшей размерности, чем стандартные 2сКЭ  $V_3^{(2)}$ . Следует отметить следующее. Если крупная и мелкая сетки стандартного высокоточного лагранжевого МнКЭ имеют большую размерность, то при построении аппроксимирующих функций перемещений для образующего КЭ целесообразно использовать локальные аппроксимации перемещений, построенные на его мелкой сетке. Особенности малоразмерных МнКЭ 1-го и 2-го типов состоят в следующем. Малоразмерные МнКЭ 1-го типа имеют более высокий порядок точности, чем стандартные, что позволяет проектировать дискретные модели КТ малой размерности, которые порождают напряжения с малой погрешностью. Малоразмерные МнКЭ 2-го типа имеют такой же порядок точности, как стандартные высокоточные МнКЭ, но образуют дискретные модели меньшей размерности, чем стандартные.

### Заключение

В данной работе предлагается метод локальных аппроксимаций (МЛА) для построения высокоточных МнКЭ малой размерности, кратко – малоразмерных МнКЭ, которые проектируются на

базе известных (стандартных) МНКЭ. Рассмотрены малоразмерные МНКЭ двух типов. Построение малоразмерные МНКЭ 1-го типа проводится с применением локальных аппроксимаций перемещений, определяемых на подобластях МНКЭ, 2-го типа – с применением образующих конечных элементов. Расчеты композитных тел (КТ) показывают, что малоразмерные МНКЭ 1-го типа порождают максимальные эквивалентные напряжения, погрешности которых в 25–50 раз меньше погрешностей аналогичных напряжений, полученных с помощью стандартных МНКЭ, которые имеют такие же размерности, формы, размеры и неоднородные структуры, как малоразмерные. Малоразмерные МНКЭ 1-го типа для крупных дискретных моделей КТ порождают максимальные эквивалентные напряжения с малой погрешностью. Малоразмерные МНКЭ 2-го типа образуют дискретные модели КТ меньшей размерности, чем стандартные.

### Библиографические ссылки

1. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. 715 p.
2. Голованов А. И., Тюленева О. И., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М. : Физматлит, 2006. 392 с.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М. : Стройиздат, 1982. 448 с.
4. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М. : Высшая школа, 1985. 392 с.
5. Секулович М. Метод конечных элементов. М. : Стройиздат, 1993. 664 с.
6. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов: М. : Мир, 1981. 304 с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975. 542 с.
8. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М. : Мир, 1982. 232 с.
9. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия: Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, кн. 4. С. 530–543.
10. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. Vol. 158, No. 1. Art. 012067. P. 1–9.
11. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2018. № 2. С. 90–103.
12. Работнов Ю. Н. Механика деформированного твердого тела. М. : Наука, 1988. 711 с.
13. Демидов С. П. Теория упругости. М. : Высшая школа, 1979. 432 с.
14. Тимошенко С. П., Дж. Гудьер. Теория упругости. М. : Наука, 1979. 560 с.
15. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М. : Высшая школа, 1968. 512 с.
16. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высш. школа, 1982. 264 с.
17. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 224 с.
18. Матвеев А. Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // Прикладная механика и техническая физика. 2004. № 3. С. 161–171.
19. Матвеев А. Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Известия АлтГУ. Сер.: Математика и механика. 2014. № 1/1. С. 80–83. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.
20. Матвеев А. Д. Метод образующих конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2018. № 6. С. 141–154.



21. Матвеев А. Д. Построение многосеточных конечных элементов для расчета оболочек, пластин и балок на основе образующих конечных элементов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 3. С. 48–57. DOI: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.
22. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М. : Физматлит, 2008. 432 с.
23. Немировский Ю. В., Резников Б. С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1984. 164 с.
24. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. М. : Наука, 1985. 201 с.
25. Алфутов Н. А., Зиновьев А. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.
26. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М. : МГУ, 1984. 336 с.
27. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск : Наука, 2001. 288 с.
28. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Киев : Наукова думка, 1985. 302 с.
29. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988. 269 с.
30. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Т. 3. Прикладные исследования / А.Н. Гузь, И.В. Игнатов, А.Г. Гирченко и др. Киев : Наукова думка, 1983. 262 с.
31. Матвеев А. Д. Определение фиктивных модулей упругости композитов сложной структуры с отверстиями // Вестник КрасГАУ. 2006. № 12. С. 212–222.
32. Матвеев А. Д. Определение фиктивных модулей упругости для трехмерных композитов на основе жесткостных соотношений однородных конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2008. № 5. С. 34–47.
33. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев, Наук. думка, 1975.
34. Матвеев А. Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности // Известия АлтГУ. Математика и механика. 2017. № 4. С. 116–119. DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-21.

## References

1. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013, 715 p.
2. Golovanov A. I., Tiuleneva O. I., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksii* [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 392 p.
3. Bate K., Vilson E. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov* [Numerical analysis methods and finite element method]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1982, 448 p.
4. Obratsov I. F., Savel'ev L. M., Khazanov Kh. S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov* [Finite element method in problems of aircraft structural mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1985, 392 p.
5. Sekulovich M. *Metod konechnykh elementov* [Finite element method]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1993, 664 p.
6. Norri D., de Friz Zh. *Vvedenie v metod konechnykh elementov* [Introduction to the finite element method]. Moscow, Mir Publ., 1981, 304 p.
7. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 544 p.
8. Fudzii T., Dzako M. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1982, 232 p.

9. Matveev A. D. [The method of multigrid finite elements in the calculations of three-dimensional homogeneous and composite bodies]. Uchen. zap. Kazan. un-ta. Seriya: Fiz.-matem. Nauki. 2016, Vol. 158, No. 4, P. 530–543 (In Russ.).
10. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. IOP Conf, Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016, Vol. 158, No. 1, Art. 012067, P. 1–9.
11. Matveev A. D. [Multigrid finite element Method]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 2, P. 90–103 (In Russ.).
12. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformirovannogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformed solid]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 711 p.
13. Demidov S. P. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979, 432 p.
14. Timoshenko S. P., Dzh. Gud'er. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 560 p.
15. Bezuhov N. I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti* [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1968, 512 p.
16. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1982, 264 p.
17. Rozin L. A. *Variacionnye postanovki zadach dlya uprugih sistem* [Variational problem statements for elastic systems]. Leningrad, 1978, 224 p.
18. Matveev A. D. [Multigrid modeling of composites of irregular structure with a small filling ratio]. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2004, No. 3, P. 161–171 (In Russ.).
19. Matveev A. D. Postroenie slozhnyh mnogosetochnyh konechnykh elementov s neodnorodnoj i mikroneodnorodnoj strukturoy [The construction of complex multigrid finite element heterogeneous and micro-inhomogeneities in structure]. *Izvestiya AltGU. Seriya: Matematika i mekhanika*. 2014, No. 1/1, P. 80–83 (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.
20. Matveev A. D. [Method of generating finite elements]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2018, No. 6, P. 141–154 (In Russ.).
21. Matveev A. D. [Construction of multigrid finite elements to calculate shells, plates and beams based on generating finite elements]. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019, No. 3, P. 48–57 (In Russ.). DOI: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.
22. Golushko S. K., Nemirovskij Yu. V. Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugih kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniya [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of rotation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 432 p.
23. Nemirovskij Yu. V., Reznikov B. S. Prochnost' elementov konstrukcij iz kompozitnykh materialov [Strength of structural elements made of composite materials]. Novosibirsk, Nauka Publ., Sibirskoe otdelenie, 1984, 164 p.
24. Kravchuk A. S., Majboroda V. P., Urzhumcev Yu. S. *Mekhanika polimernykh i kompozicionnykh materialov* [Mechanics of polymer and composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 201 p.
25. Alfutov N. A., Zinov'ev A. A., Popov B. G. Raschet mnogoslojnykh plastin i obolochek iz kompozicionnykh materialov [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 264 p.
26. Pobedrya B. E. *Mekhanika kompozicionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MGU Publ., 1984, 336 p.
27. Andreev A. N., Nemirovskij Yu. V. *Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustojchivost', kolebaniya* [Multilayer anisotropic shells and plates. Bending, stability, vibration]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2001, 288 p.
28. Vanin G. A. *Mikromekhanika kompozicionnykh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985, 302 p.
29. Vasil'ev V. V. *Mekhanika konstrukcij iz kompozicionnykh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 269 p.

30. Guz' A. N., Ignatov I. V., Girchenko A. G. et al. *Mekhanika kompozitnyh materialov i elementov konstrukciy*[Mechanics of composite materials and structural elements]. Vol. 3. Prikladnye issledovaniya. Kiev, Naukova dumka Publ., 1983, 262 p.

31. Matveev A. D. [Determination of fictitious elastic modulus of composites of complex structure with holes]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2006, No. 12, P. 212–222 (In Russ.).

32. Matveev A. D. [Determination of fictitious elastic modulus for three-dimensional composites based on the stiffness ratios of homogeneous finite elements]. *The Bulletin of KrasGAU*. 2008, No. 5, P. 34–47(In Russ.).

33. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Hand book of resistance materials']. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1975, 704 p.

34. Matveev A. D. [Calculation of elastic structures using the adjusted terms of strength]. *Izvestiya AltGU*. 2017, No. 4, P. 116–119. DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-21.

© Матвеев А. Д., 2022

---

**Матвеев Александр Данилович** – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник; Институт вычислительного моделирования СО РАН. E-mail: mtv241@mail.ru.

**Matveev Alexander Danilovich** – Cand. Sc., associate Professor, senior researcher; Institute of computational modeling SB RAS. E-mail: mtv241@mail.ru.

---

УДК 631.365.22

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-391-408

**Для цитирования:** Мусонов В. М., Романов А. П. Поиск широкополосных сигналов наземной радионавигационной системы // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 391–408. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-391-408.

**For citation:** Musonov V. M., Romanov A. P. [Search for broadband signals ground-based radio navigation system]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 391–408. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-391-408.

## Поиск широкополосных сигналов наземной радионавигационной системы

В. М. Мусонов<sup>1\*</sup>, А. П. Романов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет  
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, Свободный, 79

\*E-mail: musonov\_vm@mail.ru

*В представленной работе рассмотрен метод временного поиска широкополосных сигналов при частотной манипуляции с минимальным сдвигом (ЧММС) радионавигационных систем (РНС) наземного базирования. Метод основан на многоальтернативном оптимальном обнаружении сигнала (сигнал может принадлежать к одному из ортогональных сигналов) с использованием оценочно-корреляционного принципа обработки (ОКПО) сигнала в условиях априорной неопределённости.*

*Решена задача представления широкополосного сигнала с ЧММС как сигнала с двойной частотно-фазовой манипуляцией (ЧФМ). Определён закон фазовой манипуляции в форме двоичной последовательности элементов  $b_l$  кода длины  $L\tau_s$  (в РНС «Спрут»  $L=16383$ ,  $\tau_s=2,5$  мкс – длительность элемента сигнала) через закон частотной манипуляции в форме двоичной последовательности элементов  $d_l$  известного кода длины  $L$ . Представление сигнала в форме с ЧФМ позволяет при корреляционной обработке применить замену корреляционного интеграла на интервале  $[0, L\tau_s]$  на сумму  $L$  корреляционных интегралов на интервалах  $[0, \tau_s]$  или на сумму  $L$  поэлементных корреляций.*

*Вычисление поэлементных корреляций позволяет использовать матричный аппарат при ОКПО анализируемого сигнала. При технической реализации процедуры «поиска» отпадает необходимость в формировании  $2L$  пар опорных квадратурных сигналов при длине  $L$  модулирующего кода, а вместо этого производится запоминание пары поэлементных корреляций и за время  $\tau_s$ , согласно элементу  $d_{lk}$  кода, циклически сдвинутого на  $k-1$  элементов, частотной манипуляции и элемента  $b_{kl}$  кода, циклически сдвинутого на  $k-1$  элементов, фазовой манипуляции, производится поблочное накопление  $L$  квадратурных корреляций.*

*Использование верхней левой и нижней правой треугольных матриц с бинарными элементами  $b_{kl}$  позволяет проводить поиск широкополосных сигналов с ЧММС при дополнительной фазовой манипуляции дискретным информационным сообщением.*

*Приведена структура оптимального алгоритма параллельного поиска при ОКПО широкополосного с ЧММС сигнала с применением матричного аппарата, позволяющего реализовать оптимальный алгоритм «поиска» за время длительности сигнала  $L\tau_s$  в режиме реального времени.*

*Ключевые слова: сигналы с частотно-фазовой манипуляцией, квадратурные корреляции, поэлементные корреляции, бинарная матрица, верхняя (нижняя) треугольная матрица.*

## Search for broadband signals ground-based radio navigation system

V. M. Musonov<sup>1\*</sup>, A. P. Romanov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

<sup>2</sup>Siberian Federal University  
79, Svobodniy Prospekt, Krasnoyarsk, Russian Federation, 660041  
E-mail: musonov\_vm@mail.ru

*In the present paper, a method of temporary search for broadband of frequency manipulation with minimal shift keying (MSK) signals of ground-based radio navigation systems (RNS) is considered. The method is based on a multi-alternative optimal signal detection (the signal may belong to one of the orthogonal signals) using the evaluation-correlation principle of processing (ECP) under conditions of a priori uncertainty.*

*The problem of representing broadband MSK signal as a signal with double discrete frequency-phase modulation (FPM) was solved. The law of phase manipulation in the form of a binary sequence of elements  $b_l$  of a length code  $L$ , (in the "Sprut" RNS,  $L=16383$ ,  $\tau_s=2.5$  mcs – is the duration of the signal element) is defined through the law of frequency manipulation in the form of a binary sequence of elements  $d_l$  of a known length  $L$  code. The representation of the signal in the form FPM allows, during correlation processing, to replace the correlation integral on the interval  $[0, L\tau_s]$  by  $L$  the sum of correlation integrals on the intervals  $[0, \tau_s]$  or by  $L$  the sum of element-by-element correlations.*

*The calculation of element-by-element correlations allows the use of a matrix apparatus for the ECP of the analyzed signal. With the technical implementation of the "search" procedure, there is no need to form  $2L$  pairs of reference quadrature signals with the length  $L$  of the modulating code, and instead of that a pair of element-by-element correlations is memorized and over time  $\tau_s$ , according to a code element  $d_{lk}$ , cyclically shifted by  $k-1$  elements, frequency manipulation and a code element  $b_{kl}$ , cyclically shifted by  $k-1$  elements, phase manipulation, block-by-block accumulation  $L$  of quadrature correlations is performed.*

*The use of upper-left and lower-right triangular matrices with binary elements  $b_{kl}$  makes it possible to search for broadband MSK signal with additional phase manipulation of a discrete information message.*

*The structure of the optimal algorithm of parallel search for ECP of the broadband MSK signal with the use of a matrix apparatus, which allows to implement the optimal algorithm "of search" during the duration  $L\tau_s$  of the signal in real time.*

*Keywords: signals with frequency-phase manipulation, quadrature correlations, element-by-element correlations, binary matrix, upper (lower) triangular matrix.*

### Введение

В радиосистемах, где широкополосные сигналы (далее по тексту – сигналы) служат для позиционирования и сопровождения движущихся объектов (радионавигация), временные измерения оказываются ключевой процедурой. В радионавигационных системах (РНС) посредством поиска и автосопровождения сигналов определяются моменты времени пребывания как элементов, так и самого принятого сигнала. В этом случае местный эталон времени подвижного объекта должен быть соответствующим образом синхронизирован с принятыми сигналами опорных станций (ОС).

Процесс синхронизации приёмной части бортовой станции (БС) состоит из двух этапов. На первом этапе осуществляется поиск и захват сигналов, передаваемых ОС; на втором этапе –

слежение за сигналом, параметры которого (временная задержка, несущая частота, начальная фаза) могут случайным образом меняться во времени. Поиск сигнала осуществляется во времени, так как момент появления сигнала заранее неизвестен, и по частоте, которая может быть смещена как за счёт *эффекта Доплера*, так и за счёт нестабильности и в точке приёма точно неизвестна. Таким образом, связанные с синхронизацией действия приёмника сигналов состоят в предварительной подстройке собственного опорного сигнала под принятый сигнал и поддержании синхронизма между ними в течение всего последующего приёма сигнала. Для согласования местного опорного сигнала с принятым сигналом следует измерить временной сдвиг принятого сигнала относительно местного опорного сигнала и генератор местного приёмника корректируется по времени на измеренный временной сдвиг, и тем самым происходит поиск кода принятого сигнала. Отсюда видно, что одной из основных задач первичной обработки сигналов в РНС является поиск по времени запаздывания такого параметра сигнала, как задержка кода. Таким образом, основной задачей данного исследования является разработка алгоритма, позволяющего оптимальным образом обеспечить «поиск».

### Методы поиска широкополосных сигналов

В современных широкополосных РНС для формирования широкополосных сигналов (ШПС) используется преимущественно фазовая манипуляция (ФМ) несущего колебания двоичной кодовой последовательностью максимальной длины (для примера) ( $M$ -последовательность длины  $L = 2^m - 1$ ,  $m$  – разрядность формирующего регистра). Решению проблемы поиска ШПС с фазовой манипуляцией уделяется серьёзное внимание многих исследователей. Проблеме поиска сигналов с ФМ посвящено много работ, из которых следует отметить [1–4]. Несмотря на принципиальную ясность вопросов измерения, а также основополагающие труды по оптимальным измерителям до сих пор многие вопросы поиска сигналов остаются открытыми. Сегодня решена задача построения устройства синхронизации с максимальным быстродействием, обеспечивающим поиск ФМ сигналов по задержке с большими и очень большими длинами кодовых последовательностей ( $L \geq 10^3 \dots 10^5$ ). Известные алгоритмы [5] быстрого поиска дискретных ФМ сигналов позволяют значительно сократить время поиска за счёт сокращения числа вычислений (алгебраических сложений) с величины  $L^2$  до величины  $m = L \log_2 L$  посредством перемножения матрицы-столбца с  $L$  поэлементными корреляциями на матрицу ортогонального базиса Уолша – Адамара, представленную в факторизованном виде (произведение  $m$  слабозаполненных матриц). Указанные алгоритмы невозможно использовать для поиска сигналов с дополнительной ФМ передаваемым дискретным сообщением в форме двоичных символов  $\{D_r\}$ . В этом случае матрица-столбец может содержать две группы вычисленных поэлементных корреляций. Первая группа будет соответствовать окончанию фрагмента символа  $D_r$ , соответствующего дополнительной ФМ, то вторая группа будет соответствовать началу фрагмента символа  $D_{r+1}$ . Когда  $D_{r+1} \neq D_r$ , то группы поэлементных корреляций по знаку будут неравнозначны, что не допускает использование указанных алгоритмов.

Основной задачей при использовании ШПС в РНС является измерение времени запаздывания принятого сигнала. Точность измерения времени запаздывания определяется эффективной частотой спектра ШПС и отношением сигнал/шум [6]. Эффективная частота  $\Delta f_s$  спектра ШПС определяется в первую очередь тактовой частотой  $F_T = 1 / \tau_s$ , которая и определяет полосу частот  $\Delta f$ , соответствующую прохождению сигнала с заданным уровнем мощности. Так, при 90%-ном уровне мощности для сигнала с ФМ  $\Delta f \approx 1,7 F_T$  ( $\Delta f_s \approx 0,33 F_T$ ), а для сигнала с частотной манипуляцией при минимальном сдвиге (ЧММС) будет в 2,2 раза меньше [7]. Чтобы работать с сигналом ФМ в полосе частот сигнала ЧММС, необходимо уменьшить  $F_T$  в 2,2 раза при этом эффективная частота спектра ФМ сигнала составит  $\Delta f_s = 0,33 F_T / 2,2$ , что на 27 % меньше эффективной частоты спектра для сигнала ЧММС. Кроме того, при работе временной

следающей системы при ФМ сигнале дисперсия флуктуационной ошибки слежения за временем возрастёт более чем 4,8 раза за счёт уменьшения крутизны дискриминационной характеристики ШПС ФМ сигнала относительно ЧММС [8].

Таким образом, в морских РНС средневолнового диапазона с ограниченным частотным ресурсом наиболее приемлемыми являются сигналы с ЧММС (или *CPFSK* в английской аббревиатуре) [9], обладающие, как выше было показано, высокой спектральной эффективностью. Вопросам поиска широкополосных сигналов с ЧММС посвящено существенно меньше публикаций [10; 11]. Реализация параллельного поиска ШПС при длине  $L > 10^4$  модулирующего кода частотной манипуляции с минимальным сдвигом и с дополнительной ФМ передаваемым дискретным сообщением в форме двоичных символов  $\{D_r\}$  на сегодня в литературе отсутствует.

### Формирование широкополосных сигналов с ЧММС

Структура алгоритма поиска широкополосного сигнала с ЧММС (далее по тексту – сигнала) основана на представлении элемента сигнала с частотной манипуляцией при непрерывной фазе [12] на интервале  $\{t_l\} = [l\tau_3, (l+1)\tau_3]$  следующим выражением:

$$s_l(t) = A \cos \left[ \omega_o t + \frac{d_l \pi m_f [t - (l-1)\tau_3]}{\tau_3} + \pi m_f \sum_{j=1}^{l-1} d_j \right], \quad (1)$$

где  $A$  – амплитуда;  $\omega_o$  – центральная частота;  $l$  – очередной номер элемента сигнала на интервале  $[l\tau_3, (l+1)\tau_3]$ ;  $d_l$  – двоичный символ, в соответствии с которым совершается частотная манипуляция. Для сигнала с частотной манипуляцией при минимальном сдвиге  $m_f = 2\Delta f \tau_3 = 0,5$ , где  $\Delta f = (f_b - f_n) / 2$  – девиация частоты;  $f_{н(в)} = f_o \mp F_T / 4$  – манипулируемые нижняя (верхняя) частоты;  $F_T = 1 / \tau_3$  – тактовая частота (частота манипуляции). Полагая  $d_l \in \{-1, +1\}$  и выделив в аргументе  $\cos(*)$  из (1) составляющие с частотами и фазовым углом, получаем

$$\omega_o t + \frac{d_l \pi 2\Delta f \tau_3 t}{\tau_3} + \frac{d_l \pi (1-l)\tau_3}{2\tau_3} + \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{l-1} d_j = 2\pi(f_o + d_l \Delta f)t + \frac{\pi}{2} \left( \sum_{j=1}^{l-1} d_j + d_l(1-l) \right). \quad (2)$$

Теперь приняв  $d_l \in \{0,1\}$  и упростив слагаемое с фазовым углом можно переписать (2) в виде:

$$2\pi(f_o + d_l \Delta f)t + \frac{\pi}{2} \left( \sum_{j=1}^{l-1} d_j + d_l(1-l) \right) = 2\pi(d_l f_n + \bar{d}_l f_b)t + \pi b_l, \quad (3)$$

где

$$b_l = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l (d_j - d_l). \quad (4)$$

Так как  $\{d_l\}$  – это последовательность двоичных элементов, то не трудно увидеть, что при любом  $l$  и любом коде двоичной последовательности  $\{d_l\}$  алгебраическая сумма в (4) будет чётным числом и тогда значение фазы  $b_l \pi / 2$  будет кратным  $\pi$ . С учётом периодичности  $\cos(*)$ , в этом случае можно сказать, что фазовый угол будет принимать значения 0 или  $\pi$ , что эквивалентно для  $b_l \in \{0,1\}$  в (3). С учётом сказанного, теперь нетрудно убедиться, что можно использовать замену алгебраической суммы (4) на «сумму по модулю 2» к «сумме по модулю 2» элементов  $d_j$  и  $d_l$ . Тогда очередной двоичный элемент  $b_l$  будет определяться рекуррентным выражением:

$$b_l = \left( \sum_{j=1}^l d_j - l d_l \right) = \left( \sum_{j=1}^l (d_j - d_l) \right) \Rightarrow \underbrace{(d_1 \oplus d_l) \oplus \dots \oplus (d_j \oplus d_l) \oplus \dots \oplus (d_l \oplus d_l)}_l, \quad (5)$$

где  $d_l \in \{0,1\}$  и  $b_l \in \{0,1\}$  – очередные двоичные символы, соответствующие частотной и фазовой манипуляции  $l$  элемента сигнала. Из (5) следует, что двоичный символ  $b_l$  определяется последовательностью первых  $1, 2, \dots, l$  двоичных символов  $d \in \{d_1, d_2, \dots, d_l\}$

$$\begin{aligned} b_1 &= d_1 \oplus d_1 = 0, \\ b_2 &= d_1 \oplus d_2 \oplus d_2 \oplus d_2 = d_1 \oplus d_2, \\ b_3 &= d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 \oplus d_3 \oplus d_3 \oplus d_3 = d_1 \oplus d_2 = b_2, \\ b_4 &= d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 \oplus d_4 \oplus d_4 \oplus d_4 \oplus d_4 \oplus d_4 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 \oplus d_4 = b_2 \oplus d_3 \oplus d_4. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) несложно определить рекуррентное правило для  $\{b_l\}$  (приняв  $b_0 = 0$ ):

$$b_l = \begin{cases} b_{l-1}, & \text{для нечётного } l \\ b_{l-2} \oplus d_{l-1} \oplus d_l. & \text{для чётного } l \end{cases} \quad (7)$$

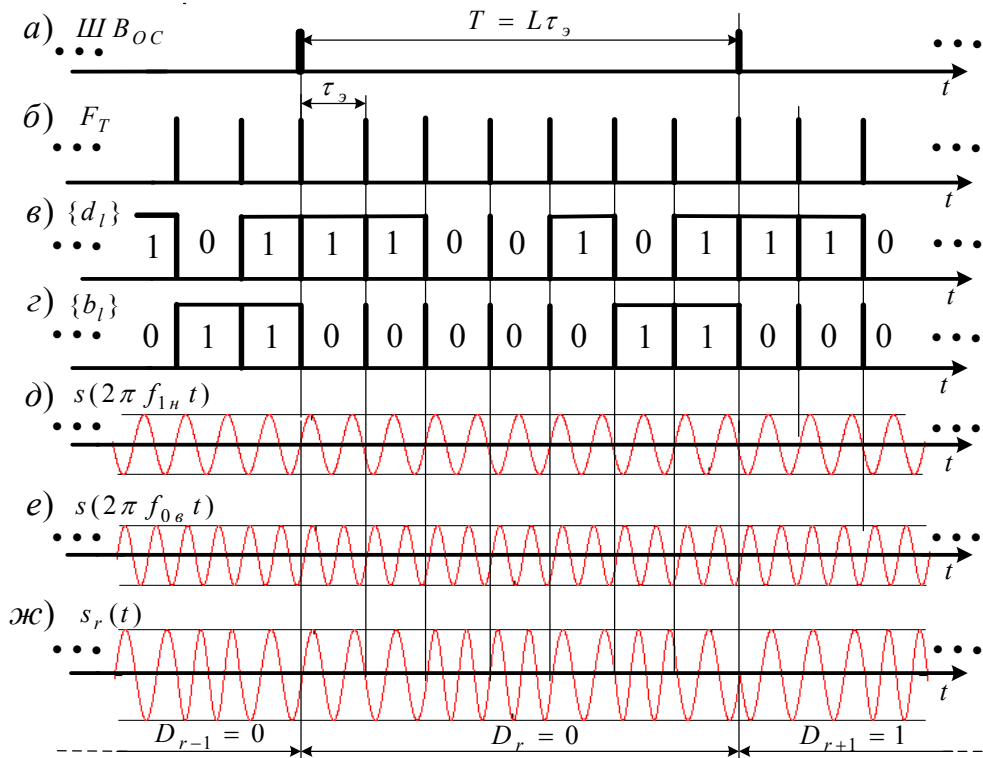


Рис. 1. Фрагменты формирования широкополосного сигнала с ЧММС:  
 а – временная диаграмма шкалы времени ОС; б – временная диаграмма сигнала тактовой частоты;  
 в – код  $\{d_l\}$  манипуляции частоты; г – код  $\{b_l\}$  манипуляции фазы; д – гармонический сигнал  
 нижней частоты  $f_{1н}$  (манипулирующий символ  $d_l = 1$ ); е – гармонический сигнал верхней  
 частоты  $f_{0в}$  (манипулирующий символом  $d_l = 0$ ); ж – ШПС с ЧММС при дополнительной  
 фазовой манипуляции информационными символами  $D_{r-1}$ ,  $D_r$  и  $D_{r+1}$

Fig. 1. Fragments of broadband signal formation with MSK:  
 а – temporal diagram of the time scale of the fixed station; б – temporal diagram of the clock  
 frequency signal; в – frequency manipulation code  $\{d_l\}$ ; г – phase manipulation code  $\{b_l\}$ ;  
 д – the lower frequency  $f_{1н}$  of the harmonic signal (manipulating symbol  $d_l = 1$ ); е – the upper  
 frequency  $f_{0в}$  of the harmonic signal (manipulating symbol  $d_l = 0$ ); ж – broadband signal MSK  
 signal with additional FM by information symbols  $D_{r-1}$ ,  $D_r$  и  $D_{r+1}$



С учётом формирования элементов сигнала (3), ШПС при частотной манипуляции (например) посредством бинарной  $M$ -последовательности  $\{d_l\}$  длины  $L$  [13] с дополнительной фазовой манипуляцией (ФМ) передаваемым дискретным сообщением  $D_r \in \{0,1\}$  можно записать в форме

$$s_r(t) = A \sum_{l=1}^L \text{rect}[t - (l-1)\tau_s] \cos \left[ 2\pi(d_l f_n + \bar{d}_l f_b)t + \pi(b_l \oplus D_r) \right], \quad (8)$$

где  $\text{rect}(*)$  – импульс единичной амплитуды, длительностью  $\tau_s$  для  $l$  элемента сигнала:

$$\text{rect}[t - (l-1)\tau_s] = \begin{cases} 1, & (l-1)\tau_s \leq t \leq l\tau_s, \\ 0, & (l-1)\tau_s > t \text{ и } t > l\tau_s. \end{cases} \quad (9)$$

Согласно (7) двоичный код  $\{b_l\}$ , посредством которого совершается фазовая манипуляция, соответствует модифицированной бинарной  $M$ -последовательности  $\{d_l\}$  длины  $L$ .

На рис. 1. представлены фрагменты формирования на опорной станции семиэлементного (для примера) широкополосного сигнала с ЧММС.

### Метод параллельного поиска по времени широкополосного сигнала с ЧММС

Применение квазикогерентных приёмников для обработки ШПС – ЧММС (далее по тексту – сигналов) требует осуществления ввода следящих устройств в синхронный режим с точностью, определяемой областью захвата устройств. Обычно область захвата меньше области неопределённости параметров сигнала (например, по частоте и задержке сигнала), что предполагает поиск сигнала в области неопределённости.

В морских навигационных системах интервалом неопределённости по частоте принимаемого сигнала при поиске можно пренебречь в связи с малым доплеровским сдвигом по частоте (скорость бортовых объектов составляет не более 100 км/ч). Тогда точность определения задержки принимаемого сигнала при поиске должна определяться соответствующим интервалом корреляции сигнала, ограничивающим область захвата. При области неопределённости, равной длительности  $T = L\tau_s$  сигнала, можно выбрать такой дискретный интервал задержки, который окажется не меньше области захвата сигнала по времени. Предполагается весь интервал неопределённости по задержке разбивать на дискретные интервалы, равные  $\tau_s$ . Количество таких интервалов будет равно  $L = T/\tau_s$  и тогда интервал неопределённости по задержке может изменяться дискретно. При этом величину дискрета по времени удобно принять равным тем значениям сдвига по задержке, при которых достигается практически ортогональность анализируемого и опорного сигналов. Приняв модель дискретного изменения задержки, можно полагать, что на вход приёмного устройства приходит один из  $L$  квазиортогональных сигналов с задержкой, кратной  $\tau_s$ .

При принятой модели, задача поиска сводится к тому, чтобы выполнить обнаружение и распознать, какой именно из  $L$  сигналов (каждый из которых различается циклическим сдвигом  $\tau_k = (k-1)\tau_s$  ( $k = \overline{1, L}$ ) модулирующей кодовой последовательности  $\{d_{kl}\}$ ) действует, что позволяет устранить неопределённость по задержке, т. е. определить циклический сдвиг  $\tau_k$ , принадлежащий анализируемому сигналу. Как известно [14], для оптимального распознавания  $L$  ортогональных сигналов необходимо использовать  $L$ -канальную схему, в которой осуществляется оптимальное  $L$ -ичное распознавание и для выбираемых сигналов выполняется процедура оптимального двоичного обнаружения. Структурная схема оптимального  $L$ -канального распознавания одного из  $L$  ортогональных сигналов приведена на рис. 2. Многоканальный приёмник содержит  $L$  квадратурных корреляторов (КК), каждый из которых включает в себя « $\times$ » – перемножитель сигналов; « $\int$ » – интеграторы; « $\sqrt{Y_k^2 + \hat{Y}_k^2}$ » – нелинейный преобразователь, вычисляющий значение модуля  $V_k$  корреляции комплексных огибающих принятой смеси сигнала

$s_{r,r+1}(t)$  совместно с флуктуационной помехой  $n$  и опорного сигнала  $s_o[t, (k-1)\tau_3]$ ; «Блок выбора  $\max V_m$ » – решающий блок. В квадратурном корреляторе с номером  $k$  вычисляются синфазная и квадратурная корреляции

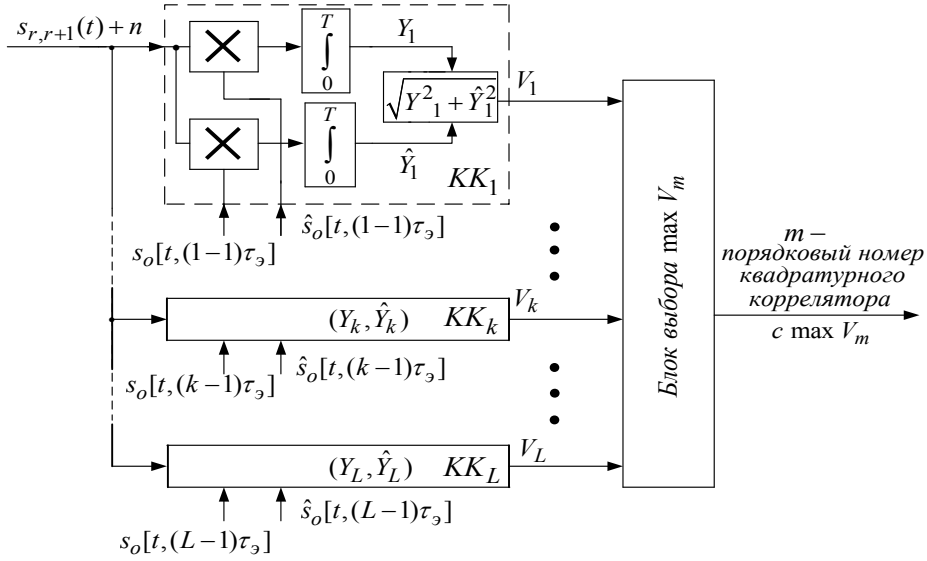


Рис. 2. Оптимальный  $L$ -канальный корреляционный приёмник

Fig. 2. Optimal  $L$ -channel correlation receiver

$$Y_k = \int_0^T [s_{r,r+1}(t) + n(t)]s_o[t, (k-1)\tau_3]dt \text{ и } \hat{Y}_k = \int_0^T [s_{r,r+1}(t) + n(t)]\hat{s}_o[t, (k-1)\tau_3]dt, \quad (10)$$

где  $s_{r,r+1}(t)$  – анализируемый сигнал, представляющий собой чаще всего последовательность элементов сигнала, принадлежащих оконечному фрагменту первого модулирующего информационного символа  $D_r$  и начальному фрагменту второго модулирующего информационного символа  $D_{r+1}$  (рис. 3). Здесь анализируемый сигнал  $s_{r,r+1}(t)$  относительно начального момента  $t_{1,1}$  времени будет представлять собой циклически сдвинутый влево на  $p-1$  элементов сигнал (8).

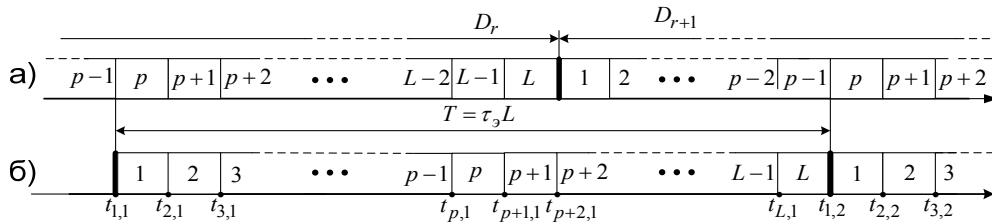


Рис. 3. Эпюры анализируемого и опорного сигналов

Fig. 3. Plots of the analyzed and reference signals

В этом случае выражение для принятого сигнала на интервале  $\{t\} = [t_{1,1}, t_{1,2}]$  удобно записать следующим образом:

$$s_{r,r+1}(t) = A_r \sum_{l=p}^L \text{rect}[t - (l-p)\tau_3] \cos \left[ 2\pi(d_l f_H + \bar{d}_l f_B)t + (b_l \oplus D_r)\pi + \varphi_{r,l} \right] + A_{r+1} \sum_{l=1}^{p-1} \text{rect}[t - (L-p+l)\tau_3] \cos \left[ 2\pi(d_l f_H + \bar{d}_l f_B)t + (b_l \oplus D_{r+1})\pi + \varphi_{l,r+1} \right], \quad (11)$$

здесь  $\varphi_{r,l}$  и  $\varphi_{r+1,l}$  – возможные фазовые запаздывания на частотах  $f_H$  или  $f_B$  для «сигналов»  $r$  и  $r+1$ .

Здесь  $s_o[t, (k-1)\tau_3]$  и  $\hat{s}_o[t, (k-1)\tau_3]$  – квадратурные опорные сигналы единичной амплитуды с циклическими сдвигами влево на  $k-1$  двоичных символов модулирующей кодовой последовательности  $\{d_l\}$ , действующие на входах квадратурных корреляторов (рис. 3), определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} s_o(t, (k-1)\tau_3) &= \sum_{l=k}^L \text{rect}[t - (l-k)\tau_3] \cos \left[ 2\pi(d_l f_H + \bar{d}_l f_B)t + b_l \pi \right] + \\ &+ \sum_{l=1}^k \text{rect}[t - (L-k+l-1)\tau_3] \cos \left[ 2\pi(d_l f_H + \bar{d}_l f_B)t + b_l \pi \right], \\ \hat{s}_o(t, (k-1)\tau_3) &= \sum_{l=k}^L \text{rect}[t - (l-k)\tau_3] \sin \left[ 2\pi(d_l f_H + \bar{d}_l f_B)t + b_l \pi \right] + \\ &+ \sum_{l=1}^k \text{rect}[t - (L-k+l-1)\tau_3] \sin \left[ 2\pi(d_l f_H + \bar{d}_l f_B)t + b_l \pi \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Решающий блок выбирает из вычисленных модулей  $V_1, V_2, \dots, V_k, \dots, V_L$  модуль с максимальным значением –  $V_m : m = \overline{1, L}$ . Теперь для осуществления ввода следящих устройств (по времени или по фазе) в синхронный режим в качестве опорных сигналов будут выбраны ортогональные сигналы  $s_o[t, (m-1)\tau_3]$  и  $\hat{s}_o[t, (m-1)\tau_3]$  с циклическими сдвигами влево на  $m-1$  двоичных символов модулирующих кодовых последовательностей  $\{d_l\}$  и  $\{b_l\}$ .

Параллельный «поиск» сигнала (8) производится посредством оптимального приёмника (рис. 1). Реализация оптимального приёмника (рис. 1) при числе  $L \gg 1$  сопряжена со значительными трудностями, связанными с формированием  $L$  пар квадратурных широкополосных сигналов с ЧММС (12) одновременно и техническим исполнением  $L$  квадратурных корреляторов.

Рассмотрим поэлементную обработку анализируемого сигнала (8). Согласно (10) и (12) можно совершить вычисления синфазной и квадратурной корреляций в КК с номером  $k$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} Y_k &= \int_0^{L\tau_3} \left[ A \sum_{l=1}^L \text{rect}_p[t - (l-1)\tau_3] \cos \left[ 2\pi(d_{pl} f_H + \bar{d}_{pl} f_B)t + (b_{pl} \oplus D_r)\pi + \varphi_l \right] + n(t) \right] \times \\ &\times \sum_{l=1}^L \text{rect}_k[t - (l-1)\tau_3] \cos \left[ 2\pi(d_{kl} f_H + \bar{d}_{kl} f_B)t + b_{kl} \pi \right] dt, \\ \hat{Y}_k &= \int_0^{L\tau_3} \left[ A \sum_{l=1}^L \text{rect}_p[t - (l-1)\tau_3] \cos \left[ 2\pi(d_{pl} f_H + \bar{d}_{pl} f_B)t + (b_{pl} \oplus D_r)\pi + \varphi_l \right] + n(t) \right] \times \\ &\times \sum_{l=1}^L \text{rect}_k[t - (l-1)\tau_3] \sin \left[ 2\pi(d_{kl} f_H + \bar{d}_{kl} f_B)t + b_{kl} \pi \right] dt, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где двоичные элементы  $d_{lp}$  ( $b_{lp}$ ) и  $d_{lk}$  ( $b_{lk}$ ) соответствуют циклически сдвинутым влево на  $p-1$  и  $k-1$  двоичным символам модулирующих (по частоте и фазе) кодовых последовательностей. Корреляции  $Y_k$  и  $\hat{Y}_k$  будем вычислять при идеальной (для упрощения анализа) тактовой синхронизации в соответствии с обрабатываемыми сигналами  $s_r(t)$ , как поясняется на рис. 3, и квадратурными опорными сигналами  $s_o[t, (k-1)\tau_3]$  и  $\hat{s}_o[t, (k-1)\tau_3]$ . Здесь импульсные функции в тактовые моменты совпадают, т. е.  $\text{rect}_p[*] = \text{rect}_k[*] = \text{rect}[*]$ . С учётом свойства аддитивности при интегрировании [15] произведения сумм (11) синхронных последовательностей

импульсов  $rect[*]$  равной длительности, вычисления корреляций  $Y_k$  и  $\hat{Y}_k$  можно записать через  $L$  сумм интегралов с интегрированием на интервалах  $\{t\} = [0, \tau_3]$ :

$$\begin{aligned}
 Y_k &= A \sum_{l=1}^L \int_0^{\tau_3} rect_p[t - (l-1)\tau_3] rect_k[t - (l-1)\tau_3] \cos[2\pi(d_{pl}f_H + \bar{d}_{pl}f_B)t + (b_{pl} \oplus D_r)\pi + \varphi_l] \times \\
 &\quad \times \cos[2\pi(d_{kl}f_H + \bar{d}_{kl}f_B)t + b_{kl}\pi] dt + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^L \int_0^{\tau_3} n[t - (l-1)\tau_3] rect_k[t - (l-1)\tau_3] \cos[2\pi(d_{kl}f_H + \bar{d}_{kl}f_B)t + b_{kl}\pi] dt, \\
 \hat{Y}_k &= A \sum_{l=1}^L \int_0^{\tau_3} rect_p[t - (l-1)\tau_3] rect_k[t - (l-1)\tau_3] \cos[2\pi(d_{pl}f_H + \bar{d}_{pl}f_B)t + (b_{pl} \oplus D_r)\pi + \varphi_l] \times \\
 &\quad \times \sin[2\pi(d_{kl}f_H + \bar{d}_{kl}f_B)t + b_{kl}\pi] dt + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^L \int_0^{\tau_3} n[t - (l-1)\tau_3] rect_k[t - (l-1)\tau_3] \sin[2\pi(d_{kl}f_H + \bar{d}_{kl}f_B)t + b_{kl}\pi] dt.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Используя разложения  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$  и  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ , принимая  $D_r = 0$ , полагая, что при  $b_{pl} \in \overline{0,1}$  и  $b_{kl} \in \overline{0,1}$   $\cos(b_{pl}\pi) = b_{pl}^* \in \overline{-1,1}$  и  $\cos(b_{kl}\pi) = b_{kl}^* \in \overline{-1,1}$ , и подставляя в (14)  $2\pi(d_{pl}f_H + \bar{d}_{pl}f_B) = \omega(d_{pl})$  и  $2\pi(d_{kl}f_H + \bar{d}_{kl}f_B) = \omega(d_{kl})$ , корреляции  $Y_k$  и  $\hat{Y}_k$ , вычисленные в КК с номером  $k$ , будут определяться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 Y_k &= A \sum_{l=1}^L b_{kl}^* b_{pl}^* \int_0^{\tau_3} rect[t - (l-1)\tau_3] \cos[\omega(d_{pl})t + \varphi_l] \cos[\omega(d_{kl})t] dt + \sum_{l=1}^L b_{kl}^* \xi_{kl}, \\
 \hat{Y}_k &= A \sum_{l=1}^L b_{kl}^* b_{pl}^* \int_0^{\tau_3} rect[t - (l-1)\tau_3] \cos[\omega(d_{pl})t + \varphi_l] \sin[\omega(d_{kl})t] dt + \sum_{l=1}^L b_{kl}^* \hat{\xi}_{kl}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь  $\xi_{kl}$  и  $\hat{\xi}_{kl}$  – нормальные случайные процессы [14], соответствующие определённому интегралу от произведения гармонического сигнала, единичной амплитуды и длительностью  $\tau_3$ , и случайной функции  $n(t)$  в форме белого шума со спектральной плотностью  $N_o$ .

В произведениях  $\cos[\omega(d_{pl})t + \varphi] \cos[\omega(d_{kl})t]$  и  $\cos[\omega(d_{pl})t + \varphi] \sin[\omega(d_{kl})t]$  из (15) частота  $\omega(d_{kl})$  может принимать одно из двух значений –  $\omega_H$  при  $d_{kl} = 1$  или  $\omega_B$  при  $d_{kl} = 0$ . Кроме того, при неравенстве  $d_{kl} \neq d_{pl}$  указанные произведения будут равны нулю, так как сигналы при частотах  $\omega_H$  и  $\omega_B$  будут ортогональными в усиленном смысле [16], а при равенстве  $d_{kl} = d_{pl}$  – иметь значения  $\tau_3 \cos(\varphi) / 2$  и  $\tau_3 \sin(\varphi) / 2$ . Пренебрегая членами с суммарной частотой, указанные произведения приобретут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \cos[\omega(d_{pl})t + \varphi] \cos[\omega(d_{kl})t] &= \cos[\omega(d_{pl})t + \varphi] \times \begin{cases} \cos(\omega_H t), & d_{kl} = 1 \\ \cos(\omega_B t), & d_{kl} = 0 \end{cases} = \begin{cases} \cos(\varphi), & d_{kl} = d_{pl} \\ 0, & d_{kl} \neq d_{pl} \end{cases} = \rho(d_{kl}), \\
 \cos[\omega(d_{pl})t + \varphi] \sin[\omega(d_{kl})t] &= \cos[\omega(d_{pl})t + \varphi] \times \begin{cases} \sin(\omega_H t), & d_{kl} = 1 \\ \sin(\omega_B t), & d_{kl} = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin(\varphi), & d_{kl} = d_{pl} \\ 0, & d_{kl} \neq d_{pl} \end{cases} = \hat{\rho}(d_{kl})
 \end{aligned} \tag{16}$$

и тогда синфазную и квадратурную корреляции  $Y_k$  и  $\hat{Y}_k$  можно записать в следующей форме:

$$Y_k = \sum_{l=1}^L b_{kl}^* [x(d_{kl}) + \xi_{kl}], \quad \hat{Y}_k = \sum_{l=1}^L b_{kl}^* [\hat{x}(d_{kl}) + \hat{\xi}_{kl}], \quad (17)$$

где

$$x(d_{kl}) = \frac{A\tau_2}{2} (b_{pl}^* \oplus D_r) \rho(d_{kl}) \text{ и } \hat{x}(d_{kl}) = \frac{A\tau_2}{2} (b_{pl}^* \oplus D_r) \hat{\rho}(d_{kl}), \quad \xi_{kl} \text{ и } \hat{\xi}_{kl} \quad (18)$$

сигнальные и помеховые квадратурные поэлементные корреляции (ПК). Обозначив  $Y(d_{kl}) = x(d_{kl}) + \xi_{kl}$  и  $\hat{Y}(d_{kl}) = \hat{x}(d_{kl}) + \hat{\xi}_{kl}$  для (17), корреляции и модуль корреляций можно переписать

$$Y_k = \sum_{l=1}^L b_{kl}^* Y(d_{kl}), \quad \hat{Y}_k = \sum_{l=1}^L b_{kl}^* \hat{Y}(d_{kl}) \text{ и } V_k = \sqrt{Y_k^2 + \hat{Y}_k^2}. \quad (19)$$

Структура алгоритма (19) вычисления модуля корреляций поясняется (рис. 4). Посредством каждого из сумматоров « $\sum_l^L$ » с учётом знака производится накопление поэлементных корреляций  $b_{kl}^* Y(d_{kl})$  и  $b_{kl}^* \hat{Y}(d_{kl})$ , а с накоплением  $L$  сумм производится формирование модулей  $V_k$ . Для упрощения примем  $n(t) = 0$  и тогда, анализируя работу схемы (рис. 4) относительно накопления поэлементных корреляций согласно (17)–(19), можно сказать, что  $k$ -я компонента  $Y_k$  вычисляется как сумма  $L$  произведений символов  $b_{kl}^* \in \{-1, 1\}$  (принадлежащих циклически сдвинутому на  $k-1$  позиций модифицированному  $M$ -коду длины  $L$ ) и поэлементных корреляций  $x(d_{kl})$ , выбираемых из пары значений  $x(1)$  и  $x(0)$ , которые формируются одновременно двумя парами поэлементных интеграторов « $\int_0^{\tau_2}$ », соответствующих корреляциям очередного элемента анализируемого сигнала  $s_{r,r+1}(t)$  и гармонических сигналов, длительностью  $\tau_2$  с частотами  $\omega_H$  и  $\omega_\theta$ . Здесь из каждой  $l$  пары значений  $x(1)$  и  $x(0)$  посредством коммутаторов (рис. 4), управляемых  $l$  символом  $d_{kl} \in \{0, 1\}$ , производится выборка одного из значений поэлементных корреляций  $x(0)$  или  $x(1)$  по правилу

$$x(d_{kl}) = \begin{cases} x(1), & d_{kl} = 1, \\ x(0), & d_{kl} = 0, \end{cases}, \quad \hat{x}(d_{kl}) = \begin{cases} \hat{x}(1), & d_{kl} = 1, \\ \hat{x}(0), & d_{kl} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

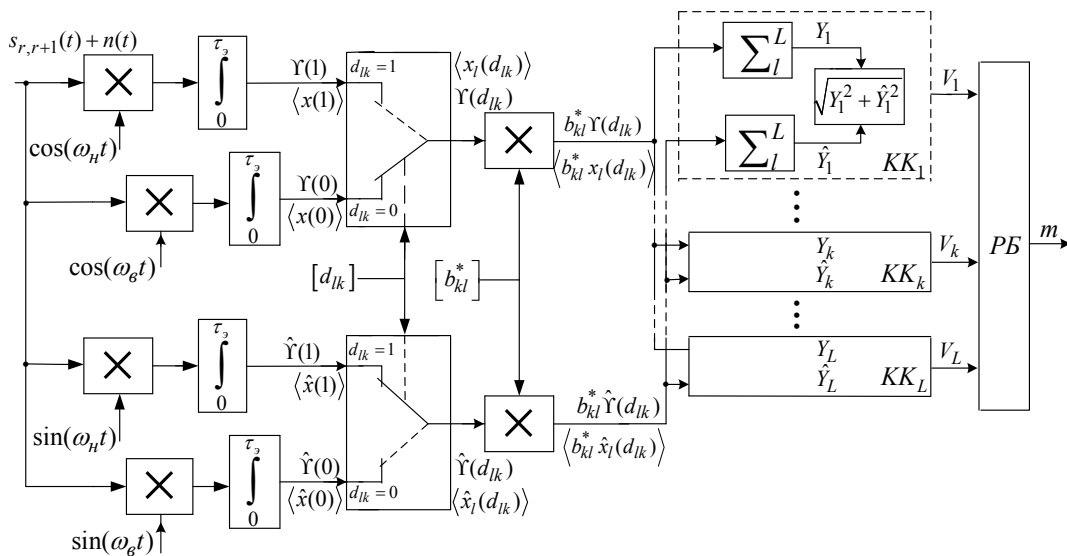


Рис. 4. Структура алгоритма поиска ШПС – ЧММС сигналов

Fig. 4. Structure of the broadband MSK signal search algorithm

Введя замену индексов в обозначениях  $d_{kl} = d_{lk}$  и  $x(d_{kl}) = x_l(d_{lk})$  и обозначив  $b_{kl}^*$  как  $b_{kl}$ , получим окончательные формулы для вычисления  $k$ -й синфазной и квадратурной корреляций  $Y_k$  и  $\hat{Y}_k$ :

$$Y_k = \sum_{l=1}^L b_{kl} x_l(d_{lk}), \quad \hat{Y}_k = \sum_{l=1}^L b_{kl} \hat{x}_l(d_{lk}). \quad (21)$$

Здесь  $x_l(d_{lk})$  – очередная  $l$  поэлементная корреляция, сформированная на выходе коммутатора, управляемого очередным двоичным символом  $d_{lk}$ , принадлежащим также циклически сдвинутому на  $k-1$  позиций  $M$ -коду длины  $L$ .

### Алгоритм поиска посредством матричного представления задачи распознавания бинарных сигналов

При рассмотрении формирования группы значений  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots, Y_L$  синфазных корреляций (21), можно сказать, что группу из  $L$  значений синфазных корреляций можно представить как транспонированную матрицу-столбец  $\mathbf{Y} = \|Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_k, \dots, Y_L\|^T$  размером  $L \times 1$ , при этом каждый из элементов матрицы  $\mathbf{Y}$  соответствует сумме  $L$  произведений бинарных элементов  $b_{kl}$   $k$ -й строки матрицы  $\mathbf{B}$  и поэлементных корреляций  $x_l(d_{lk})$  матрицы-столбца  $\mathbf{X}$ . Здесь матрица  $\mathbf{B}$  это квадратная матрица размером  $L \times L$ , где каждая из  $k$ -х строк представляет собой

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} & \dots & b_{1L} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} & \dots & b_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kl} & \dots & b_{kL} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{L1} & b_{L2} & \dots & b_{Ll} & \dots & b_{LL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* & \dots & b_L^* \\ b_2^* & b_3^* & \dots & b_1^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_k^* & b_{k+1}^* & \dots & b_{k-1}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_L^* & b_1^* & \dots & b_{L-1}^* \end{pmatrix} \quad (22)$$

последовательность двоичных символов  $\{b_{kl}\}$ , принадлежащих циклически сдвинутому на  $k-1$  позиций модифицированному  $M$ -коду длины  $L$ , сформированному по правилу (6)–(7) в соответствии с  $M$ -кодовой последовательностью  $\{d_l\}$ . Для обеспечения вычислений с элементами матрицы  $\mathbf{B}$  используют представление элементов  $b_{kl}$  первой матрицы через элементы второй матрицы, которые можно выразить через номер  $l$  элемента  $k$ -й строки бинарной последовательности  $\{b_{kl}^*\}$ :

$$b_{kl} = b_{l+k-L_0-1}^*, \quad \left( L_0 = \begin{cases} L, & l+k-1 > L, \\ 0, & l+k-1 \leq L. \end{cases} \right) \quad (23)$$

Матрица-столбец  $\mathbf{X}$  включает в себя  $L$  элементов, каждый из которых соответствует очередному номеру  $l$  вычисленного значения поэлементной корреляции  $x_l(d_{lk})$  по правилу (20):

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(d_{1k}) \\ x_2(d_{2k}) \\ \dots \\ x_l(d_{lk}) \\ \dots \\ x_L(d_{Lk}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1[(d_{1k} = 0)] \text{ или } x_1[(d_{1k} = 1)] \\ x_2[(d_{2k} = 0)] \text{ или } x_2[(d_{2k} = 1)] \\ \dots \\ x_l[(d_{lk} = 0)] \text{ или } x_l[(d_{lk} = 1)] \\ \dots \\ x_L[(d_{Lk} = 0)] \text{ или } x_L[(d_{Lk} = 1)] \end{pmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(d_{1k}) \\ \hat{x}_2(d_{2k}) \\ \dots \\ \hat{x}_l(d_{lk}) \\ \dots \\ \hat{x}_L(d_{Lk}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1[(d_{1k}=0)] \text{ или } \hat{x}_1[(d_{1k}=1)] \\ \hat{x}_2[(d_{2k}=0)] \text{ или } \hat{x}_2[(d_{2k}=1)] \\ \dots \\ \hat{x}_l[(d_{lk}=0)] \text{ или } \hat{x}_l[(d_{lk}=1)] \\ \dots \\ \hat{x}_L[(d_{Lk}=0)] \text{ или } \hat{x}_L[(d_{Lk}=1)] \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Здесь каждое  $l$  значение поэлементных корреляций  $x_l(d_{lk})$  определяется значением бита символа  $d_{lk}$ . При номере  $l$  только  $l$  пара поэлементных корреляций (20), сформированных парой поэлементных интеграторов (рис. 4), участвует в формировании  $l$  слагаемого (21). Следует также сказать, что из  $l$  пары поэлементных корреляций выбирается то значение, которое формируется на выходе коммутатора (рис. 4) в соответствии со значением бита действующего символа  $d_{lk}$  на управляющий вход коммутатора. При этом условии выбранное значение поэлементной корреляции с учётом знака  $b_{kl}$  будет суммироваться в  $k$ -й синфазной (квадратурной) корреляции  $Y_k$  ( $\hat{Y}_k$ ) (20). Здесь выборка поэлементных корреляций производится через символы  $d_{lk}$ , которые должны являться элементами матрицы:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} & \dots & d_{1L} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} & \dots & d_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{l1} & d_{l2} & \dots & d_{lk} & \dots & d_{lL} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{L1} & d_{L2} & \dots & d_{Lk} & \dots & d_{LL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_L \\ d_2 & d_3 & \dots & d_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_l & d_{l+1} & \dots & d_{l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_L & d_1 & \dots & d_{L-1} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Элементы первой строки второй матрицы  $\mathbf{D}$  соответствуют  $M$ -кодовой последовательности  $\{d_l\}$ . Остальные строки представляют собой циклически сдвинутые на  $k-1$  элементов кодовые последовательности  $\{d_{lk}\}$ . Для обеспечения вычислений с элементами матрицы  $\mathbf{D}$  используют представление элементов  $d_{lk}$  первой матрицы через  $l$  элемент  $k$ -й строки бинарной последовательности  $\{d_{lk}\}$  второй матрицы:

$$d_{lk} = d_{l+k-L_0-1}, \quad \left( L_0 = \begin{cases} L, & l+k-1 > L, \\ 0, & l+k-1 \leq L. \end{cases} \right) \quad (26)$$

Таким образом, вычисление группы значений  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots, Y_L$  синфазных корреляций (21) можно представить как произведение матриц в развёрнутой форме

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_k \\ \dots \\ Y_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} & \dots & b_{1L} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} & \dots & b_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kl} & \dots & b_{kL} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{L1} & b_{L2} & \dots & b_{Ll} & \dots & b_{LL} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1(d_{1k}) \\ x_2(d_{2k}) \\ \dots \\ x_l(d_{lk}) \\ \dots \\ x_L(d_{Lk}) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \dots \\ \hat{Y}_k \\ \dots \\ \hat{Y}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} & \dots & b_{1L} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} & \dots & b_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kl} & \dots & b_{kL} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{L1} & b_{L2} & \dots & b_{Ll} & \dots & b_{LL} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{x}_1(d_{1k}) \\ \hat{x}_2(d_{2k}) \\ \dots \\ \hat{x}_l(d_{lk}) \\ \dots \\ \hat{x}_L(d_{Lk}) \end{pmatrix} \quad (27)$$

или в краткой форме

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B} \times \mathbf{X}; \quad \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{X}}. \quad (28)$$

Исполнение алгоритма (27)–(28) необходимо произвести в течение длительности сигнала  $L\tau_3$ . При этом необходимо совершить  $L^2$  операций сложения. При  $L=16383$  и при  $\tau_3 = 2,5$  мкс (РНС «Спрут»), длительность процедуры одной операции сложения составит  $\tau_3 / L \geq 1,5 \cdot 10^{-10}$  с, можно сказать, что операции сложения должны проводиться с частотой не менее 6,5 ГГц. Это слишком высокая рабочая частота для вычислителя. Чтобы понизить требования к рабочей частоте вычислителя предлагается произведение матриц в алгоритме (27)–(28) представить в виде произведения блочных матриц [17].

Блочные матрицы формируются посредством разделения матриц  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{D}$   $M-1$  горизонтальными, а матриц  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$   $N-1$  вертикальными линиями на  $M \times N$  и  $M$  блоков соответственно. Тогда матричное произведение (27) можно выразить через произведение блочных матриц:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{Y}_m \\ \dots \\ \mathbf{Y}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \dots & \mathbf{B}_{1N} \\ \dots & \mathbf{B}_{m,n} & \dots \\ \mathbf{B}_{M1} & \dots & \mathbf{B}_{M,N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1(\mathbf{D}_{1,m}) \\ \mathbf{X}_2(\mathbf{D}_{2,m}) \\ \dots \\ \mathbf{X}_n(\mathbf{D}_{n,m}) \\ \dots \\ \mathbf{X}_N(\mathbf{D}_{N,m}) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1 \\ \hat{\mathbf{Y}}_2 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{Y}}_m \\ \dots \\ \hat{\mathbf{Y}}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \dots & \mathbf{B}_{1N} \\ \dots & \mathbf{B}_{m,n} & \dots \\ \mathbf{B}_{M1} & \dots & \mathbf{B}_{M,N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_1(\mathbf{D}_{1,m}) \\ \hat{\mathbf{X}}_2(\mathbf{D}_{2,m}) \\ \dots \\ \hat{\mathbf{X}}_n(\mathbf{D}_{n,m}) \\ \dots \\ \hat{\mathbf{X}}_N(\mathbf{D}_{N,m}) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где

$$\mathbf{Y}_m = \sum_{n=1}^{n'} \mathbf{B}_{m,n} \mathbf{X}_n(\mathbf{D}_{n,m}); \quad \hat{\mathbf{Y}}_m = \sum_{n=1}^{n'} \mathbf{B}_{m,n} \hat{\mathbf{X}}_n(\mathbf{D}_{n,m}) - \quad (30)$$

$m$  – блок-матрица синфазных и квадратурных корреляций; блок-матрица  $\mathbf{B}_{mn}$  будет состоять из  $n' = L/N$  столбцов и  $m' = L/M$  строк с соответствующими  $b_{kl}$  элементами первой матрицы (22):

$$\mathbf{B}_{m,n} = \begin{pmatrix} b_{k'+m'(1-1),l'+n'(1-1)} & \dots & b_{k'+m'(1-1),l'+n'(n'-1)} \\ \dots & b_{k'+m'(m-1),l'+n'(n-1)} & \dots \\ b_{k'+m'(m'-1),l'+n'(1-1)} & \dots & b_{k'+m'(m'-1),l'+n'(n'-1)} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где  $k'$  и  $l'$  – индексы, обозначающие номера строк и столбцов в блок-матрице  $\mathbf{B}_{mn}$ . При этом элементы блок-матрицы  $\mathbf{B}_{mn}$  можно выразить через элементы  $b_{kl}$  матрицы (23) в следующей форме  $b_{k,l} = b_{k'+m'(m-1),l'+n'(n-1)}$ . Ниже показаны блок-матрица поэлементных корреляций с числом строк  $n' = L/N$  и блок-матрица  $\mathbf{D}_{n,m}$  с элементами соответствующих элементам  $d_{lk}$  первой матрицы (25).

$$\mathbf{Y}_n(\mathbf{D}_{n,m}) = \begin{pmatrix} y_{1+n'(n-1)}(\mathbf{D}_{n,m}) \\ \dots \\ y_{l'+n'(n-1)}(\mathbf{D}_{n,m}) \\ \dots \\ y_{n'+n'(n-1)}(\mathbf{D}_{n,m}) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D}_{n,m} = \begin{pmatrix} d_{l'+n'(1-1),k'+m'(1-1)} & \dots & d_{l'+n'(n'-1),k'+m'(1-1)} \\ \dots & d_{l'+n'(n-1),k'+m'(m-1)} & \dots \\ d_{l'+n'(1-1),k'+m'(m'-1)} & \dots & d_{l'+n'(n'-1),k'+m'(m'-1)} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Использование блочных матриц для выполнения алгоритма (27)–(28) позволяет более рационально производить накопление квадратурных корреляций (29). Количество  $m'$  строк в блочной матрице  $\mathbf{B}_{m,n}$  выбирается таким, чтобы за интервал  $\tau_3$  можно произвести по одному



суммированию поэлементных корреляций для каждого из  $m'$  адресов. Вычисление каждой суммы поэлементных корреляций выполняется за 3 действия (3 такта): выборка операнда (накопленной суммы поэлементных корреляций с учётом знака  $b_{kl}$ ) из блока памяти по  $k'$  адресу, сложение с очередным значением поэлементной корреляции  $x_l$ , запись суммы в блок памяти по тому же адресу. В вычислителе, выполненном на ПЛИС [18], за длительность  $\tau_3$  можно совершить  $\tau_3 f_T = 1625$  тактов ( $\tau_3 = 2,5$  мкс,  $f_T \geq 650$  МГц) или 529 операций суммирований с записью в «память», что будет соответствовать 529 накоплению корреляций или  $m' = 529$ . Количество блок-строк в блок-матрицах (27)–(28) корреляций составит  $M = [3L / \tau_3 f_T] = 31$ , и здесь каждой блок-строке будет соответствовать сумматор поэлементных корреляций  $x_l(d_{lk})$  с учётом знака элементов  $b_{kl}$  блок-матрицы  $\mathbf{B}_{m,n}$ .

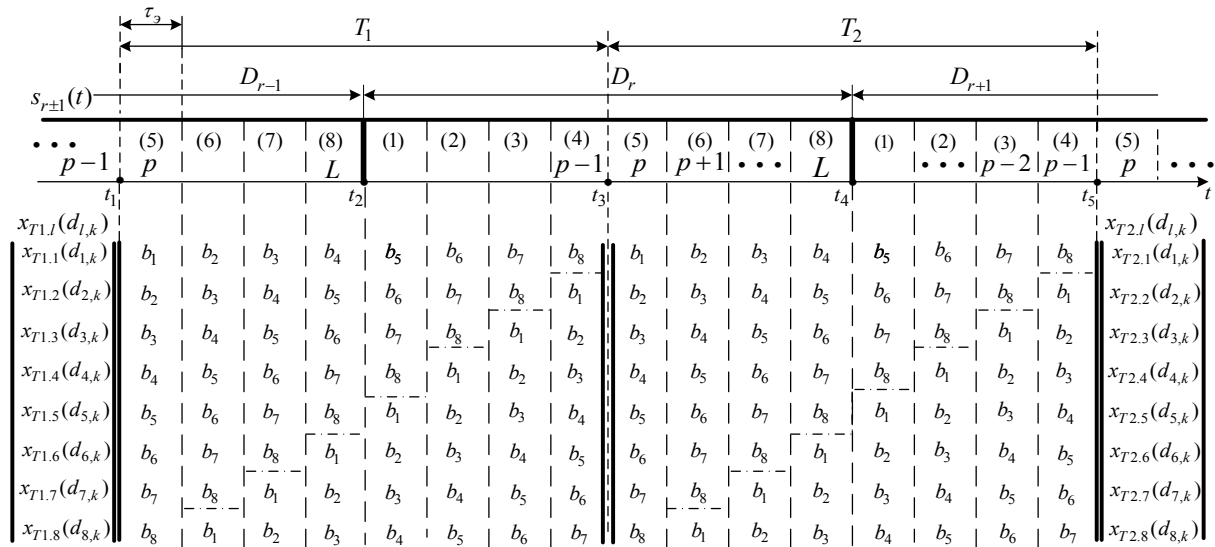


Рис. 5. Диаграммы входных сигналов и элементов матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{X}$

Fig. 5. Diagrams of incoming signals and elements of matrices  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{X}$

При поиске сигнала с дополнительной ФМ навигационным сообщением в двоичной форме  $D_r$  может возникнуть ситуация, при которой когерентное накопление станет невозможным. Это можно увидеть при рассмотрении рис. 5, где схематично совместно показаны диаграммы анализируемых сигналов  $s_{r\pm i}(t)$  при дополнительной ФМ навигационным сообщением посредством двоичных символов  $D_r$  и в соответствии с ними элементы перемножаемых матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{X}$ . На рис. 5. анализ сигнала производится на интервалах  $\{T_1\} = [t_1, t_3]$  и  $\{T_2\} = [t_3, t_5]$ . На интервале анализа  $T_1$  вычисляются поэлементные корреляции, соответствующие матрице-столбцу  $\mathbf{X}_{T1} = [x_{T1,1}(d_{1,k}) \ x_{T1,2}(d_{1,k}) \ \dots \ x_{T1,8}(d_{1,k})]^T$ , изображённому слева, а на интервале анализа  $T_2$  вычисляются поэлементные корреляции, соответствующие матрице-столбцу  $\mathbf{X}_{T2} = [x_{T2,1}(d_{1,k}) \ x_{T2,2}(d_{1,k}) \ \dots \ x_{T2,8}(d_{1,k})]^T$ , изображённому справа. Между матрицами-столбцами расположены матрицы  $\mathbf{B}$  двоичных элементов  $b_{kl}$ . Интервалу анализа  $T_1$  соответствует фрагмент окончания сигнала с номера элемента  $p$  по  $L$  элемент при модулирующем символе  $D_{r-1} = 1$  (для примера) и фрагмент начала сигнала с элемента 1 по  $p-1$  элемент при модулирующем символе  $D_r = 0$  (для примера). В этом случае, вычисленные поэлементные корреляции  $x_{T1,i}(d_{l,k})$  для номеров  $p \div L$  будут определяться с учётом значения символа  $D_{r-1} = 1$

(18), а вычисленные поэлементные корреляции для номеров  $1 \div p-1$  будут определяться с учётом значения символа для номеров  $p \div L$  будут определяться с учётом значения символа  $D_{r-1}=1$  (18), а вычисленные поэлементные корреляции для номеров  $1 \div p-1$  будут определяться с учётом значения символа  $D_r=0$  (18). Отсюда видно, что знаки у вычисленных групп поэлементных корреляций (для примера при  $L=8$  – это вычисленные первые 4 и вторые 4 поэлементные корреляции) будут противоположными. Если представить матрицу  $\mathbf{B}$  как сумму левой верхней треугольной матрицы  $\mathbf{B}_в$  и правой нижней треугольной матрицы  $\mathbf{B}_н$ , то матрицу корреляций  $\mathbf{Y}_{T1}$ , вычисленную на первом интервале, можно записать в краткой форме

$$\mathbf{Y}_{T1} = \mathbf{B} \times \mathbf{X}_{T1} = \mathbf{B}_в \times \mathbf{X}_{T1} + \mathbf{B}_н \times \mathbf{X}_{T1} = \mathbf{Y}_{T1в} + \mathbf{Y}_{T1н} \quad (33)$$

или в развёрнутой форме

$$\mathbf{Y}_{T1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,L-1} & b_{1L} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2,L-1} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{L-1,1} & b_{L-1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{L,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{T1.1}(d_{1k}) \\ x_{T1.2}(d_{2k}) \\ \dots \\ x_{T1.l}(d_{lk}) \\ \dots \\ x_{T1.L}(d_{Lk}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2L} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{3,L-1} & b_{3L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b_{L-1,3} & \dots & b_{L-1,L-1} & b_{L-1,L} \\ 0 & b_{L2} & b_{L3} & \dots & b_{L,L-1} & b_{L,L} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{T1.1}(d_{1k}) \\ x_{T1.2}(d_{2k}) \\ \dots \\ x_{T1.l}(d_{lk}) \\ \dots \\ x_{T1.L}(d_{Lk}) \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где элементы матриц  $\mathbf{B}_в$  и  $\mathbf{B}_н$  определяются через (23) элементами матрицы  $\mathbf{B}$  (22). Из (34) и рис. 5 следует, что первую группу поэлементных корреляций можно учесть в первом произведении матриц  $\mathbf{B}_в$  и  $\mathbf{X}_{T1}$ , а вторую группу поэлементных корреляций можно учесть во втором произведении матриц  $\mathbf{B}_н$  и  $\mathbf{X}_{T1}$ .

Интервалу анализа  $T_2$  соответствует фрагмент окончания сигнала также с номера элемента  $p$  по  $L$  элемент теперь при модулирующем символе  $D_r=1$  (для примера) и фрагмент начала сигнала также с элемента 1 по  $p-1$  элемент теперь при модулирующем символе  $D_{r+1}=0$  (для примера). В этом случае, вычисленные поэлементные корреляции  $x_{T2.l}(d_{l,k})$  для номеров  $p \div L$  будут определяться с учётом значения символа  $D_r=1$  (18), а вычисленные поэлементные корреляции для номеров  $1 \div p-1$  будут определяться с учётом значения символа  $D_{r+1}=1$  (18). Отсюда видно, что знаки у вычисленных вторых групп (третья и четвёртая) поэлементных корреляций (для примера при  $L=8$  – это вычисленные первые 4 и вторые 4 поэлементные корреляции) будут противоположными. Если представить матрицу  $\mathbf{B}$  как сумму левой верхней треугольной матрицы  $\mathbf{B}_в$  и правой нижней треугольной матрицы  $\mathbf{B}_н$ , то матрицу корреляций  $\mathbf{Y}_{T2}$ , вычисленную на втором интервале, можно записать в краткой форме

$$\mathbf{Y}_{T2} = \mathbf{B} \times \mathbf{X}_{T2} = \mathbf{B}_в \times \mathbf{X}_{T2} + \mathbf{B}_н \times \mathbf{X}_{T2} = \mathbf{Y}_{T2в} + \mathbf{Y}_{T2н}, \quad (35)$$

или в развёрнутой форме

$$\mathbf{Y}_{T2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,L-1} & b_{1L} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2,L-1} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{L-1,1} & b_{L-1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{L,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{T2.1}(d_{1k}) \\ x_{T2.2}(d_{2k}) \\ \dots \\ x_{T2.l}(d_{lk}) \\ \dots \\ x_{T2.L}(d_{Lk}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2L} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{3,L-1} & b_{3L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b_{L-1,3} & \dots & b_{L-1,L-1} & b_{L-1,L} \\ 0 & b_{L2} & b_{L3} & \dots & b_{L,L-1} & b_{L,L} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{T2.1}(d_{1k}) \\ x_{T2.2}(d_{2k}) \\ \dots \\ x_{T2.l}(d_{lk}) \\ \dots \\ x_{T2.L}(d_{Lk}) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где элементы матриц  $\mathbf{B}_g$  и  $\mathbf{B}_n$  определяются через (23) элементами матрицы  $\mathbf{B}$  (22). Из (36) и рис. 5 следует, что третью группу поэлементных корреляций можно учесть в первом произведении матриц  $\mathbf{B}_g$  и  $\mathbf{X}_{T2}$ , а четвёртую группу поэлементных корреляций можно учесть во втором произведении матриц  $\mathbf{B}_n$  и  $\mathbf{X}_{T2}$ .

Теперь, на основании (33)–(36) можно вычислить корреляции, соответствующие интервалу  $\{t\} = [t_2, t_4]$  (рис. 5) анализа сигнала при полном действии модулирующего символа  $D_r$ .

$$\mathbf{Y}_{Dr} = \mathbf{B}_n \times \mathbf{X}_{T1} + \mathbf{B}_g \times \mathbf{X}_{T2} = \mathbf{Y}_{T1n} + \mathbf{Y}_{T2g}. \quad (37)$$

Из (35) следует, анализ сигнала необходимо проводить на двух последовательных временных интервалах  $\{t_i\}$  и  $\{t_{i+1}\}$ . На первом временном интервале  $\{t_i\}$  синфазные и квадратурные корреляции вычисляются согласно (33) и (34):

$$\mathbf{Y}_{ti,n} = \mathbf{B}_n \times \mathbf{X}_{ti} \text{ и } \hat{\mathbf{Y}}_{ti,n} = \mathbf{B}_n \times \hat{\mathbf{X}}_{ti}, \quad (38)$$

а на втором временном интервале  $\{t_{i+1}\}$  синфазные и квадратурные корреляции вычисляются согласно (35) и (36):

$$\mathbf{Y}_{ti+1,g} = \mathbf{B}_g \times \mathbf{X}_{ti+1} \text{ и } \hat{\mathbf{Y}}_{ti+1,g} = \mathbf{B}_g \times \hat{\mathbf{X}}_{ti+1}. \quad (39)$$

Итак, чтобы реализовать параллельный алгоритм поиска сигнала, инвариантный к дополнительной ФМ информационным сообщением, по вычисленным квадратурным корреляциям (38) и (39) могут быть получены требуемые синфазные и квадратурные корреляции

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{ti,n} + \mathbf{Y}_{ti+1,g}, \quad \hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{Y}}_{ti,n} + \hat{\mathbf{Y}}_{ti+1,g}. \quad (40)$$

### Заключение

Таким образом, предложенное в данной статье представление ШПС – ЧММС как двухпозиционного, с двоичной частотно-фазовой манипуляцией, позволяет, посредством использования матричного аппарата в алгоритмах поиска, вычислять значения модулей корреляций комплексных огибающих принятой смеси сигнала совместно с флуктуационной помехой и опорного сигнала, что существенно упрощает реализацию алгоритма поиска для  $L \gg 1$  (16383).

Разработка алгоритма матричных вычислений составляющих модулей корреляций комплексных огибающих с использованием параллельно-последовательного во времени накопления, существенно упрощает вычисления  $L$  модулей корреляций комплексных огибающих. При реализации необходимых вычислений на ПЛИС обеспечивается одновременное снижение аппаратных ресурсов ПЛИС, что позволяет проводить поиск практически за время не более длительности сигнала и в реальном времени.

Использование левой верхней и правой нижней треугольных бинарных матриц даёт возможность проводить поиск ШПС – ЧММС при когерентной обработке и некогерентном накоплении сигналов с дополнительной фазовой манипуляцией информационным сообщением без потери помехоустойчивости.

### Библиографические ссылки

1. Тузов Г. И. Статистическая теория приема сложных сигналов. М. : Советское радио, 1977. 400 с.
2. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М. : Радио и связь, 1978. 304 с.
3. Журавлёв В. И. Поиск и синхронизация в широкополосных системах связи. М. : Радио и связь, 1986. 241 с.
4. Перов А. И. Основы построения спутниковых радионавигационных систем. М. : Радиотехника, 2012. 240 с.

5. Лосев, В. В., Бродская Е. Б., Коржик В. И. Поиск и декодирование сложных дискретных сигналов. М. : Радио и связь, 1988. 224 с.
6. Ипатов В. П., Казаринов Ю. М., Коломенский Ю. А. Поиск, обнаружение и измерение параметров сигналов в радионавигационных системах. М. : Сов. радио, 1975. 296 с.
7. Бондаренко В. Н. Помехоустойчивость приёма спектрально-эффективных шумоподобных сигналов : монография. Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2015. 160 с.
8. Бондаренко В. Н. Помехоустойчивость временного дискриминатора шумоподобного сигнала // Радиотехника. 2009. № 5. С. 26–33.
9. Макаров С. Б., Цикин И. А. Передача дискретных сообщений по радиоканалам с ограниченной полосой пропускания. М. : Радио и связь, 1988. 304 с.
10. Ипатов, В. П., Маругин А. С., Платонов В. Д. Поиск шумоподобных сигналов с минимальной частотной манипуляцией // Радиотехника. 1991. №6. С. 47–49.
11. Бондаренко В. Н. Квазиоптимальный алгоритм поиска шумоподобного сигнала с минимальной частотной манипуляцией // Известия вузов России. Радиоэлектроника. 2007. Вып. 4. С. 24–31.
12. Osborne W. P., Luntz M. B. Coherent and Noncoherent Detection of CPFSK // IEEE Trans. 1974. Vol. COM-22, No. 8. P. 023–1036.
13. Ипатов В. П. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. М. : Техносфера, 2007. 487 с.
14. Шумоподобные сигналы в системах передачи информации / под ред. В. Б. Пестряков. М. : Радио и связь, 1982. 424 с.
15. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М. : Наука, 1986. 544 с.
16. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. М. : Сов. радио, 1975. 727 с.
17. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М. : Физматгиз, 1963, 660 с.
18. Zynq – 7010, Key Features and Benefits.

## References

1. Tuzov G. I. *Statisticheskaya teoriya priyoma slozhnykh signalov* [Statistical theory of complex signal reception]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1977, 400 p.
2. Varakin L. E. *Sistemy svyazi s shumopodobnymi signalami* [Communication systems with noise-like signals]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1978, 304 p.
3. Zhuravlyov V. I. *Poisk i sinkhronizatsiya v shirokopolosnykh sistemakh svyazi* [Search and synchronization in broadband communication systems]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1986, 241 p.
4. Perov A. I. *Osnovy postroyeniya spytnikovykh radionavigacionnykh sistem* [Fundamentals of building satellite radio navigation systems]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2012, 240 p.
5. Losev V. V., Brodskaya E. B., Korzhik V. I. *Poisk i dekodirovanie slozhnykh diskretnykh signalov* [Search and decoding of complex discrete signals]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1988, 224 p.
6. Ipatov V. P., Kazarinov Yu. M., Kolomenskiy Yu. A. *Poisk, obnaruzhenie i izmerenie parametrov signalov w radionavigacionnykh sistemakh* [Search, detection and measurement of signal parameters in radio navigation systems]. Moscow, Sov. radio Publ., 1975, 296 p.
7. Bondarenko V. N. *Pomekhoustoychivost priyema spektralno-efektivnykh shumopodobnykh signalov* [Noise immunity of receiving spectrally effective noise-like signals]. Krasnoyarsk, Sib. Feder. un-t Publ., 2015, 160 p.
8. Bondarenko V. N. [Noise immunity of the noise-like signal time discriminator]. *Radiotekhnika*. 2009, No. 5, P. 26–33 (In Russ.).
9. Makarov S. B., Zykin I. A. *Peredacha diskretnykh soobshcheniy po radiokanalam s ogranichenoy polosoy propuskaniya* [Transmission of discrete messages over radio channels with limited bandwidth]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1988, 304 p.

10. Ipatov V. P. [Search for noise-like signals with minimal frequency manipulation]. *Radiotekhnika*. 1991, No. 6, P. 47–49 (In Russ.).
11. Bondarenko V. N. [A quasi-optimal algorithm for finding a noise-like signal with minimal frequency manipulation]. *Izvestiya vuzov Rossii. Radioelektronika*. 2007, No. 4, P. 24–31 (In Russ.).
12. Osborne W. P., Luntz M. B. Coherent and Noncoherent Detection of CPFSK. *IEEE Trans.* 1974. Vol. COM-22, No. 8, P. 1023–1036.
13. Ipatov V. P. *Shirokopolosnye sistemy i kodovoe razdelenie signalov* [Broadband systems and code separation of signals]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2007, 487 p.
14. *Shumopodobnye signaly v sistemakh peredachi informaziyi* [Noise-like signals in information transmission systems]. Ed. V. B. Pestryakov. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1982, 424 p.
15. Bronshteyn I. N., Semendyaev K. A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vuzov* [Handbook of Mathematics for engineers and university students. Moscow, Nauka Publ., 1986, 544 p.
16. Fink L. M. *Teoriya peredachi diskretnykh soobshcheniy* [Theory of transmission of discrete messages]. Moscow, Sov. radio Publ., 1975, 727 p.
17. Demidovich B. P. *Osnovy vychislitelnoy matematiki* [Fundamentals of Computational Mathematics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 660 p.
18. Zynq – 7010, Key Features and Benefits.

© Мусонов В. М., Романов А. П., 2022

---

**Мусонов Владимир Михайлович** – кандидат технических наук, профессор кафедры ПНК; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва. E-mail: sen@sibsau.ru.

**Романов Александр Петрович** – кандидат технических наук, доцент кафедры РЭС, институт ИФ и РЭ; Сибирский федеральный университет. E-mail: offic@sfu-krus.ru.

**Vladimir Mikhailovich Musonov** – Cand. Sc., Professor of the APG Department; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: sen@sibsau.ru.

**Romanov Alexander Petrovich** – Cand. Sc., Docent of the RES Department, Institute of IF and RE; Siberian Federal University. E-mail: offic@sfu-krus.ru.

---

УДК 512.54

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-409-416

**Для цитирования:** Сенашов В. И. Оценка количества аperiodических слов // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 409–416. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-409-416.

**For citation:** Senashov V. I. [Estimation of the number of aperiodic words]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 409–416. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-409-416.

## Оценка количества аperiodических слов\*

В. И. Сенашов

Институт вычислительного моделирования СО РАН  
Российская Федерация, 660036, Красноярск, Академгородок, 50/44  
E-mail: sen1112home@mail.ru

В 1902 г. У. Бернсайд поставил вопрос о локальной конечности групп, все элементы которых имеют конечный порядок. Первый отрицательный ответ на него был получен в 1968 г. в работе П. С. Новикова – С. И. Адяна. Конечность свободной бернсайдовской группы периода  $n$  установлена в разное время для  $n = 2$ ,  $n = 3$  (У. Бернсайд),  $n = 4$  (У. Бернсайд; И. Н. Санов),  $n = 6$  (М. Холл). Доказательство бесконечности этой группы для нечетных показателей  $n \geq 4381$  было дано в работе П. С. Новикова – С. И. Адяна (1968), а для нечетных  $n \geq 665$  – в монографии С. И. Адяна (1975). В связи с этими результатами рассматриваем множество  $t$ -аperiodических слов. Под  $l$ -аperiodическим словом понимают слово  $X$ , если в нем нет непустых подслов вида  $Y^l$ . В монографии С. И. Адяна (1975) приведено доказательство С. Е. Аршона (1937) того, что в алфавите из двух букв существует бесконечное множество сколь угодно длинных 3-аperiodических слов. В монографии А. Ю. Ольшанского (1989) доказана теорема о бесконечности множества 6-аperiodических слов и получена оценка снизу количества таких слов любой данной длины. Наша задача получить оценку для функции  $f(n)$  количества  $t$ -аperiodических слов длины  $n$  в алфавите из двух букв. Полученные результаты могут быть полезны при кодировании информации в сеансах космосвязи.

*Ключевые слова:* группа, периодическое слово, аperiodическое слово, алфавит, локальная конечность.

## Estimation of the number of aperiodic words

V. I. Senashov

Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS  
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation  
E-mail: sen1112home@mail.ru

*In 1902 W. Burnside raised the issue of local finiteness of groups, all elements of which are of finite order. The first negative answer was obtained in 1968 in the article by P.S. Novikov and S.I. Adian. Finiteness of the free Burnside group of period  $n$  was established for  $n = 2$ ,  $n = 3$  (W. Burnside),  $n = 4$*

\* Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра и финансировании Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках создания и развития региональных научно-образовательных центров математики (Соглашение № 075-02-2021-1388).

This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2021-1388).

(W. Burnside, I. N. Sanov),  $n = 6$  (M. Hall). The proof of infinity of this group for odd  $n \geq 4381$  was given in the article by P. S. Novikov and S. I. Adian (1967), and for odd  $n \geq 665$  in the book by S. I. Adian (1975). In relation with these results we consider the set of  $m$ -aperiodic words. Word is called  $l$ -aperiodic if there are no non-empty subwords of the form  $Y^l$  in it. In the monograph by S. I. Adian (1975) it was shown the proof of S. E. Arshon (1937) of the fact that in the two-letters alphabet there is an infinite set of arbitrarily long 3-aperiodic words. In the book by A. Yu. Olshansky (1989) the theorem on the infinity of the set of 6-aperiodic words was proved, and a lower bound function for the number of words of a given length was obtained. Our aim is to get an estimate for the function  $f(n)$  of the number of  $m$ -aperiodic words of the length  $n$  in the two-letters alphabet. The results can be applied when encoding information in space communications.

*Keywords:* group, periodic word, aperiodic word, alphabet, local finiteness.

### Введение

В 1902 г. Уильям Бернсайд поставил вопрос о локальной конечности групп, в которых выполнено соотношение  $x^n = 1$  [1]. Впоследствии этот вопрос приобрел статус проблемы Бернсайда. Отрицательный ответ на него впервые был получен в 1968 г. в работах П. С. Новикова – С. И. Адяна [2–4].

Группа  $B(d, n)$  с  $d$  порождающими и тождественным соотношением  $x^n = 1$  называется сейчас свободной бернсайдовской группой ранга  $d$  и периода  $n$ . Ее конечность установлена в разное время для  $n = 2$  (тривиальный случай),  $n = 3$  (У. Бернсайд [1]),  $n = 4$  (У. Бернсайд [1] для  $d = 2$ ; И. Н. Санов [5] для произвольного  $d$ ),  $n = 6$  (М. Холл [6]). Доказательство бесконечности группы  $B(d, n)$ ,  $d \geq 2$ , для нечетных показателей  $n \geq 4381$  было дано в [2–4], а для нечетных  $n \geq 665$  – в монографии С. И. Адяна [7].

Более подробно с результатами по проблеме Бернсайда можно познакомиться по работе С. И. Адяна [8].

### Определение

$l$ -апериодическим словом называется слово  $X$ , если оно не содержит непустых подслов вида  $Y^l$ .

В монографии А. Ю. Ольшанского [10] доказана теорема о бесконечности множества 6-апериодических слов и получена оценка снизу количества таких слов любой данной длины. Автором в [9] была улучшена оценка из [10] количества 6-апериодических слов в алфавите из двух букв.

В связи с этими результатами рассмотрим множество  $m$ -апериодических слов в двухбуквенном алфавите для  $m \geq 2$ .

В статье [11] также получены результаты для 6-апериодических слов над трехбуквенным алфавитом. По этой теме автором опубликованы работы [12–15]. Результаты могут быть применены при кодировании информации в космической связи.

### Основные результаты

В 1906 г. А. Туэ установил существование неповторяющихся слов в трехбуквенном алфавите и 3-апериодических слов произвольной длины в любом неоднобуквенном алфавите [11] (см. также лемму 1 в [8]). В статье [16] С. Е. Аршон в 1937 г. доказал существование  $n$ -значной асимметричной (повторяющейся) последовательности для  $n \geq 3$ . В монографии С. И. Адяна [7] представлен метод Аршона для доказательства существования бесконечных 3-апериодических последовательностей в алфавите из двух символов.

В [10] доказана теорема 4.6 о бесконечности множества 6-апериодических слов и получена оценка функции  $f(n)$  числа таких слов длины  $n$ : в алфавите  $\{a, b\}$  существуют сколь угодно длинные 6-апериодические слова. При этом количество  $f(n)$  таких слов длины  $n$  больше чем  $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ .

В связи с этими результатами представляет интерес оценка числа  $m$ -апериодических слов в двухбуквенном алфавите.

Случай 2-апериодических слов в алфавите  $\{a, b\}$  легко рассматривается и такие слова можно сразу перечислить:

$$a, b, ab, ba, aba, bab.$$

Остальные случаи рассматриваются в теоремах 1–3.

При доказательстве теорем будем использовать метод А. Ю. Ольшанского из [10].

**Теорема 1.** Алфавит  $\{a, b\}$  содержит сколь угодно длинные  $m$ -апериодические слова для  $m \geq 5$ . При этом количество таких слов длины  $n$  больше, чем  $(\frac{3}{2})^n$ .

**Доказательство.** Сначала докажем неравенство  $f(n+1) > \frac{3}{2} \cdot f(n)$  по индукции.

База индукции:  $f(2) > \frac{3}{2} \cdot f(1)$ , где  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$ .

Каждое  $m$ -апериодическое слово длины  $n+1$  есть результат приписывания справа одной из букв  $a$  или  $b$  к  $m$ -апериодическому слову длины  $n$ . Можно получить  $2f(n)$  слов  $X$  длины  $n+1$ . Но некоторые из полученных слов могут содержать степени  $A^m$ . Нужно оценить число подобных возможностей.

Может получиться лишь равенство вида  $X \equiv YA^m$ , поскольку иначе уже начало длины  $n$  слова  $X$  длины  $n+1$  содержит  $A^m$ . Для слов  $A$  длины 1 (всего два таких слова) имеется меньше, чем  $2f(n+1-m)$  слов вида  $X \equiv YA^m$ , где слово  $Y$   $m$ -апериодично и  $|Y| = n+1-m$ :

$$\begin{aligned} & (\underbrace{\dots\dots}_{n+1-m} \underbrace{aa\dots a}_{m-1}) a, \\ & (\underbrace{\dots\dots}_{n+1-m} \underbrace{bb\dots b}_{m-1}) b. \end{aligned}$$

Существует 4 слова  $A$  длины 2. Количество соответствующих слов вида  $X \equiv YA^m$  длины  $n+1$  меньше, чем  $4f(n+1-2m)$ , где слово  $Y$   $m$ -апериодично длины  $n+1-2m$ .

Аналогично продолжая рассуждения, получаем:

$$f(n+1) > 2f(n) - 2f(n+1-m) - 2^2 f(n+1-2m) - 2^3 f(n+1-3m) - \dots$$

Поскольку по предположению индукции  $f(n) > (\frac{3}{2})^k \cdot f(n-k)$ , получается

$$f(n+1) > 2f(n) - (2(\frac{3}{2})^{-m+1} f(n) + 2^2 (\frac{3}{2})^{-2m+1} f(n) + 2^3 (\frac{3}{2})^{-3m+1} f(n) + \dots).$$

Вынося  $f(n)$  за скобки получаем

$$f(n+1) > f(n)(2 - (2(\frac{3}{2})^{-m+1} + 2^2 (\frac{3}{2})^{-2m+1} + 2^3 (\frac{3}{2})^{-3m+1} + \dots)) > 2 - \frac{2(\frac{3}{2})^{-m+1}}{1 - 2(\frac{3}{2})^{-m}} > \frac{3}{2} f(n)$$

для любых  $m \geq 5$  (так как  $\sqrt[m]{2} < \frac{3}{2}$  для любого  $m \geq 5$ , то геометрическая прогрессия в неравенстве является убывающей со знаменателем  $2(\frac{3}{2})^{-m}$ ).

Следовательно, неравенство  $f(n+1) > \frac{3}{2} f(n)$  верно для любых натуральных  $n$  для функции  $f(n)$  количества  $m$ -апериодических слов длины  $n$  при  $m \geq 5$ . Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 1, в частности, вытекает, что этот способ доказательства не проходит для доказательства оценки  $f(n) > (\frac{3}{2})^n$  функции  $f(n)$  количества 3- или 4-апериодических слов длины  $n$ . В следующей теореме показано, что этот способ не подходит для



доказательства оценки  $f(n) > (x)^n$  и для какого значения  $x$  из интервала  $[\sqrt[3]{2}, 2]$  для 3-апериодических слов и из интервала  $[\sqrt[4]{2}, 2]$  для 4-апериодических слов.

**Теорема 2.** Перенос доказательства теоремы 4.6 о 6-апериодических словах из [10] на случай 3- и 4-апериодических слов не приводит к доказательству соответствующей теоремы, т. е. для любого значения  $x$  из интервалов  $[\sqrt[3]{2}, 2]$  для 3-апериодических и  $[\sqrt[4]{2}, 2]$  для 4-апериодических слов не удастся доказать методом из [10], что число  $f_m(n)$   $m$ -апериодических слов длины  $n$  больше, чем  $x^n$  при  $m = 3$  или  $m = 4$ .

**Доказательство.** Проведем рассуждения, аналогичные приведенным в [10]. Но теперь мы не фиксируем значение  $(3/2)^n$  для основания показательной функции, а вводим переменную  $x$  и ищем оценку в виде  $f(n) > x^n$  для  $m = 3$  и  $m = 4$ .

Сначала докажем неравенство  $f(n+1) > x \cdot f(n)$  по индукции. При этом введем ограничения на  $x$ . Чтобы удовлетворить неравенству  $f(1) = 2 > x$  для  $m = 3$  и  $m = 4$ , подложим  $x < 2$ .

База индукции  $f(2) > x \cdot f(1)$ , где  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$ . База индукции справедлива при  $x < 2$ .

Каждое 3- или 4-апериодическое слово длины  $n+1$  есть результат приписывания справа одной из букв  $a$  или  $b$  к 3-апериодическому (соответственно 4-апериодическому) слову длины  $n$ . Можно получить  $2f(n)$  слов  $X$  длины  $n + 1$  ( $m = 3$  или  $m = 4$ ). Но некоторые из полученных слов могут содержать степени  $A^3$  (соответственно степени  $A^4$ ). Нужно оценить число подобных возможностей.

Может получиться лишь равенство вида  $X \equiv YA^3$  (соответственно  $X \equiv YA^4$ ), поскольку иначе уже начало длины  $n$  слова  $X$  длины  $n + 1$  содержит  $A^3$  (или  $A^4$ ). Для слов  $A$  длины 1 (всего два таких слова) имеется меньше, чем  $2f(n-2)$  (соответственно  $2f(n-3)$  слов вида  $X \equiv YA^3$  (соответственно  $X \equiv YA^4$ ), где слово  $Y$  3-апериодично (4-апериодично) и  $|Y| = n - 2$  (соответственно  $|Y| = n - 3$ ):

$$\begin{aligned} & (\underbrace{\dots}_{n-2} aa) a, (\underbrace{\dots}_{n-2} bb) b \text{ для случая 3-апериодических слов;} \\ & (\underbrace{\dots}_{n-3} aaa) a, (\underbrace{\dots}_{n-3} bbb) b \text{ для случая 4-апериодических слов.} \end{aligned}$$

Существует 4 слова  $A$  длины 2. Количество соответствующих слов вида  $X \equiv YA^3$  (соответственно  $X \equiv YA^4$ ) длины  $n + 1$  меньше, чем  $4f(n-5)$  (соответственно  $4f(n-7)$ ), где слово  $Y$  3-апериодично длины  $n-5$  (соответственно 4-апериодично длины  $n-7$ ).

Аналогично продолжая рассуждения, получаем

$$f(n+1) > 2f(n) - 2f(n-2) - 2^2 f(n-5) - 2^3 f(n-8) - \dots$$

для 3-апериодических слов;

$$f(n+1) > 2f(n) - 2f(n-3) - 2^2 f(n-7) - 2^3 f(n-11) - \dots$$

для 4-апериодических слов.

Поскольку по предположению индукции  $f(n) > x^k \cdot f(n-k)$ , получается соответственно

$$f(n+1) > 2f(n) - (2(x)^{-2} f(n) + 2^2(x)^{-5} f(n) + 2^3(x)^{-8} f(n) + \dots)$$

и

$$f(n+1) > 2f(n) - (2(x)^{-3} f(n) + 2^2(x)^{-7} f(n) + 2^3(x)^{-11} f(n) + \dots).$$

Вынося  $f(n)$  за скобки получаем

$$f(n+1) > f(n)(2 - (2(x)^{-2} + 2^2(x)^{-5} + 2^3(x)^{-8} + \dots))$$

и соответственно

$$f(n+1) > f(n)(2 - (2(x)^{-3} + 2^2(x)^{-7} + 2^3(x)^{-11} + \dots)).$$

Введем еще ограничения  $\sqrt[3]{2} < x$  в первом случае и  $\sqrt[4]{2} < x$  во втором для того, чтобы геометрические прогрессии в правых частях неравенств были убывающими.

Обозначим вторые сомножители правых частей за  $S$  и применим формулу для суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем  $2x^{-3}$  для 3-апериодических слов и  $2x^{-4}$  для 4-апериодических слов:

$$S = 2 - \frac{2x^{-2}}{1 - 2x^{-3}}, \quad S = 2 - \frac{2x^{-3}}{1 - 2x^{-4}}.$$

Неравенство  $f(n+1) > x \cdot f(n)$  будет выполняться при  $S > x$ .

Преобразуем последние неравенства для обоих случаев:

$$S - x = \frac{2 - 4x^{-3} - 2x^{-2} + 2x^{-2} - x}{1 - 2x^{-3}} > 0, \quad \text{при } m = 3,$$

$$S - x = \frac{2 - 4x^{-4} - 2x^{-3} + 2x^{-3} - x}{1 - 2x^{-4}} > 0, \quad \text{при } m = 4.$$

После приведения подобных получаем

$$\frac{2 - 4x^{-3} - x}{1 - 2x^{-3}} > 0, \quad \frac{2 - 4x^{-4} - x}{1 - 2x^{-4}} > 0.$$

Так как  $1 - 2x^{-3} > 0$  в первом случае и  $1 - 2x^{-4} > 0$  во втором, получаем неравенства:  $2 - 4x^{-3} - x > 0$ ,  $2 - 4x^{-4} - x > 0$ .

Нас интересует решения этих неравенств в интервалах  $(\sqrt[3]{2}; 2)$  и  $(\sqrt[4]{2}; 2)$  соответственно.

Оказывается, что неравенства в данных интервалах решений не имеют. Теорема доказана.

Как показано в теореме 2 доказательство 1 не проходит для случая  $m = 4$ . В следующей теореме докажем, что утверждение теоремы 1 тем не менее верно для  $m = 4$ . Для случая  $m = 3$  доказательство таким же методом, как в теореме 3, не проходит.

**Теорема 3.** В алфавите  $\{a, b\}$  существует сколь угодно длинные 4-апериодические слова.

Более того, число  $f(n)$  таких слов длины  $n$  больше, чем  $(\frac{3}{2})^n$ .

**Доказательство.** Используем ту же схему, что и в теореме 1, но будем отбрасывать меньше лишних слов.

Заметим, что  $f(1) = 2 > \frac{3}{2}$ .

Докажем неравенство  $f(n+1) > \frac{3}{2} \cdot f(n)$  по индукции.

База индукции:  $f(2) > \frac{3}{2} \cdot f(1)$ , где  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$ .

Каждое 4-апериодическое слово длины  $n + 1$  есть результат приписывания справа одной из букв  $a$  или  $b$  к 4-апериодическому слову длины  $n$ . Можно получить  $2f(n)$  слов  $X$  длины  $n + 1$ . Но некоторые из полученных слов могут содержать степени  $A^4$ . Нужно оценить число подобных возможностей.

Может получиться лишь равенство вида  $X \equiv YA^4$ , поскольку иначе уже начало длины  $n$  слова  $X$  длины  $n + 1$  содержит  $A^4$ . Для слов  $A$  длины 1 (всего два таких слова) имеется меньше, чем  $2f(n-3)$  слов вида  $X \equiv YA^4$ , где слово  $Y$  4-апериодично и  $|Y| = n - 3$ :

$$\left(\underbrace{\dots}_{n-3} aaa\right) a$$

$$\left(\underbrace{\dots}_{n-3} bbb\right) b.$$

На самом деле среди слов  $Y$  первого вида нужно брать только те, которые заканчиваются на  $b$ , так как иначе уже слово в скобках содержало бы  $a^4$ , что противоречит его 4-апериодичности. Аналогично среди слов  $Y$  второго вида нужно брать только те, которые заканчиваются на  $a$ . Таким образом, для слов  $A$  длины 1 имеется меньше, чем  $f(n-3)$  слов вида  $X \equiv YA^4$ , где слово  $Y$  4-апериодично и  $|Y| = n-2$ .

Существует 4 слова  $A$  длины 2. Количество соответствующих слов вида  $X \equiv YA^4$  длины  $n+1$  меньше, чем  $4f(n-7)$ , где слово  $Y$  4-апериодично длины  $n-7$ :

$$\left(\underbrace{\dots}_{n-7} aa\ aa\ aa\ a\right) a$$

$$\left(\underbrace{\dots}_{n-7} ba\ ba\ ba\ b\right) a$$

$$\left(\underbrace{\dots}_{n-7} ab\ ab\ ab\ a\right) b$$

$$\left(\underbrace{\dots}_{n-7} bb\ bb\ bb\ b\right) b.$$

Но такие слова, как в скобках первого и последнего слов уже не содержатся в множестве 4-апериодических слов длины  $n$ , поэтому их надо убрать из этого списка. Во втором слове подслово  $Y$  длины  $n-7$  не может заканчиваться на  $a$ , так как иначе уже слово в скобках содержало бы  $(ab)^4$ , что противоречит его 4-апериодичности. Аналогично в третьем слове подслово  $Y$  длины  $n-7$  не может заканчиваться на  $b$ , так как иначе уже слово в скобках содержало бы  $(ba)^4$ . Таким образом, слов вида  $X \equiv YA^4$  длины  $n+1$  меньше, чем  $f(n-7)$ , где  $Y$  – 4-апериодическое слово длины  $n-7$ .

Аналогично продолжая рассуждения, получаем

$$f(n+1) > 2f(n) - f(n-3) - ((2^2 - 2)/2)f(n-7) - ((2^3 - 2)/2)f(n-11) - \dots$$

Поскольку по предположению индукции  $f(n) > (3/2)^k \cdot f(n-k)$ , получается

$$\begin{aligned} f(n+1) > 2f(n) - (2 \cdot (3/2)^{-3} f(n) + 2^2 \cdot (3/2)^{-7} f(n) + 2^3 \cdot (3/2)^{-11} f(n) + \dots) + \\ + ((3/2)^{-3} f(n) + 2 \cdot (3/2)^{-7} f(n) + 2^2 \cdot (3/2)^{-11} f(n) + \dots) + \\ + ((3/2)^{-7} f(n) + (3/2)^{-11} f(n) + \dots) \end{aligned}$$

Вынося  $f(n)$  за скобки, получаем

$$\begin{aligned} f(n+1) > f(n)(2 - (2 \cdot (3/2)^{-3} + 2^2 \cdot (3/2)^{-7} + 2^3 \cdot (3/2)^{-11} + \dots) + \\ + ((3/2)^{-3} + 2 \cdot (3/2)^{-7} + 2^2 \cdot (3/2)^{-11} + \dots) + \\ + ((3/2)^{-7} + (3/2)^{-11} + \dots)) \end{aligned}$$

Обозначим второй множитель правой части за  $S$  и применим формулу для суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем  $2\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$  для первой и второй прогрессии и со знаменателем  $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$  для третьей:

$$S = 2 - \frac{2(3/2)^{-3}}{1 - 2(3/2)^{-4}} + \frac{(3/2)^{-3}}{1 - 2(3/2)^{-4}} + \frac{(3/2)^{-7}}{1 - (3/2)^{-4}}.$$

Это значение  $S$  приближенно равно 1,58, что больше, чем  $3/2$ . Теорема доказана. Непосредственно из теорем 1 и 3 вытекает следующее.

**Следствие.** В алфавите  $\{a, b\}$  существует сколь угодно длинные  $t$ -апериодические слова при  $t \geq 4$ . Более того, число таких слов  $f(n)$  длины  $n$  больше, чем  $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ .

#### Заключение

Проблема оценки количества апериодических слов до сих пор изучается. Рассмотрено множество  $t$ -апериодических слов в трехбуквенном алфавите и получена оценка функции числа таких слов любой заданной длины.

#### Библиографические ссылки

1. Burnside W. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // *Quart. J. Pure. Appl. Math.* 1902. Vol. 33. P. 230–238.
2. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1968. № 1 (32). С. 212–244.
3. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. II // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1968. № 2 (32). С. 251–524.
4. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. III // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1968. № 3 (32). С. 709–731.
5. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // *Уч. зап. ЛГУ.* 1940. Т. 55. С. 166–170.
6. Холл М. Теория групп. М. : ИЛ. 1962. 468 с.
7. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М. : Наука. 1975. 336 с.
8. Адян С. И. Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы // *Успехи мат. наук.* 2010. Т. 65, вып. 5 (395). С. 5–60.
9. Сенашов В. И. Улучшение оценки количества 6-апериодических слов фиксированной длины // *Вестник СибГАУ.* 2016. № 2 (17). С. 168–172.
10. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М. : Наука. 1989. 448 с.
11. Senashov V. I. 6-aperiodic words over the three-letter alphabet // *Сибирский журнал науки и технологий.* 2020. № 3 (21). С. 333–336.
12. Сенашов В. И. Апериодические слова // *Решетневские чтения : материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 55-летию Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева (10–14 нояб. 2015, г. Красноярск) : в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2015. Ч. 2. С. 132–133.*
13. Сенашов В. И. Оценка количества 5-апериодических слов // *Вестник Тувинского гос. ун-та. Технические и физико-математические науки.* 2017. № 3. С. 132–138.
14. Сенашов В. И. Оценка количества 12-апериодических слов фиксированной длины // *Вестник СибГАУ.* 2017. № 1 (18). С. 93–96.
15. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih // *Norcke Vid. Selsk. skr., I Mat. Nat. Kl. Christiania.* 1906. Bd. 7. P. 1–22.
16. Аршон С. Е. Доказательство существования  $n$ -значных бесконечных асимметричных последовательностей // *Мат. сб.* 1937. № 4 (2 (44)). С. 769–779.

#### References

1. Burnside W. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. *Quart. J. Pure. Appl. Math.* 1902, Vol. 33, P. 230–238.

2. Novikov P. S., Adyan S. I. [On infinite periodic groups]. *Izv. AN SSSR, Ser. mat.* 1968, No. 1 (32), P. 212–244 (In Russ.).
3. Novikov P. S., Adyan S. I. [On infinite periodic groups. II]. *Izv. AN SSSR, Ser. mat.* 1968, No. 2 (32), P. 251–524 (In Russ.).
4. Novikov P. S., Adyan S. I. [On infinite periodic groups. III]. *Izv. AN SSSR, Ser. mat.* 1968, No. 3 (32), P. 709–731 (In Russ.).
5. Sanov I. N. [Solving the Burnside problem for exponent 4]. *Uch. Zap. LGU.* 1940, Vol. 55, P. 166–170 (In Russ.).
6. Hall M. *Teoriya grupp* [Group Theory]. Moscow, IL Publ., 1962, 468 p.
7. Adyan S. I. *Problema Bernsayda i tozhdestva v gruppakh* [Burnside Problem and Identities in Groups]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 336 p.
8. Adyan S. I. [Burnside's problem and related questions]. *Uspekhi Mat. sciences.* 2010, Vol. 65, Iss. 5 (395), P. 5–60 (In Russ.).
9. Senashov V. I. [Improved estimates of the number 6-aperiodic words of fixed length]. *Vestnik SibGAU.* 2016, No. 2 (17), P. 168–172 (In Russ.).
10. Olshansky A. Yu. *Geometriya opredelyayushchikh sootnosheniy v gruppakh* [Geometry of defining relations in groups]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 448 p.
11. Senashov V. I. [6-aperiodic words over the three-letter alphabet]. *Siberian Journal of Science and Technology.* 2020, No. 3 (21), P. 333–336.
12. Senashov V. I. [Aperiodic words]. *Reshetnevskiye chteniya: materialy XIX Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., posvyashch. 55-letiyu Sib. gos. aerokosmich. un-ta im. akad. M. F. Reshetneva* [Reshetnev Readings: materials of XIX Intern. scientific and practical. conf. for 55th anniversary of Sib. State. Aerokosmich. Univ. Acad. M. F. Reshetnev]. (10–14 Nov. 2015, Krasnoyarsk): 2 parts. Under total. Ed. of Y. Y. Loginov; Sib. State. Aerokosmich. Univ, Krasnoyarsk, 2015, Part 2, P. 132–133 (In Russ.).
13. Senashov V. I. Estimation of the number of 5-aperiodic words. *Bulletin of Tuva State University. Technical and physical and mathematical sciences.* 2017, No. 3, P. 132–138 (In Russ.).
14. Senashov V. I. [Estimation of the number of 12-aperiodic words of fixed length]. *Vestnik SibGAU.* 2017, No. 1 (18), P. 93–96 (In Russ.).
15. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih. *Norcke Vid. Selsk. skr., I Mat. Nat. Kl. Christiania.* 1906, Bd. 7, P. 1–22.
16. Arshon S. E. [Proof of existence of  $n$ -unit infinite asymmetric sequences]. *Mat. sb.* 1937, No. 4 (2 (44)), P. 769–779 (In Russ.).

© Сенашов В. И., 2022

---

**Сенашов Владимир Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник; Институт вычислительного моделирования СО РАН, профессор кафедры алгебры и математической логики; Сибирский федеральный университет. E-mail: sen1112home@mail.ru.

**Senashov Vladimir Ivanovich** – Dr. Sc., professor, leader researcher; Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS, professor of algebra and logic department; Siberian Federal University. E-mail: sen1112home@mail.ru.

---

УДК 539.374

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-417-422

**Для цитирования:** Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Законы сохранения и решения первой краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 417–422. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-417-422.

**For citation:** Senashov S. I., Savostyanova I. L. [Conservation laws and solutions of the first boundary value problem for equations of two-dimensional elasticity theory]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 417–422. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-417-422.

## Законы сохранения и решения первой краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости

С. И. Сенашов<sup>\*</sup>, И. Л. Савостьянова

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

<sup>\*</sup>E-mail: sen@sibsau.ru

*Известно, что если система дифференциальных уравнений допускает группу непрерывных преобразований, то система может быть представлена в виде совокупности двух систем дифференциальных уравнений. Как правило, эти системы имеют меньший порядок, чем исходная система. Первая система – автоморфная, характеризуется тем, что все ее решения получаются из одного решения с помощью преобразований этой группы. Вторая система – разрешающая, ее решения под действием группы переходят сами в себя. Разрешающая система несет основную информацию об исходной системе. В данной работе изучаются автоморфная и разрешающая системы, двумерные стационарные уравнения упругости, которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Впервые построены бесконечные серии законов сохранения для разрешающей и автоморфной систем уравнений. Поскольку двумерная система уравнений упругости линейна, то таких законов имеется бесконечно много. В данной работе построена бесконечная серия законов сохранения линейных по первым производным. Именно эти законы позволили решить первую краевую задачу для уравнений теории упругости в двумерном случае. Эти решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по контуру исследуемой области.*

*Ключевые слова:* двумерная упругость, законы сохранения, решение краевых задач.

## Conservation laws and solutions of the first boundary value problem for equations of two-dimensional elasticity theory

S. I. Senashov<sup>\*</sup>, I. L. Savostyanova

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

<sup>\*</sup>E-mail: sen@sibsau.ru

*If a system of differential equations admits a group of continuous transformations, then the system can be represented as a set of two systems of differential equations, it is known. As a rule, these systems have a smaller order than the original system. The first system is automorphic, characterized by the fact that all its solutions are obtained from a single solution using transformations of this group. The second system is permissive, its solutions, under the action of the group, pass into themselves. The resolving system carries basic information about the source system. Automorphic and resolving systems, two-dimensional stationary elasticity equations are studied in this work. They are systems of first-order differential equations. Infinite*

series of conservation laws for a resolving system of equations and an automorphic system are constructed for the first time in this work. Since the two-dimensional system of elasticity equations is linear, there are infinitely many such laws. In this paper, an infinite series of linear conservation laws with respect to the first derivatives is constructed. It was these laws that made it possible to solve the first boundary value problem for the equations of elasticity theory in the two-dimensional case. These solutions are constructed in the form of quadratures, these quadratures are calculated along the contour of the studied area.

*Keywords:* two-dimensional elasticity, conservation laws, solution of boundary value problems.

### Введение

Линейные уравнения теории упругости с групповой точки зрения изучаются уже достаточно давно [1; 2]. Сначала была найдена группа точечных преобразований и перечислены все инвариантные решения [2]. Далее было выполнено групповое расслоение уравнений Ламе [3]. Хотя техника выполнения группового расслоения известна уже давно [1], не для многих систем уравнений оно выполнено. В этом смысле уравнения теории упругости составляют приятное исключение. Групповое расслоение позволило лучше понять, почему методы комплексного переменного так широко используются в двумерной теории упругости. Это происходит потому, что разрешающая система для двумерных уравнений теории упругости есть система уравнений Коши – Римана. В [4; 5] законы сохранения впервые использованы для решения краевых задач, в частности, уравнений пластичности. В [6] построены законы сохранения для плоской теории упругости, но они не были использованы для решения краевых задач. В предлагаемой работе построены новые законы сохранения для разрешающей и автоморфной систем. На их основе решена первая краевая задача для двумерных уравнений упругости.

### Постановка задачи

Пусть предлагается следующая связь тензоров напряжений и тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22}, \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{11},\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $\lambda > 0, \mu > 0$  – постоянные Ламе, т. е. (1) есть классический закон Гука для изотропного однородного случая.

Подставляя (1) в уравнения равновесия, в случае отсутствия массовых сил получаем

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \lambda v_{xy} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) &= 0, \\ \mu(u_{xy} + v_{xy}) + (\lambda + 2\mu)v_{yy} + \lambda u_{xy} &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

где  $u, v$  – компоненты вектора деформаций, индексы внизу, если не указано иное, означают производные по соответствующим переменным.

Известно, что система уравнений (2) эллиптического типа. Это определяет вид законов сохранения и решение краевых задач. Групповые свойства дифференциальных уравнений описаны в работе [1]. Групповые свойства уравнений упругости изучены в работе [2]. В работах [7; 8] изучались групповые свойства трехмерных уравнений линейной теории упругости и асимметричных уравнений упругости в динамическом случае. Там, в частности, показано, что система (2) допускает бесконечную группу точечных преобразований, порождаемую операторами:

$$X = h^1 \partial_u + h^2 \partial_v, \quad (3)$$

где  $h^1, h^2$  – произвольное решение уравнений Коши – Римана:

$$h_x^1 + h_y^2 = 0, \quad h_y^1 - h_x^2 = 0. \quad (4)$$

Сделаем групповое расслоение системы уравнений (2) по методу [1] на подалгебре, порождаемой (3). Для этого продолжим операторы (3) на первые производные. Имеем

$$X_1 = X + h_x^1 \partial_{u_x} + h_y^2 \partial_{v_y} + h_y^1 \partial_{u_y} + h_x^2 \partial_{v_x}, \quad (5)$$

Дифференциальные инварианты для (5), с учетом (4), имеют вид

$$I_1 = x, \quad I_2 = y, \quad I_3 = u_x + v_y, \quad I_4 = u_y - v_x. \quad (6)$$

Тогда автоморфная система уравнений имеет вид

$$u_x + v_y = \theta(x, y), \quad u_y - v_x = \omega(x, y). \quad (7)$$

Напомним некоторые свойства автоморфных систем. Любое решение автоморфной системы может быть получено из одного решения этой системы с помощью преобразований, порождаемых оператором (3).

Подставляя (7) в (2) получаем разрешающую систему

$$F_1 = (\lambda + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y = 0, \quad F_2 = (\lambda + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x = 0, \quad (8)$$

Повторяя почти дословно рассуждения из [7], можно утверждать, что система (8) равносильна системе уравнений (2).

Поэтому построив решение системы (8) мы получим решение системы (2).

Пусть для системы (8) поставлена следующая краевая задача:

$$\theta|_L = \theta_0(x, y), \quad \omega|_L = \omega_0(x, y), \quad (9)$$

где  $L$  – некоторая гладкая замкнутая кривая,  $\theta_0(x, y)$ ,  $\omega_0(x, y)$  – известные гладкие функции.

Для решения этой задачи построим законы сохранения для системы уравнений (8).

### Законы сохранения

В силу линейности системы (8) она будет иметь бесконечное число законов сохранения. В работе будут найдены только те законы сохранения, которые позволят решить краевую задачу (9).

**Определение.** Законом сохранения для системы уравнений (8) назовем выражение вида

$$A_x(x, y, \theta, \omega) + B_y(x, y, \theta, \omega) = \alpha F_1 + \beta F_2 = 0, \quad (10)$$

где  $\alpha, \beta$  – некоторые функции, которые не равны тождественно нулю одновременно.  $A, B$  называются компонентами сохраняющегося тока.

Более подробная информация по построению законов сохранения для произвольных систем дифференциальных уравнений может быть найдена в [8–10]. Заметим, что впервые законы сохранения для уравнений линейной теории упругости были найдены в работах [11; 12], но их невозможно было использовать для решения конкретных краевых задач.

Предположим, что компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = a^1\theta + a^2\omega, \quad B = b^1\theta + b^2\omega, \quad (11)$$

где  $a^1, a^2, b^1, b^2$  – некоторые функции от  $x, y$ .

Подставляя (11) в (10), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} a^1 = \alpha(\lambda + 2\mu), \quad a^2 = \beta\mu, \quad b^1 = \beta(\lambda + 2\mu), \quad a^2 = -\alpha\mu, \\ a_x^1 + b_y^1 = 0, \quad a_x^2 + b_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда имеем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \quad \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (13)$$

Из (10) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_L -A dy + B dx. \quad (14)$$

### Решение первой краевой задачи

Пусть  $(x_0, y_0) \in S$ , такая точка, в которой компоненты сохраняющегося тока имеют особенности, тогда из (14) следует

$$\oint_L -A dy + B dx = -\oint_\varepsilon -A dy + B dx, \quad (15)$$

где  $\varepsilon: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$  – окружность радиуса  $\varepsilon$  вокруг точки  $(x_0, y_0) \in S$ . Вычислим интеграл в правой части (15) для разных решений уравнений Коши – Римана. В качестве решений выберем такие, которые имеют особенность в точке  $(x_0, y_0) \in S$ . Пусть

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (16)$$



тогда из правой части (15) имеем

$$\oint_{\varepsilon} -A dy + B dx = \oint_{\varepsilon} -(\alpha(\lambda + 2\mu)\theta + \beta\mu\omega) dy + (\alpha\mu\omega + \beta(\lambda + 2\mu)\theta) dx. \quad (17)$$

Подставим (16) в (17) и сделаем замену переменных по формулам  $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi$ ,  $y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$ , получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\varepsilon} -A dy + B dx &= \int_0^{2\pi} [ -((\lambda + 2\mu)\theta + \mu\omega) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \mu\omega ] d\varphi = \\ &= -2\pi [ (\lambda + 2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0) ]. \end{aligned} \quad (18)$$

В формуле (18) устремили  $\varepsilon \rightarrow 0$  и использовали теорему о среднем.

Теперь сделаем аналогичные вычисления, положив

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

В результате получим

$$\oint_{\varepsilon} -A dy + B dx = -2\pi\mu\omega(x_0, y_0). \quad (19)$$

Формулы (18) и (19) позволяют, с учетом граничных условий (9) и равенства (15), определить значения функций  $\theta$  и  $\omega$  в произвольной точке  $(x_0, y_0) \in S$ . Они имеют следующий вид:

$$2\pi [ (\lambda + 2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0) ] = \oint_L \frac{(\lambda + 2\mu)(x - x_0)\theta_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dy + \frac{\mu(y - y_0)\omega_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx,$$

$$2\pi\mu\omega(x_0, y_0) = \oint_L \frac{(\lambda + 2\mu)(y - y_0)\theta_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dy + \frac{\mu(x - x_0)\omega_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx.$$

Теперь, после восстановления решений разрешающей системы, найдем решения автоморфной системы, т. е. решения исходной системы уравнений (2). Имеем

$$F_3 = u_x + v_y - \theta(x, y) = 0, \quad F_4 = u_y - v_x - \omega(x, y) = 0. \quad (20)$$

Здесь в правой части стоят известные функции, которые найдены в предыдущем пункте. Найдем законы сохранения уравнений (20) в следующем виде:

$$A = a^3\theta + a^4\omega + c^1, \quad B = b^3\theta + b^4\omega + c^2, \quad (21)$$

где  $a^3, a^4, b^3, b^4, c^1, c^2$  – некоторые функции от  $x, y$ .

Имеем

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \alpha F_3 + \beta F_4 = 0, \quad (22)$$

Расщепляя систему уравнений (22), получаем

$$\begin{aligned} a^3 &= \alpha, \quad a^4 = -\beta, \quad b^3 = \beta, \quad b^4 = \alpha, \\ a_x^3 + b_y^3 &= 0, \quad a_x^4 + b_y^4 = 0, \quad c_x^1 + c_y^2 = -\alpha\theta - \beta\omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \quad \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (24)$$

Пусть для системы (2) поставлена следующая краевая задача:

$$u|_L = u_0(x, y), \quad v|_L = v_0(x, y), \quad (25)$$

Рассмотрим закон сохранения в виде

$$\oint_L -A dy + B dx = -\oint_{\varepsilon} -A dy + B dx. \quad (26)$$

Пусть решение уравнений (24) имеет вид

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (27)$$

Подставляем (27) в правую часть (26), получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\varepsilon} -A dy + B dx &= \oint_{\varepsilon} -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_{\varepsilon} -(\alpha \cos \phi - \beta \sin \phi + c^1) dy - (\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi + c^2) dx = -2\pi u(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть решение уравнений (24) имеет вид

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (29)$$

Подставляем (29) в правую часть (26), получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\varepsilon} -A dy + B dx &= \oint_{\varepsilon} -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_{\varepsilon} -(u \sin \phi - v \cos \phi + c^1) dy - (u \cos \phi - v \sin \phi + c^2) dx = -2\pi v(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (30)$$

В результате получаем формулы для вычисления компонент вектора деформации

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_L -A dy + B dx, \quad 2\pi v(x_0, y_0) = \oint_L -A dy + B dx, \quad (31)$$

где  $c^1 = \int \alpha \theta dx$ ,  $c^2 = \int \beta \omega dx$ .

### Заключение

В статье получены новые бесконечные серии законов сохранения для разрешающей системы уравнений, а также для автоморфной системы, построенные для двумерных уравнений упругости. Эти законы позволили построить аналитическое решение краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости в стационарном случае. В статье продолжено решение краевых задач с помощью законов сохранения, начатое в работах [13–15].

### Библиографические ссылки

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
2. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1983. 239 с.
3. Прудников В. Ю., Чиркунов Ю. А. Групповое расслоение уравнений Ламе // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52, № 3. С. 471–477.
4. Сенашов С. И. О законах сохранения уравнений пластичности // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320, № 3. С. 606–608.
5. Сенашов С. И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений пластичности // Доклады РАН. 1995. Т. 345, № 5. С. 619–620.
6. Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Законы сохранения уравнений плоской теории упругости // Вестник СибГАУ. 2014. № 1(53). С. 79–81.
7. Бельмезов Н. Ф., Чиркунов Ю. А. Точные решения уравнений динамической асимметричной модели теории упругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 4. С. 38–50.
8. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: СО РАН, 201 с.
9. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math.Soc. 1988. P. 415–439.
10. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Симметрии и законы сохранения. М.: Фактор, 1996. 461 с.
11. Olver P. Conservation laws in elasticity 1. General result // Arch. Rat. Mech. Anal. 1984. Vol. 85. P. 111–129.
12. Olver P. Conservation laws in elasticity 11. Linear homogeneous isotropic elastostatic // Arch. Rat. Mech. Anal. 1984. Vol. 85. P. 131–160.
13. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Об упругом кручении вокруг трех осей // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 1. С. 120–125.

14. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Intern. J. Non. Lin. Mech. 2019. Vol. 108. P. 7–10.
15. Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol. 62, No. 1. P. 179–186.

## References

1. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij* [Group analysis of differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 399 p.
2. Annin B. D., Bytev V. O., Senashov S. I. *Gruppovye svoystva uravnenij uprugosti i plastichnosti* [Group properties of elasticity and plasticity equations]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 239 p.
3. Prudnikov V. Yu., Chirkunov Yu. A. [Group bundle of Lamé equations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1988, Vol. 52, No. 3, P. 471–477 (In Russ.).
4. Senashov S. I. [On the laws of conservation of plasticity equations]. *Doklady AN SSSR*. 1991, Vol. 320, No. 3, P. 606–608 (In Russ.).
5. Senashov S. I. [Conservation laws and the exact solution of the Cauchy problem for plasticity equations]. *Doklady RAN*. 1995, Vol. 345, No. 5, P. 619–620 (In Russ.).
6. Senashov S. I., Filyushina E. V. [Conservation laws of the equations of the plane theory of elasticity]. *Vestnik SibGAU*. 2014, No. 1(53), P. 79–81 (In Russ.).
7. Belmetsov N. F., Chirkunov Yu. A. [Exact solutions of the equations of the dynamic asymmetric model of elasticity theory]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2012, Vol. 15, No. 4, P. 38–50 (In Russ.).
8. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. *Prilozhenie simmetriy i zakonov sohraneniya k resheniyu differencial'nyh uravneniy* [Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations]. Novosibirsk, SO RAN Publ., 201 p.
9. Senashov S. I., Vinogradov A. M. [Symmetries and conservation laws of two-dimensional ideal plasticity]. *Proc. Edinburg Math. Soc.* 1988, P. 415–439.
10. Vinogradov A. M., Dyer I. S., Lychagin V. V. *Simmetrii i zakony sohraneniya* [Symmetries and conservation laws]. Moscow, Factor Publ., 1996, 461 p.
11. Olver P. Laws of conservation in elasticity 1. General result. *Arch. Rat. Fur. Anal.* 1984, Vol. 85, P. 111–129.
12. Olver P. Laws of conservation in elasticity 11. Linear homogeneous isotropic elastostatic. *Arch. rat. Fur. Anal.* 1984, Vol. 85, P. 131–160.
13. Senashov S. I., Savostyanova I. L. [On elastic torsion around three axes]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2021, Vol. 24, No. 1, P. 120–125 (In Russ.).
14. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of an elastic-plastic boundary in the problem of stretching a plate weakened by holes. *Journal. Lin. Mech.* 2019, Vol. 108, P. 7–10.
15. Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial stretching of a plate weakened by holes. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021, Vol. 62, No. 1, P. 179–186.

© Senashov S. I., Savostyanova I. L., 2022

---

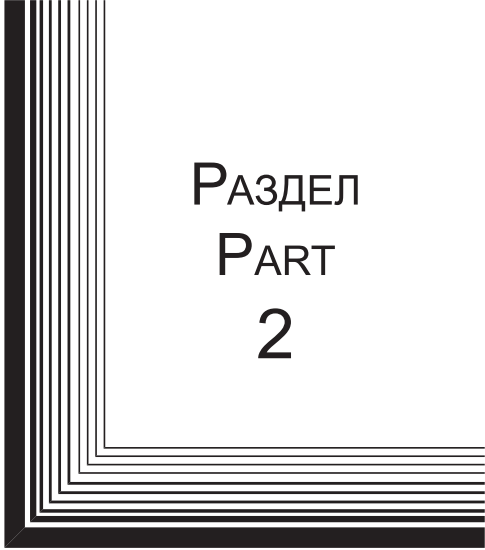
**Сенашов Сергей Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: Sen@sibsau.ru.

**Савостьянова Ирина Леонидовна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.


**Senashov Sergey Ivanovich** – Dr. Sc., Professor, Head of the Department IES; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: Sen@sibsau.ru.

**Savostyanova Irina Leonidovna** – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of IES, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

---



РАЗДЕЛ  
PART  
2



АВИАЦИОННАЯ  
И РАКЕТНО-  
КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА

AVIATION  
AND SPACECRAFT  
ENGINEERING



УДК 629.7.036.54

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-424-436

**Для цитирования:** Беляков В. А. Выбор энергетических параметров кислородно-водородного безгазогенераторного жидкостного ракетного двигателя // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 424–436. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-424-436.

**For citation:** Belyakov V. A. [The choice of the energy parameters of an oxygen-hydrogen propellant expander cycle rocket engine]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 424–436. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-424-436.

## Выбор энергетических параметров кислородно-водородного безгазогенераторного жидкостного ракетного двигателя

В. А. Беляков

Опытно-конструкторское бюро «Кристалл»  
Российская Федерация, 111024, г. Москва, шоссе Энтузиастов, 15  
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Российская Федерация, 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4  
\*E-mail: titflavii@rambler.ru

*В жидкостных ракетных двигателях (ЖРД), выполненных по безгазогенераторной схеме, привод турбины турбонасосного агрегата (ТНА) осуществляется подогретым горючим в тракте охлаждения (ТО) камеры сгорания (КС). Отсутствие газогенератора в значительной мере повышает надежность ЖРД и дает ряд преимуществ по сравнению с другими схемами двигателя.*

*На данный момент существующие кислородно-водородные безгазогенераторные ЖРД не отвечают современным тактико-техническим требованиям по уровню тяг и давлений в (КС) двигателя. Поэтому необходимо изучить способы повышения энергетических параметров ЖРД и выявить перспективные схемы двигателя.*

*В данной статье предлагаются схемные решения кислородно-водородного ЖРД, приводится анализ влияния различных факторов на энергетические параметры двигателя, а также рекомендации по проектированию безгазогенераторных ЖРД.*

*Разработана математическая модель расчета основных энергетических и геометрических параметров двигателя. Предложены перспективные пневмогидравлические схемы (ПГС) кислородно-водородного безгазогенераторного ЖРД в зависимости от тактико-технических требований.*

*Ключевые слова:* безгазогенераторный ЖРД, кислород, водород, турбонасосный агрегат, камера сгорания, удельный импульс тяги двигателя, интенсификация теплообмена.

## The choice of the energy parameters of an oxygen-hydrogen propellant expander cycle rocket engine

V. A. Belyakov

“Kristall” Experimental Design Bureau  
13, Volokolamskoe highway, Moscow, 129301, Russian Federation  
Moscow Aviation Institute (National research university)  
4, Volokolamskoe highway, A-80, GSP-3, Moscow, 125993, Russian Federation  
\*E-mail: titflavii@rambler.ru

*In liquid-propellant rocket engines (LRE), made according to an expander cycle scheme, the turbine of the turbopump unit is driven by heated fuel in the cooling path of the combustion chamber (CC). The*

absence of a gas generator greatly increases the reliability of the rocket engine and provides a number of advantages compared to other engine schemes.

At the moment, the existing oxygen-hydrogen liquid-propellant rocket engines by expander cycle scheme do not suit modern tactical and technical requirements for the level of thrust and pressure in the CC of the engine. Therefore, it is necessary to study ways to increase the energy parameters of a liquid-propellant rocket engine and identify promising engine schemes.

This article proposes schematic solutions for an oxygen-hydrogen gasless LRE, analyzes the influence of various factors on the specific parameters of the engine, as well as recommendations for designing expander cycle LRE.

A mathematical model for calculating the main energy and geometric parameters of the engine has been developed. Prospective pneumohydraulic schemes of an oxygen-hydrogen liquid-propellant expander cycle rocket engine are proposed, depending on the tactical and technical requirements.

*Keywords:* liquid-propellant rocket engine by expander cycle scheme, oxygen, hydrogen, turbopump unit, combustion chamber, specific thrust impulse of the engine, heat exchange intensification.

## Введение

В настоящее время актуальной задачей является повышение энергетических параметров жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) в составе межорбитального транспортного аппарата (МТА), служащего для доставки полезного груза на геосинхронную орбиту с возможностью возвращения на низкую околоземную орбиту, а также для выведения космических кораблей на межпланетные орбиты.

Наибольший интерес представляют кислородно-водородные ЖРД, выполненные по безгазогенераторной схеме. В двигателях такой схемы используется только регенеративное проточное охлаждение горючим КС. После охлаждения корпуса КС компонент подается на привод турбин ТНА окислителя (ТНАО) и горючего (ТНАГ). За счет такой схемы подачи водорода, а также его эффективной работоспособности, возможно реализовать высокие значения адиабатной работы турбины, а, следовательно, и ее мощности.

Для обеспечения требуемого давления в КС в двигателях такой схемы применяют высоконапорные и высокооборотные (50000–130000 об/мин) насосы ТНАГ. Поэтому повышение энергетических параметров двигателя, таких как удельный импульс тяги (УИТ), давление в КС, зависит [1–5]:

- от схемы двигателя;
- теплового состояния КС и подогрева компонента топлива в ТО;
- энергетических параметров ТНА.

Для решения задач по выведению космического аппарата (КА) на различные орбиты Земли и других планет солнечной системы необходимо:

- разработать агрегаты МТА с минимальной сухой массой;
- предусмотреть возможность многократного использования МТА;
- осуществление плавного вывода на геосинхронную орбиту крупногабаритных космических объектов.

Достижение этих требований возможно за счет использования безгазогенераторной жидкостной ракетной двигательной установки (ЖРДУ), которая имеет ряд преимуществ по сравнению с другими существующими схемами питания двигателя [6; 7], а именно:

- повышенная надежность, упрощенная конструкция и минимальная сухая масса агрегатов и систем МТА;
- высокая экономичность, обусловленная использованием предкамерных турбин для привода насосов ТНА;
- отсутствие потерь УИТ на завесное охлаждение за счет использования только регенеративного проточного охлаждения.

Анализируя существующие проекты безгазогенераторных ЖРД, разрабатываемые в США, ЕС, России и Японии (RL-10 и его модификации, RL-50, RL-60, Vinci, РД-0146 и его модифи-

кации, Нирех, АЕСЕ, МВ-35, МВ-60, LE-5 и его модификации), можно сделать вывод о эффективности применения безгазогенераторной схемы ЖРД в составе МТА. На рис. 1 и 2 представлена зависимость тяги двигателя от давления в КС кислородно-водородных ЖРД для верхних и нижних ступеней ракет-носителей (РН) и разгонных блоков (РБ). На рис. 3 приведена зависимость УИТ двигателя от давления в КС кислородно-водородных ЖРД для РБ.

Как видно, безгазогенераторная схема применяется для верхних ступеней РН и РБ. Это объясняется:

- возможностью обеспечения до 15 тс тяги двигателя;
- высоким УИТ двигателя;
- применением ЖРД давлением в КС до 15 МПа.

Существующие ЖРД безгазогенераторной схемы обладают УИТ двигателя  $I_{уд} = 465...475$  с.

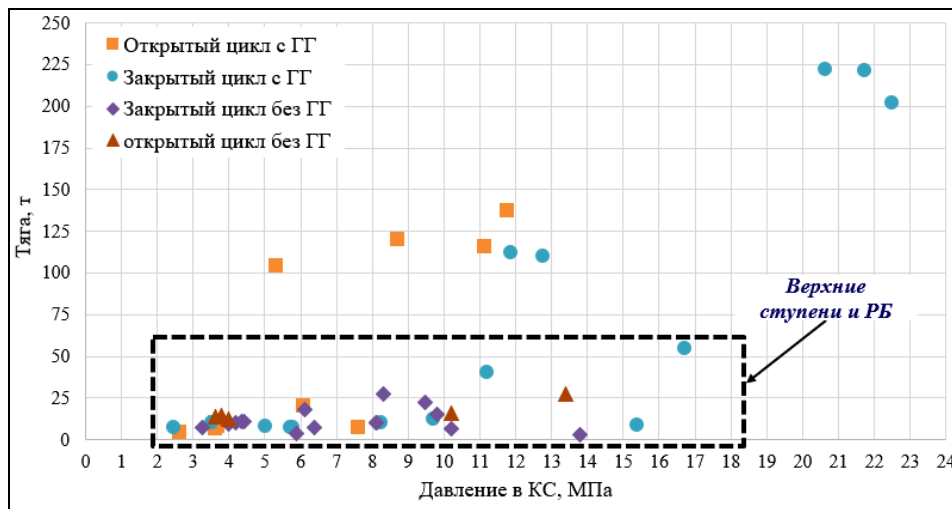


Рис. 1. Зависимость тяги двигателя от давления в КС кислородно-водородных ЖРД для нижних и верхних ступеней РН и РБ

Fig. 1. Dependence of engine thrust on the pressure in the CC of oxygen-hydrogen liquid-propellant rocket engines for the lower and upper stages of launch vehicles and upper stages

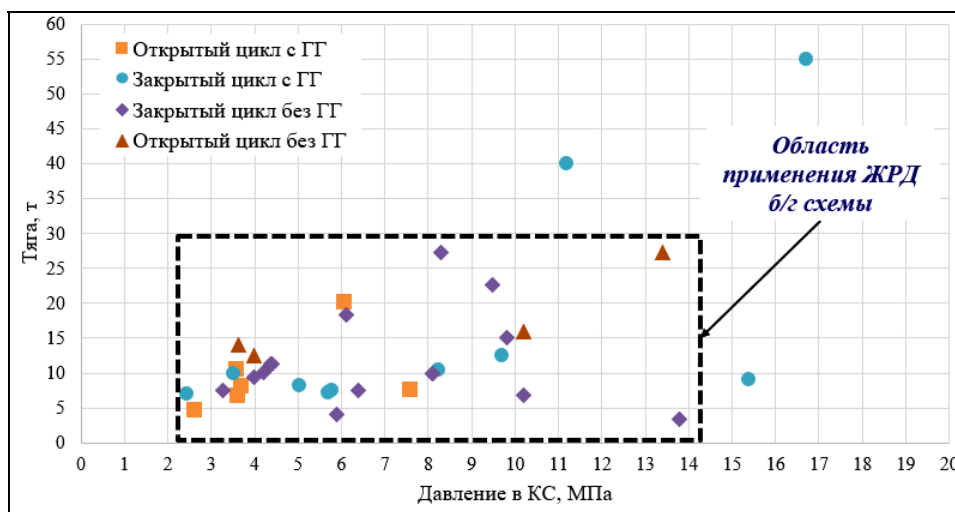


Рис. 2. Зависимость тяги двигателя от давления в КС кислородно-водородных ЖРД для РБ

Fig. 2. Dependence of engine thrust on the pressure in the CC of oxygen-hydrogen liquid-propellant rocket engines for the lower and upper stages of upper stages

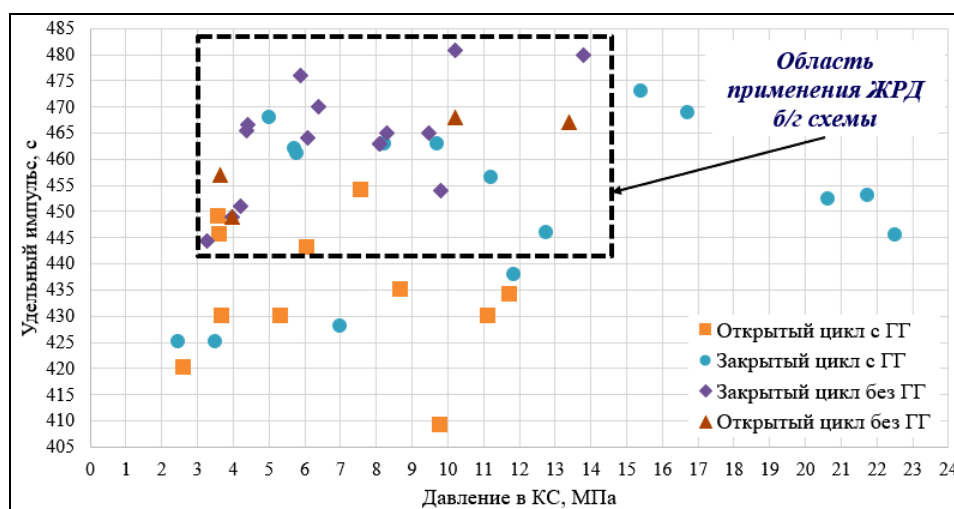


Рис. 3. Зависимость УИТ двигателя от давления в КС кислородно-водородных ЖРД для РБ

Fig. 3. Dependence of the specific thrust impulse of the engine on the pressure in the CC of oxygen-hydrogen LRE for upper stages

Такие значения УИТ достигаются:

- за счет использования высокоэнтальпийного топлива (жидкий кислород + жидкий водород);
- применением более длинных сопел с большой степенью расширения  $\varepsilon_a$  (применение неохлаждаемых сопловых насадков);
- увеличением давления в КС за счет интенсификации теплообмена в ТО.

Увеличение количества теплоты, передаваемой горючему в ТО, позволяет повысить энергетические параметры двигателя. Существуют способы эффективного нагрева компонента, имеющие достоинства и недостатки. При этом основной задачей является получение максимального подогрева компонента топлива при минимальных гидравлических потерях.

#### Методы увеличения подогрева горючего в безгазогенераторном ЖРД

Высокие энергетические параметры ЖРД достигаются не только путем интенсификации теплообмена в ТО, но и за счет подвода дополнительного тепла к горючему с помощью:

- применения теплообменного аппарата, установленного перед входом хладагента в ТО (например, как это реализовано в двигателе АЕСЕ);
- установки в КС трубки Фильда, в которой хладагент после ТО дополнительно прогревается и после подается на привод турбины ТНАО (например, как в двигателе НРЕРХ);
- использования восстановительного ГГ (не участвующего в схеме питания двигателя), служащего для дополнительного подогрева горючего в теплообменном аппарате, установленном внутри ГГ.

Требуемый подогрев горючего достигается также за счет оптимизации конструкции ТО:

- варьирование геометрических параметров ребер и стенок;
- изменение густоты ребер;
- удлинение цилиндрической части КС [3; 4];
- применение винтовых каналов;
- нанесение дополнительных ребер со стороны огневой стенки КС в целях увеличения площади теплообмена [7–10].

Необходимо отметить, что такие решения по интенсификации теплообмена в ТО могут и негативно повлиять на энергетические параметры двигателя. Это объясняется ростом гидравлических потерь в ТО не только из-за конструктивных изменений в системе охлаждения двигателя (потери на трение и преодоление сил местных сопротивлений), но и из-за уменьшения плотности горючего за счет его нагрева в ТО. [11–13].



Гидравлические потери давления горючего в ТО могут компенсироваться необходимым напором высокооборотного насоса ТНАГ [14–18]. Поэтому высокие энергетические параметры безгазогенераторного ЖРД обеспечиваются за счет максимального подогрева (ограничивающегося по температуре плавления материала в ТО) компонента в ТО, требуемого напора насоса ТНАГ (ограничивающегося допустимыми оборотами ротора из-за работоспособности подшипников) или минимальных гидравлических потерь в ТО [4; 6].

Необходимо также учесть, что с ростом давления в КС при фиксированной тяге двигателя:

- увеличивается тепловой поток в огневую стенку КС [10; 19];
- уменьшаются габариты двигателя (диаметр камеры, критического и выходного сечений) и суммарный расход топлива в КС [2; 3; 6].

При этом влияние на подогрев горючего в ТО оказывает в большей степени изменение суммарной площади теплообмена и теплового потока в КС.

Энергетические параметры двигателя также зависят от свойств топлива, приходящего в КС [1; 8; 20]. Учет изменения энтальпии топлива по условиям подачи его в смешительную головку влияет на температуру продуктов сгорания и теплофизические свойства смеси в КС. Для кислородно-водородного безгазогенераторного ЖРД пересчет энтальпии топлива необходим исходя из следующих особенностей:

- поступление газообразного водорода после привода турбин ТНАО и ТНАГ в смешительную головку КС;
- сжимаемость водорода;
- изменение свойств водорода и кислорода по температуре и давлению (изменении энергии в насосах и турбинах ТНА и БТНА, в магистралях, агрегатах управления и т. д.).

#### Пневмогидравлическая схема безгазогенераторного кислородно-водородного ЖРД

На рис. 4 приведена ПГС рассматриваемого ЖРД. Отличительной особенностью данной схемы двигателя от других безгазогенераторных схем является наличие отдельных ТНА окислителя (ТНАО) и горючего (ТНАГ) с контуром отбора турбогаза со входа в ТНАО на вход в смешительную головку КС. Этот контур предназначен для регулирования тяги двигателя.

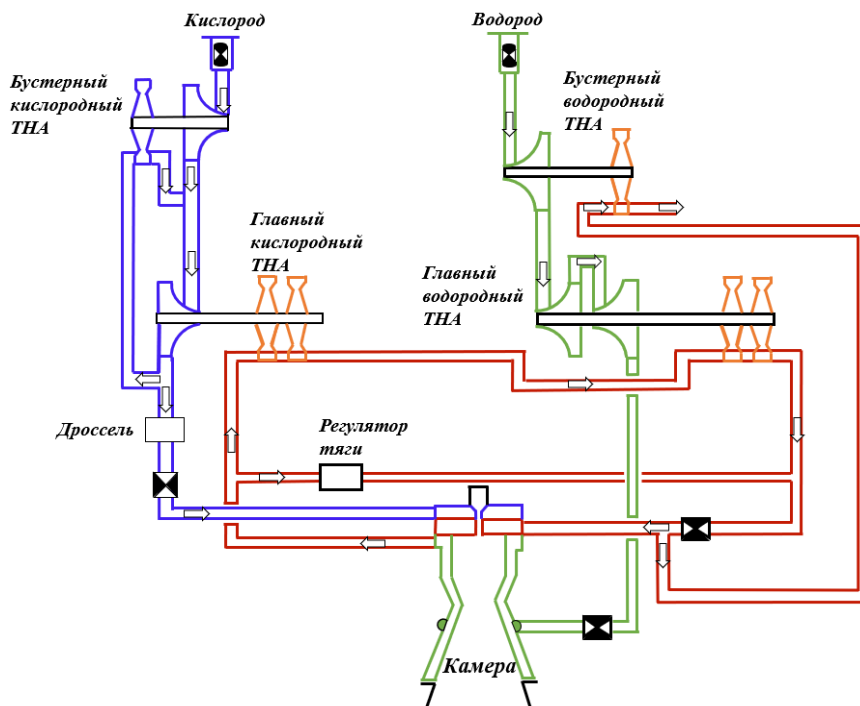


Рис. 4. Пневмогидравлическая схема безгазогенераторного ЖРД

Fig. 4. Pneumo-hydraulic scheme of the expander cycle liquid-propellant rocket engine

Бескавитационная работа основных насосов ТНАГ и ТНАО обеспечивается бустерными турбонасосными агрегатами (БТНА), установленными на линии «О» и «Г». Привод бустерного турбонасосного агрегата окислителя (БТНАО) осуществляется частью расхода кислорода, отбираемого от выхода основного насоса ТНАО.

Турбины ТНАО и ТНАГ питает подогретый в ТО газообразный водород, часть которого перед поступлением в смесительную головку КС направляется на привод турбины бустерного турбонасосного агрегата горючего (БТНАГ). После турбины БТНАГ отработанный газ сбрасывается за борт или поступает на наддув бака «Г».

### Постановка задачи расчета УИТ кислородно-водородного безгазогенераторного ЖРД

В данной работе рассматриваются способы повышения УИТ двигателя за счет увеличения давления в КС (при фиксированной тяге двигателя и соотношении компонентов топлива), а, следовательно, и температуры в КС, путем интенсификации теплообмена в ТО. Это необходимо для большего нагрева водорода в целях увеличения мощности турбин ТНАО и ТНАГ.

На основании схемы на рис. 4, разработана математическая модель, описывающая рабочие процессы двигателя. При помощи математической модели получены параметры безгазогенераторного ЖРД тягой  $P_{дв} = 10$  тс и соотношением компонентов топлива  $k_m = 6,08$ . При этом давление в КС принималось в диапазоне  $p_{кс} = 6...15$  МПа. В качестве первого приближения УИТ двигателя принимался равным  $I_{уд} = 463$  с.

На основании результатов расчета выявлены перспективные схемные решения, обеспечивающие высокие энергетические параметры безгазогенераторного ЖРД.

### Математическая модель

На рис. 5 приведена структурно-функциональная блок-схема квазистатической модели безгазогенераторного ЖРД. В основу модели положены уравнения гидравлики, газовой динамики, тепломассообмена, теплозащиты и охлаждения корпуса камеры ЖРД, расчета агрегатов ТНА и БТНА и их характеристик.



Рис. 5. Структурно-функциональная блок-схема квазистатической модели

Fig. 5. Structural-functional block diagram of the mathematical model

Разработанная математическая модель реализована на языке программирования Python. Она включает в себя следующие основные программные модули:

- модуль расчета базовой схемы двигателя для получения исходных данных и поиска оптимальной схемы безгазогенераторного ЖРД;

- расчета параметров двигателя в диапазоне тяг и давлений в КС;
- а также вспомогательные:
  - модуль гидравлического расчета агрегатов ТНА и БТНА и получения их приведенных характеристик;
  - расчета газодинамических, теплофизических и термодинамических параметров.

### Результаты расчетов безгазогенераторного кислородно-водородного ЖРД

Для достижения энергетического баланса рассматриваемой схемы ЖРД в диапазоне давления в КС необходимо найти требуемый массовый расход рабочего тела на турбине ТНАГ с учетом расчета теплового состояния КС. На рис. 6 приведена зависимость массового секундного расхода рабочего тела на турбине ТНАГ от температуры водорода после ТО в диапазоне давления в КС и оборотах ротора ТНАГ  $n_{\text{тнаг}} = 125000$  об/мин.

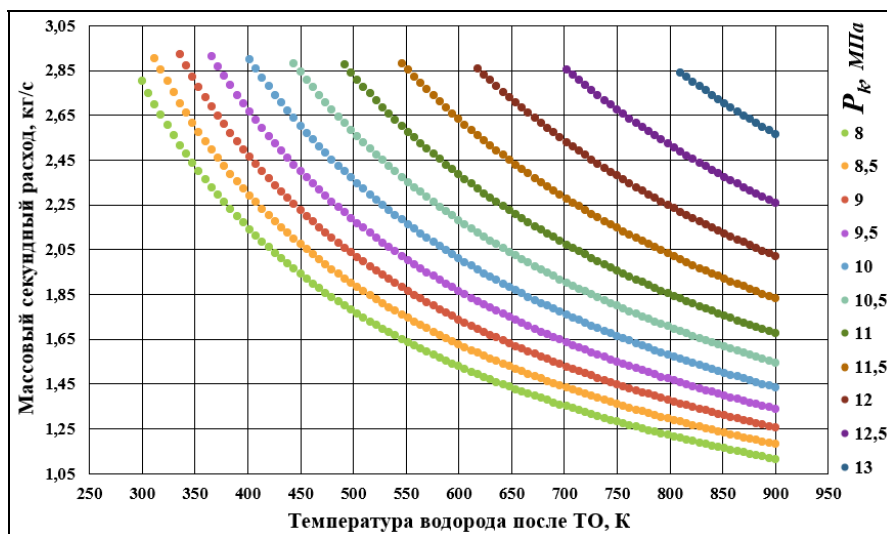


Рис. 6. Зависимость массового секундного расхода на турбине ТНАГ от температуры водорода после ТО при различном давлении в КС

Fig. 6. Dependence of the mass flow rate on the TPAF turbine on the temperature of hydrogen after the cooling jacket at different pressures in the combustion chamber

Из зависимости на рис. 6 видно, что для каждого значения подогрева водорода в ТО, при определенном давлении в КС, существует такой массовый секундный расход, при котором схема двигателя энергетически увязана. При этом необходимо иметь в виду, что при варьировании давления в КС изменяются следующие параметры двигателя и его агрегатов [3; 6; 8; 15]:

- геометрические и энергетические параметры КС;
- гидравлические потери по линиям окислителя и горючего (потери в магистралях, агрегатах управления, в ТО и т. д.);
- потребный расход рабочего тела для привода турбин БТНА;
- полный КПД агрегатов ТНА и БТНА;
- обороты ротора ТНА.

Для достижения высокого УИТ двигателя путем интенсификации теплообмена в ТО, необходимо также учитывать теплонапряженность КС. Она ограничивается температурой плавления применяемого материала для огневой стенки камеры [11; 12; 21].

Перенесем полученные точки на рис. 6, соответствующие минимальной температуры подогрева водорода, на рис. 7. Как указывалось ранее, давление в КС зависит также от напора насоса ТНАГ. Поэтому на рис. 7 представлены результаты расчетов при различном числе оборотов ротора ТНАГ.

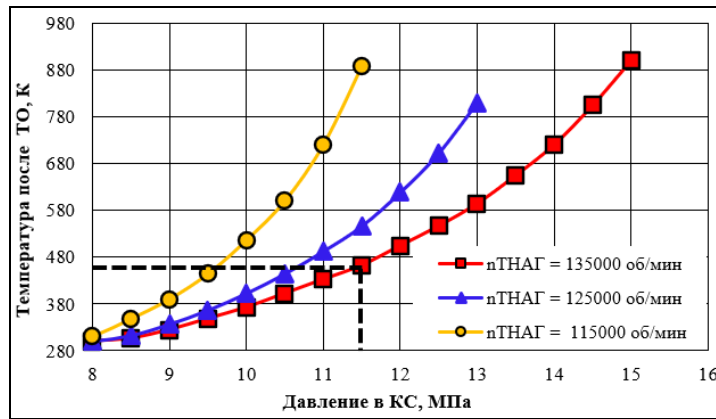


Рис. 7. Зависимость температуры водорода после РО от давления в КС при различном числе оборотов ротора ТНАГ

Fig. 7. Dependence of the hydrogen temperature after the cooling jacket on the pressure in the combustor at different speeds of the TPAF rotor

На рис. 7 пунктирной линией обозначена граница по максимально возможному подогреву водороду в ТО в зависимости от давления в КС и числа оборотов ротора ТНАГ. Необходимо отметить, что при увеличении давления в КС (от 8 МПа и более) ограничение по подогреву водорода в ТО незначительно смещается (на 10–15 К) и для обобщения полученных данных кривые по температуре на рис. 7 объединены одной линией.

### Схемные решения

На основании полученных зависимостей, приведенных на рис. 6 и 7, выявлены рекомендации по схемным решениям рассматриваемого безгазогенераторного ЖРД при фиксированной тяге двигателя  $P_{дв} = 10$  тс и соотношении компонентов топлива  $k_m = 6,08$ .

Для давления в КС  $p_k \leq 8$  МПа и оборотов ротора ТНАГ  $n_{\text{ТНАГ}} \leq 115000$  об/мин штатная схема двигателя, приведенная на рис. 4, удовлетворяет требованиям по обеспечению необходимого УИТ  $I_{уд} = \text{до } 463$  с.

Увеличение оборотов ротора ТНАГ до  $n_{\text{ТНАГ}} = 125000$  позволяет использовать более выгодную схему (рис. 8) с дополнительным перепуском водорода за турбину ТНАГ. Данная схема обеспечивает УИТ двигателя  $I_{уд} = \text{до } 467$  с при давлении в КС  $p_k \leq 8,5$  МПа. Наличие дополнительного перепуска турбогаза со входа в ТНАГ на вход в смесительную головку КС объясняется избыточной мощностью турбины. Поэтому схема, представленная на рис. 8, согласно зависимостям на рис. 7, более выгодна, если:

- температура водорода после ТО менее  $T_{\text{вых.то}} < 350$  К при оборотах ротора ТНАГ  $n_{\text{ТНАГ}} \leq 115000$  об/мин;
- температура водорода после ТО менее  $T_{\text{вых.то}} < 315$  К при оборотах ротора ТНАГ  $115000 \text{ об/мин} < n_{\text{ТНАГ}} \leq 125000$  об/мин.

Достижение более высокого давления в КС  $p_k > 8,5$  МПа реализуется схемой, приведенной на рис. 9. В зависимости от числа оборотов ротора ТНАГ, давления в КС и температуры рабочего тела турбины, водород после ТНАО отбирается со входа в ТНАГ на вход в смесительную головку КС либо отбирается после ТО на вход в ТНАГ.

При оборотах ротора  $n_{\text{ТНАГ}} > 125000$  об/мин и давлении в КС  $8,5 \text{ МПа} < p_k \leq 10,5 \text{ МПа}$  мощность турбины ТНАГ может оказаться избыточной в связи с лишним подогревом водорода в ТО  $T_{\text{вых.то}} = 300 \dots 400$  К. Но при дальнейшем увеличении давления в КС  $p_k > 10,5$  МПа достижение энергетического баланса агрегатов ТНАГ осуществляется путем добавления небольшого количества водорода через перепускную магистраль, установленную между выходом из ТО и турбины ТНАО, как указано на рис. 9.

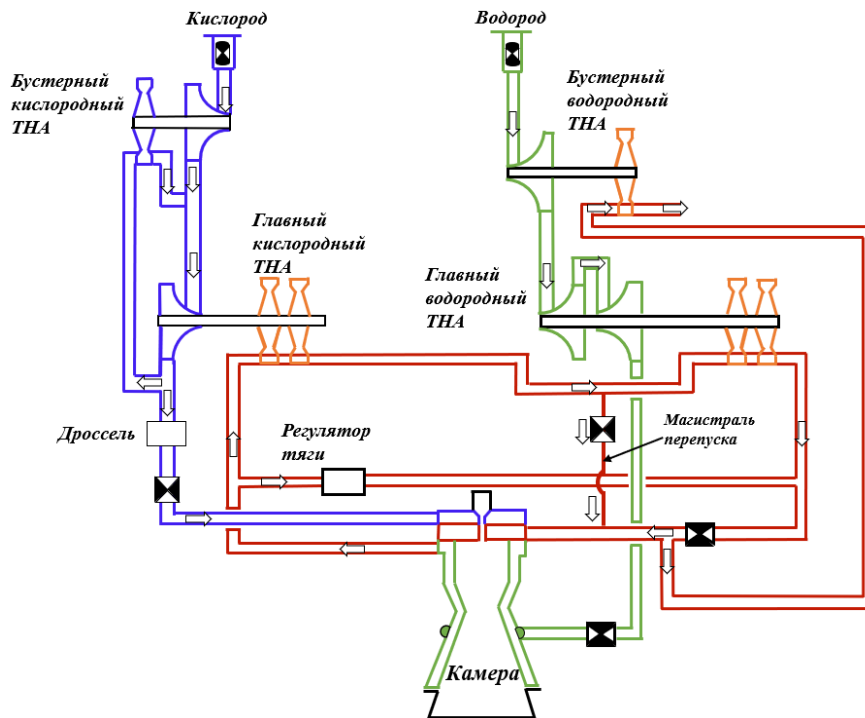


Рис. 8. Схема безгазогенераторного ЖРД с дополнительным отбором турбогаза со входа в ТПАГ на вход в смешивательную головку КС

Fig. 8. Scheme of an expander cycle liquid-propellant rocket engine with additional turbogas extraction from the TPAF inlet to the CC mixing head inlet

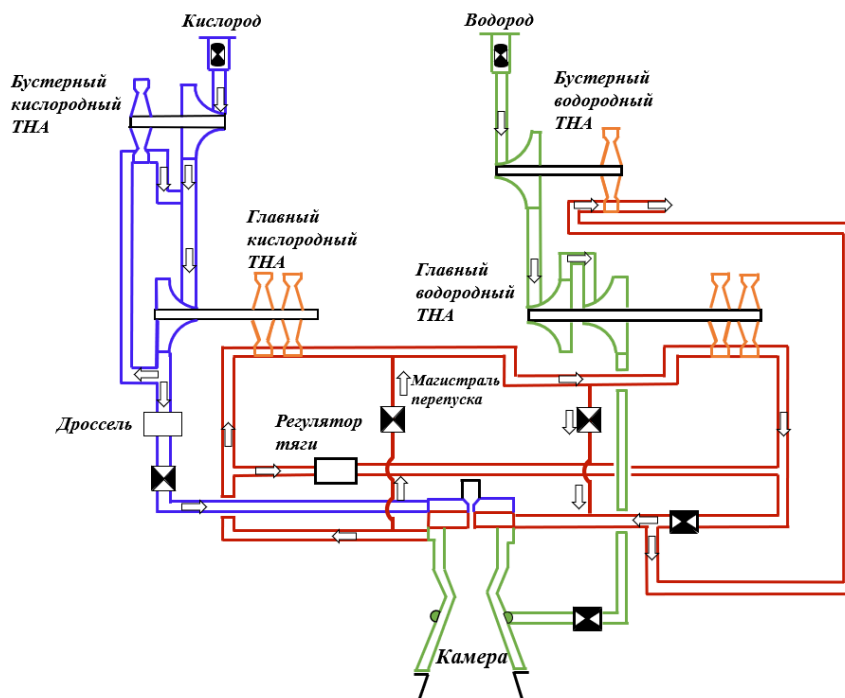


Рис. 9. Схема безгазогенераторного ЖРД с дополнительным отбором турбогаза с выхода из тракта охлаждения (или со входа в ТПАГ) на вход в ТПАГ (или на вход в смешивательную головку КС)

Fig. 9. Scheme of an expander cycle liquid-propellant rocket engine with additional turbogas extraction from the exit from the cooling path (or into the TPAF) to the inlet to the TPAF (or to the inlet to the mixing head of the compressor station)

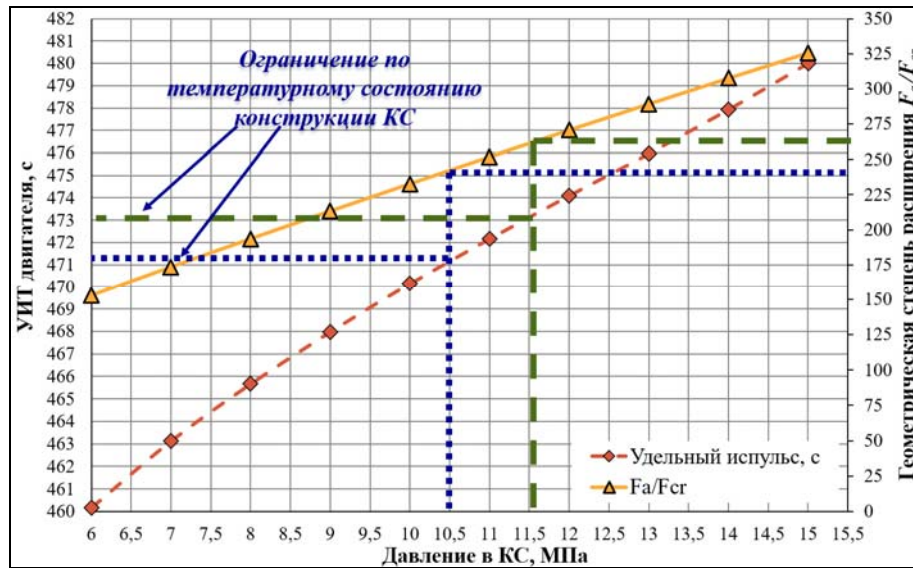


Рис. 10. Зависимость УИТ и геометрической степени расширения сопла безгазогенераторного ЖРД от давления в КС

Fig. 10. Dependence of the specific thrust impulse of the engine and the geometric degree of expansion of the nozzle of an expander cycle liquid-propellant rocket engine on the pressure in the combustion chamber

В результате оптимизации параметров двигателя выявлено, что максимальный УИТ (рис. 10) составляет  $I_{уд} = 473$  с при следующих параметрах:

- давление в КС  $p_k = 11,5$  МПа;
- число оборотов ротора ТНАГ  $n_{\text{ТНАГ}} = 135000$  об/мин;
- геометрическая степени расширения сопла  $\varepsilon_a = 260$ .

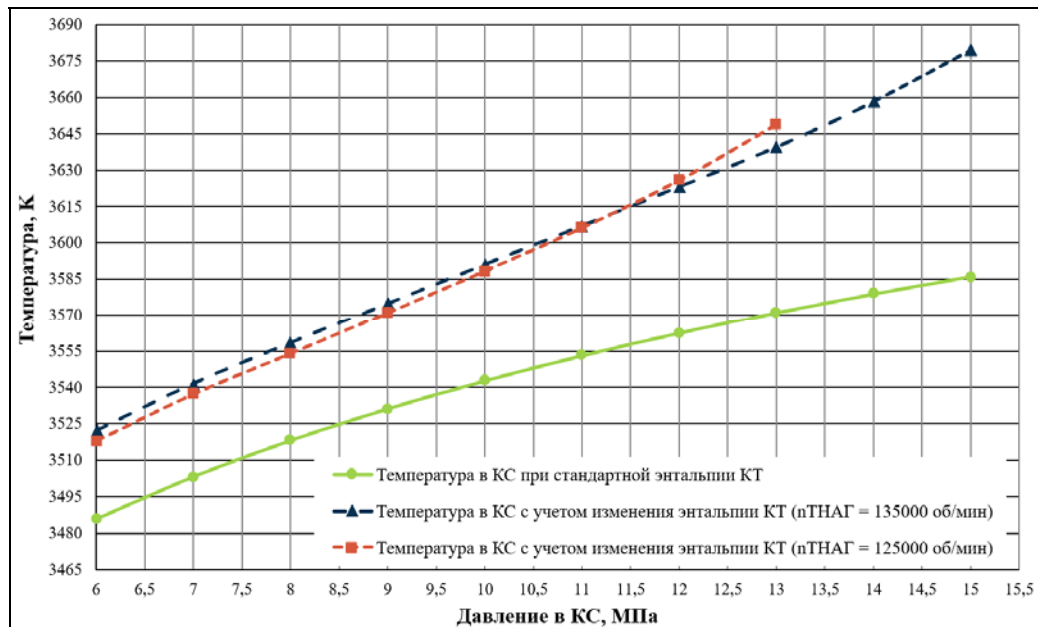


Рис. 11. Зависимость температуры продуктов сгорания в КС от давления в КС с учетом изменения энтальпии компонентов топлива

Fig. 11. Dependence of the temperature of combustion products in the combustion chamber on the pressure in the combustion chamber, taking into account the change in the enthalpy of the fuel components

При этом температура в КС, согласно зависимостям на рис. 11, составила  $T_{\text{КС}} = 3615$  К, а температура подогрева водорода в ТО  $T_{\text{вых.то}} = 460$  К (см. рис. 7). Ограничение по температуре подогрева водорода в ТО объясняется высокой температурой ребер, установленных на огневой стенке камеры  $T_p = 950 \dots 1050$  К [9; 7; 21]. Поэтому уменьшение оборотов ротора ТНАГ сдвигает максимум по давлению в КС и УИТ в область меньших значений (см. рис. 10: пунктирные линии) за счет трудности обеспечения надежного охлаждения КС и достижения энергетического баланса схемы двигателя.

Из графика на рис. 11 видно, что изменение теплофизических свойств топлива, проходящего в смесительную головку, в значительной мере влияет на температуру продуктов сгорания в КС. Но увеличение оборотов ротора ТНАГ, т. е. увеличение напора насоса ТНАГ, при тех же подогревах водорода в ТО незначительно влияет на изменение температуры в КС ( $\Delta T_{\text{КС}} = 5 \dots 7$  К).

Необходимо отметить, что результаты расчетов (см. рис. 7, 10, 11) для давления в КС более 11,5 МПа достижимы за счет подвода дополнительного тепла к горючему или за счет увеличения оборотов ротора ТНАГ более 135000 об/мин (при этом необходимо оценить реализуемость таких значений). В данной же постановке задачи можно считать, что дальнейшая интенсификация теплообмена в ТО ведет к более теплонапряженному и менее надежному двигателю.

### Заключение

Можно сделать следующие выводы:

1. В результате расчета параметров ЖРД тягой 10 тс в диапазоне давления в КС от 6 МПа до 15 МПа выявлены схемные решения, обеспечивающие удельный импульс тяги двигателя 473 с.

2. Для давления в КС от 6 до 8,5 МПа удельный импульс тяги двигателя составляет 460–467 с.

3. Достижение более высокого давления в КС (более 8,5 МПа) возможно при использовании схемы с дополнительным отбором (помимо отбора на регулятор тяги) турбогаза со входа в ТНАГ на вход в смесительную головку КС (или с выхода из тракта охлаждения на вход в ТНАГ). При этом давление в КС составляет 11,5 МПа, а удельный импульс тяги двигателя равен 473 с.

4. Дальнейшее увеличение энергетических параметров безгазогенераторного ЖРД тягой 10 тс и давлением в КС более 11,5 МПа возможно за счет подвода дополнительного тепла к горючему с помощью применения теплообменного аппарата, установленного перед входом в тракт охлаждения двигателя или в составе восстановительного газогенератора, а также трубки Фильда, введенной в КС.

### Библиографические ссылки

1. Добровольский М. В. Жидкостные ракетные двигатели. Основы проектирования. М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. 461 с.

2. Безгенераторный ЖРД тягой 200 т.с. на углеводородном горючем / Г. П. Калмыков, Е. В. Лебединский, В. И. Тарарышкин, И. О. Елисеев // Space Launcher Liquid Propulsion: 4th Int. Conf. on Launcher Techn. Liege (Belgium), 3–6 декабря, 2002. С. 2–9 [Электронный ресурс]. URL: <https://el.bok2.org/dl/3136783/f689d5> (дата обращения: 10.06.2019).

3. Калмыков Г. П., Лебединский Е. В., Тарарышкин В. И. Компьютерные модели жидкостных ракетных двигателей / под ред. А. С. Коротева. М. : Машиностроение, 2009. 376 с.

4. Беляков В. А., Василевский Д. О. Перспективные схемные решения безгазогенераторных двигателей // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2019. №5 8. С. 69–86. DOI: 10.15593/2224-9982/2019.58.06.

5. Развитие концепции многофазового жидкостного ракетного двигателя на трехкомпонентном топливе / В. А. Беляков, Д. О. Василевский, А. А. Ермашкевич и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, №1. С. 121–136. DOI: 10.31772/2712-8970-2021-22-1-121-136.

6. Калмыков Г. Р., Лебединский Е. В., Тарарышкин В. И. Рабочие процессы в жидкостном ракетном двигателе и их моделирование. М. : Машиностроение, 2008. 512 с.

7. Гахун Г. Г. Конструкция и проектирование жидкостных ракетных двигателей. М. : Машиностроение, 1989. 424 с.
8. Моделирование рабочих процессов и конструкция элементов камеры ЖРД / Р. А. Березинский, С. А. Соколов, С. Р. Гудкова и др. Воронеж : ВГТУ, 2002. 169 с.
9. Атлас конструкций ЖРД. Ч. 1 / Г. Г. Гахун, И. Г. Алексеев, Е. Л. Березанская и др. М. : МАИ, 1969. 286 с.
10. Naraghi M. H., Dunn S., Coats D. Dual regenerative cooling circuits for liquid rocket engines (Preprint) // 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conf. & Exhibit, 9 July – 12 July 2006, Sacramento, California. AIAA 2006-4367. 2006. P. 1–18.
11. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М. : Наука, 1975. 255 с.
12. Ponomarenko A. RPA: Tool for Rocket Propulsion Analysis, Thermal Analysis of Thrust Chambers [Электронный ресурс]. URL: [http://propulsion-analysis.com/downloads/2/docs/RPA\\_ThermalAnalysis.pdf](http://propulsion-analysis.com/downloads/2/docs/RPA_ThermalAnalysis.pdf) (дата обращения: 10.10.2020).
13. Проектирование системы охлаждения многофазового ракетного двигателя на трёхкомпонентном топливе / В. А. Беляков, Д. О. Василевский, А. А. Ермашкевич и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 2. С. 316–327. Doi: 10.31772/2712-8970-2021-22-2-316-327.
14. Хорлокк Дж. Х. Осевые турбины (газовая динамика и термодинамика). М. : Машиностроение, 1972. 211 с.
15. Овсянников Б. В., Боровский Б. И. Теория и расчет агрегатов питания жидкостных ракетных двигателей. М. : Машиностроение, 1986. 375 с.
16. Korpela S. A. Principles of turbomachinery. Hoboken, New Jersey, 2011. 467 p.
17. Oskar J. Haidn. Advanced rocket Engines. Germany: German Aerospace Center (DLR), 2008. 40 p.
18. Oskar J. Haidn. On the effect of axial turbine rotor blade design on efficiency: a parametric study of the Baljé-diagram. Germany: German Aerospace Center (DLR), 2017. 15 p.
19. Хоблер Т. Теплопередача и теплообменники. Л. : Госхимиздат, 1961. 821 с.
20. Кудрявцев В. М., Васильев А. П. Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей. М. : Высшая школа, 1975. 656 с.
21. Александренков В. П. Расчет наружного проточного охлаждения камеры ЖРД. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 74 с.

## References

1. Dobrovolsky M. V. *Zhidkostnye raketnye dvigateli. Osnovy proektirovaniya* [Liquid rocket engines, Fundamentals of design]. Moscow, Bauman Moscow state technical University Publ., 2016, 461 p.
2. Kalmykov G. P., Lebedinskiy E. V., Tararyshkin V. I., Eliseyev I. O. *Bezgeneratornyy ZHRD tyagoy 200 t.s. na uglevodorodnom goryuchem* [Generatorless rocket engine thrust 200 t.s. on hydrocarbon fuel]. Proceedings of 4th International Conference on Launcher Technology “Space Launcher Liquid Propulsion”, Liege (Belgium), 3-6 december, 2002, pp. 2–9. URL: <https://el.b-ok2.org/dl/3136783/f689d5> (date of the application: 10.06.2019).
3. Kalmykov G. P., Lebedinskiy E. V., Tararyshkin V. I. *Kompyuternyye modeli zhidkostnykh raketnykh dvigateley* [Computer models of liquid-propellant rocket engines]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 2009, 376 p.
4. Belyakov V. A., Vasilevskiy D. O. [Perspective circuit solutions of liquid rocket engine by expanded cycle]. *Vestnik PNIPU. Aerospace science*. 2019, Vol. 58, P. 69–86. Doi: 10.15593/2224-9982/2019-58-06.
5. Belyakov V. A., Vasilevskiy D. O., Ermashkevich A. A., Kolomencev A. I., Farizanov I. R. Development of the concept of a reusable liquid rocket engine with three-component fuel. *Siberian Aerospace Journal*. 2021, Vol. 22, No. 1, P. 121–136. DOI: 10.31772/2712-8970-2021-22-1-121-136.



6. Lebedinsky E. V. et al. *Rabochie processy v zhidkostnom raketnom dvigatele i ih modelirovanie* [Working processes in a liquid rocket engine and their modeling]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2008, 512 p.
7. Gakhun G. G. *Konstruktsiya i proyektirovaniye zhidkostnykh raketnykh dvigateley* [Design and engineering of liquid rocket engines]. Moscow, Engineering Publ., 1989, 424 p.
8. Berezinsky R. A., Sokolov S. A., Gudkova S. R. et al. *Modelirovanie rabochih processov i konstruktsiya elementov kamery ZHRD* [Modeling of working processes and construction of elements of the LPRE chamber]. Voronezh, VGTU Publ., 2002, 169 p.
9. Gakhun G. G., Alekseev I. G., Berezanskaya E. L. et al. *Atlas konstruktsiy ZHRD* [ATLAS of LPRE design, Part 1]. Moscow, MAI Publ., 1969, 286 p.
10. Naraghi M. H., Dunn S., Coats D. Dual regenerative cooling circuits for liquid rocket engines (Preprint). *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conf. & Exhibit*. 9 July – 12 July 2006, Sacramento, California. AIAA 2006-4367. 2006. P. 1–18.
11. Ievlev V. M. *Turbulenthoye dvizheniye vysokotemperaturnykh sploshnykh sred* [Turbulent motion of high-temperature continuous media]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 255 p.
12. Ponomarenko A. RPA: Tool for Rocket Propulsion Analysis, Thermal Analysis of Thrust Chambers. Available at: [http://propulsion-analysis.com/downloads/2/docs/RPA\\_ThermalAnalysis.pdf](http://propulsion-analysis.com/downloads/2/docs/RPA_ThermalAnalysis.pdf) (accessed: 10.10.2020).
13. Belyakov V. A., Vasilevskiy D. O., Ermashkevich A. A., Kolomencev A. I., Farizanov I. R. Design of the cooling system of a reusable liquid rocket engine with three-component fuel. *Siberian Aerospace Journal*. 2021, Vol. 22, No. 2, P. 316–327. DOI: 10.31772/2712-8970-2021-22-2-316-327.
14. Horlock J. H. *Osevyie turbiny (gazovaya dinamika i termodinamika)* [Axial turbines (gas dynamics and thermodynamics)]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1972, 211 p.
15. Ovsyannikov B. V., Borovsky B. I. *Teoria i raschet rabochih agregatov pitania zhidkostih raketnih dvigatelei* [Theory and calculation of power units for liquid rocket engines]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1986, 375 p.
16. Korpela S. A. Principles of turbomachinery. Hoboken, New Jersey, 2011. 467 p.
17. Oskar J. Haidn. Advanced rocket Engines. Germany: German Aerospace Center (DLR), 2008. 40 p.
18. Oskar J. Haidn. On the effect of axial turbine rotor blade design on efficiency: a parametric study of the Baljé-diagram. Germany: German Aerospace Center (DLR), 2017. 15 p.
19. Hobler T. *Teploperedacha i teploobmenniki* [Heat transfer and heat exchangers]. Leningrad, Goskhimizdat Publ., 1961, 821 p.
20. Kudryavtsev V. M., Vasilyev A. P. *Osnovy teorii i rascheta zhidkostnykh raketnykh dvigateley* [Fundamentals of the theory and calculation of liquid rocket engines]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1975, 656 p.
21. Aleksandrenkov V. P. *Raschet naruzhnogo protochnogo okhlazhdeniya kamery ZHRD* [Calculation of external flow-through cooling of the LPRE chamber]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 2012, 74 p.

© Беляков В. А., 2022

---

**Беляков Владислав Альбертович** – аспирант кафедры 202 «Ракетные двигатели»; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). E-mail: [titflavii@rambler.ru](mailto:titflavii@rambler.ru).

**Belyakov Vladislav Albertovich** – post-graduate student of the Department 202 “Rocket Engines”, Moscow aviation Institute (National Research University). E-mail: [titflavii@rambler.ru](mailto:titflavii@rambler.ru).

---

УДК 621.454.2

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-437-450

**Для цитирования:** Локальные параметры теплоотдачи на участках развивающегося температурного пограничного слоя в полостях газовых турбин / А. А. Зуев, А. А. Арнгольд, Е. В. Фалькова и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 437–450. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-437-450.

**For citation:** Zuev A. A., Arngold A. A., Falkova E. V., Tolstopyatov M. I., Dubynin P. A. [Local heat transfer parameters in the areas of the developing temperature boundary layer in the cavities of gas turbines local heat transfer parameters in the areas of the developing temperature boundary layer in the cavities of gas turbines]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 437–450. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-437-450.

## Локальные параметры теплоотдачи на участках развивающегося температурного пограничного слоя в полостях газовых турбин

А. А. Зуев<sup>1</sup>, А. А. Арнгольд<sup>2</sup>, Е. В. Фалькова<sup>1</sup>, М. И. Толстопятов<sup>1</sup>, П. А. Дубынин<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

<sup>2</sup>АО «Красноярский машиностроительный завод»  
Российская Федерация, 660123, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 29

\*E-mail: pavel.dubynin@mail.ru

*В данной работе проведено аналитическое определение локального коэффициента теплоотдачи в плоскостях вращения газовых турбин с использованием аффинноподобной модели распределения температурного и динамического пространственных пограничных слоев с конвективной составляющей (при  $Pr < 1$ ). Метод аналитического исследования, используемый в работе, привел к результатам близким к экспериментальным значениям.*

*Решена задача определения толщины потери энергии с помощью интегрального соотношения уравнения энергии температурного пространственного пограничного слоя, предоставляющего возможность для интегрирования по поверхности необходимой кривизны. Выражен закон теплообмена турбулентного пограничного слоя для вращательного движения потока и движения по закону «твердого тела».*

*Получены уравнения для определения локального коэффициента теплоотдачи по критерию Стантона при различных законах течения внешнего потока для степенного распределения скорости в пограничном слое по аффинноподобной модели температурного пограничного слоя.*

*Коэффициенты теплоотдачи с достаточной точностью коррелируют с экспериментальными данными и зависимостями, опубликованными другими авторами: J. M. Owen, L. A. Dorfman, И. В. Шевчук. Отклонение результатов, полученных по зависимости модели с конвективной составляющей и аффинноподобными профилями, не имеют статистически значимых различий. Полученные результаты исследования и сравнение их с результатами других авторов показали, что они пригодны для инженерных расчетов и анализа воздействия локальных коэффициентов теплоотдачи на высокотемпературные узлы турбонасосного агрегата (ТНА).*

**Ключевые слова:** вращательное движение потока, газовые полости ТНА, аффинноподобная модель, уравнения толщины потери энергии, коэффициент теплоотдачи.

## Local heat transfer parameters in the areas of the developing temperature boundary layer in the cavities of gas turbines local heat transfer parameters in the areas of the developing temperature boundary layer in the cavities of gas turbines

A. A. Zuev<sup>1</sup>, A. A. Arngold<sup>2</sup>, E. V. Falkova<sup>1</sup>, M. I. Tolstopyatov<sup>1</sup>, P. A. Dubynin<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation  
<sup>2</sup>JSC “Krasnoyarsk Machine-Building Plant”  
29, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation  
\*E-mail: pavel.dubynin@mail.ru

*In this work, an analytical determination of the local heat transfer coefficient in the planes of rotation of gas turbines is carried out using an affine-like model for the distribution of temperature and dynamic spatial boundary layers with a convective component (at  $Pr < 1$ ). The method of analytical study used in the work led to results close to the experimental values.*

*The problem of determining the thickness of the energy loss is solved using the integral relation of the energy equation of the temperature spatial boundary layer, which makes it possible to integrate the necessary curvature over the surface. The law of heat transfer of the turbulent boundary layer for the rotational motion of the flow and motion according to the law of “solid body” is expressed.*

*Equations are obtained for determining the local heat transfer coefficient by the Stanton criterion for various external flow laws for a power-law velocity distribution in the boundary layer according to the affine-like model of the temperature boundary layer.*

*Heat transfer coefficients correlate with sufficient accuracy with experimental data and dependencies published by other authors: J. M. Owen, L. A. Dorfman, I. V. Shevchuk. The deviation of the results obtained from the dependence of the model with a convective component and with affinity-like profiles do not have statistically significant differences. The obtained results of the study and their comparison with the results of other authors showed that they are suitable for engineering calculations and analysis of the impact of local heat transfer coefficients on high-temperature units of a turbopump unit.*

*Keywords: rotational motion of the flow, gas cavities of turbopump unit, affine-like model, energy loss thickness equations, heat transfer coefficient.*

### Введение

Повышение термических характеристик, проектируемых узлов и агрегатов ТНА напрямую зависит от проведения исследований на предмет локализации температурного воздействия газовых потоков. С целью повышения точности и совершенствования расчетных методик необходимо более точно определять численные значения характерных величин газового потока, влияющих как на потери в элементах проточного тракта, так и на энергетические и рабочие параметры турбин [1].

Одним из методологических подходов к решению задачи проектирования элементов газодов и моделирования энергетических параметров является аналитический вывод зависимостей путем преобразований уравнений динамики [2].

Рассмотрим вывод уравнений законов теплообмена и локальных коэффициентов теплоотдачи с использованием аффинноподобной модели температурного пограничного слоя для случая  $Pr < 1$  [3].

### 1. Взаимосвязь интегральных уравнений энергии турбулентного потока для прямолинейного равномерного и вращательного движений

Пусть температурный пограничный слой имеет конечную толщину  $\delta_t$ . Распределение профиля скорости аппроксимируем степенной функцией:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}. \quad (1)$$

При  $Pr = 1$  профиль распределения скорости в динамическом пограничном слое должен иметь производную на стенке, т. е. удовлетворять условию, требуемому дифференциальными уравнениями движения пограничного слоя. Поэтому будем использовать двухслойную модель распространения профиля скорости с ламинарным подслоем и турбулентным профилем в основной части.

Условия, требуемые дифференциальными уравнениями движения пограничного слоя, должны выполняться и для дифференциального уравнения энергии [4–7]. В работе аппроксимируется профиль скорости в пограничном слое кубической параболой:

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3. \quad (2)$$

Кубическую параболу используют также для аппроксимации температурного пограничного слоя:

$$\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \quad (3)$$

Отношение толщины температурного и динамического пограничных слоев в произвольном сечении обозначим как у В. М. Кейса:

$$r = \frac{\delta_t}{\delta} \quad \text{или} \quad \delta_t = r \cdot \delta. \quad (4)$$

Отметим, что использование уравнения кубической параболы возможно только для ламинарного пограничного слоя. Принимается, что распространение профиля скорости и распределение профиля температур в пограничном слое аппроксимируется следующими полиномами:

$$\frac{u}{U} = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4), \quad \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = (1 - 2\eta_t + 2\eta_t^3 - \eta_t^4). \quad (5)$$

В соответствии с работой В. М. Кейса, используем отношение температурного пограничного слоя к динамическому:

$$\Delta = \frac{\delta_t}{\delta}. \quad (6)$$

В соответствии с работой Ю. А. Кошмарова, профили скорости и температуры в турбулентном пограничном слое аппроксимируем степенными функциями:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{\frac{1}{m}}. \quad (7)$$

Рассмотрим толщину потери энергии:

$$\delta_{t\phi}^{**} = \int_0^{\delta_t} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0}\right) dy. \quad (8)$$

Профили распределения пограничных слоев показаны на рис. 1.

Разобьём границы уравнения (8) на два самостоятельных участка интегрирования:

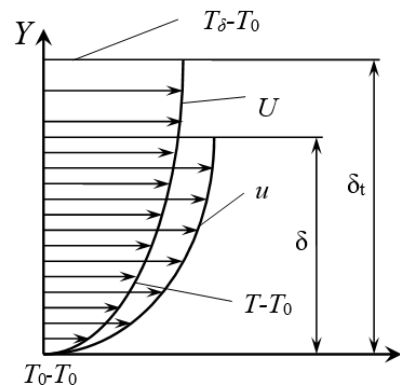


Рис. 1. Профили распределения температурного и динамического пограничных слоев при  $Pr < 1$

Fig. 1. Distribution profiles of temperature and dynamic boundary layers for  $Pr < 1$

– от соприкосновения потока с поверхностью тока до толщины динамического пограничного слоя  $\delta$ ;

– от окончания толщины динамического пограничного слоя  $\delta$  до окончания толщины температурного пограничного слоя  $\delta_t$ .

Отсюда уравнение (8) преобразуется к виду

$$\delta_{\text{тф}}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{T - T_0}{T_{\delta} - T_0} \right) dy + \int_{\delta}^{\delta_t} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{T - T_0}{T_{\delta} - T_0} \right) dy. \quad (9)$$

Выражение для толщины потери энергии при известных профилях аппроксимации пограничных слоев принимает следующий вид:

$$\delta_{\text{тф}}^{**} = \int_0^{\delta} \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \left( 1 - \left( \frac{y}{\delta_t} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy + \int_{\delta}^{\delta_t} \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \left( 1 - \left( \frac{y}{\delta_t} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy. \quad (10)$$

Произведём замену переменных:

$$A = \int_0^{\delta} \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \left( 1 - \left( \frac{y}{\delta_t} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy, \quad B = \int_{\delta}^{\delta_t} \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \left( 1 - \left( \frac{y}{\delta_t} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy.$$

В первом члене введем замену через отношение толщины температурного и динамического пограничных слоев в произвольных сечениях  $r = \frac{\delta_t}{\delta}$ , тогда

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\delta} \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left( 1 - \left( \frac{y}{r \cdot \delta} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy = \int_0^{\delta} \frac{y^{\frac{1}{m}}}{\delta^{\frac{1}{m}}} \cdot \left( 1 - \frac{y^{\frac{1}{m}}}{r^{\frac{1}{m}} \cdot \delta^{\frac{1}{m}}} \right) dy = \\ &= \int_0^{\delta} \left( \frac{y^{\frac{1}{m}}}{\delta^{\frac{1}{m}}} - \frac{y^{\frac{1}{m}}}{\delta^{\frac{1}{m}} \cdot r^{\frac{1}{m}}} \right) dy = \left. \frac{m \cdot y \cdot y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{\delta^{\frac{1}{m}} (m+1)}} - \frac{m \cdot y \cdot y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{\delta^{\frac{1}{m}} \cdot r^{\frac{1}{m}} (m+2)}} \right|_0^{\delta} = \\ &= \frac{\delta \cdot m}{(m+1)} - \frac{\delta \cdot m}{r^{\frac{1}{m}} \cdot (m+2)} = \frac{m \cdot \delta \cdot \left( m \cdot r^{\frac{1}{m}} + 2 \cdot r^{\frac{1}{m}} - m - 1 \right)}{\frac{1}{r^{\frac{1}{m}} \cdot (m+1) \cdot (m+2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $r$  – отношение толщины температурного и динамического пограничных слоев.

Границы интегрирования второго члена уравнения (10) находятся от толщины динамического пограничного слоя  $\delta$  до толщины температурного пограничного слоя  $\delta_t$ . При этом изменения эпюры скорости вдоль оси  $Y$  не происходит, а скорость равна скорости потока в ядре течения. В этом случае

$$\frac{u}{U} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Тогда

$$B = \int_{\delta}^{\delta_t} \left( 1 - \left( \frac{y}{\delta_t} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy = y - \frac{m \cdot y \cdot y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{\delta_t^{\frac{1}{m}} (m+1)}} \Big|_{\delta}^{\delta_t} = - \left( \delta - \frac{\delta \cdot \delta^{\frac{1}{m}} \cdot m}{m \cdot \delta_t^{\frac{1}{m}} + \delta_t^{\frac{1}{m}}} \right) +$$

$$+ \left( \delta_t - \frac{m \cdot \delta_t}{m+1} \right) = - \frac{\delta \cdot \delta_t^{\frac{1}{m}} - \delta_t \cdot \delta_t^{\frac{1}{m}} - \delta \cdot \delta^{\frac{1}{m}} \cdot m + \delta m \delta_t^{\frac{1}{m}}}{\delta_t^{\frac{1}{m}} (m+1)}. \quad (12)$$

С учетом выражения (12), толщина потерь энергии температурного пограничного слоя определится как

$$\delta_{t\varphi}^{**} = A + B = \frac{m \cdot \delta \cdot \left( m \cdot r^{\frac{1}{m}} + 2 \cdot r^{\frac{1}{m}} - m - 1 \right)}{r^{\frac{1}{m}} \cdot (m+1)(m+2)} - \frac{\delta \cdot \delta_t^{\frac{1}{m}} - \delta_t \cdot \delta_t^{\frac{1}{m}} - \delta \cdot \delta^{\frac{1}{m}} \cdot m + \delta m \delta_t^{\frac{1}{m}}}{\delta_t^{\frac{1}{m}} (m+1)}. \quad (13)$$

Учитывая отношение толщины температурного и динамического пограничных слоев в произвольном сечении, второй член уравнения толщины потери энергии (12) преобразуется к виду

$$B = - \frac{\delta (\delta r)^{\frac{1}{m}} + \delta m (\delta r)^{\frac{1}{m}} - \delta r (\delta r)^{\frac{1}{m}} - \delta \cdot \delta^{\frac{1}{m}} m}{(m+1) (\delta r)^{\frac{1}{m}}}. \quad (14)$$

Отметим, что при  $r = 0$ , что характерно для  $Pr = 1$ , первый член уравнения (13) запишется как  $A = \delta_{t\varphi}^{**}$ , а второй член уравнения обнуляется, т. е.  $B = 0$ .

Учитывая выражение (14), перепишем выражение для толщины потери энергии (13):

$$\begin{aligned} \delta_{t\varphi}^{**} &= \frac{m\delta \left( mr^{\frac{1}{m}} + 2r^{\frac{1}{m}} - m - 1 \right)}{r^{\frac{1}{m}} (m+1) \cdot (m+2)} - \frac{\delta (\delta r)^{\frac{1}{m}} + \delta m (\delta r)^{\frac{1}{m}} - \delta \delta_m}{(m+1) (\delta r)^{\frac{1}{m}}} = \\ &= \frac{m\delta \left( mr^{\frac{1}{m}} + 2r^{\frac{1}{m}} - m - 1 \right)}{r^{\frac{1}{m}} (m+1) \cdot (m+2)} + \left( \frac{\delta \left( m - mr^{\frac{1}{m}} + rr^{\frac{1}{m}} - r^{\frac{1}{m}} \right)}{r^{\frac{1}{m}} (m+1)} \right) = \frac{\delta \left( 2r - m + \frac{m}{r^{\frac{1}{m}}} + mr - 2 \right)}{(m+1)(m+2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Запишем уравнение закона теплоотдачи в виде критерия Стантона:

$$St = \frac{q_0}{\rho \cdot C_p \cdot U \cdot (T_\delta - T_0)} = \frac{\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{\rho \cdot C_p \cdot U \cdot (T_\delta - T_0)} = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p \cdot U} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right) \right]_{y=0}. \quad (16)$$

Для дальнейших вычислений найдем производную температурного пограничного слоя на стенке. Используем двухслойную модель турбулентности с ламинарным подслоем при коэффициенте Прандтля  $Pr = 1$ . Тогда толщина температурного пограничного слоя и динамического пограничного слоя будут равны, т. е.  $\delta = \delta_t$  [8; 9].

В данном случае при  $Pr < 1$  приняли  $\delta_t = r\delta$ . Проведя аналогию между температурным и динамическим пограничными слоями с учетом коэффициента отношения толщины и выполнив соответствующие преобразования, получим производную температурного пограничного слоя на стенке:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right)_{y=0} = \frac{U}{\alpha_n^2 \cdot v} \cdot \left( \frac{\alpha_n \cdot v}{\delta_t \cdot U} \right)^{\frac{2}{m+1}} = \frac{U}{\alpha_n^2 \cdot v} \cdot \left( \frac{\alpha_n \cdot v}{r \cdot \delta \cdot U} \right)^{\frac{2}{m+1}}. \quad (17)$$

Из уравнения (15) выразим толщину динамического пограничного слоя:

$$\delta = \frac{\delta_{i\varphi}^{**}(m+1)(m+2)}{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2} \quad (18)$$

Полученное выражение для толщины динамического пограничного слоя (18) подставим в выражение производной температурного пограничного слоя на стенке (поверхности теплообмена) (17):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right)_{y=0} = \frac{U}{\alpha_{л}^2 \cdot \nu} \cdot \left( \frac{\alpha_{л} \cdot \nu}{U \cdot \delta_{i\varphi}^{**} r} \cdot \left( \frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}} \right) \quad (19)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right)_{y=0} = U^{\frac{m-1}{m+1}} \cdot \left( \frac{1}{\alpha_{л}^{m-1} \cdot \nu^{\frac{m-1}{2}} r} \cdot \left( \frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}} \right) \times \frac{1}{(\delta_{i\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} \quad (20)$$

Определив производную температурного пограничного слоя на стенке (поверхности теплообмена) (20), а также закон теплообмена в виде критерия Стантона (16), получим

$$St = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p \cdot U^{\frac{2}{m+1}}} \cdot \left( \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \right) \cdot \frac{1}{(\delta_{i\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} \cdot \frac{1}{\alpha_{л}^{m-1} \cdot \nu^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \quad (21)$$

Для использования уравнения (21) в проектных расчетах требуется определить коэффициент ламинарного подслоя  $\alpha_{л}$ , который, исходя из двухслойной модели турбулентности, определяем из условия смыкания ламинарного подслоя и турбулентного профиля [10–11]. Определяем коэффициент ламинарного подслоя  $\alpha_{л}$  аналогично, как и при  $Pr = 1$ , с использованием закона трения и производной на поверхности теплообмена для функции распределения температурного пограничного слоя [12]. Исходя из выражения для толщины потери энергии температурного пограничного слоя (15), запишем

$$\alpha_{л} = \sqrt[2(m-1)]{\frac{m+1}{m+1}} \cdot \sqrt[2(m-1)]{\frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)r}} \cdot (\delta_{i\varphi}^{**})^{0,25} = \sqrt[2(m-1)]{\frac{0,01256(\delta_{i\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}}{(\delta_{i\varphi}^{**})^{0,25}}}$$

$$= \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \left( \frac{m\delta}{(m+1)(m+2)} \right)^{0,25}}{0,01256 \left( \frac{\delta \left( \frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \right)^{\frac{2}{m+1}}}. \quad (22)$$

При  $m = 7$  выражение (22) преобразуется к виду

$$\alpha_{\text{л}} = \frac{12,5496}{r^{0,167}}.$$

Учитывая, что при  $\text{Pr} < 1$   $r = \frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{\text{Pr}^{\frac{1}{3}}}$ , получим  $\alpha_{\text{л}} = 12,5496 \text{Pr}^{\frac{1}{18}}$ .

С использованием выражения (21) запишем интегральное соотношение уравнения энергии температурного пространственного пограничного слоя:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{J}{H_\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (\varepsilon \delta_{t\varphi}^{**}) + \frac{1}{H_\varphi \cdot H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} \cdot \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{J}{H_\varphi \cdot H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \cdot \varepsilon \delta_{t\varphi}^{**} = \\ & = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p \cdot U^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right) \times \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho \cdot C_p (T_\delta - T_0)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим случай реализации вращательного течения, когда направление потока определяется кольцевой линией [13]. Выразим уравнение энергии (23) в цилиндрических координатах, учитывая, что для осесимметричного течения при  $\varepsilon = \text{const}$  выполняются соотношения:

$$\varphi = \alpha, \quad \psi = R, \quad \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} = \frac{\partial R}{\partial R} = 1, \quad H_\psi = 1, \quad \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 :$$

$$J \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial R} \cdot \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{J \cdot \varepsilon}{R} \cdot \delta_{t\varphi}^{**} = \left( \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right)^{\frac{2}{m+1}} \times \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho \cdot C_p \cdot (T_\delta - T_0)}. \quad (24)$$



С использованием аффинноподобной модели температурного пограничного слоя, определение вида закона теплообмена становится тривиальной задачей. Использование уравнения (24) происходит после интегрирования с учетом принятых законов распределения.

## 2. Локальная теплоотдача турбулентного потока при вращательном течении

Представим течение в турбине ТНА и соответствующее ему вращательное движение по закону твердого тела. Пренебрегаем диссипативным членом в интегральном соотношении уравнения энергии (24) при реализации вращательного течения:

$$J \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial R} \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{J \cdot \varepsilon}{R} \delta_{t\varphi}^{**} =$$

$$= \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p \cdot U^{\frac{2}{m+1}}} \left[ \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right] \cdot \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} \quad (25)$$

Для вращательного течения по закону «твердого тела» распределение окружной составляющей скорости по радиусу  $\frac{U}{R} = \omega = \text{const}$  [14], уравнение (25) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial R} \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{\delta_{t\varphi}^{**}}{R} - \frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot \omega^{\frac{2}{m+1}}} \times \left[ \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right] \cdot \frac{1}{R^{\frac{2}{m+1}} (\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} \quad (26)$$

Введем промежуточные обозначения:

$$\delta_{t\varphi}^{**} = y,$$

$$A = \frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot \omega^{\frac{2}{m+1}}} \left[ \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right],$$

тогда

$$\frac{dy}{dR} + \frac{y}{R} - \frac{A}{R^{\frac{2}{m+1}} \cdot y^{\frac{2}{m+1}}} = 0. \quad (27)$$

Уравнение решается методом подстановки  $y = u \cdot v$ :

$$\frac{du}{dR} \cdot v + \frac{dv}{dR} \cdot u + u \frac{v}{R} = \frac{A}{u^{m+1} \cdot v^{m+1} \cdot R^{m+1}},$$

$$u \cdot \left( \frac{dv}{dR} + \frac{v}{R} \right) + v \cdot \frac{du}{dR} = \frac{A}{u^{m+1} \cdot v^{m+1} \cdot R^{m+1}}.$$

Функция  $v$  должна удовлетворять условию  $\frac{dv}{dR} + \frac{v}{R} = 0$ , тогда  $v = \frac{1}{R}$ , откуда находим

$$u = \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{A \cdot R^2 \cdot (m+3)}{2 \cdot (m+1)}}, \quad (28)$$

$$y = \delta_{t\varphi}^{**} = \frac{1}{R} \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{A \cdot R^2 \cdot (m+3)}{2 \cdot (m+1)}} = \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{A \cdot R^2 \cdot (m+3)}{2 \cdot (m+1)}} \cdot R^{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)}, \quad (29)$$

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot \omega^{m+1}} \times \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot (m+3)}{2 \cdot (m+1)} \cdot R^{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)} \quad (30)$$

Выведем критерий Стантона для вращательного течения по закону твердого тела для турбулентного режима с учетом выражений (21) и (30).

Задав  $\left( \text{Pr} = \frac{\mu C_p}{\lambda} \right)$  и  $\left( \text{Re} = \frac{\rho U \varphi}{\mu} \right)$ , выразим критерия Стантона для вращательного течения по закону твердого тела для случая  $\text{Pr} < 1$ :

$$\text{St} = \frac{1}{\text{Pr}^{\frac{m+1}{m+3}}} \left( \frac{2J\varepsilon \left( \frac{2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r}} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+3}}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} r(m+2)(m+3) \text{Re}_{\omega}} \right)^{\frac{2}{m+3}}. \quad (31)$$

Рассмотрим течение газового потока в магистралях подвода ТНА, которое осуществляется по закону свободного вихря ( $U \cdot R = C = \text{const}$ ) [15], тогда уравнение энергии (25) запишется как

$$\frac{d\delta_{t\varphi}^{**}}{dR} + \frac{\delta_{t\varphi}^{**}}{R} - \frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot C^{m+1}} \times$$

$$\times \left( \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{R^{\frac{2}{m+1}}}{\left( \delta_{i\varphi}^{**} \right)^{\frac{2}{m+1}}} = 0. \quad (32)$$

Проведем замену:

$$\delta_{i\varphi}^{**} = y,$$

$$B = \frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot C^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{R^{\frac{2}{m+1}}}{\alpha_{\pi}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right). \quad (33)$$

Решение уравнения (27) ведем аналогично случаю вращательного течения по закону твердого тела при  $Pr < 1$  методом подстановки  $y = u \cdot v$ , причем

$$v = \frac{1}{R}, \quad U = \frac{B^{\frac{m+1}{m+3}} \cdot R^2}{2^{\frac{m+1}{m+3}}}.$$

Тогда толщина потери энергии определится в виде

$$\delta_{i\varphi}^{**} = \left( \frac{B}{2} \right)^{\frac{m+1}{m+3}} \cdot R. \quad (34)$$

С учетом полученного ранее выражения  $B$  запишем:

$$\delta_{i\varphi}^{**} = \left[ \frac{\lambda}{J \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot C_p \cdot C^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\left( \frac{2r - m + \frac{m}{1} + mr - 2}{r^m} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{R^{\frac{2}{m+1}}}{\alpha_{\pi}^{m-1} \cdot v^{\frac{m-1}{2}} \cdot r} \right) \right]^{\frac{m+1}{m+3}} \cdot R. \quad (35)$$

Тогда критерий Стантона для вращательного течения по закону свободного вихря для случая  $Pr < 1$  определится, как

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left( \frac{2J\varepsilon \left( 2r - m + \frac{m}{\frac{1}{r^m}} + mr - 2 \right)}{\alpha_{л}^{m-1} r(m+1)(m+2) Re_{\omega}} \right)^{\frac{2}{m+3}} \quad (36)$$

Таким образом, выражены все переменные для определения локальных коэффициентов теплоотдачи в виде критерия Стантона при различных законах течения по аффинноподобной модели температурного пограничного слоя [16].

На рис. 2 представлены значения безразмерного коэффициента теплоотдачи в виде критерия Нуссельта для турбулентного вращательного течения по закону «твердого тела» [17; 18].

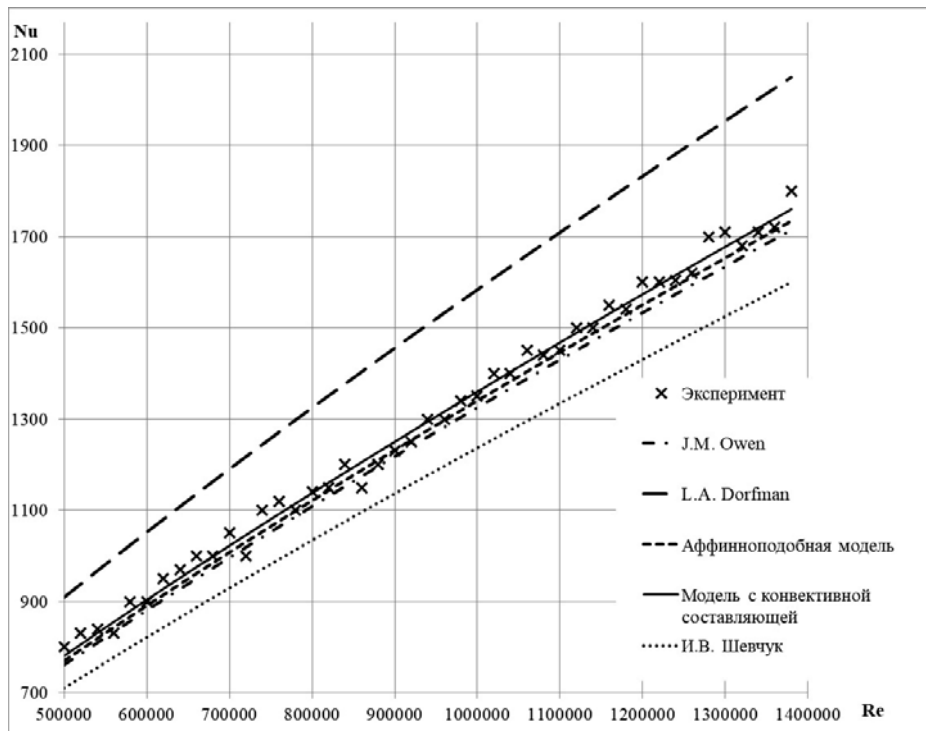


Рис. 2. Коэффициента теплоотдачи при  $Pr = 0,7$

Fig. 2. Heat transfer coefficient at  $Pr = 0.7$

### Заключение

Для сопоставления полученных в исследовании результатов с работами других авторов, используем данные эксперимента для случая турбулентного вращательного движения воздуха по закону «твердого тела» с диапазоном изменения критерия Рейнольдса  $Re = 5 \cdot 10^5 - 1,4 \cdot 10^6$ , критерия Прандтля  $Pr = 0,7$  [17]. При сравнении со значениями модели с конвективной составляющей аффинноподобная модель показывает схождение результатов на уровне 1,5 %.

Теоретические зависимости, полученные по моделям распределения температурного и динамического пограничных слоев с конвективной составляющей и аффинноподобными профилями при  $Pr = 0,7$ , дают достаточно близкие результаты в связи с близким подобием распределения температурного и динамического слоев и близки к случаю  $Pr = 1$ .

Полученные результаты исследования и их соотношение с результатами других авторов показали, что они пригодны для инженерных расчетов и анализа воздействия локальных коэффици-

циентов теплоотдачи на высокотемпературные узлы ТНА. Необходимо отметить, что на безразмерный коэффициент теплоотдачи в виде критерия Нуссельта существенно влияют граничные условия течения и теплообмена, такие как скорость, вязкость, плотность и градиент температур рабочего тела и поверхности теплообмена.

### Библиографические ссылки

1. Киселев Ф. Д. Диагностика разрушений и оценка эксплуатационной работоспособности рабочих турбинных лопаток авиационных двигателей // Вестник Московского авиац. ин-та. 2019. Т. 26, № 4. С. 108–122.
2. Григорьев В. А., Загребельный А. О., Калабухов Д. С. Совершенствование параметрической модели массы газотурбинного двигателя со свободной турбиной для вертолетов // Вестник Московского авиац. ин-та. 2019. Т. 26, № 3. С. 137–143.
3. Милешин В. И., Семёнкин В. Г. Расчетное исследование влияния числа Рейнольдса на характеристики первой типовой ступени компрессора высокого давления // Вестник Московского авиац. ин-та. 2018. Т. 25, № 2. С. 86–98.
4. Влияние центробежных массовых сил на теплоотдачу при обтекании потоком воздуха вогнутой поверхности с поперечными выступами / А. В. Ильинков, Р. Р. Габдрахманов, В. В. Такмовцев, А. В. Шукин // Вестник Московского авиац. ин-та. 2018. Т. 25, № 1. С. 39–48.
5. Горелов Ю.Г., Строкач Е.А. Анализ закономерностей расчета коэффициента теплоотдачи от газа на входных кромках сопловых лопаток турбин высокого давления // Вестник Московского авиац. ин-та. 2016. Т. 23, № 1. С. 80–85.
6. Определение коэффициента теплоотдачи на пере лопатки турбины на нерасчётных режимах работы / М. А. Щербаков, Д. А. Воробьев, С. А. Маслаков, Ю. А. Равикович // Вестник Московского авиац. ин-та. 2013. Т. 20, № 3. С. 95–103.
7. Краева Е. М. Энергетические параметры высокооборотных насосов малого расхода // Вестник Московского авиац. ин-та. 2011. Т. 18, № 3. С. 104–109.
8. Дисковое трение при определении баланса мощностей турбонасосных агрегатов жидкостных ракетных двигателей / А. А. Зуев, В. П. Назаров, А. А. Арнольд, И. М. Петров // Вестник Пермского нац. исслед. политех. ун-та. Аэрокосмическая техника. 2019. № 57. С. 17–31.
9. Методика определения дискового трения малорасходных центробежных насосов / А. А. Зуев, В. П. Назаров, А. А. Арнольд, И. М. Петров // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20, № 2. С. 219–227. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-2-219-227.
10. Numerical Research on the Energy Loss of a Single-Stage Centrifugal Pump with Different Vaned Diffuser Outlet Diameters./ F. Lai, X. Zhu, G. Li, L. Zhu, F. Wang // Energy Procedia. 2019. Vol. 158. P. 5523–5528. DOI: 10.1016/j.egypro.2019.01.592.
11. Numerical investigation of influence of the clocking effect on the unsteady pressure fluctuations and radial forces in the centrifugal pump with vaned diffuser / W. Jiang, G. Li, P. Liu, L. Fu // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 71. P. 164–171. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2015.12.025.
12. Efficient CFD evaluation of the NPSH for centrifugal pumps / M. Lorusso, T. Capurso, M. Torresi et al. // Energy Procedia. 2017. Vol. 126. P. 778–785. DOI: 10.1016/j.egypro.2017.08.262.
13. Optimal design of multistage centrifugal pump based on the combined energy loss model and computational fluid dynamics / C. Wang, W. Shi, X. Wang, X. Jiang et al. // Applied Energy. 2017. Vol. 187. P. 10–26. DOI: 10.1016/j.apenergy.2016.11.046.
14. Bakhshan, Y., Omidvar A. Calculation of friction coefficient and analysis of fluid flow in a stepped micro-channel for wide range of Knudsen number using Lattice Boltzmann (MRT) method // Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications. 2015. Vol. 440. P. 161–175. DOI: 10.1016/j.physa.2015.08.012.

15. Numerical study of laminar flow and friction characteristics in narrow channels under rolling conditions using MPS method / M. A. Basit, W. Tian, R. Chen et al. // *Nuclear Engineering and Technology*. 2019. DOI: 10.1016/j.net.2019.06.001.

16. Галактионов А. Ю., Хлупнов А. И. Численный расчет нестационарных аэродинамических характеристик цилиндрических моделей в условиях сверхзвукового ламинарного обтекания // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2015. № 5. С. 4–13. DOI: 10.18698/0236-3941-2015-5-4-13.

17. Афанасьев В. Н., Егоров К. С., Кон Д. Верификация моделей турбулентности при анализе структуры турбулентного пограничного слоя около прямоугольного выступа на пластине // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2018. № 6. С. 72–89. Doi: 10.18698/0236-3941-2018-6-72-89.

18. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя М. : Наука, 1974. 712 с.

## References

1. Kiselev F. D. [Fracture diagnostics and operational workability evaluation of working turbine blades of aircraft engine]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2019, Vol. 26, No. 4, P. 108–122 (In Russ.).

2. Grigor'ev V. A., Zagrebel'nyi A. O., Kalabuhov D. S. [Updating parametric gas turbine engine model with free turbine for helicopters]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2019, Vol. 26, No. 3, P. 137–143 (In Russ.).

3. Mileshekin V. I., Semenkina V. G. [Computational study of reynolds number effect on the typical first stage of a high-pressure compressor]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2018, Vol. 25, No. 2, P. 86–98 (In Russ.).

4. Ilinkov A. V., Gabdrakhmanov R. R., Takmovtsev V. V., Shchukin A. V. [Influence of centrifugal mass forces on heat transfer during air flow around a concave surface with transverse protrusions]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2018, Vol. 25, No. 1, P. 39–48 (In Russ.).

5. Gorelov Yu. G., Stokach E. A. [Analysis of regularities of calculation of the heat transfer coefficient from gas at the inlet edges of the nozzle blades of high-pressure turbines]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2016, Vol. 23, No. 1, P. 80–85 (In Russ.).

6. Shcherbakov M. A., Vorobyev D. A., Maslakov S. A., Ravikovich Yu. A. [Determination of the heat transfer coefficient on the turbine blade at off-design operating conditions]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2013, Vol. 20, No. 3, P. 95–103 (In Russ.).

7. Kraeva E. M. [Energy parameters of high-speed pumps of low flow]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*. 2011, Vol. 18, No. 3, P. 104–109 (In Russ.).

8. Zuev A. A., Nazarov V. P., Arngold A. A., Petrov I. M. [Disk friction in determining the balance of power turbopump rocket engine]. *PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*. 2019, No. 57, P. 17–31 (In Russ.).

9. Zuev A. A., Nazarov V. P., Arngold A. A., Petrov I. M. [The method of the disk friction determining of low mass flow centrifugal pumps]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2019, Vol. 20, No. 2, P. 219–227 (In Russ.). DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-2-219-227.

10. Lai F., Zhu X., Li G., Zhu L., Wang F. Numerical Research on the Energy Loss of a Single-Stage Centrifugal Pump with Different Vaned Diffuser Outlet Diameters. *Energy Procedia*. 2019, Vol. 158, P. 5523–5528. DOI: 10.1016/j.egypro.2019.01.592.

11. Jiang W., Li G., Liu P., Fu L. Numerical investigation of influence of the clocking effect on the unsteady pressure fluctuations and radial forces in the centrifugal pump with vaned diffuser. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2016, Vol. 71, P. 164–171. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2015.12.025.

12. Lorusso M., Capurso T., Torresi M., Fortunato B., Fornarelli F., Camporeale S. M., Monteriso R. Efficient CFD evaluation of the NPSH for centrifugal pumps. *Energy Procedia*. 2017, Vol. 126, P. 778–785. DOI: 10.1016/j.egypro.2017.08.262.

13. Wang C., Shi W., Wang X., Jiang X., Yang Y., Li W., Zhou L. Optimal design of multistage centrifugal pump based on the combined energy loss model and computational fluid dynamics. *Applied Energy*. 2017, Vol. 187, P. 10–26. DOI: 10.1016/j.apenergy.2016.11.046.
14. Bakhshan Y., Omidvar A. Calculation of friction coefficient and analysis of fluid flow in a stepped micro-channel for wide range of Knudsen number using Lattice Boltzmann (MRT) method. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. 2015, Vol. 440, P. 161–175. DOI: 10.1016/j.physa.2015.08.012.
15. Basit M. A., Tian W., Chen R., Qiu S., Su G. Numerical study of laminar flow and friction characteristics in narrow channels under rolling conditions using MPS method. *Nuclear Engineering and Technology*. 2019. DOI: 10.1016/j.net.2019.06.001.
16. Galaktionov A. Yu., Khlyupnov A. I. [Numerical calculation of unsteady aerodynamic characteristics of cylinder models for supersonic laminar flow]. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana*. 2015, No. 5, P. 4–13 (In Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2015-5-4-13.
17. Afanas'ev V. N., Egorov K. S., Kong Dehai [Turbulence Model Validation During Analysis of the Turbulent Boundary Layer Structure near a Rectangular Ridge on a Plate]. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana, Mashinostr.* 2018, No. 6, P. 72–89 (In Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2018-6-72-89.
18. Shlikhting G. *Teoriya pogrannichnogo sloya* [The theory of the boundary layer]. Moscow, Science Publ., 1974, 712 p.

© Зуев А. А., Арногльд А. А., Фалькова Е. В., Толстопятов М. И., Дубынин П. А.

---

**Зуев Александр Александрович** – доктор технических наук, доцент; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: dla2011@inbox.ru.

**Арногльд Анна Анатольевна** – начальник бюро спецсоединителей, приборов и пультов аппаратуры; АО «Красноярский машиностроительный завод». E-mail: arngoldanna@mail.ru.

**Фалькова Екатерина Владимировна** – старший преподаватель кафедры технической механики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: dankaty@mail.ru.

**Толстопятов Михаил Игоревич** – кандидат технических наук, доцент; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: 89130399999@mail.ru.

**Дубынин Павел Алексеевич** – аспирант кафедры двигателей летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: pavel.dubynin@mail.ru.

**Zuev Aleksandr Aleksandrovich** – Dr. Sc., associate professor; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: dla2011@inbox.ru.

**Arngol'd Anna Anatol'evna** – Head of the bureau of special connectors, devices and equipment consoles; JSC “Krasnoyarsk Machine Building Plant”. E-mail: arngoldanna@mail.ru.

**Falkova Ekaterina Vladimirovna** – Senior Reverend of the Department of Technical Mechanics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: dankaty@mail.ru.

**Tolstopyatov Mikhail Igorevich** – Cand. Sc., Associate Professor; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: 89130399999@mail.ru.

**Dubynin Pavel Alekseevich** – post-graduate student of the Department Aircraft Engines; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: pavel.dubynin@mail.ru.

---

УДК 629.7.062

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-451-460

**Для цитирования:** Проектирование узла крепления оттяжек на силовой спице рефлектора / В. В. Кольга, А. И. Лыкум, М. Е. Марчук, Г. Ю. Филипсон // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 451–460. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-451-460.

**For citation:** Kolga V. V., Lykum A. I., Marchuk M. E., Filipson G. U. [Design of the fastening assembly of the guys on the power spokes reflector]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 451–460. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-451-460.

## Проектирование узла крепления оттяжек на силовой спице рефлектора

В. В. Кольга<sup>1</sup>, А. И. Лыкум<sup>2</sup>, М. Е. Марчук<sup>2</sup>, Г. Ю. Филипсон<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

<sup>2</sup>АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 662972, г. Железногорск Красноярского края, ул. Ленина, 52  
E-mail: kolgavv@yandex.ru

*В настоящее время глобальные системы связи развиваются в сторону освоения высоких диапазонов частот для организации высокоскоростных каналов передачи информации, для чего необходимы крупногабаритные антенные системы с рефлекторами до 50 м. Большинство используемых технических решений для сборки крупногабаритных рефлекторов базируются на технологических объемных шаблонах, геометрически полностью имитирующих необходимую отражающую поверхность рефлектора. Масса таких шаблонов увеличивается в кубической зависимости относительно увеличения диаметра рефлектора, из-за чего использовать их при сборке крупногабаритных антенн становится всё более трудоемко из-за увеличения габаритов и массы шаблонов.*

*Целью исследования является проектирование узла крепления оттяжек на силовой спице рефлектора для «бесшаблонной» сборки. Спица представляет собой композитную изогридную структуру, на которой закреплены кронштейны для крепления силовых узлов. Узел крепления представляет собой сборочную единицу, состоящую из скобы и зажимов и позволяющую точно регулировать необходимую силу натяжения оттяжки для фиксации шнура в рабочем положении без использования неразъемных способов скрепления.*

*В качестве методов исследования были приняты аналитический подход и конечно-элементный анализ. С помощью аналитического расчёта была определена максимальная сила натяжения оттяжек в спроектированном узле, тем самым задана максимальная нагрузка для его эксплуатации. Коэффициент трения между шнуром и зажимом в каждом отдельном случае определяется экспериментально. После упрощения расчетно-конструктивной схемы скобы аналитический расчет проводился для пространственной стержневой рамы.*

*Для подтверждения результатов расчёта была построена конечно-элементная модель скобы и проведен её статический анализ. Для разработанной модели скобы определены максимальные напряжения и проведен их сравнительный анализ с результатами, полученными аналитически.*

*С помощью твердотельного моделирования определены массовые и габаритные характеристики узла крепления оттяжек. Были определены предельные диапазоны сил натяжения и материалы, используемые в узле, а также его прочностные характеристики.*

*В заключении сделан вывод, что данный узел может применяться в «бесшаблонном» методе сборки рефлектора для широкого спектра крупногабаритных антенн, он обладает высокой технологичностью и универсальностью.*

*Ключевые слова:* узел крепления, антенна, оттяжки, шнур, крупногабаритный рефлектор.



## Design of the fastening assembly of the guys on the power spokes reflector

V. V. Kolga<sup>1</sup>, A. I. Lykum<sup>2</sup>, M. E. Marchuk<sup>2</sup>, G. U. Filipson<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation  
<sup>2</sup>JSC "Academician M. F. Reshetnev "Information Satellite Systems"  
52, Lenin St., Zheleznogorsk, Krasnoyarsk region, 662972, Russian Federation  
E-mail: kolgavv@yandex.ru

*Currently, global communication systems are developing towards mastering high frequency bands for organizing high-speed information transmission channels, which requires large-sized antenna systems with reflectors up to 50 meters. Most of the technical solutions used for assembling large-sized reflectors are based on technological volumetric templates that geometrically completely imitate the necessary reflective surface of the reflector. The mass of such templates increases in cubic dependence on the increase in the diameter of the reflector, which is why it becomes more and more laborious to use them when assembling large-sized antennas due to the increase in the dimensions and weight of the templates.*

*The purpose of the study is to design the attachment point for guy wires on the power spoke of the reflector for a "templateless" assembly. The spoke is a composite isogrid structure on which brackets are fixed for attaching power units. The fastening unit is an assembly unit consisting of a bracket and clips and allows you to precisely adjust the necessary pull tension force to fix the cord in the working position without the use of one-piece fastening methods.*

*The analytical approach and finite element analysis were adopted as research methods. Using an analytical calculation, the maximum tensile force of the guys in the designed unit was determined, thereby setting the maximum load for its operation. The coefficient of friction between the cord and the clamp in each individual case is determined experimentally. After simplifying the design and construction scheme of the bracket, the analytical calculation was carried out for a three-dimensional rod frame.*

*To confirm the results of the calculation, a finite element model of the bracket was built and its static analysis was carried out. For the developed model of the bracket, the maximum stresses were determined and their comparative analysis was carried out with the results obtained analytically.*

*The results of the design of the bracing attachment point. With the help of solid modeling, the mass and overall characteristics of the braces fastening unit are determined. The limiting ranges of tension forces and the materials used in the knot, as well as its strength characteristics, were determined.*

*Conclusion. This node can be used in the "templateless" method of assembling a reflector for a wide range of large antennas, it has high manufacturability and versatility.*

*Keywords: attachment unit, antenna, guy ropes, cord, large-sized reflector.*

### Введение

На данный момент глобальные системы связи развиваются в сторону освоения высоких диапазонов частот для организации высокоскоростных каналов передачи информации. Для этого необходимы антенные системы с рефлекторами апертуры 10–50 м.

Крупногабаритные рефлекторы – часть антенного комплекса, отвечающая за отражение и усиление сигнала широкого спектра от излучающей установки [1–8]. Проблемы сборки крупногабаритных рефлекторов сохраняют свою актуальность до настоящего времени [9]. Большинство используемых технических решений базируются на технологических объемных шаблонах, геометрически полностью имитирующих необходимую отражающую поверхность рефлектора. Масса таких шаблонов увеличивается в кубической зависимости относительно увеличения диаметра рефлектора, из-за чего использовать их в сборке крупногабаритных антенн становится всё более трудоемко из-за увеличения их габаритов и массы.

Примером такого технологического решения является способ, описанный в [10].

### Анализ существующих способов изготовления крупногабаритного рефлектора

Для изготовления крупногабаритного рефлектора космического аппарата используется растяжение металлизированного трикотажного сетчатого полотна, раскрой его на фрагменты, сшивка по радиальным сегментам для получения необходимой формы, после чего раскроенные элементы сетеполотна крепят на силовом каркасе. Далее проводится формирование реперных знаков на рабочей поверхности сетеполотна с учётом припусков в виде лент. Готовые фрагменты складывают припусками внахлест, сшивают между собой и размещают на объемном шаблоне требуемой формы, растягивая сетеполотно с требуемым рабочим усилием и выравнивая на шаблоне неровности поверхности. После получения требуемой формы и размера рабочей поверхности сетеполотно фиксируют скобами, предварительно разместив его на шаблоне и отрегулировав с использованием тангенциальных шнуров под требуемую форму поверхности.

Исходя из формулы изобретения, можно выявить следующие недостатки: трудоемкость процесса сборки; чрезмерная массовая составляющая объемного шаблона, которая возрастает в кубической зависимости от диаметра рефлектора. Данный способ изготовления предполагает изготовление отдельных шнуров (нарезку по длине) и начальный монтаж без учета упругих свойств шнуров. Из-за этого необходимо создавать систему заданных усилий натяжения на каждом этапе сборки, образуя статическую неопределимость усилий в узлах [10; 11].

Для решения этой проблемы в АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева» (АО «ИСС») разработано техническое решение «бесшаблонной» сборки рефлектора, позволяющее собрать рефлектор с помощью систем обезвешивания [12; 13]. В рассмотренном выше решении отсутствуют необходимые технические элементы детализации, которые необходимы для его реализации, что свойственно патентам. В частности, требуется разработка узла крепления и регулировки оттяжек, отвечающего следующим требованиям: возможности многократного фиксирования шнура; удобного крепежа на силовую спицу; возможности точно регулировать длину шнура по оси  $OZ$ ; минимизации массогабаритных характеристик.

### Конструкция узла крепления оттяжек

Для реализации данного решения [12] нами была предложена конструкция узла крепления, который отвечает указанным выше требованиям. Рассмотрим в качестве базового узла крупногабаритный рефлектор антенны разработки АО «ИСС» [12].

В процессе проектирования было решено применить схему зажима, схожую с навесными защелками (рис. 1).

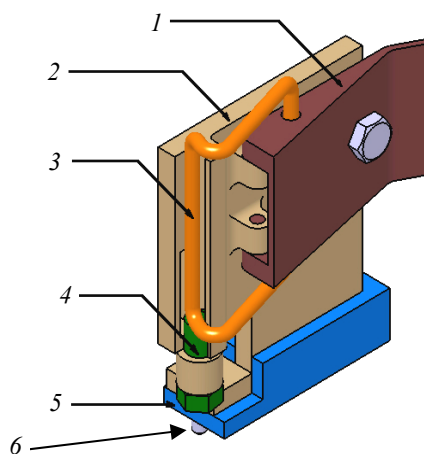


Рис. 1. Общий вид узла крепления:  
1 – язычок; 2 – база; 3 – скоба; 4 – регулировочный болт;  
5 – кронштейн для закрепления узла в общем виде; 6 – крепежный болт

Fig. 1. It is a general view of the fastening unit:  
1 – tongue; 2 – base; 3 – bracket; 4 – adjusting bolt;  
5 – bracket for fixing the unit in general; 6 – mounting bolt

Подобная схема проста в изготовлении и позволяет создавать достаточное усилие на скобе, прочно фиксируя шнур, при этом не требуя значительного прикладывания усилий за счёт правила рычага. Важным моментом для закрепления шнура является большая площадь контакта зажима со шнуром, позволяющая исключить потерю прочности шнура при натяжении из-за возможного перелома (рис. 1).

Язычок (1) для надежного закрепления своего положения может фиксироваться болтом (4).

На рис. 2 показаны элементы, обеспечивающие точную регулировку требуемой длины шнура. Это регулировочный полый болт (4) и вырез для регулировочной петли шнура в базе (2), с помощью которой можно обеспечить резервный запас длины для регулировки.

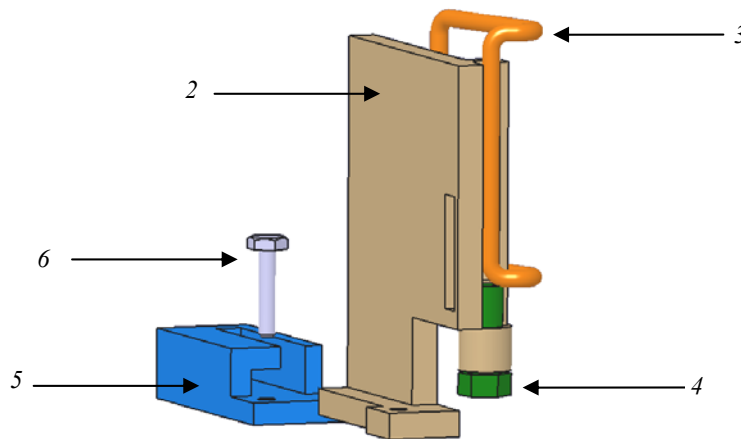


Рис. 2. Узел в снятом положении:

1 – язычок (не виден на этом рисунке); 2 – база; 3 – скоба; 4 – регулировочный болт;  
5 – кронштейн для закрепления узла в общем виде; 6 – крепежный болт

Fig. 2. The unit is in the removed position:

1 – tongue (not visible in this figure); 2 – base; 3 – bracket; 4 – adjusting bolt;  
5 – bracket for fixing the unit in General; 6 – mounting bolt

Разработанный узел крепления обеспечивает возможность снятия его с опорного кронштейна для установки на нем натяжного шнура (рис. 2). Ось крепежного болта (6) расположена максимально близко к оси шнура для минимизации крутящего момента от усилий натяжения и возможного поворота базы. При этом сохраняется возможность удобного откручивания обоих болтов, как крепежного (6), так и регулировочного (4).

Материалом для базы (2), язычка (1) был выбран АМг6, материалом для болтов – Сталь 45. Для скобы (3) будет произведён подбор материала, исходя из прочностных расчётов. Примерный расчёт позволил оценить массу узла, равную 0,018 кг.

#### Аналитический расчет силы натяжения шнура в узле крепления оттяжек

Для обеспечения надежного закрепления натяжного шнура в спроектированном узле требуется определить величину и направление действия сил в узле. Исходя из расчетной силы трения внутри рабочей поверхности узла, необходимо оценить усилие зажима. Требуемое усилие на оттяжках силовой спицы зависит от материала и механических характеристик шнура (коэффициента трения, модуля упругости, предела текучести и др.) [14].

Схема приложения сил показана на рис. 3.

Исходя из данного рисунка, сила трения равна

$$F_{\text{трения}} = -F_{\text{тяги}};$$

$$F_{\text{трения}} = k \cdot N,$$

где  $N$  – сила реакции шнура на силу, воздействующую со стороны зажима;  $k$  – коэффициент трения.

Предполагая деформации упругими, сила зажима равна

$$F_{\text{зажима}} = -N;$$

$$F_{\text{зажима}} = \frac{F_{\text{тяги}}}{k},$$

Коэффициент трения между шнуром и базой является уникальным в каждом отдельном случае и зачастую определяется экспериментально. Как видно из формулы выше, зажим держит оттяжку благодаря силе натяжения, которая меньше, чем сила зажима. Уменьшить разницу между ними можно обработкой скобы и паза, в котором будет находиться нить, тем самым увеличив коэффициент трения.

При этом мы можем определить максимальную силу  $F_{\text{тяги}}$ , которую возможно приложить к скобе (3), с помощью аналитического расчёта тем самым определив максимальную нагрузку для эксплуатации спроектированного узла.

Упростив расчетно-конструктивную схему скобы, мы получаем пространственную раму, изображенную на рис. 4.

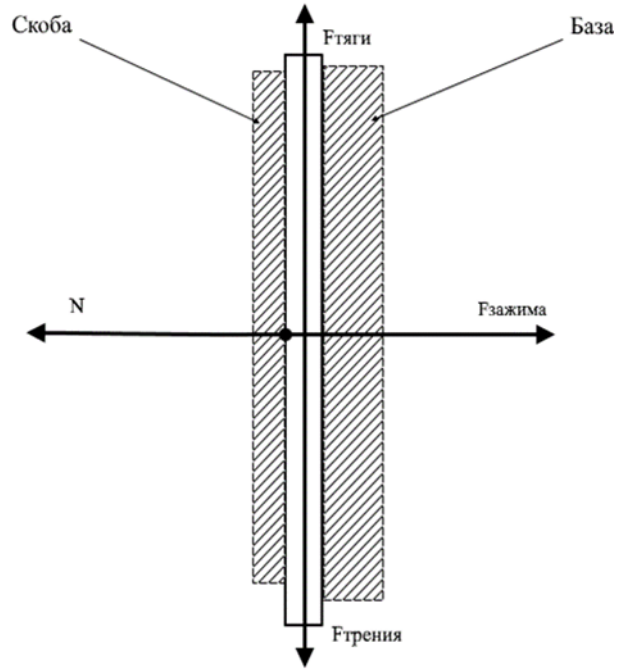


Рис. 3. Распределение сил в канавке зажима

Fig. 3. Distribution of forces in the clamping groove

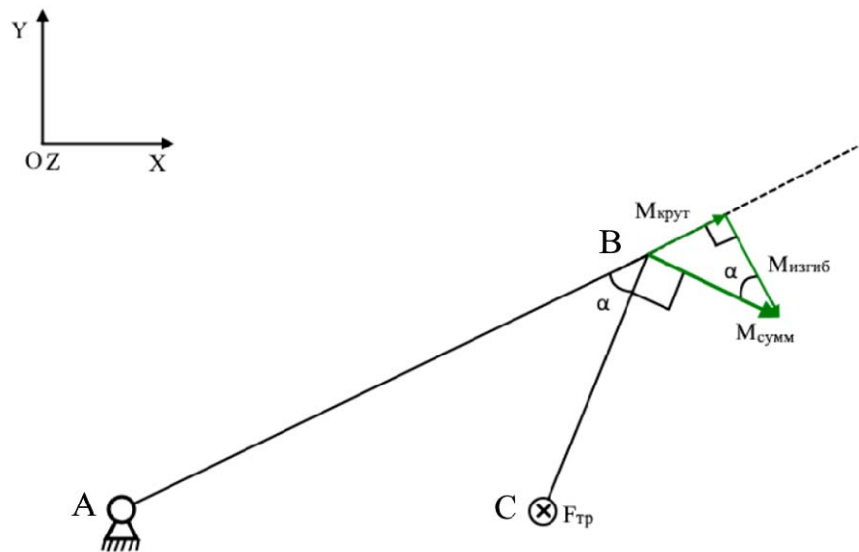


Рис. 4. Расчетно-конструктивная схема скобы

Fig. 4. The bracket in a simplified form

Теперь необходимо найти максимальное значение силы  $F_{\text{тяги}}$ , исходя из предела текучести материала скобы. По третьей теории прочности, запишем формулу эквивалентного напряжения и приравняем её к пределу прочности материала

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{4\tau_A^2 + \sigma_A^2};$$

где  $\sigma_A$  – нормальное напряжение в точке А;  $\tau_A$  – тангенциальное напряжение в этой же точке. Распишем эти величины далее

$$\sigma_A = \frac{M_{\text{Изгиб}}}{W_{\text{Изгиб}}};$$

$$M_{\text{Изгиб}} = F_{\text{тяги}} \cdot AB + F_{\text{тяги}} \cdot CB \cdot \cos \alpha;$$

$$W_{\text{Изгиб}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32};$$

$$\tau_A = \frac{M_{\text{Акруч}}}{W_{\text{круч}}};$$

$$M_{\text{Акруч}} = M_{\text{круч}} = F_{\text{тяги}} \cdot CB \cdot \sin \alpha;$$

$$W_{\text{круч}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16};$$

где  $M_{\text{Изгиб}}$  – максимальный изгибающий момент в точке А;  $M_{\text{Изгиб}}$  – изгибающий момент в точке В;  $M_{\text{Акруч}}$  – максимальный скручивающий момент в точке А;  $W_{\text{Изгиб}}$  – момент сопротивления изгибу;  $W_{\text{круч}}$  – момент сопротивления кручению.

Исходя из выведенных величин, запишем выражение эквивалентного напряжения

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{4 \left( \frac{F_{\text{тяги}} \cdot CB \cdot \sin \alpha \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \right)^2 + \left( \frac{(F_{\text{тяги}} \cdot AB + F_{\text{тяги}} \cdot CB \cdot \cos \alpha) \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \right)^2};$$

Отсюда мы можем выразить максимальную силу натяжения в узле  $F_{\text{тяги}}$ , так как нам известны все характеристики скобы

$$F_{\text{тяги}} = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \sigma_{\text{эkv}}}{32 \sqrt{2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos \alpha + AB^2 + BC^2}}.$$

Задав диаметр скобы и видом материала, рассчитаем размеры скобы и определим максимально допустимые усилия для спроектированного узла.

Анализ результатов расчетов для различных диаметров скобы  $d$  применительно к сплавам АМг6, ВТ14 и ВТ16, достаточно часто применяемым в ракетно-космической технике, представлен в таблице.

**Вводные данные и результаты аналитического расчёта**

	АМг6			ВТ 14			ВТ16		
	d1, м	d2, м	d3, м	d1, м	d2, м	d3, м	d1, м	d2, м	d3, м
	0,0022	0,002	0,0018	0,0022	0,002	0,0018	0,0022	0,002	0,0018
σв, Па	305000000			850000000			1030000000		
АВ, м	0,021								
СВ, м	0,007								
sin α	0,78								
cos α	0,62								
$F_{\text{тяги}}$ , Н	12,29	9,23	6,73	34,25	25,73	18,76	41,50	31,18	22,73

Как видно из расчётов, допустимое усилие на шнуре может варьироваться от 6,73 до 41,50 Н, в зависимости от диаметра и материала скобы. Исходя из опытных данных, известно, что необходимые усилия на оттяжках равны 8–14 Н, поэтому оптимальными вариантами будут скобы АМг 6 с диаметром 2,2 мм, ВТ14 – с диаметром в 1,8 мм.

**Конечно-элементное моделирование несущей способности скобы в узле крепления оттяжек**

Для подтверждения результатов расчёта была создана конечно-элементная модель в САПР Catia для проведения статического анализа [15]. С помощью построенной модели мы рассчита-

ем максимальные напряжения в скобе и сравним их с полученными в аналитическом расчете. Для расчёта была выбрана скоба с диаметром 0,0018 м из материала ВТ16.

Как видно на рис. 5, критическое сечение в скобе соответствует аналитическому расчёту. Максимальные напряжения в скобе по данным статического анализа равны 100 МПа.

Погрешность между аналитическим расчётом и расчётом по модели равна

$$\Delta = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ}} - \sigma_{\text{МОД}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}} \cdot 100 \% = \frac{10,3 - 10}{10,3} \cdot 100 \% = 3 \%$$

Погрешность расчёта не превышает 3 %.

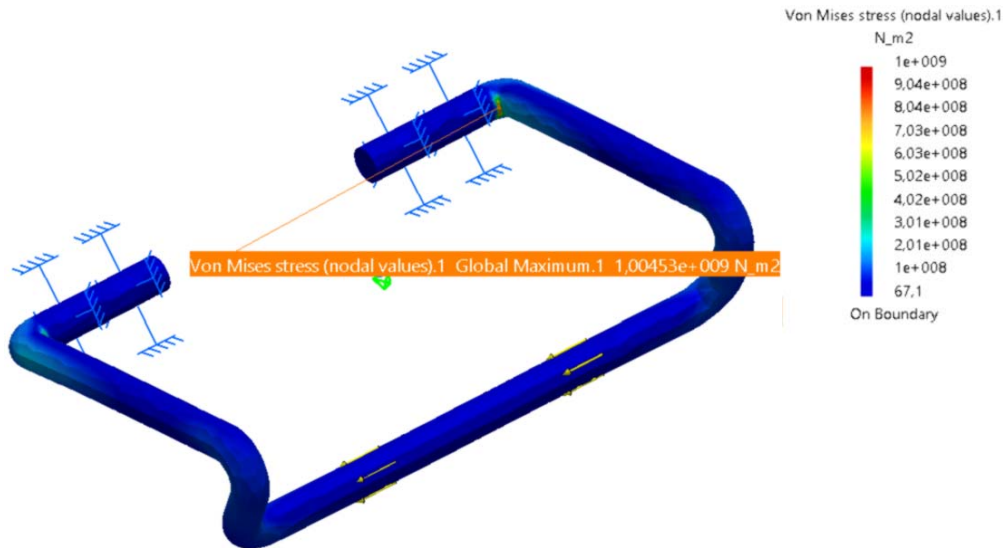


Рис. 5. Распределение напряжений в скобе

Fig. 5. Stress distribution in the bracket

При проектировании узла крепления необходимо учитывать, что сила зажима, приложенная к шнуру не должна вызывать в нем пластических деформаций, что ограничивает максимальное усилие зажима только упругими деформациями. Для определения силы упругости, определим напряжения в поперечном сечении

$$F_{\text{упругости}} = k_{\text{жест}} \cdot \Delta d,$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon.$$

где  $F_{\text{упругости}}$  – сила упругости, равная силе реакции опоры  $N$ ;  $k_{\text{жест}}$  – коэффициент жесткости;  $\sigma$  – нормальные напряжения;  $E$  – модуль упругости первого рода;  $\varepsilon$  – относительная линейная продольная деформация;  $\Delta d$  – линейная деформация. Однако конечные результаты во многом зависят от вида и материала шнура, который может варьироваться в зависимости от поставленных задач.

### Заключение

В работе был разработан узел крепления оттяжек на силовой спице рефлектора. Узел может применяться в широком спектре крупногабаритных антенн, обладает высокой технологичностью и универсальностью. Были определены предельные диапазоны сил натяжения и материалы, используемые в узле, а также его прочностные и массовые характеристики.

В дальнейшем в конструкции можно улучшить эргономические характеристики для снижения массы узла.

Рекомендуется использовать наиболее универсальный вариант исполнения скобы из титанового сплава ВТ16 диаметром 22 мм, который выдерживает до 41,50 Н усилий натяжения, что

даёт значительный запас прочности для большинства расчетных случаев. Но, исходя из технологических и экономических соображений, при более низких усилиях в оттяжках, можно также использовать скобы из АМгб, ВТ14 меньшего диаметра.

### Библиографические ссылки

1. Параметрический анализ анизотридного корпуса космического аппарата для очистки орбиты от космического мусора / И. Д. Белоновская, В. В. Кольга, И. С. Ярков, Е. А. Яркова // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 1. С. 94–105.
2. Замятин Д. А., Кольга В. В. Моделирование конструкции мачты рефлектора // Решетневские чтения : материалы XXIV Междунар. науч. конф. (10–13 ноября 2020, г. Красноярск) : в 2 ч. / СибГУ им. М.Ф. Решетнева. Красноярск, 2020. Ч. 1. С. 21–22
3. Кольга В. В., Ярков И. С., Яркова Е. А. Разработка тепловой панели малого космического аппарата навигационного обеспечения // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21, № 3. С. 382–388.
4. Оптимизация расположения мест крепления приборной панели космического аппарата на основе модального анализа / В. В. Кольга, М. Е. Марчук, А. И. Лыкум, Г. Ю. Филипсон // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22, № 2. С. 328–338.
5. Оптимизация расположения интерфейсных точек приборной панели космического аппарата. В. В. Кольга, М. Е. Марчук, А. И. Лыкум, С. А. Зоммер // Инновации. Наука. Образование. 2021. № 6. С. 1401–1405.
6. О подходах к прогнозированию акустического воздействия на оболочечные элементы космического аппарата / В. В. Кольга, М. Е. Марчук, А. И. Лыкум, Г. А. Романенко // Решетневские чтения : материалы XXV Междунар. науч. конф. (10–12 ноября 2021, г. Красноярск) : в 2 ч. / СибГУ им. М.Ф. Решетнева. Красноярск, 2021. Ч. 1. С. 38–41.
7. Гряник М. В., Ломан В. И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М. : Радио и связь, 1987. 9 с.
8. Чеботарев В. Е., Косенко В. Е. Основы проектирования космических аппаратов информационного обеспечения. Красноярск, 2011. 348 с.
9. Тестоедов Н. А., Кольга В. В., Семенова Л. А. Проектирование и конструирование баллистических ракет и ракет носителей. Красноярск, 2014. 308 с.
10. Патент 2350518С1 Российская Федерация МПК В64G 1/22, H01Q 15/16. Способ изготовления развертываемого крупногабаритного рефлектора космического аппарата / Тестоедов Н. А., Халиманович В. И. и др.; заявление № 2007122181/11, от 13.06.2007; опубл. 27.03.2009, бюл. № 9.
11. Патент 2296396С2 Российская Федерация МПК H01Q 15/16. Способ сборки крупногабаритных развертываемых космических рефлекторов и технологическое приспособление для формирования отражающей поверхности рефлектора / Семенов Ю.П., Стрекалов А.Ф. и др.; заявление №2005100412/09, от 11.01.2005; опубл. 27.03.2007, бюл. № 9.
12. Патент 2674386 Российская Федерация, МПК В64G 1/22. Способ изготовления крупногабаритного трансформируемого рефлектора / Величко А. И., Шендалев Д. О. и др.; заявление №2016136059, от 2016.09.06; опубл. 07.12.2018, бюл. № 34.
13. Патент 2276823С2 Российская Федерация МПК H01Q 15/16. Способ изготовления крупногабаритных развертываемых рефлекторов и устройство для формирования криволинейной поверхности рефлектора / Полухин Н. В., Бычков В. И. и др.; заявление № 2004125486/09, от 19.08.2004; опубл. 20.05.2006, бюл. № 14.
14. Анурьев В. И. Справочник конструктора машиностроителя. Том 1. М.: Машиностроение, 2001, 53 с.
15. Лопатин А. В., Рутковская М. А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн. Ч. 1 // Сибирский аэрокосмический журнал. 2007. № 2. С. 51–57.

## References

1. Belonovskaya I. D., Kolga V. V., Yarkov I. S., Yarkova E. A. [Parametric analysis of an anisogrid body of a spacecraft for cleaning the orbit from space debris]. *Siberian Aerospace Journal*. 2021, Vol. 22, No. 1, P. 94–105 (In Russ.).
2. Zamyatin D. A., Kolga V. V. [Modeling the design of the reflector mast]. *Reshetnevsky Readings: Proceedings of the XXIV Intern. scientific conf.* (November 10–13, 2020, Krasnoyarsk). Krasnoyarsk, 2020, P. 21–22 (In Russ.).
3. Kolga V. V., Yarkov I. S., Yarkova E. A. [Development of a thermal panel for a small spacecraft for navigation support]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2020, Vol. 21, No. 3, P. 382–388 (In Russ.).
4. Kolga V. V., Marchuk M. E., Lykum A. I., and Philipson G. Yu. [Optimization of the location of attachment points for the instrument panel of a spacecraft based on modal analysis]. *Siberian Aerospace Journal*. 2021, Vol. 22, No. 2, P. 328–338 (In Russ.).
5. Kolga V. V., Marchuk M. E., Lykum A. I., Sommer S. A. [Optimization of the location of the interface points of the instrument panel of the spacecraft]. *Innovations. The science. Education*. 2021, No. 6, P. 1401–1405 (In Russ.).
6. Kolga V. V., Marchuk M. E., Lykum A. I., Romanenko G. A. [On approaches to predicting the acoustic impact on the shell elements of the spacecraft]. *Reshetnev readings: materials of the XXV Intern. scientific conf.* (November 10–12, 2021, Krasnoyarsk). Krasnoyarsk, 2021, P. 38–41 (In Russ.).
7. Gryanik M. V., Loman V. I. *Razvertivaemye zerkal'nye anteny zontichnogo tipa* [Deployable mirror antennas of umbrella type]. Moscow, Radio and Communications Publ., 1987, 9 p.
8. Chebotarev V. E., Kosenko V. E. *Osnovy proektirovaniya kosmicheskikh apparatov informatsionnogo obespecheniya* [Fundamentals of designing information support spacecraft]. Krasnoyarsk, 2011, 348 p.
9. Testoedov N. A., Kolga V. V., Semenova L. A. *Proektirovanie i konstruirovaniye ballisticheskikh raket i raket nositeley* [Design and construction of ballistic missiles and launch vehicles]. Krasnoyarsk, 2014, 308 p.
10. Testoedov N. A., Khalimanovich V. I. et al. *Sposob izgotovleniya razvertivayemogo krupnogabaritnogo reflektora kosmicheskogo apparata* [Method for manufacturing a deployable large spacecraft reflector]. Patent RF №2350518, 2009.
11. Semenov Yu. P., Strekalov A. F. et al. *Sposob sborki krupnogabaritnykh razvertivayemykh kosmicheskikh reflektorov i tekhnologicheskoye prispособleniye dlya formirovaniya otrazhayushchey poverkhnosti reflektora* [A method for assembling large-sized deployable space reflectors and a technological device for forming a reflective surface of a reflector]. Patent RF № 2296396, 2007.
12. Velichko A. I., Shendalev D. O. et al. *Sposob izgotovleniya krupnogabaritnogo transformiruyemogo reflektora* [A method of manufacturing a large-sized transformable reflector]. Patent RF № 2674386, 2018.
13. Polukhin N. V., Bychkov V. I. et al. *Sposob izgotovleniya krupnogabaritnykh razvertivayemykh reflektorov i ustroystvo dlya formirovaniya krivolineynoy poverkhnosti reflektora* [A method for manufacturing large-sized deployable reflectors and a device for forming a curved reflector surface]. Patent RF №2276823, 2006.
14. Anuryev V. I. *Spravochnik konstruktora mashinostroitel'ya. Tom 1* [Handbook of a machine builder's designer. Vol. 1]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2001, 53 p.
15. Lopatin A. V., Rutkovskaya M. A. [Review of designs of modern transformable space antennas. Part 1]. *Siberian Aerospace Journal*. 2007. No. 2. P. 51–57 (In Russ.).



**Кольга Вадим Валентинович** – доктор педагогических наук, профессор, кандидат технических наук, профессор кафедры летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: kolgavv@yandex.ru.

**Лыкум Андрей Игоревич** – инженер; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева». E-mail: rob4i@mail.ru.

**Марчук Максим Евгеньевич** – инженер; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева». E-mail: mmarchuk98@mail.ru.

**Филипсон Глеб Юрьевич** – инженер; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева». E-mail: gortsev2014@gmail.com.

**Kolga Vadim Valentinovich** – Dr. Sc., professor, Cand. Sc., Professor of Department of Aircraft; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: kolgavv@yandex.ru.

**Lykum Andrey Igorevich** – engineer; JSC Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”. E-mail: rob4i@mail.ru.

**Marchuk Maxim Evgenevich** – engineer; JSC Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”. E-mail: mmarchuk98@mail.ru.

**Filipson Gleb Yurevich** – engineer; JSC Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”. E-mail: gortsev2014@gmail.com.

---

УДК 534.11 + 539.3

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474

**Для цитирования:** Кудрявцев И. В., Рабецкая О. И., Митяев А. Е. Аппроксимация значений коэффициентов опор балки при колебаниях и потери устойчивости // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 461–474. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474.

**For citation:** Kudryavtsev I. V., Rabetskaya O. I., Mityaev A. E. [Approximation of beam support coefficient values at vibrations and buckling]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 461–474. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-461-474.

## Аппроксимация значений коэффициентов опор балки при колебаниях и потери устойчивости\*

И. В. Кудрявцев<sup>1\*</sup>, О. И. Рабецкая<sup>2</sup>, А. Е. Митяев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сибирский федеральный университет

Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, Свободный, 79

<sup>2</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева

Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

\*E-mail: ikudryavtsev@sfu-kras.ru

*Рассмотрена проблема расчета первой собственной частоты колебаний и первой критической силы для балки с упругими опорами. Аналитический обзор литературы по решению таких задач показал, что в теории колебаний и теории устойчивости стержней учет условий закрепления основан на использовании коэффициентов опор, значения которых были получены после решения соответствующего дифференциального уравнения. В рассмотренной литературе содержится только ограниченный набор значений этих коэффициентов, в основном для идеальных опор простых типов: шарниры, заделка и др. Учет жесткости опор можно найти только в отдельных изданиях и только для ограниченного числа вариантов значений. В данной работе выполнен расчет коэффициентов опор в зависимости от жесткости закрепления балки для первой собственной частоты колебаний и первой критической силы. Полученные значения были разделены на три зоны жесткостей и аппроксимированы внутри каждой зоны квадратичными функциями. Использование квадратичной аппроксимации позволило получить простые аналитические зависимости, пригодные для инженерных прикладных расчетов, а разбиение жесткости на зоны обеспечило приемлемую погрешность получаемых значений. Также квадратичные зависимости позволили решать обратные задачи по определению жесткостей опор для заданного значения первой собственной частоты колебаний или первой критической силы. Проведено подробное исследование погрешности полученных аппроксимирующих функций по всему рассмотренному диапазону жесткостей, которое показало, что погрешность определения коэффициента опор при колебаниях составляет не более 2 %, а при потере устойчивости – 6 %. Погрешность зависит от сочетания жесткостей опор и может увеличиться, если жесткости различаются более чем на порядок. Также была установлена высокая чувствительность решения обратной задачи к входным данным, что является следствием высокой нелинейности зависимости коэффициентов опор от жесткости. Полученные результаты можно использовать при инженерных расчетах первой собственной частоты колебаний и первой критической силы балки с упругими опорами.*

*Ключевые слова:* балка, колебания, устойчивость, коэффициент опор, жесткость опор, аппроксимация.

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта № 20-48-242922.

The research was funded by RFBR, Krasnoyarsk Territory and Krasnoyarsk Regional Fund of Science, project number 20-48-242922.

## Approximation of beam support coefficient values at vibrations and buckling

I. V. Kudryavtsev<sup>1\*</sup>, O. I. Rabetskaya<sup>2</sup>, A. E. Mityaev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Siberian Federal University

79, Svobodniy prospekt, Krasnoyarsk, Russian Federation, 660041

<sup>2</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology

31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

\*E-mail: ikudryavtsev@sfu-kras.ru

*The problem of calculating the first natural frequency of vibration and the first critical force for a beam with elastic supports is considered. An analytical review of the literature on solving such problems showed that in the theory of vibrations and the theory of stability of beams, consideration of the support conditions is based on the use of support coefficients, the values of which were obtained after solving the corresponding differential equation. The reviewed literature contains only a limited set of values of these coefficients, mainly for ideal supports of simple types: hinges, fixed, etc. Consideration of the stiffness of supports can only be found in individual editions and only for a limited number of values. In this work, the calculation of the support coefficients depending on the stiffness of the beam supports for the first natural frequency of vibrations and the first critical force is made. The obtained values were divided into three zones and approximated within each zone by quadratic functions. The use of quadratic approximation made it possible to obtain simple analytical dependencies suitable for engineering applied calculations, and the division of stiffness into zones provided an acceptable error of the obtained values. Also, quadratic dependencies made it possible to solve inverse problems for determining the stiffness of supports for a given value of the first natural frequency of vibrations or the first critical force. A detailed study of the error of the obtained approximating functions over the entire considered range of stiffness was carried out, which showed that the error in determining the coefficient of supports during fluctuations is not more than 2 %, and in case of loss of stability – 6 %. The error depends on the combination of stiffness of the supports, and can increase if the stiffnesses differ by more than an order of magnitude. The high sensitivity of the solution of the inverse problem to the input data was also established, which is the result of the high nonlinearity of the dependence of the coefficients of the supports on the stiffness. The obtained results can be used in engineering calculations of the first natural frequency of vibrations and the first critical force of a beam with elastic supports.*

*Keywords: beam, vibrations, stability, support coefficient, support stiffness, approximation.*

### Введение

С целью обеспечения требуемого динамического поведения заданной действительной конструкции на этапах ее проектирования или исследования широко используется балочная модель [1; 2]. С математической стороны расчет свободных колебаний или критической нагрузки для балок связан с решением дифференциальных уравнений, которое во многом определяется способом закрепления конструкции. В обоих случаях решение связано с определением собственных значений системы, полученной после подстановки функции формы в граничные условия задачи. Для задач колебаний квадраты собственных значений определяют величину частот свободных колебаний, а при исследовании устойчивости – величину критических нагрузок.

Корректная постановка математической задачи и ее решение требуют определенных специальных навыков и времени, что затруднительно при проведении инженерных расчетов. С целью упрощения таких расчетов существует большое число книг и справочников по динамике балок, в которых предложены готовые решения по свободным колебаниям [3–27] и потери устойчивости [28–35] для простых случаев закрепления, которые полностью ограничивают или разрешают движение по какой-либо координате: шарнир, заделка, скользящая опора и др., а также их комбинации. Для данных закреплений представлены готовые решения и величины корней из собственных значений, которые в теории устойчивости называют по-разному:

коэффициент приведения длины, коэффициент приведенной длины или коэффициент приведения. В теории колебаний отдельного названия для корней из собственных значений нами не обнаружено. Для общности данные коэффициенты при решении задач колебаний и устойчивости будем здесь называть коэффициентами опор.

Однако реализовать на практике упомянутые выше идеальные опоры затруднительно, поскольку действительные опоры имеют некоторое промежуточное значение жесткости, которое влияет на динамическое поведение балки и вызывает расхождение между теоретическим расчетом и практическим результатом. В имеющейся литературе по динамике балок решения для промежуточных значений жесткостей представлены в очень ограниченном виде [36–41] или полученные решения не пригодны для прикладных инженерных расчетов [42–45]. Также справочные таблицы иногда содержат ошибочные значения, которые не всегда очевидны для неопытных расчетчиков. Например, в справочнике по динамике [41] в таблице коэффициентов опор на с. 168 указаны некорректные значения, из-за чего таблица даже потеряла симметричность относительно главной диагонали. Подобные неточности есть и в других изданиях [40; 46].

Целью данной работы является аппроксимация промежуточных значений коэффициентов опор балок при свободных колебаниях и потере устойчивости для широкого диапазона жесткости опор. С целью ограничения данной большой задачи рассматривается только изгибная форма балки при колебаниях на первой собственной частоте и при первой критической нагрузке, которые обычно являются наиболее опасными для протяженных конструкций. Многообразие закреплений балок для изгибной формы ограничим случаем шарнирных опор с некоторой жесткостью. Полученные результаты аппроксимируем с помощью аналитических функций, что позволит определять значения коэффициентов опор для любых заданных значений жесткости опор. В качестве аппроксимирующих функций примем квадратичные зависимости, что при необходимости позволяет решать и обратную задачу – определить требуемую жесткость опор для заданного значения коэффициента опор.

Полученные результаты позволят инженерам рассчитывать первую собственную частоту колебаний и первую критическую силу для балочных конструкций с заданной жесткостью опор, а также решать обратную задачу по определению жесткости опор, обеспечивающей заданный динамический параметр. Аналитический вид предлагаемого решения позволяет легко оценить взаимовлияние различных параметров на решение и при необходимости преобразовать его в требуемом направлении.

## 1. Математическая постановка задачи

Будем рассматривать однородную балку, закрепленную по краям в шарнирных опорах, жесткость которых  $k_1$  и  $k_2$  может изменяться от нуля (шарнир) до бесконечности (заделка). В дальнейших расчетах в качестве жесткости опор также будем использовать не ее абсолютные значения  $k_1$  и  $k_2$  [Н\*м], а относительные безразмерные величины

$$C_1 = k_1 \frac{l}{EJ_{\min}}; \quad C_2 = k_2 \frac{l}{EJ_{\min}}, \quad (1)$$

где  $l$  – длина;  $E$  – модуль Юнга материала;  $J_{\min}$  – минимальный момент инерции поперечного сечения.

Рассмотрим далее математическую постановку задачи свободных колебаний балки и потери устойчивости с учетом жесткости опор.

### 1.1. Свободные колебания балки в упругих опорах

На рис. 1 показана расчетная схема свободных колебаний балки в упругих опорах с жесткостью  $C_1$  и  $C_2$ .

Уравнение свободных колебаний имеет вид

$$EJ_{\min} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $y = y(x)$  – функция изгибной формы балки;  $m$  – удельная масса.

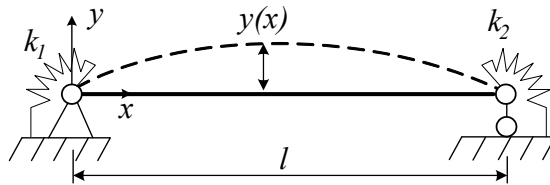


Рис. 1. Балка с упругими опорами

Fig. 1. Spring-hinged beam.

Граничные условия закрепления балки имеют вид

$$y(0,t) = y(l,t) = 0; \quad EJ_{\min} \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = k_1 \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}; \quad EJ_{\min} \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = -k_2 \frac{\partial y(l,t)}{\partial x}. \quad (3)$$

Общее решение представим в виде

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) \sin \omega_i t, \quad (4)$$

где  $Y_i(x)$  –  $i$ -я мода колебаний, общее решение для которой имеет вид

$$Y_i(x) = A_i \sin p_i x + B_i \cos p_i x + C_i \sinh p_i x + D_i \cosh p_i x. \quad (5)$$

Подставляя общее решение в граничные условия, получим частотное уравнение в виде [27]

$$2\alpha_i^4 \tan \alpha_i^2 \cdot \tanh \alpha_i^2 + \alpha_i^2 l \frac{k_1 + k_2}{EJ_{\min}} \cdot (\tan \alpha_i^2 - \tanh \alpha_i^2) - \frac{k_1 k_2 l^2}{E^2 J_{\min}^2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\cos \alpha_i^2 \cdot \cosh \alpha_i^2} \right) = 0, \quad (6)$$

где  $\alpha_i = \sqrt{p_i l}$  – коэффициент опор на  $i$ -й собственной моде колебаний.

Ограничиваясь рассмотрением первой собственной частоты колебаний ( $i=1$ ) получаем искомую зависимость с учетом (1) в виде

$$\alpha_1 = \alpha_1(C_1, C_2). \quad (7)$$

Величина первой собственной частоты колебаний определится, как

$$f_1(C_1, C_2) = \alpha_1^2(C_1, C_2) \cdot \frac{1}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ_{\min}}{m}}. \quad (8)$$

Решение разрешающего уравнения колебаний (6) с помощью простых аналитических функций практически невозможно, поэтому используем численные методы.

### 1.2. Потеря устойчивости балки в упругих опорах

Постановка и решение задачи потери устойчивости балки при сжатии во многом аналогична задаче свободных колебаний. На рис. 2 показана расчетная схема балки в упругих опорах при потере устойчивости от сжатия силой  $P$ .

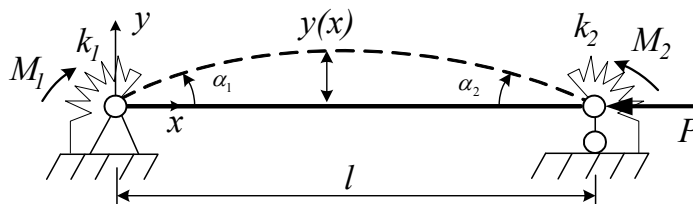


Рис. 2. Изгибная потеря устойчивости балки с упругими опорами

Fig. 2. Flexural buckling of the beam with spring-hinged supports

При потере устойчивости в упругих опорах будут возникать реактивные моменты, которые прямо пропорциональны соответствующим углам их поворота,

$$M_1 = k_1 \cdot \alpha_1; \quad M_2 = k_2 \cdot \alpha_2. \quad (9)$$

Тогда уравнение устойчивости примет вид

$$EJ_{\min} \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \cdot y - M_1 \cdot \frac{l-x}{l} - M_2 \cdot \frac{x}{l}. \quad (10)$$

Граничные условия определяются способом закрепления в виде ограничений на прогибы и углы поворота:

$$y(x=0) = 0; \quad y'(x=0) = -\alpha_1 = -\frac{M_1}{k_1}; \quad y(x=l) = 0; \quad y'(x=l) = -\alpha_2 = -\frac{M_2}{k_2}. \quad (11)$$

Общее решение примем в виде функции

$$y = A \cdot \sin(\theta \cdot x) + B \cdot \cos(\theta \cdot x) - \frac{M_1}{P \cdot l}(l-x) - \frac{M_2}{P \cdot l}x, \quad (12)$$

где

$$\theta = \sqrt{\frac{P}{EJ_{\min}}}. \quad (13)$$

Тогда уравнение упругой линии будет иметь вид

$$y = \left( \frac{M_2}{P \cdot \sin(\theta \cdot l)} - \frac{M_1}{P \cdot \operatorname{tg}(\theta \cdot l)} \right) \cdot \sin(\theta \cdot x) + \frac{M_1}{P} \cdot \cos(\theta \cdot x) - \frac{M_1}{P \cdot l}(l-x) - \frac{M_2}{P \cdot l}x, \quad (14)$$

в котором моменты в упругих шарнирах можно найти из системы двух уравнений:

$$\begin{cases} M_1 \left( 1 + \frac{k_1}{P \cdot l} - \frac{k_1 \cdot \theta}{P \cdot \operatorname{tg}(\theta \cdot l)} \right) + M_2 \left( \frac{k_1 \cdot \theta}{P \cdot \sin(\theta \cdot l)} - \frac{k_1}{P \cdot l} \right) = 0; \\ M_1 \left( \frac{k_2}{P \cdot l} - \frac{k_2 \cdot \theta \cdot \sin(\theta \cdot l)}{P} - \frac{k_2 \cdot \theta \cdot \cos(\theta \cdot l)}{P \cdot \operatorname{tg}(\theta \cdot l)} \right) + M_2 \left( \frac{k_2 \cdot \theta}{P \cdot \operatorname{tg}(\theta \cdot l)} - \frac{k_2}{P \cdot l} - 1 \right) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Ненулевое решение системы (15) найдем, приравняв к нулю ее определитель и решая трансцендентное уравнение [29],

$$\left( \frac{P_i}{k_1} + \frac{1}{l} - \frac{\theta_i}{\operatorname{tg}(\theta_i \cdot l)} \right) \cdot \left( \frac{\theta_i}{\operatorname{tg}(\theta_i \cdot l)} - \frac{1}{l} - \frac{P_i}{k_2} \right) - \left( \frac{1}{l} - \frac{\theta_i}{\sin(\theta_i \cdot l)} \right) \cdot \left( \frac{\theta_i}{\sin(\theta_i \cdot l)} - \frac{1}{l} \right) = 0, \quad (16)$$

где  $i$  – номер критической силы.

Ограничиваясь рассмотрением первой критической силы ( $i = 1$ ), получим искомую зависимость с учетом (1) в виде

$$\mu_1 = \mu_1(C_1, C_2) = \frac{\pi}{\theta_1(C_1, C_2) \cdot l}, \quad (17)$$

где  $\mu_1$  – коэффициент приведения длины или коэффициент опор при устойчивости.

Первая критическая сила тогда определится по уравнению

$$P_{cr}(C_1, C_2) = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu_1(C_1, C_2) \cdot l)^2}. \quad (18)$$

Решение разрешающего уравнения задачи устойчивости (16) аналитическими способами затруднительно, поэтому воспользуемся численными методами.

## 2. Аппроксимация коэффициентов опор

Решение разрешающих уравнений (6) и (16) выполним численным итеративным методом последовательных приближений в специально созданных программах. Решение было выполнено для 500 вариантов сочетаний значений жесткостей опор балки в диапазоне от  $C = 0$  до  $C = 1000$ . Ограничение значений диапазона жесткостей было вызвано тем, что с одной стороны расширение диапазона требует использование более сложных аналитических зависимостей для аппроксимации, а с другой стороны жесткость  $C = 1000$  фактически соответствует жесткой заделке и дальнейшее увеличение значений жесткости практически не влияет на изменение величины коэффициентов опор.

### 2.1. Аппроксимация коэффициентов опор при свободных колебаниях

В табл. 1 приведен ограниченный набор результатов для коэффициентов опор  $\alpha$  при свободных колебаниях балки для выбранного диапазона жесткостей, включая значение  $C = \infty$ .

Таблица 1

Значения коэффициентов опор  $\alpha_1(C_1, C_2)$

$C_2$	$C_1$													
	0	0,1	1	5	10	20	30	40	50	100	200	500	1000	$\infty$
0	3,142	3,157	3,273	3,534	3,665	3,769	3,814	3,839	3,855	3,889	3,907	3,919	3,923	3,926
0,1		3,173	3,288	3,548	3,678	3,783	3,825	3,852	3,868	3,902	3,921	3,932	3,936	3,940
1			3,399	3,652	3,781	3,884	3,929	3,954	3,970	4,004	4,023	4,034	4,038	4,041
5				3,897	4,026	4,131	4,177	4,202	4,219	4,254	4,273	4,285	4,289	4,292
10					4,156	4,263	4,310	4,337	4,354	4,390	4,410	4,422	4,426	4,430
20						4,374	4,422	4,449	4,467	4,504	4,525	4,538	4,542	4,546
30							4,471	4,499	4,517	4,555	4,576	4,589	4,593	4,597
40								4,527	4,545	4,583	4,604	4,617	4,622	4,626
50		Symmetric							4,563	4,602	4,623	4,636	4,640	4,644
100										4,641	4,663	4,676	4,681	4,685
200											4,684	4,698	4,702	4,707
500												4,711	4,716	4,720
1000													4,721	4,725
$\infty$														4,730

Полученные численные данные графически показаны на рис. 3 в виде плоскости  $\alpha_1(C_1, C_2)$  и графика  $\alpha_1(C)$  для случая опор с одинаковой жесткостью:  $C = C_1 = C_2$ .

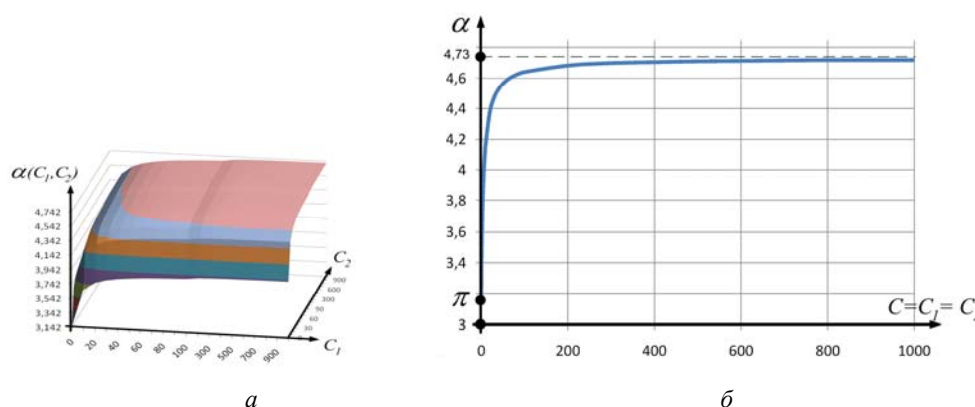


Рис. 3. Графическое представление коэффициентов опор при свободных колебаниях:  
 а – график функции  $\alpha_1(C_1, C_2)$ ; б – график функции  $\alpha_1(C)$

Fig. 3. Graphs of support coefficients at free vibration:  
 a – graph of the function  $\alpha_1(C_1, C_2)$ ; b – graph of the function  $\alpha_1(C)$

Результаты показали, что зависимость  $\alpha_1(C_1, C_2)$  является сильно нелинейной, что не позволяет аппроксимировать ее одной простой аналитической функцией даже для принятого диапазона  $C = 0 \dots 1000$ . Исследования установили, что высокая точность аппроксимации может быть получена только при использовании полиномов высокой степени, однако это создает большие вычислительные трудности и не позволяет решать обратную задачу по определению требуемой жесткости опор для заданного значения коэффициента опор  $\alpha_1$ .

Учитывая симметрию данных в табл. 1, необходимость сохранения простых аналитических зависимостей и возможность проведения обратного расчета, примем в качестве аппроксимирующих зависимостей квадратичные функции. Неизбежное при этом снижение точности аппроксимации компенсируем путем разбиения выбранного диапазона жесткостей на три зоны: I –  $C = 0 \dots 10$ , II –  $C = 10 \dots 100$ , III –  $C = 100 \dots 1000$ . Внутри каждой зоны аппроксимируем полученные числовые значения коэффициентов опор  $\alpha$  отдельной квадратичной функцией, коэффициенты которых определим методом наименьших квадратов [47; 48]. В результате получаем решение для каждой зоны в виде:

$$\alpha_{1i}(C_1, C_2) = a_{0i} + a_{1i} \cdot (C_1 + C_2) + a_{2i} \cdot (C_1^2 + C_2^2), \quad (19)$$

где  $i$  – номер зоны,  $i = I, II, III$ .

Коэффициенты квадратичных функций для каждой зоны приведены в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты функций  $\alpha_{1i}(C_1, C_2)$

Коэффициент	Зона $i$		
	I	II	III
	$C = 0 \dots 10$	$C = 10 \dots 100$	$C = 100 \dots 1000$
$a_{0i}$	3,1415	4,03	4,62
$a_{1i}$	0,107	0,0075	1,25E-04
$a_{2i}$	-0,00563	-4,35E-05	-7,400E-08

Полученные коэффициенты квадратичных аппроксимирующих функций (19) позволяют рассчитывать значения коэффициента опор  $\alpha$  для уравнения (8) практически с любым сочетанием жесткостей опор. Однако погрешность определения коэффициента существенно увеличивается при большой разнице в жесткостях опор. Если же значения жесткостей опор одного порядка, то погрешность расчета коэффициента опор составляет не более 2 % для всего рассматриваемого диапазона жесткостей.

## 2.2. Аппроксимация коэффициентов опор при потере устойчивости

Используя аналогичный подход, выполним аппроксимацию коэффициентов опор  $\mu$  при потере устойчивости балки. В табл. 3 приведен ограниченный набор результатов для коэффициентов опор  $\mu_1(C_1, C_2)$  для выбранного диапазона жесткостей, включая значение  $C = \infty$ .

Полученные численные данные графически показаны на рис. 4 в виде плоскости  $\mu_1(C_1, C_2)$  и графика  $\mu_1(C)$  для случая опор с одинаковой жесткостью:  $C_1 = C_2$ .

Зависимость  $\mu(C_1, C_2)$  также является сильно нелинейной, что требует разбиения рассматриваемого диапазона жесткости на зоны. Внутри каждой зоны аппроксимируем значения квадратичными функциями

$$\mu_{1i}(C_1, C_2) = b_{0i} + b_{1i} \cdot (C_1 + C_2) + b_{2i} \cdot (C_1^2 + C_2^2), \quad (20)$$

где  $i$  – номер зоны,  $i = I, II, III$ .

Используя метод наименьших квадратов, определим коэффициенты аппроксимирующих квадратичных функций и результаты сведем в табл. 4.



Таблица 3

Значения коэффициентов опор  $\mu_1(C_1, C_2)$

$C_2$	$C_1$													
	0	0,1	1	5	10	20	30	40	50	100	200	500	1000	$\infty$
0	1,000	0,987	0,920	0,803	0,760	0,732	0,722	0,716	0,713	0,706	0,703	0,701	0,700	0,699
0,1		0,979	0,913	0,797	0,754	0,727	0,717	0,711	0,708	0,702	0,698	0,696	0,695	0,695
1			0,854	0,750	0,711	0,686	0,676	0,672	0,669	0,663	0,660	0,658	0,657	0,657
5				0,661	0,627	0,605	0,596	0,592	0,590	0,585	0,582	0,581	0,580	0,580
10					0,594	0,572	0,564	0,560	0,558	0,553	0,550	0,549	0,548	0,548
20						0,551	0,543	0,539	0,537	0,532	0,529	0,528	0,527	0,527
30							0,535	0,531	0,529	0,524	0,521	0,520	0,520	0,519
40								0,527	0,525	0,520	0,518	0,516	0,516	0,515
50		Symmetric							0,522	0,517	0,515	0,514	0,513	0,513
100										0,513	0,510	0,509	0,508	0,508
200											0,508	0,506	0,506	0,505
500												0,505	0,504	0,504
1000													0,503	0,503
$\infty$														0,500

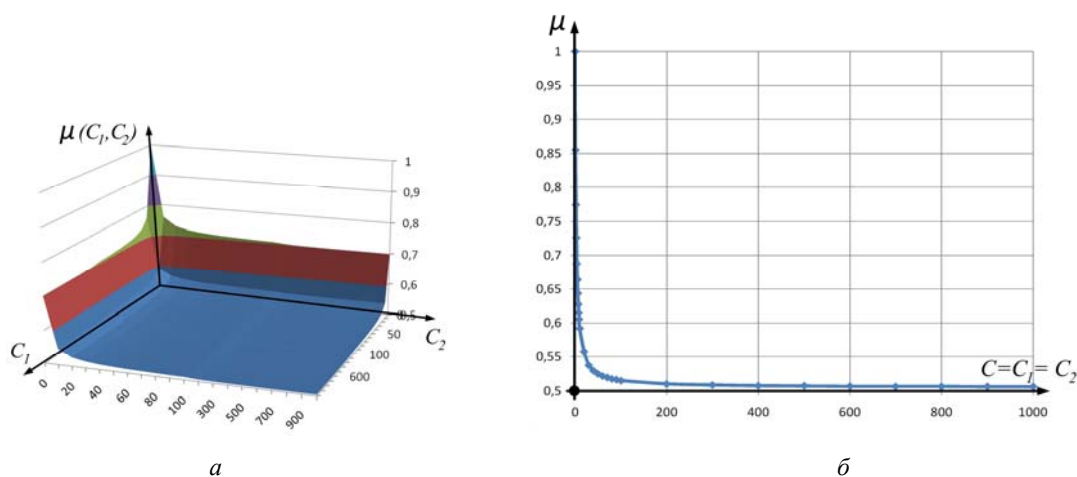


Рис. 4. Графическое представление коэффициентов опор при потере устойчивости:  
 а – график функции  $\mu_1(C_1, C_2)$ ; б – график функции  $\mu_1(C)$

Fig. 4. Graphs of support coefficients at buckling:  
 a – graph of the function  $\mu_1(C_1, C_2)$ ; b – graph of the function  $\mu_1(C)$

Таблица 4

Коэффициенты функций  $\mu_{1i}(C_1, C_2)$

Коэффициент	Зона $i$		
	I	II	III
	$C = 0 \dots 10$	$C = 10 \dots 100$	$C = 100 \dots 1000$
$b_{0i}$	1	0,623	0,516
$b_{1i}$	-0,0504	-0,0016	-1,81E-05
$b_{2i}$	0,003	1,05E-05	1,2E-08

Полученные коэффициенты квадратичных аппроксимирующих функций (19) позволяют рассчитывать значения коэффициента опор  $\mu_1$  с погрешностью расчета не более 6,5 % для жесткостей одного порядка.

### 2.3. Решение обратной задачи

Использование аппроксимирующих квадратичных функций позволяет решать и обратную задачу по определению жесткости опор, обеспечивающих требуемые коэффициенты опор  $\alpha$  или  $\mu$ . Рассмотрим определение жесткости опор для известного значения коэффициента опор  $\alpha_1$  при свободных колебаниях, которое можно найти согласно (8) при заданном значении первой собственной частоты колебаний  $f_1$  как

$$\alpha_1(C_1, C_2) = l \cdot \sqrt[4]{f_1^2 \cdot \frac{4\pi^2 m}{EJ_{\min}}} . \quad (21)$$

Равенство (21) возможно при различном сочетании значений жесткостей опор  $C_1$  и  $C_2$ , что делает задачу нахождения жесткости опор неоднозначной. Для определенности свяжем эти жесткости через заданный коэффициент  $n$ , определяющий отношение жесткостей опор:

$$C = C_1 = \frac{C_2}{n} . \quad (22)$$

Подставив эти данные в уравнение (19), получим разрешающее уравнение относительно общей жесткости опор  $C$ :

$$a_{i2} \cdot (1+n^2)C^2 + a_{i1} \cdot (1+n)C + (a_{i0} - \alpha_1) = 0 . \quad (23)$$

Значения коэффициентов  $a_{ij}$  принимаются из табл. 2 для требуемой зоны  $i$  и решение с учетом знаков имеет вид

$$C = \frac{-a_{i1} \cdot (1+n) + \sqrt{a_{i1}^2 \cdot (1+n)^2 - 4a_{i2}(1+n^2)(a_{i0} - \alpha_1)}}{2 \cdot a_{i2} \cdot (1+n^2)} . \quad (24)$$

В случае решения обратной задачи для задачи устойчивости, требуемое значение коэффициента опор  $\mu$  при заданном значении критической силы определится по (18) как

$$\mu_1(C_1, C_2) = \sqrt{\frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2 \cdot P_{cr}}} . \quad (25)$$

Аналогично свободным колебаниям, общая жесткость опор в задаче устойчивости определится из уравнения

$$C = \frac{-b_{i1} \cdot (1+n) - \sqrt{b_{i1}^2 \cdot (1+n)^2 - 4b_{i2}(1+n^2)(b_{i0} - \mu_1)}}{2 \cdot b_{i2} \cdot (1+n^2)} , \quad (26)$$

где коэффициенты  $b_{ij}$  определяются для  $i$ -й зоны, согласно табл. 4.

В обоих случаях решение будет корректным при определении жесткости опор внутри одной  $i$ -й зоны. После определения неизвестной  $C$ , требуемые значения жесткости опор определяются как:

$$C_1 = C; \quad C_2 = C \cdot n \quad (27)$$

и

$$k_1 = C \cdot \frac{EJ_{\min}}{l}, \quad k_2 = C \cdot \frac{EJ_{\min}}{l} n . \quad (28)$$

Найденные жесткости опор (25) будут обеспечивать заданное значение коэффициента опор  $\mu$ , следовательно, первую частоту собственных колебаний балки или первую критическую силу в зависимости от решаемой задачи.

#### Обсуждение

В работе получены наборы коэффициентов опор при свободных колебаниях балки на первой собственной частоте и потери устойчивости при первой критической нагрузке для большого

диапазона сочетаний жесткостей опор. Данные значения аппроксимированы квадратичными функциями, что позволило получить простые аналитические выражения, а также решение обратной задачи, но неизбежно внесло некоторую погрешность в определение их значений. Рассмотрим далее точность полученных аппроксимаций.

Значения рассчитанных коэффициентов опор в табл. 1 и 3 сравнивались со значениями в известной литературе [36–41]. Сравнение показало, что найденные значения полностью совпадают по первым двум значащим цифрам и иногда различаются в третьей, что, по-видимому, вызвано способом округления. Прямое сравнение всех найденных в литературе значений показало, что отклонения не превышают 0,36 % для коэффициента опор  $\alpha$  и 0,27 % для коэффициента  $\mu$ .

Погрешность аппроксимирующих квадратичных функций определяется используемыми значениями коэффициентов (табл. 2 и 4). В данной работе коэффициенты выбирались с учетом обеспечения минимальной погрешности на краях каждой зоны и равномерного отклонения внутри диапазона. Для наглядности, на рис. 5 приведено исследование погрешности определения коэффициентов опор по всему диапазону жесткостей при равной жесткости опор  $C = C_1 = C_2$ .

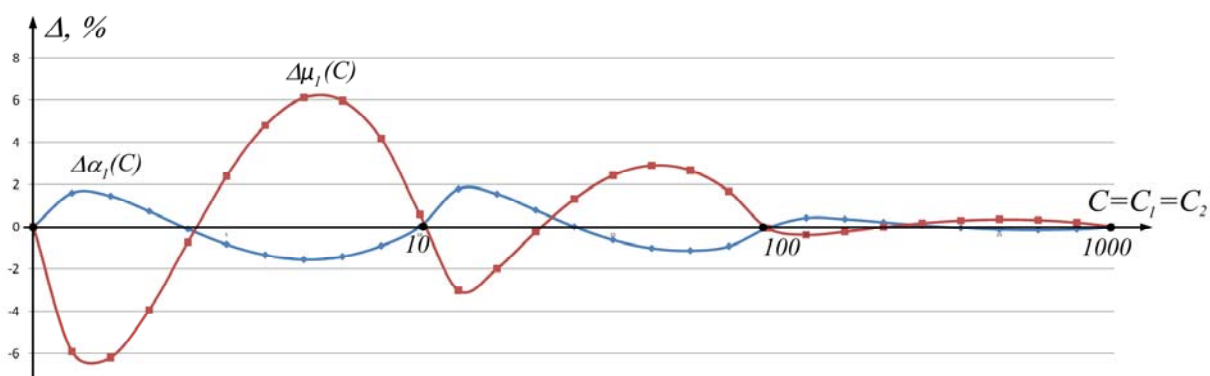


Рис. 5. Погрешности аппроксимации квадратичными функциями

Fig. 5. Approximation errors by quadratic functions

Согласно графикам, погрешность аппроксимации коэффициента внутри каждой зоны распределяется по синусоиде и отклонения коэффициента  $\alpha$  не превышают 2 %, а коэффициента  $\mu$  – менее 6,2 % во всем рассмотренном диапазоне жесткостей. Этого вполне достаточно для инженерных расчетов балочных конструкций в первом приближении, поскольку используемые в теории балок допущения могут приводить к таким же отклонениям в решении.

Исследование погрешности аппроксимации при различных сочетаниях жесткостей  $C_1$  и  $C_2$  показало, что если жесткости опор одного порядка, то отклонения значений коэффициентов опор  $\alpha$  и  $\mu$  не превышают значения, представленные на рис. 5.

При разнице в жесткостях опор более чем в 10 раз погрешность увеличивается до 15 %, что может потребовать несколько итераций при определении требуемого значения коэффициента опор. Также следует отметить, что из-за высокой нелинейности функций  $\alpha_1(C_1, C_2)$  и  $\mu_1(C_1, C_2)$  результат решения обратной задачи (24), (26) напрямую зависит от точности входных данных.

Предложенный подход можно применять для расчета коэффициентов опор при других типах закреплений с учетом их упругости, а также для определения второй и последующих собственных частот колебаний, критических сил потери устойчивости не только изгибной, но и других форм колебаний и потери устойчивости.

### Заключение

В работе выполнен расчет значений коэффициентов опор балки для большого числа различных сочетаний жесткостей опор для изгибной формы свободных колебаниях на первой собственной частоте и первой формы потери устойчивости. По полученным данным методом

наименьших квадратов выполнена аппроксимация значений квадратичными функциями. Данные аналитические функции позволяют определять коэффициент опор балки при любых сочетаниях жесткостей опор и решать обратную задачу по нахождению необходимой жесткости опор при известном требуемом значении коэффициента опор. Исследование погрешности аппроксимации показало, что типичные отклонения составляют около 3 %, что можно считать достаточным для инженерных прикладных расчетов.

### Библиографические ссылки

1. Некоторые аспекты моделирования динамики трансформируемых космических конструкций / Ц. Джан, В. Н. Зимин, А. В. Крылов, С. А. Чурилин // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20, № 1. С. 68–73. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-1-68-73.
2. Кудрявцев И. В. Обеспечение динамического состояния прямолинейных волноводных трактов при нагреве с помощью расстановки опор // Вестник Московского авиационного института. 2021. Т. 28, № 4. С. 92–105. DOI: 10.34759/vst-2021-4-92-105.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. М. : Дрофа, 2004. 591 с.
4. Ильин М. М., Колесников К. С., Саратов Ю. С. Теория колебаний. М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 272 с.
5. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М. : Наука, 1988. 328 с.
6. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М. : Машиностроение, 1985. 472 с.
7. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М. : Наука, 1991. 256 с.
8. Яблонский А. А., Норейко С. С. Курс теории колебаний. СПб. : Лань, 2003. 254 с.
9. Доев В. С. Поперечные колебания балок. М. : КНОРУС, 2016. 412 с.
10. Блехман И. И. Вибрационная механика. М. : Физматлит, 1994. 400 с.
11. Клаф В. К. Динамика сооружений. М. : Стройиздат, 1979. 320 с.
12. Balachandran B. Vibrations. Toronto : Cengage Learning, 2009. 737 p.
13. Benaroya H., Nagurka M., Han S. Mechanical vibration. London : CRC Press, 2017. 602 p.
14. Bottega W. J. Engineering vibrations. New York : CRC Press, 2006. 750 p.
15. Clough R. E. Dynamics of Structures. New York : McGraw-Hill College, 1995. 752 p.
16. Geradin M., Rixen D. J. Mechanical vibrations. London : John Wiley & Sons, 2015. 617 p.
17. Hagedorn P. Vibrations and waves in continuous mechanical systems. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007. 388 p.
18. Inman D. J. Engineering vibration, Pearson Education : NJ, 2014. 720 p.
19. Kelly S. G. Advanced vibration analysis. New York : CRC Press, 2007. 650 p.
20. Jazar R. N. Advanced vibrations. A modern approach. Springer : NY, 2013. 695 p.
21. Kelly S. G. Mechanical vibrations. Theory and applications. Cengage Learning: NY, 2012. 896 p.
22. Leissa A. W. Vibration of continuous systems, McGraw-Hill : New York, 2011. 524 p.
23. Meirovitch L. Fundamentals of vibrations. McGraw-Hill, Book Co : New York, 2001. 826 p.
24. Rades M. Mechanical vibrations II. Structural dynamic modeling. Printech Publisher: Turin, 2010. 354 p.
25. Rao S. Mechanical vibrations. Pearson Education Limited: London, 2018. 1295 p.
26. Shabana A. S. Theory of vibration. Springer-Verlag : New York, 2019. 382 p.
27. Hibbeler R. C. Free vibration of a beam supported by unsymmetrical spring-hinges. *J. Appl. Mech*, 1975. Vol. 42(2), P. 501–502. DOI: 10.1115/1.3423612.
28. Алфутов Н. А., Колесников К. С. Устойчивость движения и равновесия. М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 256 с.
29. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М. : Наука, 1971. 807 с.
30. Farshad M., Stability of Structures. Elsevier Science B.V. Amsterdam, 1994. 434 p.

31. Ziemian R. D., Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures. John Wiley & Sons: NY, 2010. 1117 p.
32. Timoshenko S. P., Gere J. M., Theory of Elastic Stability. Dover Publications: New York, 2009. 560 p.
33. Jerath. S., Structural Stability Theory and Practice: Buckling of Columns, Beams, Plates, and Shells. John Wiley & Sons: Chichester, 2020. 672 p.
34. Thomsen J. J. Vibrations and stability. New York, 2003. 420 p. 404 p.
35. Yoo C. H. Stability of structures. Elsevier : London, 2011. 529p.
36. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3. М. : Машиностроение, 1988. 567 с.
37. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М. : Высшая школа, 1980. 408 с.
38. Коренев Б. Г. Справочник по динамике сооружений. М. : Стройиздат, 1972. 511 с.
39. Уманский А. А. Справочник проектировщика. Т. 2. М. : Стройиздат, 1973. 415 с.
40. Wang C. M. Exact solutions for buckling of structural members. CRC Press: New York, 2005. 212 p.
41. Blevins R. D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. John Wiley & Sons, Ltd: Chichester, 2016. 458 p.
42. Lin Y. K. Free vibration of a continuous beam on elastic supports. International Journal of Mechanical Sciences. 1962. Vol. 4. P. 409–423.
43. Lin H., Chang S. C. Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints. Journal of Sound and Vibration. 2005. Vol. 281(1–2). P. 155–169. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.01.010.
44. Luo J., Zhu S., Zhai W. Exact closed-form solution for free vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with intermediate elastic supports. International Journal of Mechanical Sciences. 2022. Vol. 213. P. 106842. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106842.
45. Free vibrations of Bernoulli-Euler beams with intermediate elastic support / M. J. Maurizi, D. V. Bambill, P. M. Bellés et al. // Journal of Sound and Vibration. 2005. Vol. 281(3–5). P. 1238–1239. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.06.014.
46. Hibbeler R. C. Erratum: “Free Vibration of a Beam Supported by Unsymmetrical Spring Hinges” (Journal of Applied Mechanics, 1975, 42, pp. 501–502)". ASME // J. Appl. Mech. 1981. Vol. 48(2). P. 449. DOI: 10.1115/1.3157647.
47. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. М. : URSS, 2014. 352 с.
48. Дрейпер Н.? Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М. : Вильямс, 2016. 912 с.

## References

1. Zhang Z., Zimin V. N., Krylov A. V., Churilin S. A. [The definite questions of simulation of transformable space structures dynamics]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2019, Vol. 20, No. 1, P. 68–73. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-1-68-73.
2. Kudryavtsev I. V. Ensuring dynamic state of straight waveguide paths at heating by supports arrangement. *Aerospace MAI Journal*. 2021, Vol. 28, No. 4, P. 92–105. DOI: 10.34759/vst-2021-4-92-105. (In Russ.).
3. Babakov I.M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow, Drofa Publ., 2004, 591 p.
4. Il'in M. M., Kolesnikov K. S., Saratov Yu. S. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow, MGTU Publ., 2001, 272 p.
5. Zhuravlev V. F., Klimov D. M. *Prikladnye metody v teorii kolebaniy* [Applied methods in vibration theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 328 p.
6. Timoshenko S. P., Yang D. Kh., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibrations in Engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985, 472 p.
7. Panovko Ya. G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* [Introduction to the theory of mechanical Vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 256 p.

8. Yablonskiy A. A., Noreyko S. S. *Kurs teorii kolebaniy* [Oscillation theory course]. Sankt-Peterburg, Lan' Publ., 2003, 254 p.
9. Doev V. S. *Poperechnye kolebaniya balok* [Transverse vibrations of beams]. Moscow, KNORUS Publ., 2016, 412 p.
10. Blekhman I. I. *Vibratsionnaya mekhanika* [Vibration mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994, 400 p.
11. Klaf V. K. *Dinamika sooruzheniy* [Dynamics of structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1979, 320 p.
12. Balachandran B. *Vibrations*. Toronto: Cengage Learning, 2009. 737 p.
13. Benaroya H., Nagurka M., Han S. *Mechanical vibration*. CRC Press: London, 2017. 602 p.
14. Bottega W. J. *Engineering vibrations*. CRC Press: New York, 2006. 750 p.
15. Clough R. E. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill College: New York, 1995. 752 p.
16. Geradin M., Rixen D. J. *Mechanical vibrations*. John Wiley & Sons: London, 2015. 617 p.
17. Hagedorn P. *Vibrations and waves in continuous mechanical systems*. John Wiley & Sons: New Jersey, 2007. 388 p.
18. Inman D. J. *Engineering vibration*, Pearson Education: NJ, 2014. 720 p.
19. Kelly S. G. *Advanced vibration analysis*. CRC Press: New York, 2007. 650 p.
20. Jazar R. N. *Advanced vibrations. A modern approach*. Springer: NY, 2013. 695 p.
21. Kelly S. G. *Mechanical vibrations. Theory and applications*. Cengage Learning: NY, 2012. 896 p.
22. Leissa A. W. *Vibration of continuous systems*, McGraw-Hill: New York, 2011. 524 p.
23. Meirovitch L. *Fundamentals of vibrations*. McGraw-Hill, Book Co: New York, 2001. 826 p.
24. Rades M. *Mechanical vibrations II. Structural dynamic modeling*. Printech Publisher: Turin, 2010. 354 p.
25. Rao S. *Mechanical vibrations*. Pearson Education Limited: London, 2018. 1295 p.
26. Shabana A. S. *Theory of vibration*. Springer-Verlag: New York, 2019. 382 p.
27. Hibbeler R. C. Free vibration of a beam supported by unsymmetrical spring-hinges. *J. Appl. Mech*, 1975, Vol. 42(2), P. 501–502.
28. Alfutov N. A., Kolesnikov K. S. *Ustoychivost' dvizheniya i ravnovesiya* [Stability of movement and equilibrium]. Moscow, MGTU Publ., 2003, 256 p.
29. Timoshenko S. P. *Ustoychivost' sterzheney, plastin i obolochek* [Stability of rods, plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 807 p.
30. Farshad M., *Stability of Structures*. Elsevier Science B. V.: Amsterdam, 1994. 434 p.
31. Ziemian R. D., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*. John Wiley & Sons: NY, 2010. 1117 p.
32. Timoshenko S. P., Gere J. M., *Theory of Elastic Stability*. Dover Publications: New York, 2009. 560 p.
33. Jerath. S., *Structural Stability Theory and Practice: Buckling of Columns, Beams, Plates, and Shells*. John Wiley & Sons: Chichester, 2020. 672 p.
34. Thomsen J. J. *Vibrations and stability*. New York, 2003. 420 p. 404 p.
35. Yoo C. H. *Stability of structures*. Elsevier : London, 2011. 529p.
36. Birger I. A., Panovko Ya. G. *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya* [Strength, stability, vibrations]. Vol. 3. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 567 p.
37. Biderman V. L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical vibrations]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1980, 408 p.
38. Korenev B. G. *Spravochnik po dinamike sooruzheniy* [Structure dynamics guide]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1972, 511 p.
39. Umanskiy A. A. *Spravochnik proektirovshchika* [Designer's Handbook]. Vol. 2. Moscow, Stroyizdat Publ., 1973, 415 p.
40. Wang C. M. *Exact solutions for buckling of structural members*. CRC Press: New York, 2005. 212 p.

41. Blevins R. D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. John Wiley & Sons, Ltd: Chichester, 2016. 458 p.
42. Lin Y. K. Free vibration of a continuous beam on elastic supports. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1962, Vol. 4, P. 409–423.
43. Lin, H., Chang, S.C. Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints. *Journal of Sound and Vibration*. 2005, Vol. 281(1-2), P. 155–169. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.01.010.
44. Luo J., Zhu S., Zhai W. Exact closed-form solution for free vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with intermediate elastic supports. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2022, Vol. 213, P. 106842. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2021.106842.
45. Maurizi M. J., Bambill D. V., Bellés P. M. et al. Free vibrations of Bernoulli-Euler beams with intermediate elastic support. *Journal of Sound and Vibration*. 2005, Vol. 281(3-5). P. 1238–1239. DOI:10.1016/j.jsv.2004.06.014.
46. Hibbeler R. C. Erratum: “Free Vibration of a Beam Supported by Unsymmetrical Spring Hinges” (Journal of Applied Mechanics, 1975, 42, pp. 501–502)”. ASME. *J. Appl. Mech*, 1981, Vol. 48(2), P. 449. DOI: 10.1115/1.3157647.
47. Ivchenko G. I., Medvedev Yu. I. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Moscow, URSS Publ., 2014, 352 p.
48. Dreyper N. Smit G. *Prikladnoy regressionnyy analiz* [Applied regression analysis]. Moscow, Vil'yams Publ., 2016, 912 p.

© Кудрявцев И. В., Рабецкая О. И., Митяев А. Е., 2022

---

**Кудрявцев Илья Владимирович** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики; Сибирский федеральный университет. E-mail: ikudryavtsev@sfu-kras.ru.

**Рабецкая Ольга Ивановна** – кандидат технических наук, доцент кафедры технической механики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: olga\_rabez@mail.ru.

**Митяев Александр Евгеньевич** – кандидат технических наук, заведующий кафедрой прикладной механики; Сибирский федеральный университет. E-mail: pi-prm@mail.ru.

**Kudryavtsev Ilya Vladimirovich** – Cand. Sc., assistant professor, department of applied mechanics; Siberian Federal University. E-mail: ikudryavtsev@sfu-kras.ru.

**Rabetskaya Olga Ivanovna** – Cand. Sc., assistant professor, department of technical mechanics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: olga\_rabez@mail.ru.

**Mityaev Alexander Evgenievich** – Cand. Sc., head of the department of applied mechanics; Siberian Federal University. E-mail: pi-prm@mail.ru.

---

УДК 533.6.07

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-475-485

**Для цитирования:** Кузнецов В. И., Макаров В. В. Метод расчета термодинамических характеристик вихревого эжектора при известных геометрических размерах // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 475–485. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-475-485.

**For citation:** Kuznetsov V. I., Makarov V. V. [Method for calculating the thermodynamic characteristics of a vortex ejector with known geometric dimensions]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 475–485. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-475-485.

## Метод расчета термодинамических характеристик вихревого эжектора при известных геометрических размерах

В. И. Кузнецов, В. В. Макаров

Омский государственный технический университет  
Российская Федерация, 644050, г. Омск, просп. Мира, 11  
E-mail: vvmakarov@omgtu.tech

*На базе составленной ранее физико-математической модели рабочего процесса вихревого эжектора было произведено ее решение. Решение этой модели позволило составить две методики расчета: методика расчета оптимальной геометрии вихревого эжектора для заданных термодинамических характеристик и методика расчета термодинамических характеристик вихревого эжектора при известных геометрических размерах [1; 2].*

*Во многих областях аэрокосмической техники применяют вихревые эжекторы. Составленная разработка метода расчета термодинамических характеристик вихревого эжектора при известных геометрических размерах позволит более широко применять вихревые эжекторы в аэрокосмической промышленности. В основе методики расчета лежат понятия о касательных напряжениях, возникающих в вязкой среде, при взаимодействии двух потоков, движущихся с разными скоростями.*

*Показан механизм передачи кинетической энергии от высокоэнергетического газа к низкоэнергетическому.*

*Ключевые слова: вихревой эжектор, вязкость, касательные напряжения, градиент скоростей, термодинамические характеристики.*

## Method for calculating the thermodynamic characteristics of a vortex ejector with known geometric dimensions

V. I. Kuznetsov, V. V. Makarov

Omsk State Technical University  
11, Mira Av., Omsk, 644050, Russian Federation  
E-mail: vvmakarov@omgtu.tech

*Based on the previously compiled physical and mathematical model of the vortex ejector workflow, its solution was made. The solution of this model made it possible to compile two calculation methods: a method for calculating the optimal geometry of a vortex ejector for given thermodynamic characteristics and a method for calculating the thermodynamic characteristics of a vortex ejector with known geometric dimensions [1; 2].*

*Vortex ejectors are used in many areas of aerospace engineering. The compiled development of a method for calculating the thermodynamic characteristics of a vortex ejector with known geometric*



*dimensions will make it possible to use vortex ejectors more widely in the aerospace industry. The calculation method is based on the concepts of tangential stresses arising in a viscous medium when two flows moving at different speeds interact.*

*The mechanism of kinetic energy transfer from a high-energy gas to a low-energy one is shown.*

*Keywords: vortex ejector, viscosity, tangential stresses, velocity gradient, thermodynamic characteristics.*

## Введение

Вихревой эжектор (вихревой компрессор) – простейшая и распространенная газодинамическое устройство, применяемое в разнообразных отраслях промышленности, в вакуумной технике, авиа- и ракетостроении и различных экспериментальных аэродинамических установках. Эжектор – устройство, в котором полная энергия одного потока увеличивается за счет передачи энергии от другого потока, имеющего более высокую энергию. В результате взаимодействия потоков на выходе из эжектора образуется смесь, имеющая полное давление выше полного давления низкоэнергетического газа, но ниже полного давления высокоэнергетического газа.

Основным достоинством вихревого эжектора является отсутствие движущихся деталей, что существенно при работе с агрессивными либо горячими средами.

## Постановка задачи

Многие области техники применяют вихревые эжекторы. Создание замкнутой математической модели, описывающей рабочий процесс вихревого эжектора, дало возможность разработать методику расчета оптимальной геометрии при заданных термодинамических параметрах. Основной задачей данной работы является попытка создать методику расчета термодинамических характеристик вихревого эжектора при известных геометрических размерах.

## Материал и методы исследования

Методика расчета термодинамических характеристик вихревого эжектора при известных геометрических размерах основаны на решении математической модели. Математическая модель имеет следующий вид [2]: сумма энергий эжектирующего и эжектируемого газов равна энергии газа, выходящего из вихревого эжектора (рис. 1):

$$N_1 + N_2 = N_3, \text{ Вт}, \quad (1)$$

где

$$N_1 = G_1 \cdot L_1, \text{ Вт}; \quad (2)$$

$N_1$  – энергия эжектирующего газа, Вт;  $G_1$  – расход эжектирующего газа, кг/с;  $L_1$  – удельная энергия эжектирующего газа, Дж/кг:

$$L_1 = c_p \cdot T_{01} \left( 1 - \frac{1}{\pi_{p1}^* \frac{k-1}{k}} \right) \cdot \eta_p^*, \quad (3)$$

где  $\pi_{p1}^*$  – степень понижения полного давления эжектирующего газа:

$$\left( \pi_{p01}^* = P_{01}/P_{03} \right); \quad (4)$$

$T_{01}$  – полная температура эжектирующего газа, К;  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении (Дж/(кг\*К));  $\eta_p^*$  – КПД процесса расширения эжектирующего газа (берется на базе последних достижений турбостроения,  $\eta_p^* = 0,92-0,94$ );

$$N_2 = G_2 \cdot L_2, \text{ Вт}, \quad (5)$$

где  $G_2$  – расход эжектируемого газа, кг/с;  $L_2$  – удельная энергия эжектируемого газа, Дж/кг;

$$L_2 = c_p T_{02} \left( \pi_c^{*\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \frac{1}{\eta_c^*}, \quad (6)$$

где  $\pi_c^*$  – степень повышения полного давления эжектируемого газа за счет энергообмена силами вязкости с эжектирующим газом:

$$\pi_c^* = P_{03} / P_H; \quad (7)$$

$T_{02}$  – полная температура эжектируемого газа, К;  $P_{03}$  – полное давление смеси газов на выходе из вихревого эжектора, Па;  $P_H$  – давление среды, откуда поступает эжектируемый газ, Па;  $\eta_c^*$  – коэффициент полезного действия процесса сжатия эжектируемого газа (берется на базе последних достижений компрессоростроения,  $\eta_c^* = 0,85-0,87$ ).

Полная энергия смеси газов на выходе из вихревого эжектора

$$N_3 = G_3 \cdot L_3, \text{ Вт}, \quad (8)$$

где  $G_3$  – расход газа на выходе из вихревого эжектора, кг/с;  $L_3$  – удельная энергия смеси газов на выходе из вихревого эжектора, Дж/кг:

$$L_3 = c_p T_{03} \left( 1 - 1 / \pi_{P3}^{*\frac{k-1}{k}} \right) \eta_P^*; \quad (9)$$

где  $\pi_{P3}^*$  – степень понижения полного давления смеси газов на выходе из вихревого эжектора;

$$\pi_{P3}^* = P_{03} / P_H; \quad (10)$$

$T_{03}$  – полная температура газа на выходе из вихревого эжектора, К;  $\eta_{P3}^*$  – КПД процесса расширения смеси газов на выходе из эжектора;  $K$  – показатель адиабаты.

Связь между расходами эжектирующего, эжектируемого и смеси газов на выходе из вихревого эжектора

$$G_1 + G_2 = G_3, \text{ кг/с}. \quad (11)$$

Степень эжекции определяется уравнением

$$\Pi = \frac{G_2}{G_1}. \quad (12)$$

Тепловой поток, идущий от более нагретого компонента к менее нагретому, определяется функциональной зависимостью [3]

$$Q = f(T_G - T_X), \quad (13)$$

где  $T_G$ ,  $T_X$  – статические температуры более и менее нагретых компонентов соответственно, К.

Касательные напряжения, за счет которых передается кинетическая энергия от высокоэнергетического к низкоэнергетическому компоненту, определяется выражением [4]

$$\tau = P_{01} - P_{03}, \text{ Па}. \quad (14)$$

Касательные напряжения могут быть определены и по другому уравнению [4; 5]

$$\tau = \rho \lambda \frac{l V^2}{d 2}, \text{ Па}, \quad (15)$$

где  $\rho$  – плотность газа, кг/м<sup>3</sup>;  $l$  – длина пути взаимодействия высоко- и низкоэнергетического компонентов, м;  $d$  – эквивалентный диаметр, м;  $V$  – скорость движения потока, м/с;  $\lambda = f(\text{Re})$  – коэффициент сопротивления трения;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса.

Система уравнений (1)–(11) является математической моделью, описывающей рабочий процесс вихревого эжектора.

Производится решение математической модели для определения термодинамических параметров смеси газов на выходе из вихревого эжектора.

Формулы (2)–(10) подставляются в уравнения (1):

$$\begin{aligned} G_1 c_p T_{01} \left[ 1 - \left( P_{03} / P_{01} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \eta_p^* + G_2 c_p T_{02} \left[ \left( P_{03} / P_H \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \frac{1}{\eta_c^*} = \\ = G_3 c_p T_{03} \left[ 1 - \left( P_H / P_{03} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \eta_p^*. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (15) является уравнением энергии газа в механической форме. В тепловой форме это уравнение имеет вид [6–8]

$$G_1 i_{01} + G_2 i_{02} = G_3 i_{03}, \quad (17)$$

где  $i_{0j} = c_{pj} T_{0j}$  – полная энтальпия газа, Дж/кг;  $c_{pj}$  – теплоемкость при постоянном давлении  $j$ -го газа, Дж/(кг\*К);  $T_{0j}$  – полная температура  $j$ -го газа, К;  $j = 1 \div 3$  – параметры газа на входе эжектирующего газа, эжектируемого газа и на выходе из вихревого эжектора соответственно.

При  $c_{pj} = c_p = \text{const}$  и  $G_2 / G_1 = \Pi$  уравнение (17) преобразуется к виду

$$(\Pi + 1) \frac{T_{03}}{T_{01}} = 1 + \Pi \frac{T_{02}}{T_{01}}. \quad (18)$$

Полные температуры эжектирующего и эжектируемого газов на входе в эжектор в частном случае могут иметь одну и ту же температуру, т. е.  $T_{01} = T_{02}$ . Тогда из уравнения энергии в тепловой форме (18) следует, что

$$T_{01} = T_{02} = T_{03}. \quad (19)$$

С учетом уравнения (19), уравнение энергии в механической форме (15) можно преобразовать следующим образом:

$$\left[ 1 - \left( \frac{P_{03}}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \eta_p^* + \Pi \left[ \left( \frac{P_{03}}{P_H} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \frac{1}{\eta_c^*} = (\Pi + 1) \left[ 1 - \left( \frac{P_H}{P_{03}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \eta_p^*. \quad (20)$$

В уравнении (20) одна неизвестная величина. Это полное давление газа на выходе из вихревого эжектора  $P_{03}$ .

Определение полного давления газа на выходе из вихревого эжектора осуществляется раскрытием скобок уравнения (20):

$$\eta_p^* - \frac{\eta_p^*}{P_{01}^{\frac{k-1}{k}}} P_{03}^{\frac{k-1}{k}} + \frac{\Pi}{\eta_c^*} \frac{1}{P_H^{\frac{k-1}{k}}} P_{03}^{\frac{k-1}{k}} - \frac{\Pi}{\eta_c^*} = (\Pi + 1) \eta_p^* - (\Pi + 1) \eta_p^* P_H^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{P_{03}^{\frac{k-1}{k}}}. \quad (21)$$

После умножения всех членов на величину  $P_{03}^{\frac{k-1}{k}}$  уравнение (21) приводится к виду

$$\left( \frac{\eta_p^*}{P_{01}^{\frac{k-1}{k}}} - \frac{\Pi}{\eta_c^*} \frac{1}{P_H^{\frac{k-1}{k}}} \right) P_{03}^{2 \frac{k-1}{k}} + \Pi \left( \frac{1}{\eta_c^*} + \eta_p^* \right) P_{03}^{\frac{k-1}{k}} = (\Pi + 1) \eta_p^* P_H^{\frac{k-1}{k}}. \quad (22)$$

Уравнение (22) преобразовывается к виду

$$ax^2 + bx - c = 0, \quad (23)$$

где  $a = \frac{\eta_P^*}{P_{01}^{\frac{k-1}{k}}} - \frac{\Pi}{\eta_C^*} \cdot \frac{1}{P_H^{\frac{k-1}{k}}}$ ;  $b = \Pi \left( \frac{1}{\eta_C^*} + \eta_P^* \right)$ ;  $c = (\Pi + 1) \eta_C^* P_H^{\frac{k-1}{k}}$ ;  $x = P_{03}^{\frac{k-1}{k}}$ .

Полное давление газа на выходе из вихревого эжектора находится из решения квадратного уравнения (23):

$$P_{03} = x^{\frac{k}{k-1}} = \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (24)$$

В уравнении (24) знак плюс перед корнем квадратным взят потому, что полное давление газа на выходе из эжектора не может иметь отрицательное значение.

На входе в вихревой эжектор скорости эжектирующего и эжектируемого газов имеют различные значения. В вязкой жидкости за счет разности скоростей возникают касательные напряжения, приводящие к снижению скорости высоконапорного газа и к повышению скорости низконапорного газа. Следовательно, силами вязкости кинетическая энергия передается от высоконапорного газа к низконапорному [1]. Таким образом, высоконапорный газ совершает работу над низконапорным газом, в результате чего полное давление высоконапорного газа падает, низконапорного – растет. Обмен работой приводит и к изменению полной температуры газа. Полная температура высоконапорного газа падает, низконапорного – растет [1; 9; 10].

Изменение полных температур высоконапорного и низконапорного газов можно определить с помощью уравнений термодинамики [10; 11]

$$T_{01P} = T_{01} \left[ 1 - \left( 1 - 1 / \pi_{T1}^* \right)^{\frac{k-1}{k}} \eta_P^* \right], \quad (25)$$

$$T_{02C} = T_{02} \left[ \left( \pi_C^* \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \frac{1}{\eta_C^*} + 1, \quad (26)$$

где  $T_{01P}$  – полная температура высоконапорного газа после завершения обмена работой с низконапорным газом, К;  $T_{02C}$  – полная температура низконапорного газа после обмена работой с высоконапорным газом, К.

Обмен работой заканчивается тогда, когда полное давление высоконапорного и низконапорного газов будут равны полному давлению их смеси на выходе из вихревого эжектора, т. е.  $P_{03}$ .

В процессе обмена работой может оказаться, что статическая температура одного газа будет выше статической температуры другого. В результате возникает тепловой поток, идущий от потока с более высокой статической температурой к потоку с пониженной статической температурой,

$$Q = f(\Delta t) = f(T_T - T_X). \quad (27)$$

Тепловой поток и температуру  $T_{03}$  на выходе из вихревого эжектора можно определить по формулам теории теплопередач или по формуле (18).

Вышеприведенная математическая модель замкнута. На базе решения этой модели можно составить методику расчета термодинамических характеристик вихревого эжектора при известных геометрических параметрах.

**Методика расчета термодинамических характеристик вихревого эжектора при известных геометрических параметрах**

Исходные данные для расчета:

$P_{01}$  – полное давление на входе в эжектор высоконапорного газа, Па;

$T_{01}$  – полная температура высоконапорного газа на входе в вихревой эжектор, К;

$F_1$  – площадь входа в вихревой эжектор высоконапорного газа, м<sup>2</sup>;

$P_{02}$  – полное давление низконапорного газа на входе в вихревой эжектор, Па;

$T_{02}$  – полная температура низконапорного газа на входе в вихревой эжектор, К;

$F_2$  – площадь входа в эжектор низконапорного газа, м<sup>2</sup>;

$F_3$  – площадь выхода из вихревого эжектора смеси газов, м<sup>2</sup>;

$k$  – показатель адиабаты газа;

$P_H$  – давление окружающей среды, Па;

$$m = \sqrt{\frac{k}{R} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left( \frac{\text{кг} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} \right)^{0,5}};$$

$m = 0,0404$  – для воздуха;

$m = 0,0396$  – для продуктов сгорания керосина;

$\eta_p^*$  – КПД процесса расширения газа (берется на базе последних достижений турбиностроения);

$\eta_c^*$  – КПД процесса сжатия газа (берется на базе последних достижений компрессоростроения).

Определить:

$P_{03}$  – полное давление газа на выходе из вихревого эжектора, Па;

$\Pi$  – степень эжекции  $\left( \Pi = \frac{G_2}{G_1} \right)$ ;

$G_2$  – расход низконапорного газа на входе в вихревой эжектор, кг/с;

$G_3$  – расход газа на выходе из вихревого эжектора, кг/с;

$G_1$  – расход высоконапорного газа на входе в вихревой эжектор, кг/с;

$T_{03}$  – полная температура газа на выходе из вихревого эжектора, К.

### Порядок расчета

1. Газодинамическая функция давления высоконапорного газа на входе в вихревой эжектор

$$\pi(\lambda_1) = \frac{P_H}{P_{01}}.$$

2. Коэффициент скорости высоконапорного газа на входе в вихревой эжектор

$$\lambda_1 = \sqrt{\left[ 1 - \pi(\lambda_1)^{\frac{k-1}{k}} \right] \frac{k+1}{k-1}}.$$

3. Приведенный расход

$$q(\lambda_1) = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_1 \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

где  $q(\lambda_1) = 1$  при  $P_{01} / P_H \geq 1,89$ .

4. Расход высоконапорного газа на входе в вихревой эжектор

$$G_1 = m \frac{F_1 P_{01} q(\lambda_1)}{\sqrt{T_{01}}}, \text{ кг/с.}$$

5. Расход газа на выходе из вихревого эжектора определяется точкой пересечения графиков  $G_3 = f(\Pi)$  и  $G_3 = f(\Pi P_{03})$ .

Расчет этих графиков осуществляется, как показано далее.

6. Определение коэффициента  $a$  для  $i^{\text{ого}}$  количества степеней эжекции П:

$$a_i = \frac{\eta_P}{P_{01}^{\frac{k-1}{k}}} - \Pi_i \frac{1}{\eta_C^* P_H^{\frac{k-1}{k}}},$$

где  $i = 1 \div 5$ .

7. Определение коэффициента  $b$  для  $i^{\text{ого}}$  количества степеней эжекции П:

$$b_i = \Pi_i \left( \frac{1}{\eta_C^*} + \eta_P^* \right),$$

где  $i = 1 \div 5$ .

8. Определение коэффициента  $c$  для  $i^{\text{ого}}$  количества степеней эжекции П:

$$c = (\Pi_i + 1) \eta_P^* P_H^{\frac{k-1}{k}},$$

где  $i = 1 \div 5$ .

9. Определение полного давления газа на выходе из вихревого эжектора для  $i^{\text{ого}}$  количества степеней эжекции П:

$$P_{03i} = \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

где  $i = 1 \div 5$ .

10. Газодинамическая функция давления газа на выходе из вихревого эжектора для  $i^{\text{ого}}$  количества степеней эжекции П:

$$\pi(\lambda_3)_i = \frac{P_H}{P_{03i}},$$

где  $i = 1 \div 5$ .

11. Коэффициент скорости газа на выходе из вихревого эжектора для  $i^{\text{ого}}$  количества степеней эжекции П:

$$\lambda_{3i} = \sqrt{\left[ 1 - \pi(\lambda_3)_i^{\frac{k-1}{k}} \right] \frac{k+1}{k-1}},$$

где  $i = 1 \div 5$ .

12. Приведенный расход газа на выходе из вихревого эжектора для  $i^{\text{ого}}$  количества степеней эжекции П:

$$q(\lambda_{3i}) = \lambda_{3i} \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{3i}^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

где  $i = 1 \div 5$ .

13. Расход газа на выходе из вихревого эжектора для  $i^{\text{ого}}$  количества степеней эжекции П в функции полного давления и степени эжекции П:

$$G_3 = f(P_{03i}, \Pi_i) = m \frac{F_3 P_{03i} q(\lambda_3)_i}{\sqrt{T_{03}}}, \text{ кг/с}$$

где  $i = 1 \div 5$ .

14. Расход газа на выходе из вихревого эжектора для  $i^{\text{ого}}$  количества степеней эжекции П в функции от степени эжекции П:

$$G_{3i} = (\Pi_i + 1) G_1, \text{ кг/с},$$

где  $i = 1 \div 5$ .

15. Строятся графики  $G_{3i} = f(P_{03i}, \Pi_i)$  и  $G_{3i} = f(\Pi_i)$  (рис. 1).

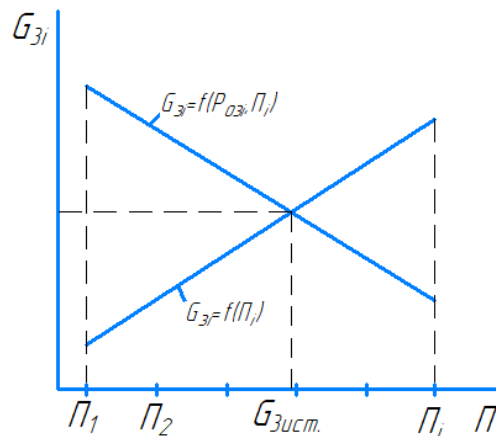


Рис. 1. График изменения расхода газа на выходе из вихревого эжектора в зависимости от степени эжекции  $\Pi_i$  и в функции от  $(P_{03i}, \Pi_i)$

Fig. 1. Graph of the gas flow rate at the outlet of the vortex ejector depending on the degree of ejection  $\Pi_i$  and as a function of  $(P_{03i}, \Pi_i)$

Точка пересечения двух графиков дает истинное значение степени эжекции и полного давления газа на выходе из вихревого эжектора.

16. Полная температура газа на выходе из вихревого эжектора

$$T_{03} = \frac{T_{01}}{\Pi + 1} \left( 1 + \Pi \frac{T_{02}}{T_{01}} \right).$$

Расчет окончен.

### Обсуждение результатов

Вышеприведенное исследование показало, что в вихревом эжекторе обмен работы и теплоты происходит под действием сил вязкости, вызывающих возникновение касательных напряжений. Теплообмен между слоями газа идет за счет разности статических температур высоконапорного и низконапорного компонентов.

Касательные напряжения в вихревом эжекторе появляются из-за разности угловых скоростей высоконапорного и низконапорного газов.

Процесс сжатия и расширения низконапорного и высоконапорного газов описывается известными уравнениями механики сплошной среды [12].

На базе разработанной замкнутой математической модели составлена методика расчета термодинамических параметров вихревого эжектора при известных геометрических размерах.

Совпадения теоретических и расчетных данных удовлетворительны (рис. 2–5) [13; 14].

### Заключение

Методика расчета термодинамических параметров вихревого эжектора составлена на базе математической модели, описывающей рабочий процесс вихревого эжектора с помощью уравнений механики сплошной среды.

Изменение полного давления и полной температуры объясняется обменом работой и теплотой между высоконапорным и низконапорным потоками газа. Механизмом передачи кинетической энергии от высоконапорного к низконапорному газу являются силы вязкости, возникающей за счет разности угловых скоростей.

Тепловой поток возникает из-за разницы статических температур высоконапорного и низконапорного газов.

Совпадение расчетных данных, определенных по вышеприведенной методике, с экспериментами других авторов удовлетворительное.

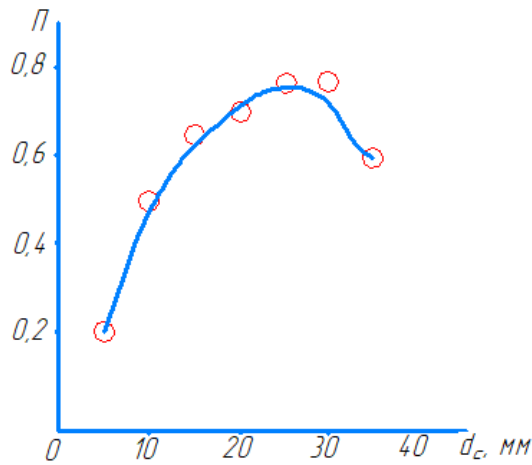


Рис. 2. Влияние диаметра сопла эжектирующего потока на степень эжекции  
(— расчет; ○ – эксперимент)

Fig. 2. The effect of the ejecting flow nozzle on the degree of ejection  
(— calculation; ○ – experiment)

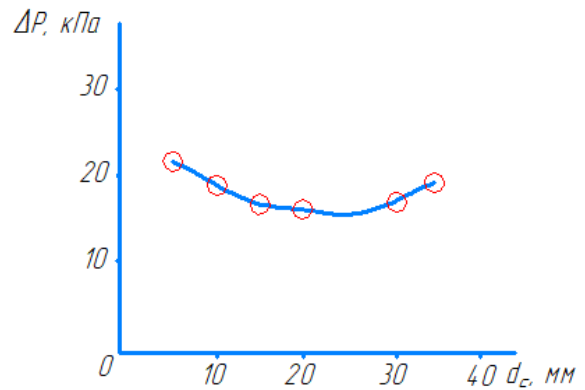


Рис. 3. Влияние диаметра сопла для ввода эжектируемого газа на повышение его давления  
(— расчет; ○ – эксперимент)

Fig. 3. The effect of the nozzle diameter for the injection of the ejected gas on the increase in its pressure  
(— calculation; ○ – experiment)

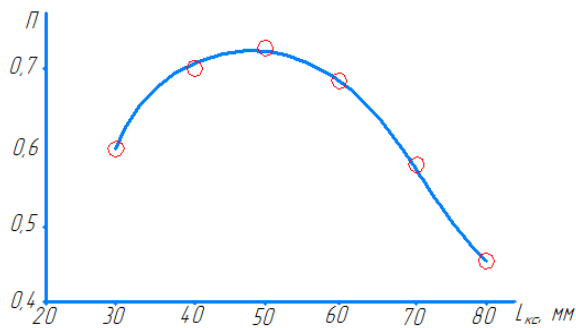


Рис. 4. Влияние длины камеры смешения на коэффициент эжекции  
(— расчет; ○ – эксперимент)

Fig. 4. The effect of the mixing chamber length on the ejection coefficient  
(— calculation; ○ – experiment)

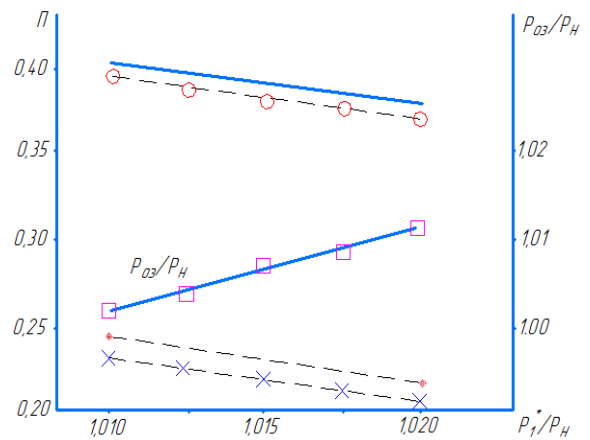


Рис. 5. Зависимость коэффициента эжекции  $\Pi$  и полного давления  $P_{03}$  на выходе из вихревого эжектора от конструкции сопла активного потока и полного давления высоконапорного газа от полного давления на входе в вихревой эжектор

(○ – сопло с вихревой струей; × – сопло с равномерным полем скоростей)

Fig. 5. Dependence of the ejection coefficient  $\Pi$  and the total pressure at the outlet of the vortex ejector on the design of the active flow nozzle and the total pressure of the high-pressure gas on the total pressure at the inlet of the vortex ejector (○ – vortex jet nozzle; × – nozzle with uniform velocity field)



## Библиографические ссылки

1. Кузнецов В. И., Макаров В. В. Метод расчета термодинамических характеристик вихревого эжектора при известных геометрических размерах // Решетневские чтения. 2021. С. 203–204.
2. Кузнецов В. И., Макаров В. В., Шандер А. Ю. Физико-математическая модель рабочего процесса струйного эжектора // Омский науч. вестник. Авиационно-ракетное и энергетич. машиностроение. 2021. Т. 5, № 3. С. 78–87.
3. Пиралишвили Ш. А. Вихревой эффект. Теория, эксперимент, численное моделирование // Сб. науч. тр. SWORLD (научные труды Sworld). 2013. Т. 3, № 3. С. 79–99.
4. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск : Наука, 1984. 302 с.
5. Пиралишвили Ш. А. Вихревой эффект. Теория, эксперимент, численное моделирование // Машиноведение и машиностроение. 2013. 412 с.
6. Кузнецов В. И., Макаров В. В. Эффект Ранка: Эксперимент, теория, расчет : моногр. М. : Инновационное машиностроение. 2017. 376 с.
7. Rostami zadeh E. Majd A., Arbabian S. Effects of Electromagnetig Fields on Seed Germination in Urtica Dioical // International journal of scientific & Technology Research. 2014. Vol. 3, Is. 4. P. 365–368.
8. К вопросу выбора эжектора системы очистки воздуха танков с двухтактными двигателями / В. Ф. Климов, Л. К. Магерамов и др. // Интегрирование технологии и энергосбережение. 2014. № 3. С. 125–129.
9. Uss A. Yu., Chernyshev A. V. The Development of the Vortex Gas Pressure Regulator // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1876. P. 020025. DOI: 10.1063/1.4998845.
10. Sankar, Lakshmi N. Three – Dimensional Navier – Stoces Fuli – Potantional Coupled Analysis for Viscous Transonic Flow // AIAA Journal. 1993. Vol. 31(10). P. 1857–1864. DOI: 10.2514/3. 11859.
11. Quemard C., Mignosi A., Seraudie A. Studies Relative to an Induction Pressurized Transonic Wind Tunnel. A: Air Pump Perfomance: Circuit Losses. Nasa TTF-16, 187. Washington D. C. 1975. 27 p.
12. Красков Н. Ф., Кошевой В. Н., Калугин В. Т. Аэродинамика отрывных течений. М. : Высшая школа. 1988. 351 с.
13. Кузнецов В. И., Якимушкин Р. В., Шербергерн А. Ю. Результаты сравнительных испытаний охладителя наддувочного воздуха комбинированного дизеля // Техника и технологии транспорта : сб. науч. ст. 2019. № 4 (42), Ч. 2. С. 131–140.
14. Халиулин Р. Р., Сыченков В. А., Панченко В. И. Разработка методики расчета эжекторов с малыми коэффициентами эжекции // Известия вузов. Авиационная техника. 2018. № 1. С. 65–70.

## References

1. Kuznetsov V. I., Makarov V. V. [Method for calculating the thermodynamic characteristics of a vortex ejector with known geometric dimensions]. *Reshetnevskie chteniya*. 2021. P. 203–204 (In Russ.).
2. Kuznetsov V. I., Makarov V. V., Shander A. Yu. [Physico-mathematical model of the jet ejector workflow]. *Omskiy nauch. vestnik. Aviatsionno-raketnoe i energetich. mashinostroenie*. 2021, Vol. 5, No. 3, P. 78–87 (In Russ.).
3. Piralishvili S. A. [Vortex effect. Theory, experiment, numerical modeling]. *Sb. nauch. tr. SWORLD (nauchnye trudy Sworld)*. 2013, Vol. 3, No. 3, P. 79–99 (In Russ.).
4. Kutateladze S. S., Nakoryakov V. E. *Teplomassoobmen i volny v gazozhidkostnykh sistemakh* [Heat and mass transfer and waves in gas-liquid systems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984, 302 p.
5. Piralishvili S. A. [Vortex effect. Theory, experiment, numerical modeling]. *Mashinovedenie i mashinostroenie*. 2013, 412 p.

6. Kuznetsov V. I., Makarov V. V. *Effekt Ranka: Eksperiment, teoriya, raschet* [The Rank effect: Experiment, theory, calculation]. Moscow, Innovative Mechanical Engineering Publ., 2017, 376 p.
7. Rostami zadeh E. Majd A., Arbabian S. Effects of Electromagnetig Fields on Seed Germination in *Urtica Dioical*. *International journal of scientific & Technology Research*. 2014, Vol. 3, Is. 4, P. 365–368.
8. Klimov V. F., Mageramov L. K. et al. [To the question of choosing an ejector for the air purification system of tanks with two-stroke engines]. *Integririvanie tekhnologii i energosberezhenie*. 2014, No. 3, P. 125–129 (In Russ.).
9. Uss A. Yu., Chernyshev A. V. The Development of the Vortex Gas Pressure Regulator. *AIP Conference Proceedings*. 2017, Vol. 1876, P. 020025. DOI: 10.1063/1.4998845.
10. Sankar, Lakshmi N. Three – Dimensional Navier – Stoces Fuli – Potantional Coupled Analysis for Viscous Transonic Flow. *AIAA Journal*. 1993, Vol. 31(10), P. 1857–1864. DOI: 10.2514/3. 11859.
11. Quemard C., Mignosi A., Seraudie A. Studies Relative to an Induction Pressurized Transonic Wind Tunnel. A: Air Pump Perfomance: Circuit Losses. Nasa TTF-16, 187. Washington D. C. 1975, 27 p.
12. Krasnov N. F., Koshevoy V. N., Kalugin V. T. *Aerodinamika otryvnykh techeniy* [Aerodynamics of breakaway flows]. Moscow, High school Publ., 1988, 351 p.
13. Kuznetsov V. I., Yakimushkin R. V., Sherbergern A. Yu. [Results of comparative tests of a combined diesel charge air cooler]. *Tekhnika i tekhnologii transporta*. 2019, No. 4 (42), Part 2, P. 131–140 (In Russ.).
14. Khaliullin R. R., Sychenkov V. A., Panchenko V. I. [Development of methods for calculating ejectors with small ejection coefficients]. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika*. 2018, No. 1, P. 65–70.

© Кузнецов В. И., Макаров В. В., 2022

---

**Кузнецов Виктор Иванович** – доктор технических наук, профессор кафедры авиа- и ракетостроения; Омский государственный технический университет. E-mail: vik.kuznetzov@yandex.ru.

**Макаров Владимир Вячеславович** – кандидат технических наук, доцент кафедры авиа- и ракетостроения; Омский государственный технический университет. E-mail: vvmakarov@omgtu.tech.

**Kuznetsov Viktor Ivanovich** – Dr. Sc., Professor of the Department of Aircraft and Rocket Engineering; Omsk State Technical University. E-mail: vik.kuznetzov@yandex.ru.

**Makarov Vladimir Vyacheslavovich** – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of Aircraft and Rocket Engineering; Omsk State Technical University. E-mail: vvmakarov@omgtu.tech.

---

УДК 629.7.018.77

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-486-497

**Для цитирования:** Концепция научно-образовательного эксперимента по проведению летного тестирования различных типов фотоэлектрических преобразователей / М. М. Лукьянов, Г. П. Прохоров, В. С. Куценко и др. // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 486–497. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-486-497.

**For citation:** Lukyanov M. M., Prokhorov G. P., Kutsenko V. S., Karpov E. S., Parshin A. S., Zuev D. M. [The concept of an educational and scientific experiment for conducting on-orbit testing of any types of photovoltaic cell]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 486–497. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-486-497.

## Концепция научно-образовательного эксперимента по проведению летного тестирования различных типов фотоэлектрических преобразователей

М. М. Лукьянов\*, Г. П. Прохоров, В. С. Куценко,  
Е. С. Карпов, А. С. Паршин, Д. М. Зуев

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

\*E-mail: mishka.1255555@mail.ru

*В статье предлагается концепция эксперимента по проведению летной апробации различных образцов фотоэлектрических преобразователей. Целью исследования является изучение поведения новых типов солнечных элементов в условиях космического пространства.*

*Исследование будет выполняться методом тестирования образцов на борту космического аппарата. Проведение эксперимента будет осуществляться устройством, производящим сбор данных об электрических свойствах солнечных элементов. Полученная информация будет представлена в виде вольтамперной характеристики. В ходе эксперимента также будет проведено изучение ее зависимости от внешних параметров. В частности, будет исследована корреляция вольтамперной характеристики от значений температуры и освещенности солнечных элементов. Исходя из полученных данных, будет определен коэффициент полезного действия фотоэлектрических преобразователей. Также будет изучена их деградация в результате воздействия космического ионизирующего излучения. Перед авторами поставлена задача спроектировать и разработать экспериментальную установку, которая будет представлять собой модуль полезной нагрузки малого космического аппарата класса CubeSat.*

*По результатам работы был выработан облик эксперимента по проведению летного тестирования, определены требования к модулю полезной нагрузки и предложен проект по его созданию. На данном этапе схемотехническая и программная реализация самого модуля находятся в стадии разработки. В ходе работы также были сформулированы основные требования, которые данный модуль предоставляет основным системам космического аппарата.*

*Для выполнения миссии эксперимента планируется интегрировать модуль полезной нагрузки на платформу аппарата ReshUCube-2 форм-фактора 3U. Этот спутник будет оснащен оборудованием, обеспечивающим возможность проведения технологических экспериментов.*

**Ключевые слова:** фотоэлектрические преобразователи, полезная нагрузка, летный эксперимент, деградация, радиационная стойкость.

## The concept of an educational and scientific experiment for conducting on-orbit testing of any types of photovoltaic cell

M. M. Lukyanov\*, G. P. Prokhorov, V. S. Kutsenko,  
E. S. Karpov, A. S. Parshin, D. M. Zuev

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation  
\*E-mail: mishka.1255555@mail.ru

*The article proposes the concept of an experiment for conducting flight testing of various samples of photovoltaic converters. The purpose of the experiment is to study the behavior of new types of solar cells in outer space.*

*The research will be carried out by testing samples on board the spacecraft. The experiment will be carried out by a device that collects data on the electrical properties of solar cells. The information received will be presented in the form of a voltage characteristic. During the experiment, its dependence on external parameters will also be studied. In particular, the correlation of the current-voltage characteristic from the values of temperature and illumination of solar cells will be investigated. Based on the data obtained, the efficiency of photovoltaic converters will be determined. Their degradation as a result of exposure to cosmic ionizing radiation will also be studied. The authors are tasked with designing and developing an experimental installation that will be a payload module of a small CubeSat-class spacecraft.*

*Based on the results of the work, the appearance of the flight testing experiment was developed, the requirements for the payload module were determined and a project for its creation was proposed. At this stage, the circuit design and software implementation of the module itself are under development. In the course of the work, the main requirements that this module provides to the main systems of the spacecraft were also formulated.*

*To carry out the mission of the experiment, it is planned to integrate the payload module on the platform of the ReshUCube-2 form factor 3U. This satellite will be equipped with equipment enabling technological experiments.*

*Keywords: solar cells, payload, on-orbit experiment, degradation, radiation hardness.*

### Введение

Фотоэлектрические преобразователи (ФЭП) наиболее часто используются на космических аппаратах (КА) в качестве первичного источника электроэнергии. Их основным недостатком является ухудшение работоспособности в условиях космической среды. Большое количество пролетающих высокоэнергетических заряженных частиц и ультрафиолетовое излучение Солнца вызывают появление множественных дефектов. Деграция солнечных панелей является актуальной проблемой в сфере спутникостроения, поскольку время работы космического аппарата на орбите главным образом определяется состоянием его системы энергопитания. Согласно статье [1], наибольшая доля отказов, приводивших к провалу миссии спутников *CubeSat*, приходится именно на эту систему.

Едва ли представляется возможным полностью защитить панели от губительных условий космоса. Однако, повысив эффективность солнечных элементов и снизив на какой-то порядок величину деградации, можно увеличить сроки службы космических миссий. Поэтому в настоящее время во всем мире разрабатывается несколько перспективных концепций ФЭП с несколькими *p-n* переходами для космических применений [2]. И все они нуждаются в тестировании, поскольку необходимо понимать их поведение на орбите.

С помощью наземных имитаторов Солнца невозможно точно воссоздать спектр Солнечного излучения на орбите, соответствующий нулевой атмосферной массе (АМ0) [3]. Величина атмосферной массы определяет долю солнечного излучения, поглощаемого атмосферой Земли.

Даже опыты, проводимые на стратостатах, не смогут рассказать нам о поведении солнечных элементов на борту КА. Кроме того, в земных условиях крайне тяжело воспроизвести спектр космического ионизирующего излучения. Поэтому летное тестирование на платформе наноспутников формата *CubeSat*, не облагающих разработчиков высокими экономическими затратами, будет являться рациональным способом получения данных о новых технологических решениях на ранних этапах тестирования ФЭП.

Метод летной апробации имеет опыт применения в реальных миссиях спутников *CubeSat*. В таком формате проводились эксперименты по определению эффективности ФЭП и ее снижения с течением времени.

Базовым методом исследования деградации солнечных панелей является измерение рабочего тока и определение снижения его значения с течением времени. В статье [4] предлагается альтернативный метод мониторинга деградации солнечной батареи спутника с использованием фотоэлектрической модели в качестве эталона. Этот метод может быть использован на любом спутнике, на котором собираются данные о напряжении, токе, угле падения солнечного света и температуре солнечной батареи. Метод заключается в использовании моделей деградации, применении фотоэлектрических моделей. Существует две фундаментальные модели. Первой из них является модель переноса протонов (*proton fluence model*) [5], предложенная Лабораторией реактивного движения (*JPL*). Вторая – модель дозы повреждения от смещения (*displacement damage dose, DDD*) [6], разработанная Военно-морской исследовательской лабораторией (*NRL*). В качестве примера приводится эксперимент, который проводился на первом спутнике, произведенном Сингапуром – *X-SAT* [7]. В этом исследовании сравниваются теоретически и экспериментально определенные выходные характеристики солнечных панелей. В теоретических расчетах используется фотоэлектрическая модель, а экспериментальная проверка проводилась на борту аппарата *X-SAT*.

Публикация [8] включает в себя вопросы о постановке экспериментов на орбите на примере миссии *TacSat-4* [9]. Миссия заключалась в исследовании радиационной стойкости солнечных панелей, а также их эффективности в условиях космического пространства. *TacSat-4* выведен на высокоэллиптическую орбиту (*HEO*) размером  $12000 \times 700$  км, пересекая как электронный, так и протонный радиационные пояса [10]. Суровая среда электронного и протонного излучения служит отличной возможностью для тестирования новых фотоэлектрических технологий. В рамках эксперимента использовались ультратонкие (100 мкм) солнечные элементы с тройным переходом *GaInP / GaInAs / GE*, а также модуль солнечных элементов с концентратором растянутых линз.

Также имеется опыт реализации университетами метода верификации на орбите. Целью технической миссии космического аппарата *MOVE-II* являлось измерение вольтамперной характеристики новых многопереходных солнечных элементов [11]. Этот спутник был разработан Мюнхенским университетом и запущен в начале 2018 г. на круговую солнечно-синхронную орбиту высотой приблизительно 500 км. Его внешний вид представлен на рис. 1.

В модуле полезной нагрузки *Zenith*, установленном на данном спутнике, каждый ФЭП подключен к считывающей цепи. Управление разверткой напряжения осуществляется с помощью цифроаналогового преобразователя. Сигналы напряжений ячейки и шунта оцифровываются с помощью аналого-цифровых преобразователей. Температура каждого солнечного элемента измеряется цифровым датчиком, который находится в прямом тепловом контакте с задней поверхностью солнечного элемента.

В номинальном режиме спутник работает в положении, когда полезная нагрузка направ-

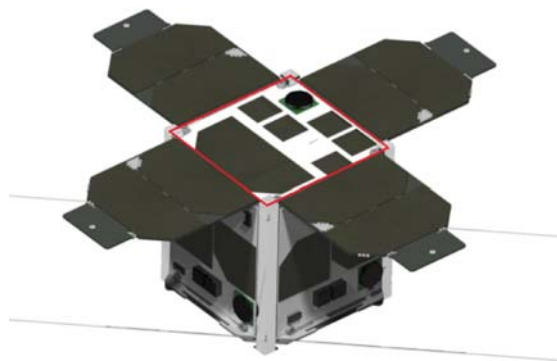


Рис. 1. Внешний вид спутника *MOVE-II*. Область ПН выделена красной рамкой [11]

Fig. 1. The appearance of the *MOVE-II* satellite. The payload area is highlighted with a red border

лена в зенитном направлении (строго к Солнцу). Дополнительные данные, такие как угол наклона Солнца и видимость Земли, собираются системой ориентации и контроля (*ADCS*) и также включаются в передаваемые данные. Эти входные данные используются для последующей обработки на Земле и для исследования влияния угла падения солнца и альбедо Земли на производительность солнечных элементов.

Примером отечественной миссии исследования новых ФЭП в космосе является первый спутник Дальнего Востока «АмурСат» [12]. Это *CubeSat* формата 3U весом 3 кг, созданный Амурским государственным университетом (АмГУ) в рамках программы «Универсат-СОКРАТ». Он запущен в июле 2019 г. на солнечно-синхронную орбиту высотой 530 км. На борту этого спутника был установлен модуль полезной нагрузки «Фотон – Амур», также разработанный АмГУ. Прибор «Фотон – Амур» позволяет проводить исследования вольтамперных характеристик новых фотоэлектрических преобразователей. ФЭП для этого модуля были собраны из гетероструктурных элементов, выращенных в собственной лаборатории университета.

КА оснащен универсальной платформой для обеспечения работоспособности модуля. С учетом конструктивного исполнения платформы и особенностей подключения полезных нагрузок прибор «Фотон – Амур» выполнен на двух платах, одна является вычислительным устройством, а вторая – панелью фотоэлектрических преобразователей. Основу платформы составляет микроконтроллер с внутрисистемной флэш-памятью. Полученные во время эксперимента данные накапливаются в ПЗУ и передаются на Землю во время сеанса связи порциями по 256 бит. Формат отправляемых данных содержит название модуля, время отправки и блок параметров. В эти параметры входят значения, полученные датчиками тока, напряжения, температуры и освещенности ФЭП. По полученным данным на Земле будут вычисляться эффективность и мощность фотоэлектрических преобразователей, рассчитываться зависимости их характеристик от факторов окружающей среды – температуры, энергии светового потока, ионизирующего излучения и времени работы. Энергопотребление модуля: среднее – 50 мА, пиковое – не более 100 мА. Общий вес полезной нагрузки не более 100 г.

Результаты испытаний на орбите не выявили существенных замечаний по работе ПН. Данные, полученные с приборов, установленных на спутнике, подтвердили работоспособность и пригодность модуля для ведения космического эксперимента. По результатам летной эксплуатации спутника были сформулированы рекомендации по усовершенствованию параметров и режимов бортовых служебных систем и приборов ПН для применения в последующих аппаратах данного класса.

Существует множество других примеров проведения тестирования технологических решений на борту малого космического аппарата. И накопленный опыт целесообразно использовать при проектировании новых подобных миссий. В приведенной статье представлен проект модуля ПН для КА класса *CubeSat* для проведения летной апробации ФЭП различного типа. Разрабатываемое устройство должно соответствовать требованиям и ограничениям, которые определены форматом спутника.

### **Параметры и характеристики ФЭП, определяемые в ходе эксперимента**

В качестве выходных данных будут выступать мгновенные значения тока, выдаваемого солнечным элементом в зависимости от падающего на нем напряжения. Совокупность значений тока и соответствующих значений напряжения будут использоваться для построения точек кривой вольтамперной характеристики (ВАХ) солнечного элемента. Каждому полученному набору точек ВАХ будет определяться соответствующее значение угла положения Солнца. Этот угол поможет определить освещенность солнечных элементов. Проводя качественный и количественный анализ кривой ВАХ, пользуясь известными значениями освещенности и площади поверхности ФЭП, будет получено значение его коэффициента полезного действия (КПД). Наблюдение за КПД в течение некоторого времени позволит исследовать деградацию солнечного элемента. Также каждый цикл измерений будет сопровождаться измерением температуры ФЭП.

### Методика летного эксперимента и рабочие циклы

В качестве методологии эксперимента предлагается использовать методику, лежащую в основе миссии КА *MOVE-II* [11]. В рамках проведения эксперимента на орбите предлагаются опыты по определению зависимости ВАХ солнечных элементов от угла освещенности и температуры.

Для реализации этих опытов модуль полезной нагрузки будет проводить эксперимент в двух режимах:

- 1) режим измерения угла освещенности;
- 2) режим изменения температуры.

Последовательность этих двух режимов будет составлять рабочий цикл.

Определение зависимости ВАХ от угла положения Солнца будет проводиться с помощью использования Системы Ориентации и Стабилизации, а также солнечного датчика. В режиме изменения угла освещенности космическому аппарату будет необходимо совершить поворот. В исходном положении модуль полезной нагрузки спутника будет ориентирован под углом  $90^\circ$  относительно направления на Солнце, как показано на рис. 2 слева. В конечном положении модуль будет ориентирован строго на Солнце (рис. 2 справа).

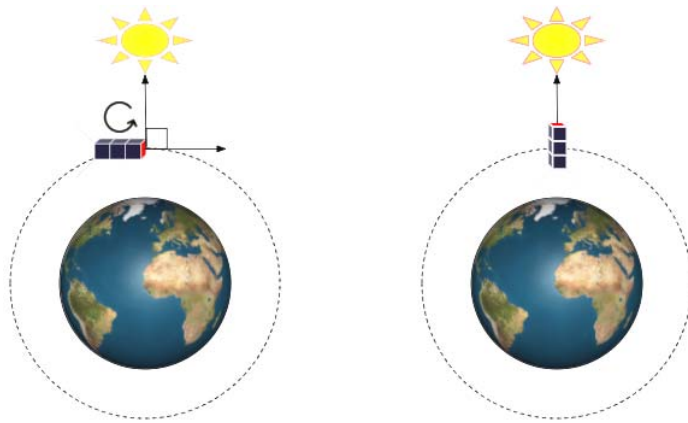


Рис. 2. Схематичное представление начального и конечного положения КА в режиме изменения угла освещенности

Fig. 2. Schematic representation of the initial and final position of the spacecraft in the mode of changing the illumination angle

Во время маневра для предварительно заданных значений угла положения Солнца будут собираться наборы точек ВАХ. Для проведения этого опыта есть необходимость в минимизации времени поворота с целью избегания резкого скачка температуры в ходе рабочего цикла. Временные рамки проведения данного этапа цикла работы будут уточнены.

В режиме изменения температуры модуль будет ориентирован строго на Солнце в течение всего цикла измерений. Получение наборов точек ВАХ будет производиться для заранее заданных значений температуры. Согласно источнику [13], во время прохождения малого космического аппарата, расположенного на низкой околоземной орбите, температура на солнечных панелях, которые ориентированы на Солнце, может достигать до  $80^\circ\text{C}$ , а температура систем, на которые не попадают прямые солнечные лучи, составляет от  $20^\circ\text{C}$ .

Если кривые  $I-V$  могут быть получены при разных температурах, то можно будет определить соответствующие температурные коэффициенты. Знания о зависимости ВАХ от температуры также помогут провести калибровку в опыте с изменением угла положения Солнца.

Очевидно, на результаты эксперимента будет оказывать ощутимое влияние свет, отраженный от Земли. Для чистоты проведения эксперимента в статье [14] предлагается проведение измерений в заблаговременно предсказанный временной интервал, когда спутник будет нахо-

даться около «полудня» орбиты, чтобы обеспечить оптимальное освещение солнечных элементов без альбедо Земли. Под «полуднем» орбиты понимается такая точка орбиты, которая находится строго между Землей и Солнцем.

### Облик модуля полезной нагрузки

Предлагается проект модуля полезной нагрузки, который будет сконструирован на одной плате. На внешней стороне платы будут располагаться верифицируемые фотоэлектрические преобразователи, а также датчик Солнца (который будет представлять собой совокупность фоторезисторов низкого сопротивления). Модуль будет установлен на торцевой стороне КА.

Солнечные элементы будут иметь небольшие размеры (2–3 см). Их количество на экспериментальном модуле составит 5–6 штук. Для экспериментального изучения эффектов деградации один из элементов будет установлен в виде голой ячейки, т. е. без защитного стекла. В дальнейшем габариты и количество ячеек будут уточнены.

Каждый ФЭП будет подключен к считывающей цепи. Измерение температуры будет проводиться датчиком в месте прямого теплового контакта с задней поверхностью каждого ФЭП. Развертку кривой зависимости тока от напряжения планируется выполнять путем изменения сопротивления блока цифровой нагрузки, который будет служить в качестве переменной электронной нагрузки. Управление переменным сопротивлением будет осуществляться с помощью микроконтроллера. Микросхема цифровой нагрузки имеет в своём составе 63 резистора, соединенных последовательно. С помощью управляющего сигнала, подающегося на микросхему, можно изменять количество резисторов, участвующих в электрической цепи. Напряжение  $U_C$  солнечного элемента измеряется непосредственно между положительным и отрицательным контактом солнечного элемента. Ток измеряется как падение напряжения на прецизионном шунтирующем резисторе  $R$  небольшого сопротивления с низким температурным коэффициентом.

В качестве устройства, измеряющего ток и напряжение, а также оцифровывающего их значения, будет удобно применять готовую микросхему типа *INA266*. Связь этой микросхемы с внешними устройствами, а в частности, с микроконтроллером (обозначен аббревиатурой *МК* на рис. 3), можно установить по интерфейсу *I2C*. Для общения микроконтроллера полезной нагрузки с платформой КА класса *CubeSat* принято использовать *CAN*-шину. Это решение имеет широкий опыт применения.

На рис. 3 представлена схема, показывающая связь между компонентами полезной нагрузки и платформой космического аппарата. Точечным пунктиром выделены считывающие цепи, снимающие ВАХ с солнечных элементов. На иллюстрации изображены лишь 2 блока считывающих цепей для наглядного представления взаимодействия этих блоков с микроконтроллером.

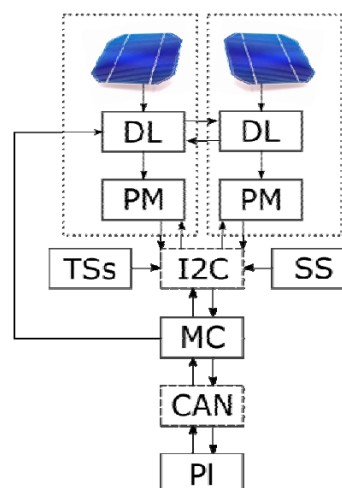


Рис. 3 Функциональная блок-схема:

DL – блок цифровой нагрузки; PM – Power monitor INA266;  
I2C – интерфейс I2C; TSs – датчики температуры;  
SS – датчик освещения; MC – микроконтроллер;  
CAN – интерфейс CAN; PI – платформа ReshUCube-2

Fig. 3 Functional block diagram:

DL – digital load unit; PM – Power monitor INA266;  
I2C – I2C interface; TSs – temperature sensors;  
SS – light sensor; MC – microcontroller;  
CAN – CAN interface; PI – ReshUCube-2 platform



### Объем генерируемых данных

Все вырабатываемые данные будут представлены в виде переменных типа *float*, имеющих объем 4 байта.

Количество точек для графика ВАХ будет определяться точностью измерений тока и напряжения. Точность измерения, в свою очередь, определяется главным образом температурной и радиационной стабильностью элементов цепи.

Планируется, что ВАХ будет содержать около 20 точек. Каждому набору данных ВАХ будут соответствовать значения температуры и угла положения Солнца в момент измерения.

В случае использования солнечного датчика по типу *QD* фотодиода, чувствительный элемент которого состоит из четырех независимых фотодиодов, будут получены соответствующие 4 значения выходных напряжений фотодетекторов. Эти значения будут обрабатываться на Земле и из их соотношения будет однозначно определено положение Солнца.

Информационный объем одного полного набора данных ВАХ будет составлять 420 байт.

Умножив это значение на количество исследуемых солнечных ячеек (возьмем 5), получим 2100 байт информации.

Планируется по возможности последовательно совместить опыт с изменением угла наклона и опыт с изменением температуры. Предлагается провести 10 измерений для угла от 0 до 90° с шагом в 10°, а также дополнительные измерения для углов 5° и 85° (для более точного определения возможного влияния отражательных эффектов). Всего: 12 измерений. Для эксперимента с изменением температуры предварительно планируется провести 10 измерений, например: с шагом в 5 °С в диапазоне от 25 до 75 °С. В итоге предварительно мы имеем 12 + 10 = 22 цикла измерений ВАХ, информационный объем которых составит 19 800 байт (около 19,3 Кб) (см. табл.).

### Генерируемый объем данных

Набор данных ВАХ для одного ФЭП				Кол-во ФЭП	Объем данных одного полного набора, байт	Кол-во наборов	Объем пакета данных, получаемых за полный цикл измерений, байт
Измеряемые параметры	Вес параметра, байт	Кол-во измерений	Суммарный объем данных, байт				
Ток	4	20	80				
Напряжение	4	20	80				
Угол падения	4	4	16				
Температура	4	1	4				
Итого		45	180	5	900	22	19800

Планируется получать полный пакет данных от модуля полезной нагрузки с периодичностью раз в неделю, предварительно посылая по каналу связи из Центра управления полетами (ЦУП) к КА соответствующую телекоманду с привязкой по времени.

### Обеспечение связи с модулем полезной нагрузки и получение данных

Управление началом рабочего цикла полезной нагрузки будет осуществляться с помощью радиосвязи системы телекоммуникации КА с наземной станцией центром управления полетами. Процесс запуска проведения эксперимента на борту будет включать в себя следующие этапы:

1. Отправка телекоманды из центра управления полетами на КА по восходящей линии канала связи [15] с привязкой ко времени.
2. Прием телекоманды телекоммуникационной системой спутника и передача в бортовую систему управления.
3. Послание из бортового компьютера в заданный момент времени команды начала эксперимента через мультиплексор по шине *I2C* в микроконтроллер полезной нагрузки.

В микроконтроллер будет загружено программное обеспечение, реализующее проведение эксперимента.

Принцип получения данных из модуля полезной нагрузки:

1. Измерение набора значений токов и соответствующих напряжений, выдаваемых фотоэлектрическим преобразователем.
2. Получение из датчиков положения Солнца и температуры соответствующих значений угла положения светила и температуры.
3. Измеренные параметры поступают в микроконтроллер, формирующий пакет данных в виде excel-таблицы или текстового файла.
4. Микроконтроллер передает пакет через мультиплексор по интерфейсу *I2C* на бортовой компьютер.
5. Во время появления канала связи пакет данных передается в ЦУП в виде телеметрии.

### Минимальные требования к платформе

Разрабатываемый модуль полезной нагрузки будет установлен на торцевую сторону спутника *CubeSat* форм-фактора *3U* [16]. Измерительная цепь будет напечатана на нижней стороне платы. На верхней стороне платы будут сделаны выводы контактов для припаивания ФЭП. Торцы направляющих должны иметь зоны для контакта с соседними аппаратами во время запуска. Минимальный размер этих зон: 6,5 мм (рис. 4). Эта зона накладывает ограничение по высоте установленных на плату компонентов. Под высотой понимается размер вдоль оси *Z*.

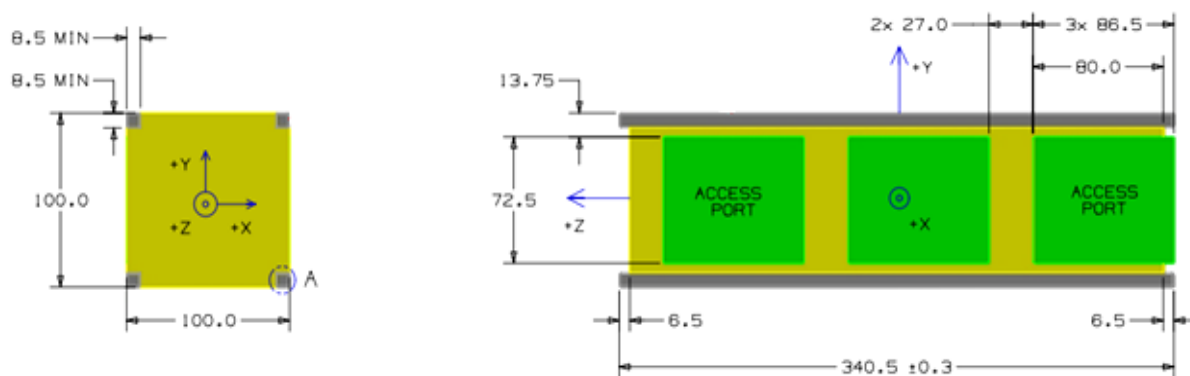


Рис. 4. Торцевой и боковой виды *3U CubeSat*

Fig.4. End and side views of *3U CubeSat*

Плата имеет размеры 100×100 мм и по углам имеет квадратные срезы глубиной не менее 8,5 мм для установки на направляющие (металлический каркас). Помимо солнечных элементов, на фронтальной стороне платы будет размещен солнечный датчик (показан на рис. 5 в виде круга, разделенного на 4 сектора).

Также стоит отметить условия, предъявляемые характером эксперимента к орбите космического аппарата. Для реализации изучения эффектов деградации орбита спутника должна тем или иным образом проходить через радиационные пояса Ван Аллена [10]. Планируется, что космический аппарат *ReshUCube-2* будет выведен на низкую околоземную орбиту. Нижняя граница возрастания интенсивности излучения заряженных частиц (протонов) начинается на высоте 500 км

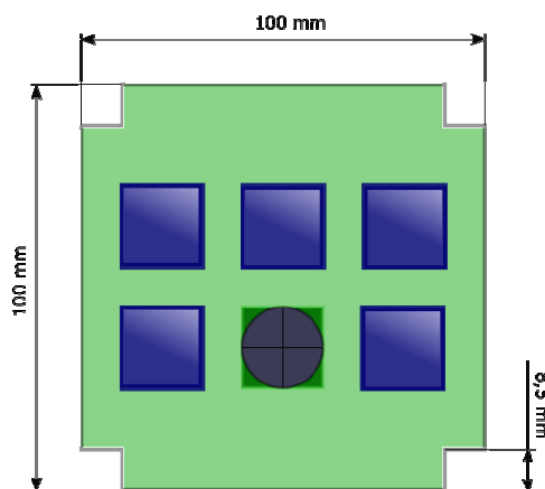


Рис. 5. Плата модуля полезной нагрузки

Fig. 5. Payload Module board

(над Атлантикой). Поэтому целесообразно, чтобы орбита спутника была полярной и пролегла выше этой отметки. Кроме того, для чистоты проведения эксперимента необходимо моделирование орбиты для предсказания времени, когда спутник будет проходить около «полудня» орбиты. Это позволит обеспечить оптимальное освещение солнечных элементов без альбедо Земли.

Характеристики служебных систем определяют тип и возможности полезной нагрузки [15]. 19,3 Кб данных, генерируемый модулем полезной нагрузки, будут предоставлять отнюдь не высокие требования к интерфейсу и системе телекоммуникации. Время передачи такого объема данных по протоколу I2C (со скоростью 100 Кбит/с) составит приблизительно 1,5 с. Зачастую в бортовой телекоммуникационной системе спутников *CubeSat* используется передатчик VHF/UHF-диапазона. Минимальная скорость передачи телеметрии по нисходящему каналу связи составляет 9 600 бит/с. При такой скорости сгенерированные данные будут отправлены на Землю за 16,5 с. Если учесть, что 30 % сообщения займут протокольные данные (служебная информация), то отправка пакета данных в общей сложности займет 24,6 с.

Во время режима изменения ориентации в ходе цикла работы модуля полезной нагрузки КА должен будет совершить маневр: поворот на 90°. Скорость поворота будет ограничена возможностями Системы Ориентации и Стабилизации. Предварительно оцененные требования к точности ориентации имеют стандартное значение: не более 10° отклонения от заданного положения. На этот параметр будет оказывать влияние точность Солнечного датчика.

### Реализация на платформе космического аппарата

Предполагается реализация космической миссии модуля полезной нагрузки на борту спутника *ReshUCube-2*. Аппарат в данный момент находится на стадии разработки. Он будет развивать идеи, заложенные в первом *ReshUCube*, созданным СибГУ им. М. Ф. Решетнева [17]. В первую очередь, это касается реализации реконфигурируемой космической лаборатории. По задумке проекта планировалось использование полученных данных в рамках учебно-научной деятельности.

Принцип работы такой лаборатории заключается в управлении режимами работы полезной нагрузки путем загрузки на КА программного обеспечения в процессе полета. Управление устройствами осуществляется контроллером полезной нагрузки. *ReshUCube* оснащен широким набором оборудования для проведения различных научных технологических экспериментов. На платформе спутников этой серии устанавливается несколько модулей полезной нагрузки различного характера, в том числе выполняющих тестирование и летную апробацию новых технологических решений.

### Заключение

Традиционно космические аппараты, в том числе и малые аппараты, в частности, наноспутники класса *CubeSat*, используются для проведения научных и технологических экспериментов. В данной работе сформулирован облик эксперимента по апробации фотоэлектрических элементов, предназначенного для проведения на модуле полезной нагрузки наноспутника класса *CubeSat*. В рамках облика определена методика проведения тестирования фотоэлектрических преобразователей, описаны рабочие циклы эксперимента. С учетом основных требований, предъявляемых методикой эксперимента, разработан проект тестирующего устройства. В проекте раскрыт способ схемотехнической реализации устройства, представлена функциональная схема модуля, демонстрирующая его основные компоненты. В ходе разработки модуля полезной нагрузки планируется использование коммерчески доступных решений при выборе комплектующих, что соответствует общей философии наноспутников класса *CubeSat*.

Проведение эксперимента в условиях космической среды позволит получить представление об истинном поведении солнечных ячеек на орбите. Эксперименты такого рода не могут иметь полноценных земных аналогов в связи с невозможностью моделирования всех действующих

факторов космического пространства. Поэтому проекты проведения подобных экспериментов притягивают внимание разработчиков, желающих получения летной истории для своей продукции.

Формат *CubeSat* [16] способствует повышению удобства проведения эксперимента за счет конкретно определенных стандартов для спутников данного типа. К тому же, проведение эксперимента на борту *CubeSat* является бюджетным вариантом исследований. А концепция реконфигурируемой космической лаборатории *ReshUCube* не даст спутнику стать бесполезным после окончания заранее определенной экспериментальной программы и поможет использовать ресурсы аппарата с максимальной эффективностью.

### Библиографические ссылки

1. Enhancing Lifetime of 1U/2U CubeSat Electric Power System with Distributed Architecture and Power-down Mode / A. Edpuganti, V. Khadkikar, H. Zeineldin et al. // IEEE Transactions on Industry Applications. 2022. Vol. 58. P. 901–913.
2. 3–6 Junction photovoltaic cells for space and terrestrial concentrator applications / F. Dimroth, C. Baur, A. W. Bett et al. // 31st IEEE Photovoltaic Specialists Conference, 2005. P. 525–529.
3. AM0 solar cell calibration under near space conditions / R. Hoheisel, D. Wilt, D. Scheiman et al. // IEEE 40th Photovoltaic Specialist Conference. 2014. P. 1811–1814.
4. A Photovoltaic Model Based Method to Monitor Solar Array Degradation On-Board a Micro-Satellite / Jing Jun Soon, Jiun Wei Chia, Htet Aung et al. // IEEE. 2018. 10 p.
5. Feynman J., Ruzmaikin A., Berdichevsky V. The JPL proton fluence model: an update // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2002. Vol. 64. P. 1679–1686.
6. Modeling solar cell degradation in space: A comparison of the NRL displacement damage dose and the JPL equivalent fluence approaches / S. R. Messenger, G. P. Summers, E. A. Burke et al. // Progress in Photovoltaics: Research and Applications. 2001. Vol. 9. P. 103–121.
7. Bretschneider T. Singapore’s satellite mission X-Sat // Proceedings of the International Academy of Astronautics Symposium on Small Satellites for Earth Observation. 2003. P. 105–108.
8. Solar Cell experiment for Space: Past, Present and Future. R. Hoheisel, S. R. Messenger, M. P. Limb et al. // Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. 2013. Vol. 8620. 7 p.
9. TACSAT-4 solar cell experiment: Advanced solar cell technologies in a high radiation environment / P. Jenkins, M. Krasowski, N. Prokop et al. // IEEE 44th Photovoltaic Specialists Conference. 2009. P. 9–12.
10. Space Weather Effects in the Earth’s Radiation Belts / D. N. Baker, P. J. Erickson, J. F. Fennell et al. // Space Science Reviews, 2018. Vol. 214. 17 p.
11. On-orbit verification of space solar cells on the CubeSat MOVE-II / M. Rutzinger, L. Krempel, M. Salzberger et al. // Munich: Technical University of Munich. 2016. 5 p.
12. Фомин Д. В. «АмГУ-1» («АмурСат») – первый спутник АмГУ // Космонавтика: наука и образование : материалы Всерос. науч. конф. (17 октября 2019, г. Благовещенск) / под общ. ред. В. В. Соловьева ; Ам. гос. ун-т. Благовещенск, 2019. С. 15–18.
13. New Methodologies for the Thermal Modeling of CubeSats / R. Philipp, P. Hager, C. Lucking et al. // 26th Annual AIAA/USU, Conference on Small Satellites. 2012. 11 p.
14. On-Orbit Characterization of Space Solar Cells on Nano-satellites / J. Lee, J. Nocerino, B. Hardy et al. // IEEE 44th Photovoltaic Specialists Conference. 2017. P. 1–6.
15. Чеботарев В. Е., Косенко В. Е. Основы проектирования космических аппаратов информационного обеспечения: учеб. пособие / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2011. 488 с.
16. Electronic textbook [Электронный ресурс]. URL: <https://www.cubesat.org> (дата обращения: 25.09.2021).
17. Ханов В. Х., Зуев Д. М., Шахматов А. В. Реализация полезной нагрузки ReshUCube как реконфигурируемой космической лаборатории // Решетневские чтения : материалы XXV Меж-

дунар. науч. конф. (10–12 ноября 2021, г. Красноярск) : в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2021. С. 417–418.

## References

1. Edpuganti A., Khadkikar V., Zeineldin H. et al. Enhancing Lifetime of 1U/2U CubeSat Electric Power System with Distributed Architecture and Power-down Mode. *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2022, Vol. 58, P. 901–913.
2. Dimroth F., Baur C., Bett A. W. et al. 3–6 Junction photovoltaic cells for space and terrestrial concentrator applications. *31st IEEE Photovoltaic Specialists Conference*. 2005, P. 525–529.
3. Hoheisel R., Wilt D., Scheiman D. et al. AM0 solar cell calibration under near space conditions. *IEEE 40th Photovoltaic Specialist Conference*. 2014, P. 1811–1814.
4. Jing Jun Soon, Jiun Wei Chia, Htet Aung et al. A Photovoltaic Model Based Method to Monitor Solar Array Degradation On-Board a Micro-Satellite. *IEEE*. 2018, P. 10.
5. Feynman J., Ruzmaikin A., Berdichevsky V. The JPL proton fluence model: an update. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. 2002, Vol. 64, P. 1679–1686.
6. Messenger S. R., Summers G. P., Burke E. A. et al. Modeling solar cell degradation in space: A comparison of the NRL displacement damage dose and the JPL equivalent fluence approaches. *Progress in Photovoltaics: Research and Applications*. 2001, Vol. 9, P. 103–121.
7. Bretschneider T. Singapore’s satellite mission X-Sat. *Proceedings of the International Academy of Astronautics Symposium on Small Satellites for Earth Observation*. 2003, P. 105–108.
8. Hoheisel R., Messenger S. R., Limb M. P. et al. Solar Cell experiment for Space: Past, Present and Future. *Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering*. 2013, Vol. 8620, 7 p.
9. Jenkins P., Krasowski M., Prokop N. et al. TACSAT-4 solar cell experiment: Advanced solar cell technologies in a high radiation environment. *IEEE 44th Photovoltaic Specialists Conference*. 2009, P. 9–12.
10. Baker D. N., Erickson P. J., Fennell J. F. et al. Space Weather Effects in the Earth’s Radiation Belts. *Space Science Reviews*. 2018, Vol. 214, 17 p.
11. Rutzinger M., Krempel L., Salzberger M. et al. On-orbit verification of space solar cells on the CubeSat MOVE-II. *Munich: Technical University of Munich*. 2016, 5 p.
12. Fomin D. V. [AmGU-1 (AmurSat) – AmSU first satellite]. *Materialy Vseros. nauch. konf. “Kosmonavtika: nauka i obrazovanie”* [Materials Intern. Scientific. Conf “Cosmonautics: science and education”]. Blagoveschensk, 2019, P. 15–18 (In Russ.).
13. Philipp R., Hager P., Lucking C. et al. New Methodologies for the Thermal Modeling of CubeSats. *26th Annual AIAA/USU, Conference on Small Satellites*. 2012, 11 p.
14. Lee J., Nocerino J., Hardy B. et al. On-Orbit Characterization of Space Solar Cells on Nano-satellites. *IEEE 44th Photovoltaic Specialists Conference*. 2017, P. 1–6.
15. Chebotaryov V. E., Kosenko V. E. *Osnovy proektirovaniya kosmicheskikh apparatov informacionnogo obespecheniya: ucheb. posobie* [Fundamentals of designing information support spacecraft: textbook. stipend]. Krasnoyarsk, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, 2011, 488 p. (In Russ.).
16. Electronic textbook. Available at: <https://www.cubesat.org> (accessed 25.09.2021).
17. Khanov V. Kh., Zuev D. M., Shakhmatov A. V. [Implementation of the payload of the ReshUCube nanosatellite as a reconfigurable space laboratory]. *Materialy XXV Mezhdunar. nauch. konf. “Reshetnevskie chteniya”* [Materials XV Intern. Scientific. Conf “Reshetnev reading”]. Krasnoyarsk, 2011, P. 98–99 (In Russ.).

© Лукьянов М. М., Прохоров Г. П., Куценко В. С., Карпов Е. С., А. С. Паршин, Зуев Д. М., 2022

**Лукьянов Михаил Михайлович** – бакалавр; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: mishka.1255555@mail.ru.

**Прохоров Григорий Павлович** – магистрант; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: 2dchurchill@mail.ru.

**Куценко Валентина Сергеевна** – бакалавр; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: kvtsenko.valya01@mail.ru.

**Карпов Евгений Сергеевич** – бакалавр; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. Email: zheka.karpov.70@mail.ru.

**Паршин Анатолий Сергеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой технической физики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: aparshin@sibsau.ru.

**Зуев Дмитрий Михайлович** – ассистент кафедры технической физики, инженер научно-производственной лаборатории «Малые космические аппараты»; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: zuevdmitriy93@yandex.ru.

**Lukyanov Mikhail Mikhailovich** – Bachelor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: mishka.1255555@mail.ru.

**Prokhorov Grigorii Pavlovich** – Master, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: 2dchurchill@mail.ru.

**Kutsenko Valentina Sergeevna** – Bachelor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: kvtsenko.valya01@mail.ru.

**Karpov Evgenii Sergeevich** – Bachelor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: zheka.karpov.70@mail.ru.

**Parshin Anatolii Sergeevich** – Dr. Sc., Professor, Head of Applied Physics Department; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: aparshin@sibsau.ru.

**Zuev Dmitrii Mikhailovich** – Assistant of Applied Physics Department, Engineer of Small Satellites Laboratory; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: zuevdmitriy93@yandex.ru.

---

УДК 621.454.2

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-498-507

**Для цитирования:** Способ обработки результатов кавитационных испытаний насосов ТНА с целью получения аппроксимирующей функции / А. С. Торгашин, Д. А. Жуйков, В. П. Назаров, А. М. Бегишев // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 498–507. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-498-507.

**For citation:** Torgashin A. S., Zhujkov D. A., Nazarov V. P., Begishev A. M. [Method for processing the results of cavitation tests of TNA pumps in order to obtain an approximating function]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 498–507. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-498-507.

## Способ обработки результатов кавитационных испытаний насосов турбонасосных агрегатов с целью получения аппроксимирующей функции

А. С. Торгашин<sup>\*</sup>, Д. А. Жуйков, В. П. Назаров, А. М. Бегишев

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

<sup>\*</sup>E-mail: ttarg23@gmail.com

*При проектировании ракетных двигателей решается задача обеспечения заданных основных конструктивных параметров. В связи с повышением требований к изделиям ракетно-космической техники, возрастают и требования к обеспечению энергетической эффективности всех входящих в него элементов. Как правило, задача повышения энергетических характеристик ракетного двигателя осуществляется увеличением давления в камере сгорания и частоты вращения вала турбонасосного агрегата. Увеличение частоты вращения вала турбонасосного агрегата требует обеспечения бескавитационного режима работы насоса с отсутствием кавитационного срыва.*

*Данную проблему можно решить различными способами: конструктивным улучшением насоса или увеличением параметра давления на входе в насос. Однако слишком большое увеличение давления на входе невозможно, так как это приведет к увеличению толщины стенок топливных баков ракеты и соответствующему увеличению массы всей ракеты. Включение шнека хоть и не гарантирует бескавитационной работы при любом входном давлении, однако является наиболее предпочтительным способом.*

*Геометрия проточной части как шнекового преднасоса, так и лопаток насоса проектируется с учетом обеспечения бескавитационного режима работы. При проектировании, на этапе экспериментальной отработки режимов насоса, возможно применение методов вычислительной гидродинамики (Computational Fluid Dynamics, CFD). Данные методы применяются в различных областях общего машиностроения и хорошо себя зарекомендовали. Однако насос ракетного двигателя отличается высоким перепадом давлений при относительно малых габаритах. Возникает вопрос об адаптации методов CFD к моделированию кавитационных испытаний.*

*Данная работа направлена на выведение функции, аппроксимирующей группу данных об испытании насоса турбонасосного агрегата с целью ее дальнейшей адаптации для методов CFD.*

*Ключевые слова:* кавитация, турбонасосный агрегат, жидкостный ракетный двигатель, численное моделирование.

## Method for processing the results of cavitation tests of TNA pumps in order to obtain an approximating function

A. S. Torgashin<sup>\*</sup>, D. A. Zhujkov, V. P. Nazarov, A. M. Begishev

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

<sup>\*</sup>E-mail: ttarg23@gmail.com

*When designing rocket engines, the problem of providing the specified basic design parameters is solved. In connection with the increase in requirements for products of rocket and space technology, the requirements for ensuring the energy efficiency of all its constituent elements are also increasing. As a rule, the task of increasing the energy characteristics of a rocket engine is carried out by increasing the pressure in the combustion chamber and the rotational speed of the turbopump shaft. An increase in the rotational speed of the shaft of a turbopump unit requires the provision of a cavitation-free operation of the pump with the absence of cavitation breakdown.*

*This problem can be solved in various ways: by constructive improvement of the pump or by increasing the pressure parameter at the pump inlet. However, too much increase in inlet pressure is not possible, as this will increase the thickness of the walls of the rocket's fuel tanks and a corresponding increase in the mass of the entire rocket. Turning on the screw, although it does not guarantee cavitation-free operation at any inlet pressure, is the most preferred method.*

*The geometry of the bore part of both the screw prepump and the pump blades is designed to ensure non-cavitation operation. When designing, at the stage of experimental testing of pump modes, it is possible to use the methods of computational fluid dynamics (Computational Fluid Dynamics, CFD). These methods are used in various areas of general engineering and have proven themselves well. However, the rocket motor pump has a high pressure drop with relatively small dimensions. The question arises of adapting CFD methods to modeling cavitation tests.*

*This work is aimed at deriving a function approximating the TNA pump test data set with a view to its further adaptation for CFD methods.*

*Keywords: Cavitation, TNA, LRE, numerical simulation.*

### **Введение**

Одним из наиболее ответственных и энергонапряженных узлов жидкостного ракетного двигателя является турбонасосный агрегат (ТНА), необходимый для обеспечения непрерывной подачи компонентов топлива в камеру двигателя с заданным расходом и давлением. К ТНА, как к агрегату жидкостного ракетного двигателя (ЖРД), предъявляются следующие требования:

- обеспечение работоспособности и основных параметров при заданном ресурсе с необходимыми возможными паузами установленной продолжительности;
- обеспечение на всех режимах работы двигателя подачи компонентов топлива требуемого расхода и давления при высокой степени надежности с приемлемым КПД всего агрегата и минимальной стоимости изготовления;
- обеспечение минимальных размеров и массы всей двигательной установки (ДУ) за счет наименьших габаритных размеров и массы самого ТНА.

При работе ТНА, в насосе может возникнуть явление кавитации, отрицательно влияющее на выполнение указанных выше требований. Кавитацией называют процесс роста пузырька в жидкости вследствие динамического понижения давления до давления насыщенного пара, происходящий при постоянной температуре [1]. Данный процесс схож с кипением (рост пузырька, вызванный повышением температуры жидкости). При кавитации сам пузырек в жидкости динамически меняется: сначала происходит рост, затем, если на него не будет действовать возрастающее давление, рост сначала прекратится и начнется сжатие пузырька. Затем пузырек



схлопнется и, вероятно, исчезнет вследствие растворения газов и конденсации пара. Схлопывание происходит «скачком», если паровые пузырьки, или каверны, содержат малое количество газа, и менее резко, если содержание в них значительно. Таким образом, кавитация включает целый ряд явлений от зарождения пузырька до его схлопывания [2]. Само же явление ведет к понижению рабочих параметров насоса, что может отразиться на работе жидкостного ракетного двигателя в целом. При более длительном воздействии, вследствие местных повышений давления из-за схлопывания пузырьков, кавитация вызывает деформацию крыльчатки насоса – так называемую кавитационную эрозию.

Вследствие воздействия кавитации возникает вопрос об учете данного явления при проектировании ТНА и разработке методики, позволяющей смоделировать кавитационное течение при работе насоса. Такие методики существуют, например они описаны в работах [3; 4]. Также существуют методы вычислительной гидродинамики CFD, позволяющие численно смоделировать кавитационное течение в различных агрегатах (крыльчатка насосов, винт турбины, гидрокрыло, различные объекты в жидкости) и с применением сред с различной вязкостью и поверхностным натяжением, в том числе и криогенных. Данные методики представлены в работах [5–7].

С технической точки зрения, насосы окислителя и горючего предназначены для подачи компонентов топлива в газогенераторы и коллектор подвода камеры двигателя. Основным рабочим элементом насоса является крыльчатка закрытого типа с односторонним входом, реже двусторонним [8]. Для улучшения антикавитационных качеств насоса на входе перед крыльчаткой устанавливается шнек. Обычно крыльчатки отливают из высокопрочного алюминиевого сплава, шнек изготавливают из нержавеющей стали.

При изготовлении ТНА насосы подвергаются целому ряду испытаний на экспериментальное определение количественных и качественных характеристик объекта как результата воздействия на него сил при его функционировании, среди которых и испытание на определение кавитационного срыва. Как и в общем машиностроении, для испытаний насосов ТНА можно выделить виды испытаний, которые можно классифицировать по организационно-юридическому признаку, их содержанию, составу, месту проведения и объектам испытаний [9]. Согласно данной классификации, испытания насосов на определение кавитационного срыва можно определить к прямо-сдаточным по организационно-юридическому виду, параметрическим – по содержанию, кавитационным – по составу и стендовым – по месту проведения.

Вследствие ряда допущений в различных моделях кавитации, теоретические и практические данные имеют определённое расхождение. Данное расхождение должно быть учтено с учетом специфики работы насоса ТНА, а именно высокого перепада давлений при малых габаритах рабочего колеса. Целью работы является разработка методики аппроксимации данных гидравлического пролива насосов ТНА для дальнейшей верификации полученной модели с данными испытаний насоса с другой геометрией. Разработка и совершенствование новых методов численного моделирования гидродинамических процессов ведет к повышению энергоэффективности и КПД ТНА и ЖРД в целом.

### **Описание средств измерений**

Средства измерений (СИ) для данных испытаний выбирались так, чтобы погрешность измерения отдельных параметров на режиме испытаний, определяемая классом точности СИ, не превышала заданных значений:

- для расходов  $\pm 1,5$  %;
- давлений  $\pm 1,0$  %;
- перепада давлений  $\pm 1,5$  %;
- температуры воды  $\pm 1$  %.

Для измерения давления используются образцовые манометры класса 0,4 по ГОСТ 65217–72. Также, при проведении натуральных испытаний на определение кавитационного срыва, разрешается применять манометры точных измерений класса 0,6 по ГОСТ 2405–88. Манометры выби-

раются с таким диапазоном шкалы, чтобы измеряемые значения параметра находились во второй трети шкалы прибора. Подготовка манометров и эксплуатация при стендовых испытаниях осуществляется в соответствии с ОСТ 92-1608–80.

Все приборы должны располагаться в правильном положении с обеспечением их устойчивости. Положение самого наблюдателя при всех его действиях не должно вызывать препятствий при записи показаний [10].

### Определение и исключение промахов

Обычно данные испытаний записываются в виде зависимости напора по оси  $Y$ , выраженного в метрах или в Дж/кг, к давлению на входе по оси  $X$ , выраженному в Па или кгс/см<sup>2</sup>. Для возможности сравнения показаний кавитационных испытаний с аналогичными показаниями других насосов, а также определения функции приведем значения к безразмерным коэффициентам. Для оси  $X$  будем использовать число кавитации  $\sigma$  [2] записанное в следующем виде:

$$\sigma = \frac{2(P_{ex} - P_v)}{\rho * v_{ex\text{ ср}}^2}, \quad (1)$$

где  $P_{ex}$  – давление на входе в МПа;  $P_v$  – давление насыщенного пара в МПа;  $\rho$  – плотность жидкости в кг/м<sup>3</sup>. Для оси  $Y$  будем использовать коэффициент напора  $\Psi$  (англ. head coefficient). Данный коэффициент применяется в достаточном большом числе работ, например в статьях [11–13]:

$$\Psi = 2 * g * \frac{H}{v_2^2}, \quad (2)$$

где  $H$  – полный напор насоса в м;  $v_2$  – скорость на выходе из насоса в м/с<sup>2</sup>.

Результаты гидравлических испытаний со снятием кавитационной характеристики модельного (подобного натурному) насоса с полученными значениями давления входа, давления выхода, расхода, числа оборотов крыльчатки заносятся в таблицу. Для каждого испытания снимаются показания параметров давления на входе и выходе из насоса, а также расхода в 12–13 точках. В данной статье рассматриваются результаты 78 виртуальных испытаний с суммарным числом в 944 точках, представленных на рис. 1. Для определения точек промахов воспользуемся критерием Шовене, основанном на распределении Гаусса. Для этого определяется число стандартных отклонений с учетом всех результатов, в том числе и потенциальных промахов, а затем сравнивается с вероятностью повторения данного события. Значение вероятности определяется с помощью распределения Гаусса. Для точного определения промахов, разобьем все точки, представленные на рис. 1 на группы справа налево по интервалам значений  $\sigma$ : 1-я группа  $\sigma = [0,26–0,25]$ , 2-я  $[0,24–0,23]$ , 3-я  $[0,22–0,21]$ , 4-я  $[0,17–0,18]$ , 5-я  $[0,15–0,16]$ , 6-я  $[0,13–0,14]$ , 7-я  $[0,125–0,13]$ , 8-я  $[0,12–0,125]$ , 9-я  $[0,115–0,12]$ , 10-я  $[0,11–0,115]$ , 11-я  $[0,104–0,11]$ , 12-я  $[0,095–0,104]$ , 13-я  $[0,09–0,095]$ . В каждой группе 78 точек данных, за исключением 13-й, в которой 8 точек. Для работы с критерием Шовене подсчитано для каждой группы значения среднего числа и среднеквадратического отклонения. Рассмотрим выполнения критерия Шовене для всех 13-ти групп.

В первом приближении не подошли под критерий Шовене (значение числа точек значений испытаний, умноженное на вероятность повторения должно быть не ниже 0,5) нижние точки в группах с 12 по 5. Уберем из рассмотрения данные точки. Следовательно, число точек уменьшится для этих групп с 78 до 77, соответственно. Повторно рассчитываем критерий Шовене для данных групп.

По результатам второго приближения все точки 1–6 группы подошли под критерий Шовене, когда нижние точки групп 7–12 нет. Повторно убираем из рассмотрения точки испытания. В группах 7–12 число точек уменьшится с 77 до 76 соответственно.

По результатам третьего приближения не подошли под критерий Шовене нижние точки 9-й, 11-й и 12-й групп. Аналогично убираем из рассмотрения данные точки. После данного

приближения можно утверждать, что грубых промахов во всех группах нет, так как критерий Шовене выполняется для всех 12-ти групп.

Отдельно рассмотрим точки 13-й группы. В данной группе грубых промахов нет, для учета испытаний подходят все 8 точек. По результатам отбрасывания промахов, общее число точек для рассмотрения уменьшилось с 944 до 927.

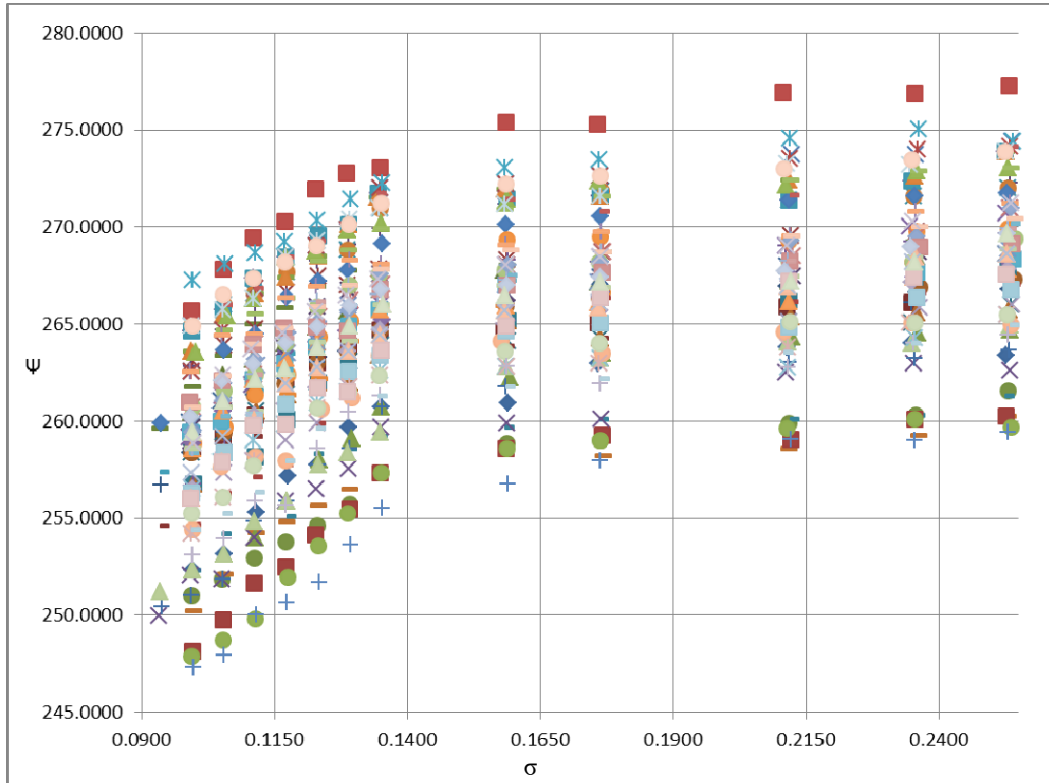


Рис. 1. График данных испытаний

Fig. 1. Plot of test data

### Аппроксимация результатов испытаний

Для определения функции, ее характера (линейная, степенная, логарифмическая и т. д.), необходимо воспользоваться одним из методов математического анализа – аппроксимацией. Для аппроксимации полученных результатов с целью получения зависимости воспользуемся методом наименьших квадратов [14]. Метод заключается в рассмотрении суммы квадратов разностей  $y_i$ , полученных при кавитационном испытании и аппроксимирующей функции  $\varphi(x)$  в соответствующих точках. Параметры функции  $a, b, c, \dots, n$   $\varphi(x)$  подбираются так, чтобы разность в квадрате была наименьшей. В зависимости от вида функции: линейная вида  $y = ax + b$ , трехчлена второй степени  $y = ax^2 + bx + c$  и т. д. – различаются системы линейных уравнений, необходимых для получения неизвестных  $a, b, c$ .

При рассмотрении общего для всех 78 испытаний поведения значений коэффициента напора  $\Psi$  от числа кавитации  $\sigma$ , можно сделать вывод о невозможности аппроксимации значений линейной зависимостью. В качестве аппроксимирующей функции необходимо рассмотреть логарифмическую, экспоненциальную и степенную функции.

В случае аппроксимации логарифмической функцией, зависимость задается в виде  $F(x) = a + b \cdot \ln(x)$ . В случае аппроксимации экспоненциальной функцией, зависимость задается в виде  $F(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$ . В случае аппроксимации степенной функцией, зависимость задается в виде  $F(x) = a \cdot x^b$ . Используя метод наименьших квадратов, получим следующие уравнения аппроксимации, описывающие все 927 точек значений испытаний:

$$F(x) = 283.106 + 9.742 * \ln(x); \tag{3}$$

$$F(x) = 255.799 * e^{(0.213*x)}; \tag{4}$$

$$F(x) = 283.78 * x^{0.0369} \tag{5}$$

По полученным уравнениям построим график для каждого уравнения и сравним их со средними значениями групп 1–13 испытаний. График представлен на рис. 2.

Наиболее близкие показания аппроксимации и значений испытаний насоса в режиме кавитации (крайние левые значения точек на графиках) показывает степенная функция (5). Для дальнейшей работы по приближению аппроксимирующей функции к показаниям испытаний будет взята за основу степенная функция.

Чтобы приблизить значения аппроксимирующей функции (5) к графику средних значений испытаний, зададимся коэффициентами для функции  $\Psi$ :  $a = 0,35$ ,  $b = -0,092456$  и  $c = 1,0239$ . Запишем, полученное аппроксимирующее уравнение и сравним его с данными средних значений испытаний (рис. 3):

$$\Psi = 283,78 \frac{(\sigma + b)^{a*0,0369}}{c} = 283,78 \frac{(\sigma - 0,092456)^{0,35*0,0369}}{1,0239}. \tag{6}$$

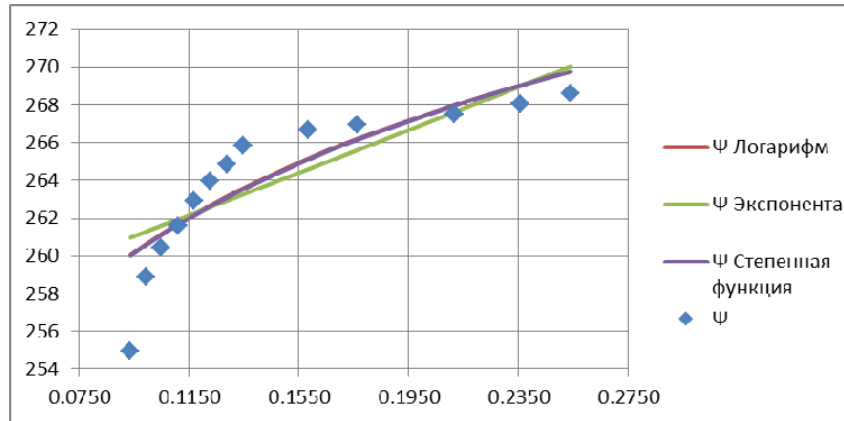


Рис. 2. График средних значений групп испытаний и их аппроксимации

Fig.2. Plot of means of test groups and their approximations

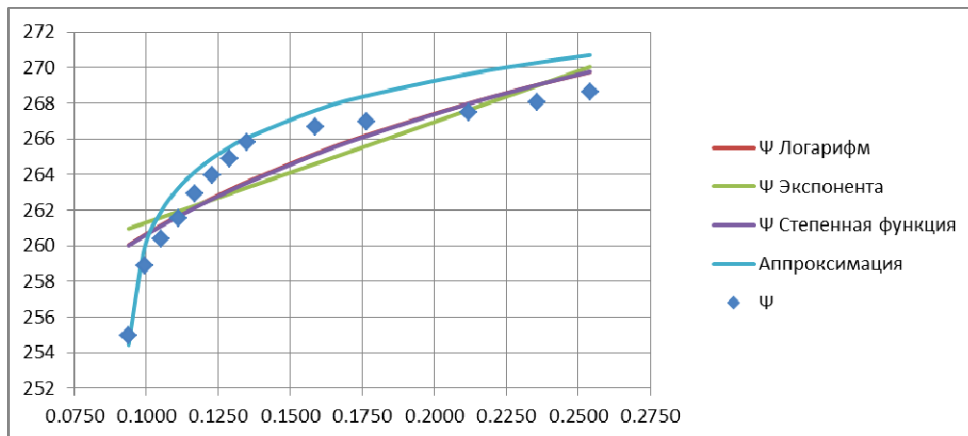


Рис. 3. График средних значений групп испытаний и сравнение с аппроксимирующим уравнением, логарифмической, экспоненциальной и степенной аппроксимацией

Fig. 3. Plot of test group means and comparison with fitted equation, logarithmic, exponential, and power approximation

Максимальная относительная погрешность уравнения (6) и средних значений испытаний групп 1–13 (рис. 1) равна 0,97 %. Однако, если сравнивать уравнение (6) со значениями каждого испытания из групп точек на рис. 1 по отдельности, то максимальная относительная погрешность будет равняться 4,59 %. Для более точного приближения уравнения к данным испытаний, рассмотрим отдельные испытания с минимальными и максимальными значениями  $\Psi$ . Введем новые коэффициенты для уравнения (6), чтобы понять характер смещения аппроксимирующего графика относительно значений  $\Psi$ . Коэффициент степени  $a$  оставим равным 0,35, а коэффициенты для значений  $b$  примем  $-0,094$  и  $-0,0957$ , для значений  $c$  примем  $0,998$  и  $1,07$  для минимального и максимального испытания соответственно. Запишем полученные аппроксимирующие функции:

$$\Psi = 283,78 \frac{(\sigma - 0.094)^{0,35 * 0,0369}}{0.998}; \quad (7)$$

$$\Psi = 283,78 \frac{(\sigma - 0.0957)^{0,35 * 0,0369}}{1.07}. \quad (8)$$

Для определения общей для всех испытаний аппроксимирующей функции, зависимой от номинального значения  $\Psi$ , представим зависимость  $\Psi$  от коэффициента в линейном виде  $y = a * x + c$ , получим систему уравнений для коэффициента  $b$  и  $c$  функций (6), (7) и (8):

$$\begin{cases} -0,094 = a * 277.2724 + c \\ -0,0957 = a * 259.4448 + c \end{cases}; \quad (9)$$

$$\begin{cases} 0,998 = a * 277.2724 + c \\ 1,07 = a * 259.4448 + c \end{cases} \quad (10)$$

Запишем полученное аппроксимирующее уравнение для всей группы испытаний

$$\Psi = 283,78 \frac{(\sigma + (\Psi * 0,000093577 - 0,12044))^{0,35 * 0,0369}}{(-\Psi * 0,004038 + 2,11762)}. \quad (11)$$

Формула (11) приближает значения функции к данным испытаний, за исключением данных, находящихся в значениях испытаний близких к средним. Данное отличие становится очевидным, если рассмотреть зависимость коэффициентов  $b$  и  $c$  от  $\Psi$ . Для еще более точного приближения функции (11) к данным испытаний обратимся к методу интерполяции функций при помощи алгебраических многочленов (полиномиальная интерполяция). Воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона для неравных промежутков [15]. Данная формула является видоизменённой формулой Лагранжа и в общем виде ее можно записать

$$f(x) = B_1 + (x - x_1)B_2 + (x - x_1)(x - x_2)B_3 + \dots + (x - x_1) * \dots * (x - x_{n-1})B_n. \quad (12)$$

С помощью разделенных разностей, составляя интерполяционную таблицу, находим коэффициенты  $B_1, B_2, B_3 \dots B_n$ . Для коэффициентов разности  $b$  и деления  $c$  получим уравнения

$$\begin{aligned} a_{разн} = & -0.094 + (6.27205 * 10^{-5}) * (\Psi_n - 277.2724) - \\ & - (3.66748 * 10^{-6}) * (\Psi_n - 277.2724) * (\Psi_n - 268.3439); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} a_{дел} = & 0.998 - 0.00290082 * (\Psi_n - 277.2724) + \\ & + 0.000127862 * (\Psi_n - 277.2724) * (\Psi_n - 268.3439). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая, что в данных восьми испытаний присутствуют 13 точек замеров вместо 12, изменим коэффициент  $-0,094$  в формуле (13) на коэффициент  $-0,092$ , окончательно формула коэффициента разности  $b$  будет выглядеть:

$$a_{разн} = -0.092 + (6.27205 \cdot 10^{-5}) * (\Psi_n - 277.2724) - (3.66748 \cdot 10^{-6}) * (\Psi_n - 277.2724) * (\Psi_n - 268.3439) \quad (15)$$

Запишем окончательную функцию аппроксимации испытаний

$$\Psi = 283,78 \frac{(\sigma + a_{разн})^{0,35 * 0,0369}}{a_{дел}} \quad (16)$$

Максимальная относительная погрешность, при сравнении функции (16) с каждым графиком испытаний по отдельности, не превышает значений 1,9 %. Преимущественно, погрешность находится в пределах 1 % для большинства точек. Данные значения можно считать удовлетворительными.

### Заключение

В ходе анализа результатов, выявлена общая хорошая сходимость данных испытания и функции (16). Аппроксимирующая функция может иметь расхождения в начале кавитационных испытаний, однако в области кавитационного срыва приближается к значениям испытаний. При рассмотрении относительной погрешности для всех испытаний (исключая грубые промахи) функция показывает применимость к данным испытаний. Дополнительный охват минимальных и максимальных значений испытаний дал более точные приближения к данным испытаний. В некоторых сравнениях данные функции и испытаний могут отличаться сильнее, что объясняется учетом всех данных испытаний, в том числе вышедших за заданные конструкторской документацией пределы.

Для дальнейшей работы необходимо уточнить коэффициент  $b$  и  $c$  с целью увеличения диапазона охвата значений  $\sigma$  и  $\Psi$ , а также увеличения точности приближения. При рассмотрении результатов аппроксимации в части возможности применения функции (16) к аналогичной аппроксимации значений испытаний других высоконапорных насосов, необходимо уточнить коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Коэффициенты можно уточнить, применяя для функции (16) как данные кавитационных испытаний других насосов (особенно в данной части интересно приближение функции к результатам испытаний других высоконапорных насосов, характерных для ТНА), так и другие методы интерполяции и аппроксимации коэффициентов и функции. Таким образом, полученный способ позволит проводить анализ кавитационных свойств центробежного насоса с целью улучшения антикавитационных качеств ТНА, тем самым позволяя выполнить современные требования по энергоэффективности, предъявляемые к новым разрабатываемым ТНА ЖРД.

### Библиографические ссылки

1. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны : пер. с англ. под ред. Г. Ю. Степанова. М. : Мир, 1964, 466 с.
2. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация : пер. с англ. под ред. В. И. Полежаева М. : Мир, 1974, 688 с.
3. Петров В. И., Чебаевский В. Ф. Кавитация в высокооборотных лопастных насосах. М. : Машиностроение, 1982. 192 с.
4. Малюшенко В. В. Лопастные насосы. Теория, расчет и конструирование. М. : Машиностроение, 1977. 288 с.
5. Ломакин В. О., Бибик О. Ю. Влияние эмпирических коэффициентов модели Рэлея – Плеттета на расчетные кавитационные характеристики центробежного насоса // Гидравлика. 2017. № 1(3). [Электронный ресурс]. URL: <http://hydrojournal.ru/images/JOURNAL/NUMBER3/LBK.pdf>.

6. Моделирование срывной кавитационной характеристики бустерного турбонасосного агрегата и сравнение экспериментальных и численных результатов / И. С. Казённов, Ю. И. Каналин, Н. П. Полетаев, И. А. Чернышева // Вестник Самарского гос. аэрокосмич. ун-та. 2014. № 5(47), ч. 1. С. 188–198.
7. Попов Е. Н. Моделирование пространственного течения жидкости в кислородном насосе ЖРД с учетом кавитации // Труды НПО Энергомаш. 2010. № 27. С. 65–94
8. Краева Е. М. Высокооборотные центробежные насосы / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2011. 210 с.
9. Яременко В. В. Испытания насосов : справоч. пособ. М. : Машиностроение, 1976. 224 с
10. Маликов М. Ф. Основы метрологии. Ч. 1. Учение об измерении. М. : Комитет по делам мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР, 1949. 479 с.
11. Song, Pengfei & Zhang, Yongxue & Xu, Coolsun & Zhou, X & Zhang, Jinya. (2015). Numerical studies in a centrifugal pump with the improved blade considering cavitation // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 72. 032021. 10.1088/1757-899X/72/3/032021.
12. DONG Liang, SHANG Huanhuan, ZHAO Yuqi, LIU Houlin, DAI Cui, WANG Ying. Study on unstable characteristics of centrifugal pump under different cavitation stages // Journal of Thermal Science. 2019. Vol. 28, No. 4. P. 608–620.
13. LIU Hou-lin; LIU Dong-xi; , WANG Yong; WU Xian-fang; WANG Jian; DU Hui; Experimental investigation and numerical analysis of unsteady attached sheetcavitating flows in a centrifugal pump. // Journal of Hydrodynamics. 2013. No. 25(3). P. 370–378.
14. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М. : Наука, 1985. 432 с.
15. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М. : Государственное издательство математической литературы, 1962. 464 с.

## References

1. Birkhof G., Sarantonello E. *Strui, sledy i kaverny* [Jets, traces and caverns]. Moscow, Mir Publ., 1964, 466 p.
2. Кнепп Р., Дежли Дзх., Хеммит Ф. *Kavitaciya* [Cavitation]. Moscow, Mir Publ., 1974, 688 p.
3. Petrov V. I., Chebaevskiy V. F. *Kavitaciya v vysokooborotnyh lopastnyh nasosah* [Cavitation in high-speed vane pumps]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982, 192 p.
4. Malyushenko V. V. *Lopastnye nasosy. Teoriya, raschet i konstruirovaniye* [Vane pumps. Theory, calculation and design]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 288 p.
5. Lomakin V. O. Bibik O. Yu. [Influence of the empirical coefficients of the Rayleigh-Plesett model on the calculated cavitation characteristics of a centrifugal pump]. *Gidravlika*. 2017, No. 1(3). Available at: <http://hydrojournal.ru/images/JOURNAL/NUMBER3/LBK.pdf>.
6. Kazyonov I. S., Kanalin Yu. I., Poletaev N. P., Chernysheva I. A. [Modeling the Stall Cavitation Characteristic of a Turbopump Booster Unit and Comparison of Experimental and Numerical Results]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta*. 2014, No. 5(47), Part 1, P. 188–198 (In Russ.).
7. Popov E. N. [Simulation of the spatial flow of liquid in the oxygen pump of the LRE, taking into account cavitation]. *Trudy NPO Energomash*. 2010, No. 27, P. 65–94 (In Russ.).
8. Kraeva E. M. *Vysokooborotnye centrobezhnye nasosy* [High speed centrifugal pumps]. Krasnoyarsk, 2011, 210 p.
9. Yaremenko V. V. *Ispytaniya nasosov* [Testing of pumps]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 224 p.
10. Malikov M. F. *Osnovy metrologii. Ch. 1. Uchenie ob izmerenii*. Moscow, Komitet po delam mer i izmeritel'nyh priborov pri Sovete Ministrov SSSR Publ., 1949, 479 p.
11. Song, Pengfei & Zhang, Yongxue & Xu, Coolsun & Zhou, X & Zhang, Jinya. (2015). Numerical studies in a centrifugal pump with the improved blade considering cavitation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 72. 032021. 10.1088/1757-899X/72/3/032021.

12. DONG Liang, SHANG Huanhuan, ZHAO Yuqi, LIU Houlin, DAI Cui, WANG Ying. Study on unstable characteristics of centrifugal pump under different cavitation stages. *Journal of Thermal Science*. 2019, Vol. 28, No. 4, P. 608–620.

13. LIU Hou-lin; LIU Dong-xi; , WANG Yong; WU Xian-fang; WANG Jian; DU Hui; Experimental investigation and numerical analysis of unsteady attached sheetcavitating flows in a centrifugal pump. *Journal of Hydrodynamics*. 2013, No. 25(3), P. 370–378.

14. Piskunov N. S. *Differencial'noe i integral'noe ischislenie dlya vtuzov* [Differential and integral calculus for technical colleges]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 432 p.

15. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Metody vychisleniy* [Computational Methods]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo matematicheskoy literatury Publ., 1962, 464 p.

© Торгашин А. С., Жуйков Д. А., Назаров В. П., Бегисhev А. М., 2022

---

**Торгашин Анатолий Сергеевич** – аспирант; Сибирский государственный университет науки и технологии имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: ttarg23@gmail.com.

**Жуйков Дмитрий Александрович** – кандидат технических наук, доцент кафедры двигателей летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологии имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: d\_zhuikov@sibsau.ru.

**Назаров Владимир Павлович** – кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой двигателей летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологии имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: nazarov@sibsau.ru.

**Бегисhev Алексей Михайлович** – аспирант; Сибирский государственный университет науки и технологии имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: alex-beg95@mail.ru.

**Torgashin Anatoliy Sergeevich** – graduate student; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: ttarg23@gmail.com.

**ZHujkov Dmitriy Aleksandrovich** – Cand. Sc.; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: d\_zhuikov@sibsau.ru.

**Nazarov Vladimir Pavlovich** – Cand. Sc.; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: nazarov@sibsau.ru.

**Begishev Aleksej Mihajlovich** – graduate student; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: alex-beg95@mail.ru.

---



УДК 629.78

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-508-519

**Для цитирования:** Методические принципы формирования ряда унифицированных космических платформ спутников связи / В. Е. Чеботарев, И. И. Зимин, А. А. Внуков, Е. А. Шангина // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 508–519. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-508-519.

**For citation:** Chebotarev V. E., Zimin I. I., Vnukov A. A., Shangina E. A. [Methodological principles for the formation of a number of unified space communication satellite platforms]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 508–519. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-508-519.

## Методические принципы формирования ряда унифицированных космических платформ спутников связи

В. Е. Чеботарев<sup>1, 2</sup>, И. И. Зимин<sup>1\*</sup>, А. А. Внуков<sup>1</sup>, Е. А. Шангина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева»  
Российская Федерация, 662972, г. Железногорск Красноярского края, ул. Ленина, 52

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет  
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, Свободный, 79

\*E-mail: i.zimin@iss-reshetnev.ru

*В данной статье сформулирована актуальная проблема формализации методических принципов поиска компромисса между повторяемостью и изменчивостью (новизной) свойств новых образцов космической техники – спутников связи. Основными методическими принципами преемственности развития является унификация изделий и их составных частей, средств технологического оснащения и технологических процессов, которая позволяет уменьшить их многообразие и номенклатуру. Упорядочение номенклатуры изделий и их составных частей достигается разработкой параметрических и типоразмерных рядов с рационально выбранными интервалами между соседними членами ряда по комплексному критерию, связывающему показатель целевой эффективности изделия с затратами на его создание. В данной работе разработана проектная модель и определены критерии выбора типоразмера универсальной космической платформы. При проектировании нового КА на основе унифицированной космической платформы возникает необходимость ее доработки для удовлетворения потребностей новой полезной нагрузки в ресурсах (по массе и энергопотреблению). В статье изложены методические принципы оценки диапазона эффективного применения универсальной космической платформы для двух крайних случаев потребностей в ресурсах (по массе и энергопотреблению) полезной нагрузки: ресурсы платформы избыточны или недостаточны. Разработаны методические принципы формирования ряда унифицированных космических платформ. Используя методические принципы формирования ряда унифицированных космических платформ, проведена оценка диапазонов эффективности УКП и оценка полноты ряда геостационарных спутников связи разработки АО «ИСС».*

*Ключевые слова:* геостационарный спутник связи, космическая платформа, полезная нагрузка, методика оценки эффективности, унифицированный ряд.

## Methodological principles for the formation of a number of unified space communication satellite platforms

V. E. Chebotarev<sup>1, 2</sup>, I. I. Zimin<sup>1\*</sup>, A. A. Vnukov<sup>1</sup>, E. A. Shangina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>JSC “Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”  
52, Lenin St., Zheleznogorsk, Krasnoyarsk region, 662972, Russian Federation

<sup>2</sup>Siberian Federal University  
79, Svobodniy prospekt, Krasnoyarsk, Russian Federation, 660041

\*E-mail: i.zimin@iss-reshetnev.ru

*This article formulates the topical problem of formalizing the methodological principles of the search for a compromise between repeatability and modification (novelty) of the properties of new models of space technology – communication satellites. The main methodological principles of continuity of development are the unification of products and their component parts, means of technological equipment and technological processes, which makes it possible to reduce their diversity and nomenclature. The order of the nomenclature of the articles and their component parts is achieved by the development of parametric and type-size series with rationally chosen intervals between the adjacent members of the series according to a complex criterion, a link to the target product performance with the cost of creating the product. The work developed a project model and defined criteria for selecting the size type of a universal space platform. In designing a new spacecraft on the basis of a unified space platform, there is a need to refine it to meet the resource requirements of the new payload (mass and energy consumption). The article sets out the methodological principles for assessing the range of effective applications of the universal space platform for the two most extreme cases of resource requirements (by mass and energy consumption) of the payload: the resources of the platform are excessive or insufficient. Methodological principles have been developed for the formation of a number of unified space platforms. Using the methodological principles for the formation of a series of unified space platforms, the effectiveness ranges of USP were evaluated and the completeness of a number of geostationary communication satellites of the development of “ISS” was assessed.*

*Keywords: Geostationary communications satellite, space platform, payload, performance evaluation method, unified series.*

### **Введение**

Создание изделий космической техники всегда осуществляется с использованием задела по техническим решениям и технологиям, т. е. повторяемость является неотъемлемым свойством нового изделия. В то же время от новизны изделия зависит его эффективность и конкурентоспособность. Поэтому при разработке изделий космической техники необходимо найти компромисс между повторяемостью и изменяемостью (новизной) их свойств, т. е. определить целесообразный уровень преемственности развития [1].

Основными методическими принципами преемственности развития является унификация изделий и их составных частей, средств технологического оснащения и технологических процессов, которая позволяет уменьшить их многообразие и номенклатуру. Упорядочение номенклатуры изделий и их составных частей достигается разработкой параметрических и типоразмерных рядов с рационально выбранными интервалами между соседними членами ряда по комплексному критерию, связывающему показатель целевой эффективности изделия с затратами на его создание. Эти методические принципы активно реализуются при создании космических аппаратов (КА) информационного обеспечения [2; 3].

### **Проектная модель целевой эффективности КА**

При параметрическом анализе возможности размещения новой полезной нагрузки на унифицированной космической платформе (УКП) реализуется принцип максимального удовлетворения потребностей полезной нагрузки в ресурсах (масса, энергопотребление) КА в виде обобщенной массы полезной нагрузки  $M_{\text{ПН.об}}$  [1–7]:

$$M_{\text{ПН.об}} = M_{\text{ПН}} + K_W \cdot W_{\text{ПН}} = M_{\text{ПН}} \cdot \alpha_{\text{ПН}}, \quad \alpha_{\text{ПН}} = 1 + K_W \frac{W_{\text{ПН}}}{M_{\text{ПН}}}, \quad (1)$$

$$K_{\text{ПН}} = \frac{M_{\text{ПН.об}}}{M_{\text{КА}}} = \alpha_M \cdot \alpha_{\text{ПН}}, \quad \alpha_M = \frac{M_{\text{ПН}}}{M_{\text{КА}}},$$

где  $M_{\text{ПН}}$  и  $W_{\text{ПН}}$  – масса и энергопотребление полезной нагрузки;  $\alpha_{\text{ПН}}$  – коэффициент парциальных затрат ресурсов на обеспечение потребностей полезной нагрузки;  $K_W$  – средний коэффициент парциальных затрат массы КА на генерирование электроэнергии и сброса тепла, кг/Вт;

$K_{ПН}$  – удельный обобщенный коэффициент парциальных затрат ресурсов КА на решение целевой задачи;  $M_{КА}$  – масса КА;  $\alpha_m$  – коэффициент затрат массы КА на полезную нагрузку.

В этом случае обобщенная масса полезной нагрузки  $M_{ПН.об}$  может использоваться в качестве показателя целевой эффективности КА [1; 3; 4].

Затраты на проведение опытно-конструкторских работ по разработке КА, согласно проектным методикам [1], в первом приближении считаются пропорциональными затратам на изготовление КА ( $C_{изг}$ ):

$$C_{ОКР} = K_{ОКР} \cdot C_{изг} \cdot \quad (2)$$

Значение коэффициента  $K_{ОКР}$  определяется новизной разрабатываемого КА и его составных частей, объемом наземной экспериментальной отработки КА и его составных частей (полезной нагрузки, космической платформы).

Затраты на изготовление КА, как совокупность затрат на изготовление его составных частей и их интеграцию в составе КА, зависят от его целевой эффективности, надежности, массы, энергопотребления и т. д. Учитывая тот факт, что масса КА  $M_{КА}$  ограничена энергетическими возможностями ракеты-носителя и полностью используется для реализации целевых задач с заданной эффективностью и надежностью, при проектных исследованиях ее используют в качестве эквивалента стоимости изготовления КА [1; 3; 4]:

$$C_{изг} = C_{уд.и} \cdot M_{КА} \cdot \quad (3)$$

Значение удельного показателя  $C_{уд.и}$  определяется на основании обработки статистических данных по КА-аналогам.

В результате получим функциональную зависимость стоимости затрат на проведение опытно-конструкторских работ КА по созданию от его массы:

$$C_{ОКР} = K_{ОКР} \cdot C_{уд.и} \cdot M_{КА} \cdot \quad (4)$$

Полученная система уравнений позволяет сформировать однокритериальную целевую функцию скалярного вида  $\mathcal{E}_{КА}$ , определяемый как отношение показателя целевой эффективности ( $M_{ПН.об}$ ) к показателю финансовых затрат на создание КА ( $C_{ОКР}$ ) [4; 8]

$$\mathcal{E}_{КА} = \frac{M_{ПН.об}}{C_{ОКР}} = \frac{M_{ПН.об}}{K_{ОКР} \cdot C_{уд.и} \cdot M_{КА}} \cdot \quad (5)$$

В случае создания нового КА на основе УКП базового КА (индекс «б» относится к базовому КА, а индекс «н» к новому) введем относительный (безразмерный) критерий (полагая одинаковыми значения  $C_{уд.и}$ ) [4]

$$\delta \mathcal{E}_н = \frac{\mathcal{E}_{КА}^н}{\mathcal{E}_{КА}^б} = \frac{M_{ПН.об}^н M_{КА}^б K_{ОКР}^б}{M_{ПН.об}^б M_{КА}^н K_{ОКР}^н} \cdot \delta \mathcal{E}_н = \frac{K_{об}^н}{K_{нб}^н} \cdot \frac{1}{K_{э}^н} \geq 1, \quad K_{об}^м \geq K_{нб}^н \cdot K_{э}^н; \quad (6)$$

$$K_{э}^н = \frac{K_{ОКР}^н}{K_{ОКР}^б} \cdot$$

С помощью сформированного критерия проведем оценку диапазона эффективного применения модифицированной УКП для нового КА для различных вариантов конструктивной реализации [9; 10].

### Методика оценки диапазона эффективного применения УКП

При проектировании нового КА на основе УКП возникает необходимость ее доработки для удовлетворения потребностей новой ПН в ресурсах (по массе и энергопотреблению).

Для определения бюджета ресурсов нового КА в сравнении с базовым КА воспользуемся следующими уравнениями [3; 4]:

$$M_{КА}^H = M_{УКП}^6 + M_{ПН}^H + K_0 \cdot \delta M_{УКП}; \quad (7)$$

$$\delta M_{УКП} = \alpha_M^6 (M_{ПН}^H - M_{ПН}^6) + K_w^6 (W_{ПН}^H - W_{ПН}^6),$$

где  $M_{УКП}^6$  – масса базовой платформы,  $M_{ПН}^H$  и  $W_{ПН}^6$  – масса и энергопотребление полезной нагрузки нового КА;  $K_0$  – коэффициент глубины модернизации,  $K_0 = 0 \div 1$ .

После соответствующих преобразований получим следующее выражение для определения массы нового КА

$$M_{КА}^H = K_{нб}^H \cdot M_{КА}^6, \quad \delta M_{н} = \frac{M_{ПН}^H}{M_{ПН}^6} - 1, \quad \delta W_{н} = \frac{W_{ПН}^H}{W_{ПН}^6} - 1, \quad (8)$$

$$K_{нб}^H = 1 + \alpha_M^6 (1 + K_0 \cdot \alpha_M^6) \delta M_{н} + K_0 \cdot \alpha_M^6 (\alpha_{ПН}^6 - 1) \delta W_{н}.$$

Аналогичные преобразования проведем для определения относительного показателя обобщенных затрат ресурсов

$$K_{об}^H = \frac{M_{ПН.об}^H}{M_{ПН.об}^6} = \frac{1}{\alpha_{ПН}^6} \left[ 1 + \delta M_{н} + (\alpha_{ПН}^6 - 1)(1 + \delta W_{н}) \right] = 1 + \frac{1}{\alpha_{ПН}^6} \left[ \delta M_{н} + (\alpha_{ПН}^6 - 1) \delta W_{н} \right]. \quad (9)$$

Подставляя полученные зависимости  $K_{нб}^H$  и  $K_{об}^H$  в неравенство (6), получим

$$\delta M_{н} \left[ 1 - K_{э}^H \cdot \alpha_M^6 \cdot \alpha_{ПН}^6 (1 + K_0 \alpha_M^6) \right] \geq \alpha_{ПН}^6 (K_{э}^H - 1) - \delta W_{н} (\alpha_{ПН}^6 - 1) (1 - K_0 \cdot K_{э}^H \cdot \alpha_M^6 \cdot \alpha_{ПН}^6). \quad (10)$$

С использованием предложенной проектной модели КА и выбранной однокритериальной целевой функции  $\delta \mathcal{E}_{н}$  проведем оценку диапазонов эффективного применения базовой УКП для двух вариантов реализации полезной нагрузки.

**Вариант 1:** потребности ПН в ресурсах удовлетворяются УКП с избытком  $\left( \frac{M_{ПН}^M}{M_{ПН}^6} \leq 1, \frac{W_{ПН}^M}{W_{ПН}^6} \leq 1 \right)$ , т. е. доработки УКП минимальны (создание интерфейсов с ПН), поэтому полагаем

$$K_0 = 0, \quad \delta M_{ИР} = 1 - \frac{M_{ПН}^{ИР}}{M_{ПН}^6} = -\delta M_{н}, \quad \delta W_{ИР} = 1 - \frac{W_{ПН}^{ИР}}{W_{ПН}^6} = -\delta W_{н}.$$

Применение УКП базового КА с избыточным ресурсом (УКП-ИР) для ПН создает предпосылки для ускоренного создания КА с новой ПН, снижает финансовые затраты на его разработку ( $K_{э}^{ИР} < 1$ ), однако одновременно снижает целевую эффективность КА ( $\mathcal{E}_{КА}$ ).

С учетом вышеизложенного, уравнения (8)–(10) примут следующий вид:

$$K_{нб}^{ИР} = 1 - \alpha_M^6 \cdot \delta M_{ИР} \quad 0 \leq \delta M_{ИР} \leq 1 \quad 0 \leq \delta W_{ИР} \leq 1; \quad (11)$$

$$\alpha_{ПН}^6 \cdot K_{об}^{ИР} = \alpha_{ПН}^6 - \delta M_{ИР} - (\alpha_{ПН}^6 - 1) \delta W_{ИР}; \quad (12)$$

$$(1 - K_{э}^{ИР}) \alpha_{ПН}^6 - (\alpha_{ПН}^6 - 1) \delta W_{ИР} \geq \delta M_{ИР} (1 - K_{э}^{ИР} \cdot \alpha_M^6 \cdot \alpha_{ПН}^6). \quad (13)$$

Оценим диапазон изменения параметров  $\delta M_{ИР}$  и  $\delta W_{ИР}$ , исследуя неравенство (13) по критерию  $K_{э}^{ИР}$ :

$$1) \delta W_{ИР} = 0, \quad \delta M_{ИР} \leq \frac{\alpha_{ПН}^6 (1 - K_{э}^{ИР})}{1 - K_{э}^{ИР} \cdot \alpha_M^6 \cdot \alpha_{ПН}^6} = \delta M_{ИР}^0. \quad (14)$$

$$\text{Полагая } \delta M_{ИР}^0 \leq 1, \text{ получим } K_{э}^{ИР} \geq \frac{\alpha_{ПН}^6 - 1}{\alpha_{ПН}^6 (1 - \alpha_M^6)} = K_{э.1}^{ИР}.$$

$$2) \delta M_{\text{ИР}} = 0, \quad \delta W_{\text{ИР}} \leq \frac{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} (1 - K_{\text{Э}}^{\text{ИР}})}{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} - 1} = \delta W_{\text{ИР}}^0. \quad (15)$$

Полагая  $\delta W_{\text{ИР}}^0 \leq 1$ , получим  $K_{\text{Э}}^{\text{ИР}} \geq \frac{1}{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta}} = K_{\text{Э.2}}^{\text{ИР}}$ .

Решая совместно уравнения (13)–(15), получим обобщенное выражение для диапазона изменения параметров

$$1 - \frac{\delta W_{\text{ИР}}}{\delta W_{\text{ИР}}^0} \geq \frac{\delta M_{\text{ИР}}}{\delta M_{\text{ИР.1}}^0}, \quad 0 \leq \delta W_{\text{ИР}} \leq 1, \quad 0 \leq \delta M_{\text{ИР}} \leq 1.$$

$$K_{\text{Э}}^{\text{ИР}} \leq \frac{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} - \delta M_{\text{ИР}} - (\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} - 1)\delta W_{\text{ИР}}}{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} (1 - \alpha_M^{\delta} \cdot \delta M_{\text{ИР}})}, \quad K_{\text{Э.2}}^{\text{ИР}} \leq K_{\text{Э.1}}^{\text{ИР}} \leq K_{\text{Э}}^{\text{ИР}} \leq 1. \quad (16)$$

Если перевести неравенство (13) в равенство (одностороннее ограничение) и подставить полученную зависимость  $\delta W_{\text{ИР}}$  от  $\delta M_{\text{ИР}}$  в уравнение (12), то получим формулы для оценки зависимости интегральных показателей только от  $\delta M_{\text{ИР}} \leq \delta M_{\text{ИР}}^0$ :

$$K_{\text{НБ}}^{\text{ИР}} = 1 - \alpha_M^{\delta} \cdot \delta M_{\text{ИР}}, \quad K_{\text{об}}^{\text{ИР}} = (1 - \alpha_M^{\delta} \cdot \delta M_{\text{ИР}}) K_{\text{Э}}^{\text{ИР}} = K_{\text{НБ}}^{\text{ИР}} \cdot K_{\text{Э}}^{\text{ИР}},$$

$$1 - \alpha_M^{\delta} \leq K_{\text{НБ}}^{\text{ИР}} < 1, 0, \quad 1 - \alpha_M^{\delta} \leq \frac{K_{\text{об}}^{\text{ИР}}}{K_{\text{Э}}^{\text{ИР}}} < 1, 0. \quad (17)$$

**Вариант 2:** для удовлетворения повышенных потребностей ПН в ресурсах требуется доработка УКП (УКП-М), поэтому полагаем  $K_0 = 1$ .

Применение УКП-М для ПН с увеличенным ресурсом создает предпосылки для увеличения целевой эффективности КА ( $\text{Э}_{\text{КА}}$ ) с новой ПН, однако одновременно увеличивает финансовые затраты на его разработку ( $K_{\text{Э}}^{\text{ИР}} > 1$ ).

В этом случае уравнения (8)–(10) примут следующий вид:

$$\delta M_M = \frac{M_{\text{ПН}}^{\text{М}}}{M_{\text{ПН}}^{\delta}} - 1, \quad \delta W_M = \frac{W_{\text{ПН}}^{\text{М}}}{W_{\text{ПН}}^{\delta}} - 1;$$

$$K_{\text{НБ}}^{\text{М}} = 1 + \alpha_M^{\delta} (1 + \alpha_M^{\delta}) \delta M_M + \alpha_M^{\delta} (\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} - 1) \delta W_M \geq 1; \quad (18)$$

$$K_{\text{об}}^{\text{М}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta}} [\delta M_M + (\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} - 1) \delta W_M] \geq 1; \quad (19)$$

$$\delta M_M [1 - K_{\text{Э}}^{\text{М}} \cdot \alpha_M^{\delta} \cdot \alpha_{\text{ПН}}^{\delta} \cdot (1 + \alpha_M^{\delta})] \geq \alpha_{\text{ПН}}^{\delta} (K_{\text{Э}}^{\text{М}} - 1) - \delta W_M (\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} - 1) (1 - K_{\text{Э}}^{\text{М}} \cdot \alpha_M^{\delta} \cdot \alpha_{\text{ПН}}^{\delta}). \quad (20)$$

Анализ полученного неравенства (20) позволяет сформулировать следующую систему ограничений:

$$1) \delta W_M = 0, \quad \delta M_M \geq \frac{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} (K_{\text{Э}}^{\text{М}} - 1)}{1 - K_{\text{Э}}^{\text{М}} \cdot \alpha_M^{\delta} \cdot \alpha_{\text{ПН}}^{\delta} (1 + \alpha_M^{\delta})} = \delta M_M^0. \quad (21)$$

Полагая  $\delta M_M^0 \leq 1$ , получим  $K_{\text{Э}}^{\text{М}} \leq \frac{1 + \frac{1}{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta}}}{1 + \alpha_M^{\delta} (1 + \alpha_M^{\delta})} = K_{\text{Э.1}}^{\text{М}}$ ;

$$2) \delta M_M = 0, \quad \delta W_M = \frac{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} (K_{\text{Э}}^{\text{М}} - 1)}{(\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} - 1) (1 - K_{\text{Э}}^{\text{М}} \cdot \alpha_M^{\delta} \cdot \alpha_{\text{ПН}}^{\delta})} = \delta W_M^0. \quad (22)$$

Полагая  $\delta W_M^0 \leq 1$ , получим  $K_{\mathcal{E}}^M \leq \frac{2 - \frac{1}{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta}}}{1 + \alpha_M^{\delta}(\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} - 1)} = K_{\mathcal{E},2}^M$ ;

3) полагая в формуле (21) положительное значение знаменателя

$1 - K_{\mathcal{E}}^M \cdot \alpha_M^{\delta} \cdot \alpha_{\text{ПН}}^{\delta} \cdot (1 + \alpha_M^{\delta}) > 0$ , получим ограничение  $K_{\mathcal{E}}^M < \frac{1}{\alpha_M^{\delta} \cdot \alpha_{\text{ПН}}^{\delta} (1 + \alpha_M^{\delta})} = K_{\mathcal{E},3}^M$ .

Решая совместно уравнения (20)–(22), получим обобщенное выражение для диапазона изменения параметров

$$\frac{\delta M_M}{\delta M_M^0} \geq 1 - \frac{\delta W_M}{\delta W_M^0}, \quad 0 \leq \delta M_M \leq 1, \quad 0 \leq \delta W_M \leq 1, \quad 1 \leq K_{\mathcal{E}}^M < K_{\mathcal{E},1}^M < K_{\mathcal{E},2}^M < K_{\mathcal{E},3}^M. \quad (23)$$

Подставляя полученные ограничения в формулы (18), (19) определим двухстороннее ограничение на диапазон изменения интегральных показателей с учетом их взаимосвязи, согласно формуле (6),

$$1 + \alpha_M^{\delta} (\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} - 1) \delta W_M^0 \leq K_{\text{НБ}}^M \leq 1 + \alpha_M^{\delta} (1 + \alpha_M^{\delta}) \delta M_M^0;$$

$$1 + \frac{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} - 1}{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta}} \delta W_M^0 \leq K_{\text{об}}^M \leq 1 + \frac{\delta M_M^0}{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta}}. \quad (24)$$

Если перевести неравенство (20) в равенство (одностороннее ограничение) и подставить полученную зависимость  $\delta W_M$  от  $\delta M_M$  в уравнения (18) и (19), то получим формулы для оценки зависимости интегральных показателей только от  $\delta M_M$

$$K_{\text{НБ}}^M = 1 + \alpha_M^{\delta} \frac{\alpha_{\text{ПН}}^{\delta} (K_{\mathcal{E}}^M - 1) + \delta M_M \cdot \alpha_M^{\delta}}{(1 - K_{\mathcal{E}}^M \cdot \alpha_M^{\delta} \cdot \alpha_{\text{ПН}}^{\delta})} \geq 1; \quad (25)$$

$$K_{\text{об}}^M = 1 + \frac{(K_{\mathcal{E}}^M - 1) + \delta M_M \cdot K_{\mathcal{E}}^M \cdot \alpha_M^{\delta} \cdot \alpha_M^{\delta}}{(1 - K_{\mathcal{E}}^M \cdot \alpha_M^{\delta} \cdot \alpha_{\text{ПН}}^{\delta})} \geq 1. \quad (26)$$

Полученные формулы для оценки диапазона эффективного применения модифицированной УКП для нового КА используем для разработки методических принципов формирования параметрического ряда базовых КА и базовых УКП.

### Методические принципы формирования параметрического ряда базовых КА и УКП

Упорядочение номенклатуры изделий и их составных частей достигается разработкой параметрических и типоразмерных рядов с рационально выбранными интервалами между соседними членами ряда по комплексному критерию, связывающему показатель целевой эффективности изделия с затратами на его создание [1; 11; 12].

Параметрический ряд – это совокупность числовых значений главного параметра изделия. В типоразмерном ряду главным параметром является геометрическая размерность. На базе этих рядов создается ряд конструктивно-подобных (однотипных) исполнений изделий.

Процесс определения оптимального состава и структуры параметрического ряда включает последовательное решение трех задач:

- определение границ параметрического ряда, выделяющих диапазоны возможных изменений параметров изделий;
- установление закономерности построения рядов главного и соподчиненных параметров изделия с учетом выявленных границ;
- определение оптимального построения параметрического ряда по критерию «эффективность – затраты».

Разработка параметрического ряда, как правило, базируется на данных комплексного инженерного прогнозирования развития изделий, методов и средств производства и учитывает выявленные при этом основные тенденции их развития.

Оценка возможностей реализации параметрического ряда осуществляется с учетом достаточности технических и технологических решений, что позволяет сформировать стратегию реализации этого ряда.

Границы параметрического ряда не являются стабильными и могут изменяться в обе стороны при желательном сохранении закономерностей построения ряда.

Установление закономерностей построения параметрического ряда осуществляется на основе выбора номенклатуры главных параметров, которые слабо зависят от конструктивных особенностей и технологии изготовления изделия.

Применение этих методических принципов для формирования параметрического ряда КА информационного обеспечения (КАИО) рассмотрим с использованием методики оценки диапазона эффективного применения УКП. На базе УКП создается ряд конструктивно-подобных (однотипных) исполнений КА, поэтому типоразмерный ряд УКП позволяет на их основе создавать непрерывный ряд типоразмеров КА различного функционального значения, включая базовые КА, для которых разрабатывались эти УКП. В качестве главного параметра параметрического ряда КАИО предлагается принять массу базового КА и обобщенную массу полезной нагрузки.

Геометрическая модель параметрического ряда приведена на рис. 1, на котором показаны два базовых КА, масса которых удовлетворяет условию

$$M_{\text{МИР}} = M_{\text{КА}}^{\text{БИР}} - M_{\text{КА}}^{\text{БМ}} > 0. \tag{27}$$

Базовый КА с массой  $M_{\text{КА}}^{\text{БИР}}$  и обобщенной массой полезной нагрузки  $M_{\text{пн.об}}^{\text{БИР}}$  используется для создания на основе его УКП с избыточным ресурсом нового КА с характеристиками

$$M_{\text{КА}}^{\text{ИР}} = M_{\text{КА}}^{\text{БИР}} \cdot K_{\text{НБ}}^{\text{ИР}}, \quad M_{\text{пн.об}}^{\text{ИР}} = M_{\text{пн.об}}^{\text{БИР}} \cdot K_{\text{об}}^{\text{ИР}}. \tag{28}$$

Базовый КА с массой  $M_{\text{КА}}^{\text{БМ}}$  и обобщенной массой полезной нагрузки  $M_{\text{пн.об}}^{\text{БМ}}$  используется для создания на основе его УКП с недостаточным ресурсом нового КА с характеристиками

$$M_{\text{КА}}^{\text{М}} = M_{\text{КА}}^{\text{БМ}} \cdot K_{\text{НБ}}^{\text{М}}, \quad M_{\text{пн.об}}^{\text{М}} = M_{\text{пн.об}}^{\text{БМ}} \cdot K_{\text{об}}^{\text{М}}. \tag{29}$$

Величина запаса по массе между базовыми КА определяется из следующего уравнения:

$$M_u = M_{\text{КА}}^{\text{М}} - M_{\text{КА}}^{\text{ИР}} = M_{\text{КА}}^{\text{БМ}} \cdot K_{\text{НБ}}^{\text{М}} - M_{\text{КА}}^{\text{БИР}} \cdot K_{\text{НБ}}^{\text{ИР}}, \quad \delta M_u = \frac{M_{\text{КА}}^{\text{М}} - M_{\text{КА}}^{\text{ИР}}}{M_{\text{КА}}^{\text{БМ}} - M_{\text{КА}}^{\text{БИР}}} \cdot 100 \%. \tag{30}$$

Условие  $M_u > 0$  и  $\delta M_u > 0$  обеспечивает непрерывность ряда.

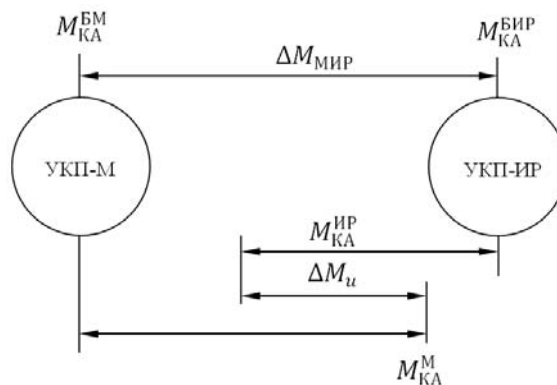


Рис. 1. Фрагмент параметрического ряда КА ИО с УКП:  
 М – числовое значение главного параметра

Fig.1. Fragment of parameters series spacecraft

Величина запаса по обобщенной массе между базовыми КА определяется из следующего уравнения:

$$M_{об} = M_{пн.об}^M - M_{пн.об}^{ИР} = M_{пн.об}^{БМ} \cdot K_{об}^M - M_{пн.об}^{БИР} \cdot K_{пн.об}^{ИР},$$

$$\delta M_{об} = \frac{M_{пн.об}^M - M_{пн.об}^{ИР}}{M_{пн.об}^{БМ} - M_{пн.об}^{БИР}} \cdot 100 \% . \quad (31)$$

Условие  $M_{об} > 0$  и  $\delta M_{об} > 0$  обеспечивает непрерывность ряда.

Таким образом, использование в качестве главных параметров параметрического ряда КА информационного обеспечения (масса базового КА и обобщенная масса полезной нагрузки базового КА) позволяет сформировать двухпараметрический критерий непрерывности ряда по величине запаса по главным параметрам между соседними базовыми КА из ряда.

Эффективность разработанных методических принципов формирования ряда унифицированных космических платформ оценим для спутников связи, разработанных на основе базовых УКП «Экспресс – 1000» и УКП «Экспресс – 2000» [13–15].

Оценочные характеристики диапазона эффективности применения различных базовых УКП геостационарных спутников связи приведены в табл. 1.

При выборе значений относительного показателя затрат ( $K_{Э}^H$ ) использовалась рекомендация из [1]:  $K_{Э}^M = 1,1$ , а  $K_{Э}^{ИР} = 0,8$ . Однако из-за наличия ограничений эти значения в ряде случаев уточнялись.

Таблица 1

Диапазон эффективности применения УКП геостационарных спутников связи

№ п/п		Луч-5А	Э-АТ2	Э-АТ1	Амос-5		
1	Тип УКП, номер ряда	Э-1000А (1)	Э-1000К (2)	Э1000НТВ (3)	Э-1000Н (4)	Э-2000В (5)	Э-2000А (6)
2	$M_{КА}$	1200	1350	1672	2100	2700	3550
3	$M_{ПН}$	550	250	329	670	1193	1300
4	$W_{ПН}$	1200	3000	5792	5880	10000	12100
5	$M_{ПН об}$	670	490	712	1175	1775	2004
6	$\alpha_M$	0,458	0,185	0,197	0,319	0,442	0,366
7	$\alpha_{ПН}$	1,22	1,96	2,16	1,76	1,490	1,541
8	$K_{Э}^M$	1,05	1,1	1,1	1,05	1,015	1,05
9	$\delta M_M^0$	0,422	0,37	0,49	0,396	0,619	0,403
10	$K_{об}^M$	1,28	1,08	1,116	1,166	1,395	1,202
11	$M_{КА}^M$	1536	1460	1866	2450	3766	4266
12	$K_{об}^M$	1,346	1,19	1,227	1,225	1,415	1,262
13	$M_{пн об}^M$	902	582	874	1439	2512	2528
14	$K_{Э}^{ИР}$	0,80	0,80	0,80	0,85	0,85	0,80
15	$\delta M_{ИР}^0$	0,44	0,55	0,653	0,504	0,510	0,562
16	$K_{об}^{ИР}$	0,80	0,90	0,87	0,839	0,766	0,795
17	$M_{КА}^{ИР}$	957	1215	1459	1762	2094	2820
18	$K_{об}^{ИР}$	0,64	0,72	0,70	0,714	0,656	0,635
19	$M_{пн об}^{ИР}$	428	352	497	838	1167	1273



Полученный массив информации из табл. 1 использован для построения графиков оценки диапазонов эффективности УКП и оценки полноты ряда геостационарных спутников связи с УКП (рис. 2, табл. 2).

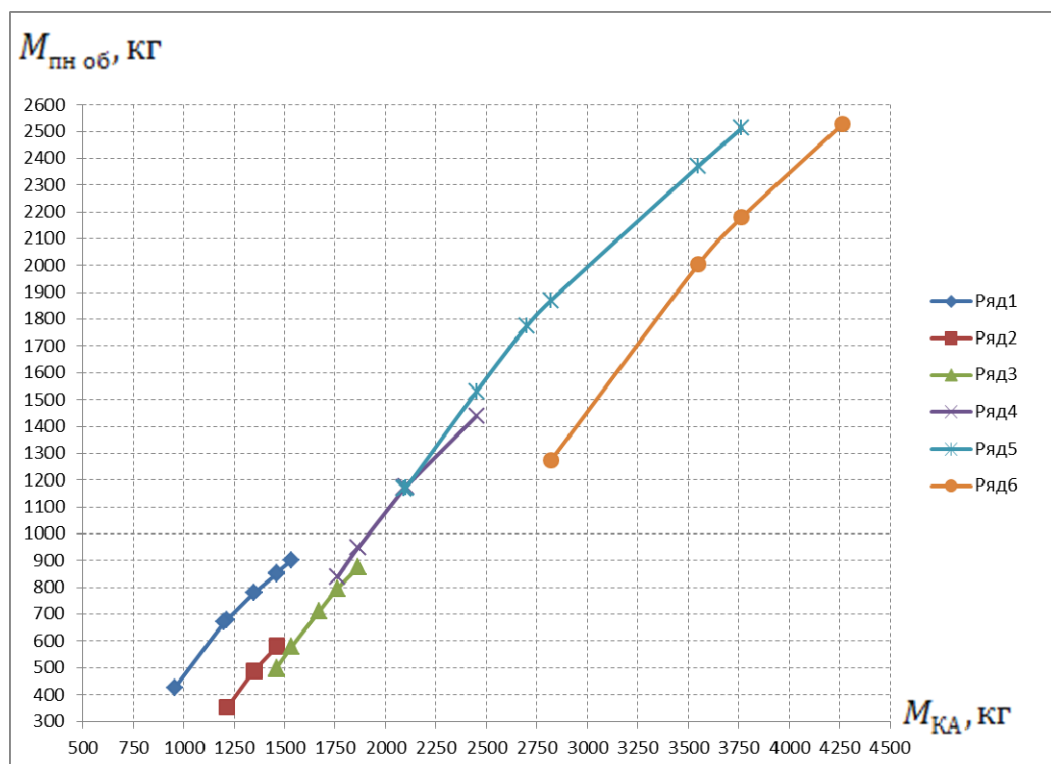


Рис. 2. Графики зависимости обобщенной массы ПН от массы КА для различных типоразмеров УКП и КА

Fig. 2. Curve dependence payload mass of spacecraft mass

Таблица 2

Характеристики ряда геостационарных спутников связи с УКП

№ П/П		Луч-5А	Э-АТ2	Э-АТ1	Амос-5		
1	Тип, дата	Э-1000А (2011)	Э-1000К (2014)	Э1000НТВ (2014)	Э-1000Н (2011)	Э-2000В	Э-2000А
2	$M_{КА}$	1200	1350	1672	2100	2700	3550
3	$M_{ПН}$	550	250	329	670	1193	1300
4	$W_{ПН}$	1200	3000	5792	5880	10000	12100
5	$M_{ПН \text{ об}}$	670	490	712	1175	1775	2004
6	$K_{Э}^M$	1,05	1,1	1,1	1,05	1,015	1,05
7	$M_{КА}^M$	1536	1460	1866	2450	3766	4266
8	$M_{ПН \text{ об}}^M$	902	582	874	1439	2512	2528
9	$K_{Э}^{MP}$	0,80	0,80	0,80	0,85	0,85	0,80
10	$M_{КА}^{MP}$	957	1215	1459	1762	2094	2820
11	$M_{ПН \text{ об}}^{MP}$	428	352	497	838	1167	1273
12	$M_{МИР}$		150	472	428	600	850
13	$\delta M_u$		214	16	24	59	111

Анализ представленной в табл. 2 информации позволяет выявить следующее:

- подтверждается полнота ряда геостационарных спутников связи разработки АО «ИСС»;
- диапазон эффективного применения УКП «Э-1000К перекрывается УКП-М «Э-1000А» и УКП-ИР «Э-1000НТВ».

### **Заключение**

1. Сформулирована актуальная проблема формализации методических принципов поиска компромисса между повторяемостью и изменяемостью (новизной) свойств новых образцов космической техники – спутников связи.

2. Разработана проектная модель и определены критерии выбора типоразмера универсальной космической платформы.

3. Разработаны методические принципы оценки эффективности применения универсальной космической платформы, позволяющие оценить потребности в ресурсах (по массе и энергопотреблению) для полезной нагрузки в широком диапазоне значений.

4. Разработаны методические принципы формирования параметрического ряда базовых КА и УКП с использованием двухпараметрического критерия оценки полноты (непрерывности) ряда по величине запаса по главным параметрам (масса КА и обобщенная масса полезной нагрузки) между соседними базовыми КА из ряда.

5. Разработанные методические принципы формирования ряда унифицированных космических платформ позволили подтвердить полноту ряда геостационарных спутников связи разработки АО «ИСС».

### **Библиографические ссылки**

1. Чеботарев В. Е., Косенко В. Е. Основы проектирования космических аппаратов информационного обеспечения. Красноярск, 2011. 488 с.

2. Анализ преемственности развития КА информационного обеспечения / В. Е. Косенко, В. В. Попов, В. Д. Звонарь, В. Е. Чеботарев // Актуальные вопросы проектирования АКА для фундаментальных и прикладных научных исследований. 2017. Вып. 2. С. 132–140.

3. Чеботарев В. Е., Зимин И. И. Методика оценки диапазона эффективного применения унифицированных космических платформ // Сибирский журнал науки и технологий. 2018. Т. 19, № 3. С. 532–539.

4. Чеботарев В. Е., Зимин И. И., Внуков А. А. Исследование диапазона эффективного применения унифицированных космических платформ для геостационарных спутников связи // Космические аппараты и технологии. 2021. Т. 5, № 1(35). С. 51–56.

5. Технология производства космических аппаратов / Н. А. Тестоедов, М. М. Михнев, А. Е. Михеев и др.; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2009. 352 с.

6. Anil K. Maini Varsha Agrawal. Satellite Technology: Principles and Applications. 2nd Edition / Anil K. Maini Varsha Agrawal. – A John Wiley and Sons, Ltd., Publication, 2011. 674 p.

7. Разработка систем космических аппаратов / под ред. П. Фортескью, Г. Суайнерда, Д. Старка; пер. с англ. М.: Альпина Паблицер, 2015. 766 с.

8. Малышев В. В. Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления. М.: МАИ-ПРИНТ, 2010, 440 с.

9. Гуцин В. Н. Основы устройства космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2003. 272 с.

10. Туманов А. В., Зеленцов В. В., Щеглов Г. А. Основы компоновки бортового оборудования космических аппаратов. М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана, 2010. 136 с.

11. Амиров Ю. Д. Основы конструирования. Творчество – стандартизация – экономика: справочник. М.: Издательство стандартов, 1991. 392 с.

12. Амиров Ю. Д. Стандартизация и проектирование технических систем. М.: Издательство стандартов. 1985. 312 с.

13. Пат. 2753003 Российская Федерация, МКПО 12-07. Модуль служебных систем космического аппарата / Похабов А. Ю., Марцинкевич Т. Н., Савцкий В. В. № 2020131543; заявл. 25.09.2020 ; опубл. 11.08.2021.

14. Пат. 034254 Евразийский патент, Космическая платформа / Жуль Н. С., Шаклеин П. А., Яковлев А. В. № 201700198; заявл. 31.03.2017 ; опубл. 22.01.2020.

15. Пат. 2648520 Российская Федерация, МКПО 12-07. Космическая платформа / Жуль Н. С., Шаклеин П. А., Яковлев А. В. и др., № 2016119672 ; заявл. 20.05.2016 ; опубл. 26.03.2018.

## References

1. Chebotarev V. E., Kosenko V. E. *Osnovy proektirovaniya kosmicheskikh apparatov informatsionnogo obespecheniya* [Fundamentals of designing information support spacecrafts]. Krasnoyarsk, 2011, 488 p.

2. Kosenko V. E., Popov V. V., Zvonar V. D., Chebotarev V. E. [Analysis of development heritage concerning information support spacecraft]. *Analiz preemstvennosti razvitiya KA informatsionnogo obespecheniya*. 2017, Is. 2, P. 132–140 (In Russ.).

3. Chebotarev V. E., Zimin I. I. [Assessment methodology of the effective use range of the unified space platforms]. *Sibirskiy zhurnal nauki I tekhnologii*. 2018, Vol. 19, No. 3, P. 532–539 (In Russ.).

4. Chebotarev V. E., Zimin I. I., Vnukov A. A. [Study of the range of effective use of unified space platforms for geostationary communication satellites]. *Kosmicheskie apparaty I Tekhnologii*. 2021, Vol. 5, No. 1 (35), P. 51–56 (In Russ.).

5. Testoedov N. A., Mikhnev M. M., Mikheev A. E. *Tekhnologiya proizvodstva kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft manufacturing technology]. 2009, Krasnoyarsk, Sib. gos. aerokosmich. un-t Publ., 352 p.

6. Anil K. Maini Varsha Agrawal. *Satellite Technology: Principles and Applications*. 2nd Edition / Anil K. Maini Varsha Agrawal. – A fohn Wiley and Sons, Ltd., Publication, 2011. 674p.

7. Foteskyu P., Suainerd G., Stark D. *Razrabotka system kosmicheskikh apparatov* [Development of spacecraft systems]. Moscow, Alpina Publ., 2015, 766 p.

8. Malyshev V. V. *Metody optimizatsii v zadachah sistemnogo analiza I upravleniya* [Methods of optimization in system analysis and control problems] 2010, Moscow, MAI Publ., 440 p.

9. Guschin V. N. *Osnovy ustroystva kosmicheskikh apparatov* [Foundation of satellites structure]. 2003, Moscow, Mashinostroenie Publ., 272 p.

10. Tumanov A. V., Zelentsov V. V., Scheglov G. A. *Osnovy komponovki bortovogo oborudovaniya kosmicheskikh apparatov* [Foundation of layout of spacecraft onboard equipment]. 2010, Moscow, Mosk. gos. tekhn. un-t Publ., 2010, 136 p.

11. Amirov Yu. D. *Osnovy konstruirovaniya. tvorchestvo-standartizatsiya-ekonomika* [Design basics. creativity-standardization-economics]. 1991, Izdatel'stvo standartov Publ., 392 p.

12. Amirov Yu. D. *Standartizatsia I proektirovanie Tekhnicheskikh Sistem* [Standardization and design of Technical Systems]. 1985, Izdatel'stvo standartov Publ., 312 p.

13. Pokhabov A. Y., Martsinkevich T. N, Savickiy V. V. *Modul sluzhebnykh system kosmicheskogo apparata* [Space platform]. Patent RF, No. 2753003, 2021.

14. Zhul N. S., Shaklein P. A., Yakovlev A. V. *Platforma kosmicheskaya* [Space platform]. Patent ЕАРО, No. 034254, 2020.

15. Zhul N. S., Shaklein P. A., Yakovlev A. V. *Platforma kosmicheskaya* [Space platform]. Patent RF, No. 2648520, 2018.

**Чеботарев Виктор Евдокимович** – доктор технических наук, доцент, ведущий инженер; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева». E-mail: cheb1940@yandex.ru.

**Зимин Иван Иванович** – начальник сектора системных анализов и проектирования МКА; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева». E-mail: i.zimin@iss-reshetnev.ru.

**Внуков Алексей Анатольевич** – начальник группы отдела баллистического и навигационного обеспечения КА; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева». E-mail: vnukov@iss-reshetnev.ru.

**Шангина Екатерина Андреевна** – кандидат технических наук, инженер-конструктор 2 категории отдела общего проектирования КА и систем; АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева». E-mail: shangina@iss-reshetnev.ru.

**Chebotarev Viktor Evdokimovich** – Dr. Sc., docent, lead engineer; JSC “Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”. E-mail: cheb1940@yandex.ru.

**Zimin Ivan Ivanovich** – head of sector; JSC “Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”. E-mail: i.zimin@iss-reshetnev.ru.

**Vnukov Aleksey Anatolievich** – head of group; JSC “Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”. E-mail: vnukov@iss-reshetnev.ru.

**Shangina Ekaterina Andreevna** – Cand. Sc., engineer; JSC “Academician M. F. Reshetnev “Information Satellite Systems”. E-mail: shangina@iss-reshetnev.ru.

---

УДК 662.76.032

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-520-530

**Для цитирования:** Моделирование и верификация параметров рабочего процесса в газогенераторах наддува топливных баков жидкостных ракетных двигательных установок / М. Л. Шелудько, В. П. Назаров, К. О. Зенюк, Л. П. Назарова // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 520–530. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-520-530.

**For citation:** Sheludko M. L., Nazarov V. P., Zenyuk K. O., Nazarova L. P. [Modeling and verification of working process parameters in gas generators for pressurizing fuel tanks of liquid propellant rocket propulsion systems]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 520–530. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-520-530.

## **Моделирование и верификация параметров рабочего процесса в газогенераторах наддува топливных баков жидкостных ракетных двигательных установок**

М. Л. Шелудько\*, В. П. Назаров, К. О. Зенюк, Л. П. Назарова

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

\*E-mail sheludkomax@yandex.ru

*Основными требованиями, предъявляемыми к газогенераторам жидкостных ракетных двигательных установок (ЖРДУ), являются высокая стабильность работы, простота управления рабочим процессом, а также высокая работоспособность генераторного газа. Особо сложная задача – обеспечение устойчивости рабочего процесса. Кроме вероятности возникновения поперечных колебаний во внутрикамерном объеме, из-за наличия присоединенных к реакционной камере дополнительных объемов различной конфигурации и протяженности могут возникать акустические колебания сложных продольных мод. Большая часть существующих методик испытаний газогенератора носит критериально-эмпирический характер и основана на обработке экспериментальных результатов, что не всегда обеспечивает требуемую точность расчета динамических и тепловых характеристик. Необходимость экспериментально-теоретического уточнения расчетных методик термодинамических процессов газогенераторов является актуальной задачей, которая позволит существенно снизить материальные и временные затраты на эскизное проектирование, испытания и доводку современных образцов двигателей и энергосиловых установок летательных аппаратов. Поэтому расчет и анализ газогенератора жидкостного ракетного двигателя (ЖРД) является важным этапом при проектировании и разработке современных образцов двигателей. При помощи метода конечных элементов программного пакета SOLID WORKS, построена модель двухзонного газогенератора наддува топливных баков ЖРДУ. Проведено исследование по моделированию рабочего процесса в газогенераторе, построена визуализация термодинамических процессов в изделии, получены числовые характеристики. Рассмотрена методика автономных стендовых (огневых) испытаний газогенераторов наддува топливных баков, методика верификации численных методов.*

*Ключевые слова:* двухзонный газогенератор, метод конечных элементов, огневые испытания, верификация расчетов.

## Modeling and verification of working process parameters in gas generators for pressurizing fuel tanks of liquid propellant rocket propulsion systems

M. L. Sheludko<sup>\*</sup>, V. P. Nazarov, K. O. Zenyuk, L. P. Nazarova

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

<sup>\*</sup>E-mail sheludkomax@yandex.ru

*The main requirements for LRE gas generators are high stability of operation ease of workflow management, as well as high efficiency of the generator gas. A particularly difficult task is to ensure the sustainability of the workflow. In addition to the probability of transverse vibrations in the in-chamber volume, due to the presence of additional volumes of various configurations and lengths attached to the reaction chamber, acoustic vibrations of complex longitudinal modes may occur. Most of the existing methods of testing a gas generator are criterion-empirical in nature and are based on the processing of experimental results, which does not always provide the required accuracy of calculating dynamic and thermal characteristics. The need for experimental and theoretical refinement of the calculation methods of thermodynamic processes of gas generators is an urgent task that will significantly reduce the material and time costs for preliminary design, testing and fine-tuning of modern models of engines and power plants of aircraft. Therefore, the calculation and analysis of the LRE gas generator is an important stage in the design and development of modern engine designs. Using the finite element method of the SOLID WORKS software package, a model of a two-zone gas generator for supercharging fuel tanks of the LRE was built. A study was conducted on modeling the workflow in a gas generator, visualization of thermodynamic processes in the product was built, numerical characteristics were obtained. The method of autonomous bench (firing) tests of gas generators of fuel tank boost, the method of verification of numerical methods is considered.*

*Keywords: Two-zone gas generator, finite element method, fire tests, verification of calculations.*

### Введение

Стабильная и бесперебойная подача жидких компонентов топлива в топливные магистрали жидкостных ракетных двигательных установок (ЖРДУ) обеспечивается специальной системой наддува топливных баков летательных аппаратов (в частности, баллистических ракет и космических ракет-носителей). Величина давления наддува баков обычно определяется из условия бескавитационной работы насосов турбонасосных агрегатов (ТНА), прочности и устойчивости оболочек баков. Давление компонентов топлива на входе в насосы двигателя  $P_{вх}$  складывается из давления столба жидкости  $P_{ст}$  и абсолютного давления в баке над свободной поверхностью жидкости  $P_б$ . Учитывая потери давления  $\Delta P_{вх}$  в трубопроводах и арматуре, расположенной на магистралях от баков до насосов, получим следующее выражение:

$$P_{вх} = P_б + P_{ст} - \Delta P_{вх}. \quad (1)$$

Во время полета ракеты  $P_{ст}$  будет изменяться в соответствии с законом движения ракеты по заданной траектории, при этом величина  $P_{вх}$  должна поддерживаться постоянной.

Для вытеснения жидких компонентов из баков в газовые подушки баков подается горячий газ-вытеснитель, который во многих жидкостных ракетных двигателях (ЖРД) создается в специальных двухкомпонентных жидкостных газогенераторах (ЖГГ), которые называются газогенераторами наддува. Наиболее рациональным считается применение в газогенераторах наддува компонентов топлива, одинаковых с топливом в основной (тяговой) камере ЖРД.

Однако эти топлива при сгорании с соотношением расходов, близких к стехиометрическому, развивают высокую температуру, недопустимую для подачи в топливные баки. Поэтому

в газогенераторах наддува рабочий процесс должен быть организован таким образом, чтобы один из компонентов своим избытком балластировал топливную смесь и тем самым понижал температуру горения.

Допустимая для наддува баков температура газа достигается избытком окислителя ( $\alpha > 1$ ) или избытком горючего ( $\alpha < 1$ ). Поэтому газ, полученный при  $\alpha > 1$  (окислительный газ), подается для наддува бака окислителя, газ, полученный при  $\alpha < 1$  (восстановительный газ), подается в бак горючего [1].

Результаты термодинамического расчета при малых и больших значениях соотношения компонентов  $\alpha$  часто не согласуются с экспериментальными данными. Объясняется это тем, что химическое равновесие при относительно низких температурах не успевает устанавливаться и имеет место большая неоднородность состава и температуры продуктов сгорания в объеме камеры газогенератора.

Для двухкомпонентных газогенераторов наддува топливных баков целесообразно применять самовоспламеняющиеся топлива. Однако и в этом случае организация надежного воспламенения и устойчивого горения при больших избытках одного из компонентов топлива представляет большие трудности. Поэтому, помимо схемы прямого смешения компонентов топлива с нужным  $\alpha$  в зоне головки, имеются и другие, ставящие целью более надежную и устойчивую работу камеры [2].

Одной из возможных схем является двухступенчатый подвод топлива в камеру, изображенный на рис. 1. Здесь в зону I головки подается горючее и окислитель, в соотношении, надежно обеспечивающем воспламенение и устойчивое горение, т. е. близком к стехиометрическому. Через дополнительный пояс в зону II подается необходимый для соответствующего понижения температуры избыток одного из компонентов (в зависимости от типа газогенератора).

При этом происходит комплекс взаимосвязанных термогазодинамических процессов: распыление, испарение, смешение, тепломассообмен в двухфазном потоке, участие в химических реакциях дополнительно впрыснутого компонента.

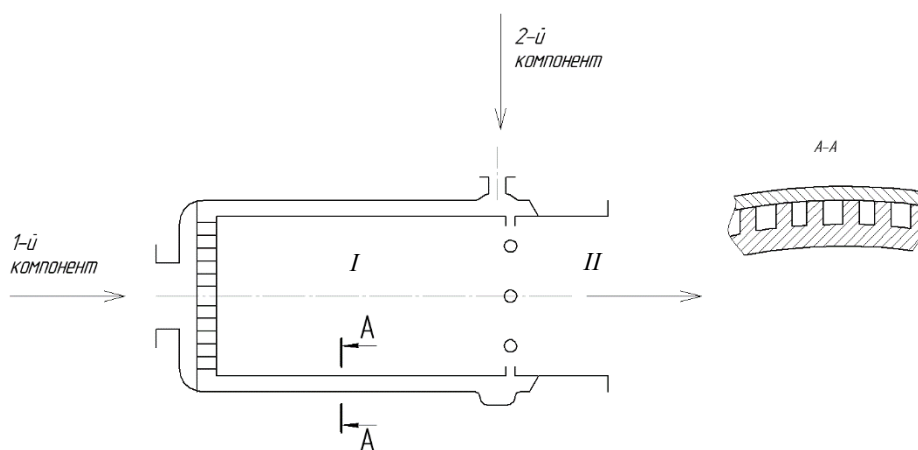


Рис. 1. Схема двухступенчатой подачи топлива в газогенератор

Fig. 1. Diagram of two-stage fuel supply to the gas generator

Следует отметить, что термодинамические показатели генерируемого этим способом газа на выходе из камеры будут отличаться от таковых для газа, полученного при том же общем значении  $\alpha$  в одноступенчатой схеме. Для расчета схемы с двухступенчатым подводом топлива необходимы экспериментальные данные о сложном процессе испарения и частичного сгорания избыточного компонента, а также о степени равновесности итогового состава газовой смеси. Теоретическое предсказание состава и температуры газа при использовании сложных углеводородных топлив затруднительно.

Недостатком рассмотренного способа, кроме усложнения конструкции, является трудность получения равномерного поля температуры на выходе из камеры генератора. Возможны также местные пики температур и давления газа.

Таким образом, задачей настоящей работы является моделирование течения рабочего тела в газогенераторе, получение распределения градиентов температур и предложение методики автономных стендовых испытаний газогенераторов ЖРДУ для верификации данных.

### Методика исследования

Для моделирования рабочего процесса использовалось программное обеспечение *SOLIDWORKS* с добавлением пакета Flow Simulation, который обеспечивает построение модели течения рабочего тела в полости модели газогенератора с учетом теплофизических характеристик. Объектом исследования является двухзонный газогенератор наддува топливных баков ЖРДУ. Создана 3D-модель газогенератора (рис. 2) по алгоритмам трехмерного твердотельного моделирования [3].

Задание начальных параметров выбиралось исходя из определения давления в газогенераторе. А также с учетом материала и свойств рабочего тела.

Давление в газогенераторе определяется следующей формулой:

$$p_{гг} = \dot{m}_T \cdot \varphi_{гг} \cdot \beta_{гг} / F_{кр.г}, \quad (2)$$

где  $\dot{m}_T$  – массовый расход компонентов топлива;  $\varphi_{гг} = \frac{T_{12}^* - T_0}{T_1 - T_0}$  – коэффициент, характеризующий потери в сопле;  $\beta_{гг}$  – расходный комплекс;  $F_{кр.г}$  – площадь критического сечения в газогенераторе.

В ходе расчетов, для их точности, будет учтен каждый из параметров, входящий в данную формулу [4].

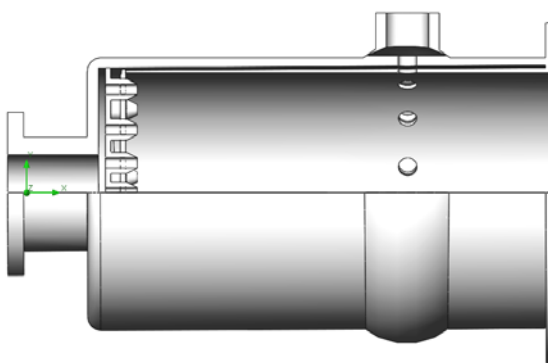


Рис. 2. Геометрическая модель газогенератора

Fig. 2. Geometric model of the gas generator

В качестве материала внутренней стенки использована сталь 12X18H10T. Для оценки тепловых параметров твердого тела выбрано среднее рабочее давление в камере сгорания, равное 11 МПа и температура 548 К.

В проекте Flow Simulation выбраны следующие параметры. Тип задачи определялся внутренней средой. Обязательным условием для решения задачи с учетом теплопроводности является выбор опции «теплопроводность в твердых телах». Следующий шаг – выбор типа текучей среды и определение характеристики течения, в нашем случае течение смешанное. В системе «жидкость – тело» границы тела определяют поверхность, ограничивающую область распространения жидкости, т. е. границы тела модели являются граничными условиями для системы



«жидкость – тело». Тепловое условие на внешней стенке по умолчанию задано коэффициентом теплоотдачи  $25\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$  и температурой окружающей среды  $20,05\text{ }^\circ\text{C}$ .

Граничными условиями являются скорость входящего потока и статическое давление на выходе из расчетной области. На входных отверстиях задано граничное условие – скорость потока =  $0,2\text{ м/с}$ . Следующий этап решения этой задачи – добавление источника тепла. Для этого зададим объемный тепловой источник – тепловую мощность  $2000\text{ Вт}$  нагревательному элементу. Входные данные проекта исследования представлены на рис. 3.

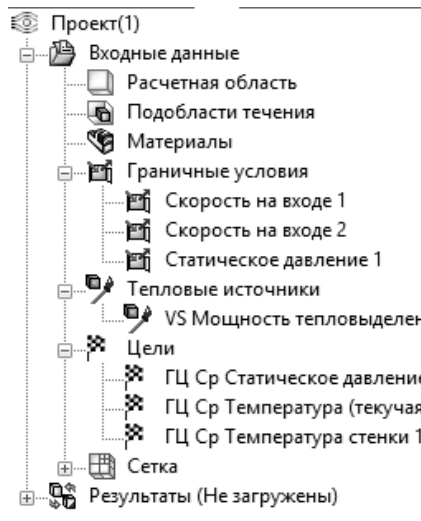


Рис. 3. Входные данные проекта

Fig. 3. Project input data

Таким образом, в результате расчета будут определены значения температуры рабочего и твердого тела. Все основные этапы для решения «внутренней» задачи выполнены.

Методика, представленная в данной работе, дает полную оценку термодинамических параметров в ходе рабочего процесса в газогенераторе.

В результате расчета получены не только численные значения температуры газа, но и на их основе построены градиенты распределения температуры на внутренней стенке камеры сгорания газогенератора (рис. 4).

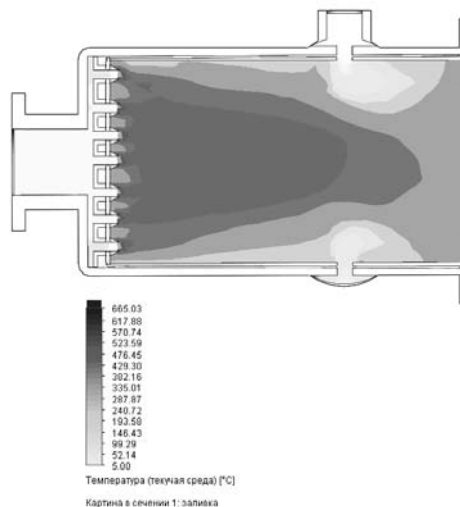


Рис. 4. Градиенты распределения температур

Fig. 4. Temperature distribution gradient

В зависимости от задания целей проекта, программный комплекс позволяет определить температуру в любой точке модели.

На градиенте распределения отчетливо виден характер нагрева рабочего тела относительно стенок, которые охлаждаются подводом второго компонента.

### Показатели процесса газогенерации

Любое численное моделирование должно быть подтверждено или опровергнуто в ходе эксперимента. В данной работе предлагается методика для верификации данных с использованием автономных стендовых испытаний газогенератора ЖРДУ и дальнейшим сравнением значений, полученных при испытаниях со значениями, полученными при численном моделировании.

Назначение процесса газогенерации состоит в приготовлении такого количества рабочего тела (газа) определенных параметров, с помощью которого можно выполнить требующуюся для данной задачи суммарную работу  $L_{\Sigma}$  [5]. При этом будет использовано следующее количество компонентов топлива:

$$M_{\text{кт}} = \frac{L_{\Sigma}}{\eta_{\text{г}} L_{\text{уд}}}, \quad (3)$$

где  $L_{\text{уд}}$  – теоретическая удельная работа, которую может произвести 1 кг топлива;  $\eta_{\text{г}}$  – КПД использования топлива в газогенераторе.

Требуемый секундный суммарный расход компонентов топлива на процесс газогенерации, при условии постоянства расхода по времени, составит

$$\dot{m}_{\text{кт}} = \frac{M_{\text{кт}}}{\tau} = \frac{L_{\Sigma}}{\tau \eta_{\text{г}} L_{\text{уд}}}, \quad (4)$$

где  $\tau$  – время работы газогенератора в составе летательного аппарата.

Относительный расход топлива, затрачиваемого на процесс газогенерации, равен

$$\varepsilon = \frac{\dot{m}_{\text{кт}}}{\dot{m}} = \frac{L_{\Sigma}}{\tau \dot{m} \eta_{\text{г}} L_{\text{уд}}}, \quad (5)$$

где  $\dot{m}$  – секундный расход топлива, подаваемого в основные камеры ЖРД.

Относительный расход  $\varepsilon$  является характеристикой экономичности системы газогенерации.

Работа, необходимая для вытеснения топлива из бака объемом  $V_6$  при давлении  $p_6$ , составит

$$L_{\Sigma} = p_6 V_6. \quad (6)$$

Теоретическая удельная работа 1 кг газа при данных условиях в газогенераторе равна

$$L_{\text{уд}} = (pv)_{\text{г}} = R_{\text{г}} T_{\text{г}}, \quad (7)$$

где  $R_{\text{г}}$ ,  $T_{\text{г}}$  – удельная газовая постоянная и температура газа.

Выполнив подстановку выражений (6) и (7) в формулу (5), получим

$$\varepsilon = \frac{p_6 V_6}{\tau \dot{m} \eta_{\text{г}} R_{\text{г}} T_{\text{г}}}. \quad (8)$$

Из формулы следует, что важными характеристиками для процесса газогенерации являются КПД использования топлива в газогенераторе  $\eta_{\text{г}}$ , удельная газовая постоянная  $R_{\text{г}}$  и температура газа  $T_{\text{г}}$ . Чем больше эти величины, тем меньше относительный расход топлива на процесс газогенерации.

### Технология огневых испытаний

Методика и технология огневых испытаний газогенераторов определяется конкретной конструкцией ЖГГ и компонентами топлива. В данной статье рассматривается методика, разработанная на испытательном комплексе одного из предприятий ракетно-космической промышленности. Компоненты топлива – НДМГ (горючее) и  $N_2O_4$  (окислитель).

Стенды для автономных огневых испытаний газогенераторов состоят из топливных баков, трубопроводов и запорной арматуры, обеспечивающей выполнение циклограммы изменения режимов работы. Устройство и принцип действия элементов стенда аналогичны используемым на стендах для огневых испытаний ЖРД [6].

По значениям секундных объемных расходов компонентов  $\dot{V}_{гг1}$ ,  $\dot{V}_{гг2}$  и  $\dot{V}_{ог1}$ ,  $\dot{V}_{ог2}$ , измеренным турбинными датчиками типа ТДР, рассчитывают секундные массовые расходы с использованием известных данных о плотности жидкостей  $\rho_g$ ,  $\rho_o$  [7; 8]. В общем случае массовый расход определяется формулой

$$\dot{m} = \dot{V}\rho, \quad (9)$$

где  $\dot{V} = \frac{\dot{V}_1 + \dot{V}_2}{2}$  – среднее измеренное значение расхода [9].

При испытании измеряются параметры, которые представлены в таблице.

Измеряемые параметры при огневых испытаниях газогенератора

Наименование параметра	Обозначение	Тип датчика	Предельная погрешность, %
1. Давление наддува бака горючего	$p_{бгг}$	ДТМ, ДТ	1,0
2. Давление наддува бака окислителя	$p_{бог}$	ДТМ, ДТ	1,0
3. Давление горючего на входе в газогенератор	$p_{гг}$	ДДВ	0,25
4. Давление окислителя на входе в газогенератор	$p_{ог}$	ДДВ	0,25
5. Давление в камере сгорания газогенератора	$p_{кг}$	ДТМ, ДТ	1,0
6. Секундный расход горючего через газогенератор	$\dot{V}_{гг1}, \dot{V}_{гг2}$	ТДР	1,0
7. Секундный расход окислителя через газогенератор	$\dot{V}_{ог1}, \dot{V}_{ог2}$	ТДР	1,0
8. Температура горючего на входе в газогенератор	$T_{гг}$	Термометр сопротивления	1,0
9. Температура окислителя на входе в газогенератор	$T_{ог}$	Термометр сопротивления	1,0
10. Давление газа в потоке после газогенератора (в имитаторе магистрали наддува)	$p_0$	ДТМ, ДТ	1,0
11. Температуры газа в потоке в выходном сечении	$T_{01}, T_{02}, T_{03}$	Термометр сопротивления	1,0

Измеренные в процессе испытания и рассчитанные параметры приводят к нормальным условиям, заданным конструкторской документацией, по формулам приведения:

1) расходы компонентов топлива через газогенератор

$$\dot{m}_{гг пр} = \dot{m}_{гг} \sqrt{\frac{(p_{гг ном} - p_{кг ном})}{(p_{гг} - p_{кг})}}, \quad \dot{m}_{ог пр} = \dot{m}_{ог} \sqrt{\frac{(p_{ог ном} - p_{кг ном})}{(p_{ог} - p_{кг})}}, \quad (10)$$

где  $p_{ном}$  – номинальные значения давлений, заданные конструкторской документацией;

2) температура газа в потоке

$$T_{\text{пр}} = T_{\text{ср}} \left( \frac{P_{\text{о.ном}}}{P_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad (11)$$

где  $n$  – показатель политропы газогенераторного газа;  $T_{\text{ср}}$  – средняя температура в потоке, рассчитанная по результатам испытаний

$$T_{\text{ср}} = \frac{T_{01} + T_{02} + T_{03}}{3}. \quad (12)$$

Для оценки работоспособности газогенератора определяют:

1) суммарное значение приведенных расходов

$$\dot{m}_{\Sigma \text{пр}} = \dot{m}_{\text{гг пр}} + \dot{m}_{\text{ог пр}}. \quad (13)$$

Эта величина является определяющей для оценки работоспособности газогенератора, так как характеризует его производительность [10; 11];

2) равномерность температурного поля в сечении потока через отклонения температур  $T_{01}$ ,  $T_{02}$ ,  $T_{03}$  от средней температуры в потоке  $T_{\text{ср}}$ , используя  $|T_{0i} - T_{\text{ср}}| \leq \Delta T_{\text{ТУ}}$  [12–14];

3) соответствие результатов испытаний интервалу допустимых значений, регламентируемых конструкторской документацией,

$$\dot{m}_{\Sigma \text{пр}} = (\dot{m}_{\Sigma} \pm \Delta \dot{m}_{\Sigma})_{\text{ТУ}}; |T_{0i} - T_{\text{ср}}| \leq \Delta T_{\text{ТУ}}. \quad (14)$$

### Заключение

Стендовые огневые испытания ЖРДУ и их агрегатов относят к процессам повышенной опасности [15], так как они связаны с производственной вредностью и возможностью травматизма, поэтому при проектировании конструкций и систем стенда, составлении программ и проведении испытаний уделяют особое внимание вопросам промышленной безопасности с целью исключения возникновения аварийных ситуаций на стенде [16]. Предложенная методика численного моделирования рабочего процесса методом конечных элементов в пакете Flow Simulation программного обеспечения Solid Works позволит, не прибегая к постоянным стендовым испытаниям, минуя факторы опасности и снизив затраты, получить значения исследуемых параметров. Результат позволит снизить вероятность ошибок, допущенных при проектировании, и не допустить возникновения отрицательных показателей при огневых испытаниях.

Однако нельзя полностью исключать эмпирический подход к исследованию рабочего процесса в газогенераторе. Сделав определенные заключения на основе численных методов, следует перейти к этапу стендовых (огневых) испытаний. Особенности автономных стендовых испытаний газогенераторов наддува топливных баков также описаны в ходе работы.

Таким образом, результаты автономных огневых испытаний позволяют сделать заключение о работоспособности газогенератора системы наддува топливных баков в части производительности и эффективности энергетических параметров.

### Библиографические ссылки

1. Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П. Теория ракетных двигателей / под ред. акад В. П. Глушко. М. : Машиностроение, 1980. 533 с.
2. Численное исследование рабочего процесса в восстановительном газогенераторе кислород-метанового ЖРД разгонного блока / Д. А. Ягодников и др. //Аэрокосмический научный журнал. 2015. № 5. С. 12–25.

3. Космические аппараты и технологии / З. А. Казанцев, А. М. Ерошенко, Л. А. Бабкина, А. В. Лопатин // Космические аппараты и технологии. 2021. Т. 5. № 3. С. 121–136.
4. Стриженко П. П., Барсуков О. А. Результаты огневых испытаний окислительного газогенератора ЖРД 11Д58МФ // Вестник Самарского гос. аэрокосмич. ун-та им. акад. С. П. Королёва (нац. исслед. ун-та). 2014. № 5–3 (47). С. 167–175.
5. Бирюков В. И., Назаров В. П., Царапкин Р. А. Экспериментальная и аналитическая оценка устойчивости рабочего процесса в камерах сгорания и газогенераторах жидкостных ракетных двигателей // Решетневские чтения. 2017. № 21–1. С. 197–199.
6. Яцуненко В. Г., Назаров В. П., Коломенцев А. И. Стендовые испытания жидкостных ракетных двигателей. Красноярск, 2016. 248 с.
7. Беляев Е. Н., Воробьев А. Г. Влияние процессов заполнения смесительных головок газогенераторов на динамику бесстартерного запуска жидкостного ракетного двигателя // Сибирский аэрокосмический журнал. 2018. Т. 19, № 3. С. 469–481.
8. Кузьменко И. А., Яковлев А. Б. Расчет статической характеристики системы подачи унитарного топлива в газогенератор жидкостного ракетного двигателя // Омский науч. вестник. 2018. № 6 (162). С. 15–18.
9. Optimization of system parameters for liquid rocket engines with gas-generator cycles / G. Cai et al. // Journal of Propulsion and Power. 2010. Vol. 26, No. 1. P. 113–119. DOI: 10.2514/1.40649.
10. Moon I. S., Moon I. Y., Lee S. Y. A Study on the Exhaust Gas Created by Staged Combustion and Gas Generator Cycle LRE by Using CEA // Proceedings of the Korean Society of Propulsion Engineers Conference. The Korean Society of Propulsion Engineers, 2011. С. 863–866 [Электронный ресурс]. URL: [www.koreascience.or.kr/article/CFKO201132164220516.pdf](http://www.koreascience.or.kr/article/CFKO201132164220516.pdf).
11. Karimi H., Nassirharand A., Zanj A. Integration of modeling and simulation of warm pressurization and feed systems of liquid propulsion systems // Acta Astronautica. 2011. Vol. 69, No. 5–6. P. 258–265. DOI: 10.1016/j.actaastro.2011.03.021.
12. Seo S., Kim S. K., Choi H. S. Combustion dynamics and stability of a fuel-rich gas generator // Journal of Propulsion and Power. 2010. Vol. 26, No. 2. P. 259–266. DOI: 10.2514/1.46568.
13. Modelling, simulation, and optimization of a hot pressurization system for a liquid propellant space engine and comparison with experimental results / A. Zanj et al. // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2010. Vol. 224, No. 10. P. 1141–1150. DOI: 10.1243/09544100JAERO726.
14. Simulation and experimental study of a single fixed-bed model of nitrogen gas generator working by pressure swing adsorption / P. V. Chinh et al. // Processes. 2019. Vol. 7, No. 10. P. 654. DOI: 10.3390/pr7100654.
15. Green gelled propellant highly throttleable rocket motor and gas generator technology: status and application / P. C. Pinto et al. // Progress in Propulsion Physics. 2019. Vol. 11. P. 91–130. DOI: 10.1051/eucass /201911091.
16. Kwak H. D., Kwon S., Choi C. H. Performance assessment of electrically driven pump-fed LOX/kerosene cycle rocket engine: Comparison with gas generator cycle // Aerospace Science and Technology. 2018. Vol. 77. P. 67–82. DOI: 10.1016/j.ast.2018.02.033.

## References

1. Aemasov V. E., Dregalin A. F., Tishin A. P. *Teoriya raketnykh dvigateley* [Theory of rocket engines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980, 533 p.
2. Yagodnikov D. A. et al. [Numerical study of the working process in the reducing gas generator of the oxygen-methane liquid propellant booster unit]. *Aerokosmicheskiy nauchnyy zhurnal*. 2015, No. 5, P. 12–25 (In Russ.).

3. Kazantsev Z. A., Eroshenko A. M., Babkina L. A., Lopatin A. V. [Spacecraft and technologies]. *Kosmicheskie apparaty i tekhnologii. Uchrediteli: Tekhnologicheskaya platforma" Natsional'naya informatsionnaya sputnikovaya sistema*. 2021, Vol. 5, No. 3, P. 121–136 (In Russ.).
4. Strizhenko P. P., Barsukov O. A. [Results of fire tests of the oxidizing gas generator LRE 11D58MF]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika SP Koroleva (natsional'nogo issledovatel'skogo universiteta)*. 2014, No. 5–3 (47), P. 167–175 (In Russ.).
5. Biryukov V. I., Nazarov V. P., Tsarapkin R. A. [Experimental and analytical assessment of the stability of the working process in combustion chambers and gas generators of liquid rocket engines]. *Reshetnevskie chteniya*. 2017, No. 21–1, P. 197–199 (In Russ.).
6. Yatsunenkov V. G., Nazarov V. P., Kolomentsev A. I. *Stendovye ispytaniya zhidkostnykh raketnykh dvigateley: uchebnoe posobie*[Bench tests of liquid rocket engines: textbook]. Krasnoyarsk, 2016, 248 p.
7. Belyaev E. N., Vorob'ev A. G. [Influence of filling processes of mixing heads of gas generators on the dynamics of a starter-free launch of a liquid rocket engine]. *Sibirskiy aerokosmicheskii zhurnal*. 2018, Vol. 19, No. 3, P. 469–481 (In Russ.).
8. Kuz'menko I. A., Yakovlev A. B. [Calculation of the static characteristics of the unitary fuel supply system in the gas generator of a liquid rocket engine]. *Omskiy nauchnyy vestnik*. 2018, No. 6 (162), P. 15–18 (In Russ.).
9. Cai G. et al. Optimization of system parameters for liquid rocket engines with gas-generator cycles. *Journal of Propulsion and Power*. 2010, Vol. 26, No. 1, P. 113–119. DOI: 10.2514/1.40649.
10. Moon I. S., Moon I. Y., Lee S. Y. [A Study on the Exhaust Gas Created by Staged Combustion and Gas Generator Cycle LRE by Using CEA]. *Proceedings of the Korean Society of Propulsion Engineers Conference*. The Korean Society of Propulsion Engineers, 2011, P. 863–866. Available at: <https://www.koreascience.or.kr/article/CFKO201132164220516.pdf>.
11. Karimi H., Nassirharand A., Zanj A. Integration of modeling and simulation of warm pressurization and feed systems of liquid propulsion systems. *Acta Astronautica*. 2011, Vol. 69, No. 5–6, P. 258–265. DOI: 10.1016/j.actaastro.2011.03.021.
12. Seo S., Kim S. K., Choi H. S. Combustion dynamics and stability of a fuel-rich gas generator. *Journal of Propulsion and Power*. 2010, Vol. 26, No. 2, P. 259–266. DOI: 10.2514/1.46568.
13. Zanj A. et al. Modelling, simulation, and optimization of a hot pressurization system for a liquid propellant space engine and comparison with experimental results. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2010, Vol. 224, No. 10, P. 1141–1150. DOI: 10.1243/09544100JAERO726.
14. Chinh P. V. et al. Simulation and experimental study of a single fixed-bed model of nitrogen gas generator working by pressure swing adsorption. *Processes*. 2019, Vol. 7, No. 10, P. 654. DOI: 10.3390 / pr7100654.
15. Pinto P. C. et al. Green gelled propellant highly throttleable rocket motor and gas generator technology: status and application. *Progress in Propulsion Physics*. 2019, Vol. 11, P. 91–130. DOI: 10.1051 / eucass /201911091.
16. Kwak H. D., Kwon S., Choi C. H. Performance assessment of electrically driven pump-fed LOX kerosene cycle rocket engine: Comparison with gas generator cycle. *Aerospace Science and Technology*. 2018, Vol. 77, P. 67–82. DOI: 10.1016 / j.ast.2018.02.033.

**Шелудько Максим Леонидович** – студент; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: sheludkomax@yandex.ru.

**Назаров Владимир Павлович** – заведующий кафедрой двигателей летательных аппаратов, профессор; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: nazarov@mail.sibsau.ru.

**Зенюк Константин Олегович** – студент; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: konstantin.zenyuk@yandex.ru.

**Назарова Лариса Петровна** – доцент кафедры технической механики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: nazarova@mail.sibsau.ru.

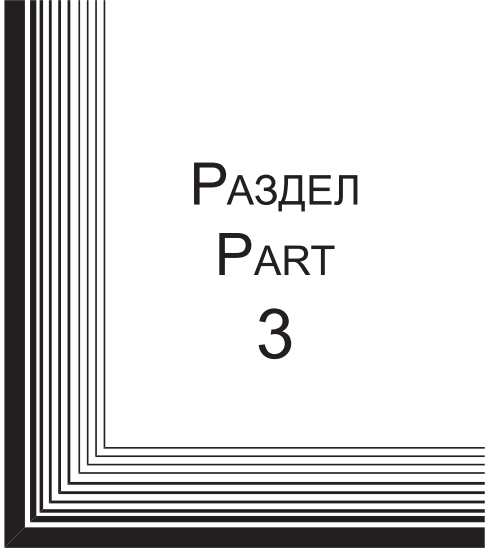
**Sheludko Maxim Leonidovich** – student; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: sheludkomax@yandex.ru.

**Nazarov Vladimir Pavlovich** – Head of the Department of DLA, Professor; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: nazarov@mail.sibsau.ru.

**Zenyuk Konstantin Olegovich** – student; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: konstantin.zenyuk@yandex.ru.

**Nazarova Larisa Petrovna** – Associate Professor of the Department of Technical Mechanics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: nazarova@mail.sibsau.ru.

---



РАЗДЕЛ  
PART  
3



ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ  
ПРОЦЕССЫ  
И МАТЕРИАЛЫ

TECHNOLOGICAL  
PROCESSES  
AND MATERIALS SCIENCE





УДК 528.88

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-532-541

**Для цитирования:** Изучение фактора потерь льда наледи из пресной воды в миллиметровом диапазоне / Г. С. Бордонский, А. А. Гурулев, А. О. Орлов, С. В. Цыренжапов // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 532–541. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-532-541.

**For citation:** Bordonskiy G. S., Gurulev A. A., Orlov A. O., Tsyrenzhapov S. V. [Studying the factor of ice of icing field loss from fresh water in the millimeter range]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 532–541. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-532-541.

## Изучение фактора потерь льда наледи из пресной воды в миллиметровом диапазоне

Г. С. Бордонский\*, А. А. Гурулев, А. О. Орлов, С. В. Цыренжапов

Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН  
Российская Федерация, 672014, г. Чита, ул. Недорезова, 16а  
\*E-mail: lgc255@mail.ru

*В работе измерено затухание микроволнового излучения в искусственно образованной наледи на ледяном покрове пресноводного озера в миллиметровом диапазоне. Измерения выполнены с использованием микроволновой радиометрии на частотах 22, 34, 90 и 125 ГГц при циклическом изменении температуры окружающей среды в интервале от  $-19$  до  $-31$  °С. Использована специальная методика, позволяющая по приращениям радиояркостной температуры между наледью и покровом без наледи определить затухание в ней микроволнового излучения. В предложенной методике находили фактор потерь при условии, если затухание в наледи определяется электромагнитными потерями в среде. Измерения проводили на ледяном покрове пресного озера с минерализацией вод около 100 мг/л. В результате исследования установлено, что на формирование излучения наледью сильно влияет рассеяние на неоднородностях среды. Этот вывод сделали из сравнения расчетов ожидаемого фактора потерь льда наледи и полученных данных из измерений по используемой методике. Наибольшее различие фактора потерь (в несколько десятков раз) обнаружено на частотах 90 и 125 ГГц. Высказано предположение, что рассеяние излучения возникает на кристаллогидратах солей и может быть вызвано повышенной электропроводностью тонких пленок воды на поверхности кристаллов. Эта особенность может возникать, как было недавно установлено, при образовании в среде кристалликов льда 0. Этот лед образуется из глубоко переохлажденной воды при температурах ниже  $-23$  °С. Обнаруженный эффект представляет интерес для развития радарных измерений пресных природных льдов при низких температурах и малых концентрациях в них солей (порядка 100 мг/кг). Такие льды могут образовываться из слабосоленой воды с содержанием солей до нескольких граммов на литр или при замерзании воды с минерализацией  $\sim 100$  мг/л в замкнутом пространстве. Полученные результаты интересны для микроволнового аэрокосмического определения областей ледяного покрова с его нарушениями структуры, через которые вода водоема может проникнуть на поверхность льда с последующим замерзанием. При этом радары могут быть эффективными при температурах наледей ниже  $-20$  °С, когда жидкие включения практически полностью вымерзают. Для области температур выше точки эвтектики, где появляются жидкие включения, достаточно эффективными могут быть пассивные радиометрические измерения.*

*Ключевые слова:* наледь, микроволновая радиометрия, радарные измерения, диэлектрическая проницаемость, лед 0.

## Studying the factor of ice of icing field loss from fresh water in the millimeter range

G. S. Bordonskiy\*, A. A. Gurulev, A. O. Orlov, S. V. Tsyrenzhapov

Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS  
16a, Nedorezova St., Chita, 672014, Russian Federation  
\*E-mail: lgc255@mail.ru

*In this work, the attenuation of microwave radiation in an artificially formed icing field on the ice cover of a freshwater lake was measured in the millimeter range. The measurements were made using microwave radiometry at frequencies of 22, 34, 90, and 125 GHz with a cyclic change in the ambient temperature in the range from  $-19$  to  $-31$  °C. A special technique was used, which makes it possible to determine the attenuation of microwave radiation in it from the increments of radio brightness temperature between ice cover and without icing field. In the proposed method, the loss factor was found under the condition that attenuation in ice is determined by electromagnetic losses in the medium. The measurements were carried out on the ice cover of a fresh lake with a water salinity of about 100 mg/l. As a result of the study, it was found that the formation of radiation by ice is strongly influenced by scattering on inhomogeneities of the medium. This conclusion was made from a comparison of the calculations of the expected ice loss factor of icing field and the data obtained from measurements by the method used. The greatest difference in the loss factor (several tens of times) was found at frequencies of 90 and 125 GHz. It has been suggested that radiation scattering occurs on crystalline hydrates of salts and can be caused by increased electrical conductivity of thin water films on the surface of crystals. This feature can arise, as was recently established, during the formation of ice 0 crystals in the medium. This ice is formed from deeply supercooled water at temperatures below  $-23$  °C. The observed effect is of interest for the development of radar measurements of fresh natural ice at low temperatures and low concentrations in salts (about 100 mg/kg). Such ice can form from slightly salty water with a salt content of up to several grams per liter or when water with a salinity of  $\sim 100$  mg/l freezes in a confined space. The results obtained are of interest for microwave aerospace determination of areas of the ice cover with its structural disturbances, through which the water of the reservoir can penetrate to the ice surface with subsequent freezing. At the same time, radars can be effective at icing field temperatures below  $-20$  °C, when liquid inclusions almost completely freeze out. For the temperature range above the eutectic point, where liquid inclusions appear, passive radiometric measurements can be effective.*

*Keywords: icing field, microwave radiometry, radar measurements, permittivity, ice 0.*

### Введение

Изучение характеристик природной среды с использованием аэрокосмических методов измерений в миллиметровом диапазоне представляется перспективным из-за достижения более высокого пространственного разрешения по сравнению с широко используемыми системами дециметровых и сантиметровых волн [1]. Большой интерес представляет знание характеристик льда и мерзлых структур в связи с их быстрой изменчивостью и возможностью определения динамики природных структур, в том числе их использования как индикаторов состояния природной среды [2]. При этом изменение электромагнитных характеристик, определяемых значениями диэлектрической проницаемости льда, позволяет определить влияние температуры среды, диффузию загрязнений, характеристики включений и иных воздействий на объект исследования и, следовательно, его более разнообразные характеристики (предысторию роста и деградации структуры, фазовый состав, влияние метеорологических параметров и др.).

Частным примером являются характеристики замерзших слоев ледяных образований – ледяных и снежных покровов, а также наледей на реках, водохранилищах, карьерах и иных образований, где наблюдаются выходы подземных вод [3].

Микроволновые характеристики льда в зависимости от частоты и температуры достаточно хорошо исследованы [4–6]. Изучено влияние минерализации на относительную диэлектрическую проницаемость ( $\epsilon'$ ). Вместе с тем исследование изменений ее мнимой части, фактора потерь ( $\epsilon''$ ) для разнообразных объектов изучено недостаточно. В работе [7] было замечено, что при циклическом изменении температуры пресного льда от  $-5$  до  $-24$  °С за три месяца измерений значение фактора потерь пресного льда на частотах 13 и 37 ГГц испытывало гистерезис. Эта величина могла медленно изменяться в 1,5 раза, что связано с трансформацией жидких солевых включений в среде. Однако детально этот механизм не исследован. Вопрос о значении потерь свежобразованного льда в микроволновом диапазоне представляет особый интерес для радиометрии ледяных структур (наледей, ледяных покровов в начальной стадии их образования, при перемерзании талых структур) из-за сильного влияния малых концентраций жидкости на радиояркостную температуру [4; 6; 8]. Особенно сильные вариации фактора потерь можно ожидать в миллиметровом диапазоне из-за повышенного погонного затухания излучения и влияния на него структурной трансформации солевых включений.

В настоящей работе выполнено измерение затухания микроволнового излучения в миллиметровом диапазоне искусственной наледи, образованной в зимнее время на поверхности пресного ледяного покрова озера (с минерализацией вод водоема около 100 мг/л) при экстремально низкой температуре. Такие исследования, насколько нам известно, ранее не выполнялись. Наблюдения проводили в течение двух суток с момента образования наледи при температуре воздуха ниже  $-19$  °С и при циклическом суточном изменении температуры льда с минимальным значением  $-31$  °С.

### Методика измерений

На рис. 1 представлена схема измерений фактора потерь искусственной наледи (1) на поверхности ледяного покрова (2) с использованием измерений радиояркостной температуры микроволновым радиометром (3). Особенность методики заключалась в том, что из-за равенства действительной части диэлектрической проницаемости льда ледяного покрова и наледи коэффициент отражения мощности излучения ( $R$ ) одинаков от поверхностей раздела (4) и (5). В результате имеется возможность достаточно точно определять электромагнитные потери и их изменение от температуры и во времени льда наледи по измерениям приращений радиояркостной температуры.

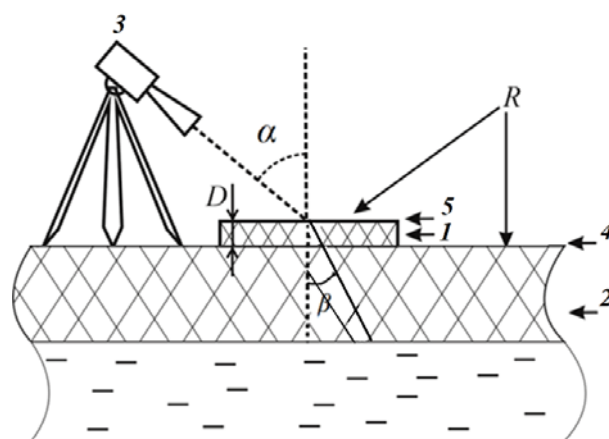


Рис. 1. Схема измерений фактора потерь искусственной наледи на поверхности ледяного покрова:

$D$  – толщина наледи;  $\alpha$  – угол наблюдения, равный углу преломления;  
 $\beta$  – угол падения теплового излучения из льда на границу наледи – воздух

Fig. 1. Scheme for measuring the loss factor of artificial icing field on the surface of the ice cover:

$D$  is the icing field thickness;  $\alpha$  is the observation angle equal to the angle of refraction;  
 $\beta$  is the angle of incidence of thermal radiation from ice onto the ice – air boundary

Наледь образовывали из воды озера путем заливки водой соответствующего ограждения. Для этого устанавливали ограничители по периметру квадрата, на дно которого помещали полиэтиленовую пленку для предотвращения миграции солевых включений из воды наледи при их возможной миграции в нижележащий слой. Сигналы приборов и температуру наледи ( $T_0$ ) регистрировали при помощи системы сбора информации Agilent. Точность измерения температуры составляла  $1^\circ\text{C}$ .

Измерения выполнены на частотах 22, 34, 94, 125 ГГц на наледи с плоскими границами и площадью поверхности  $1\text{ м}^2$ . При этом минерализация верхнего слоя ледяного покрова озера составляла значение порядка  $10\text{ мг/кг}$ . Четыре радиометра с флюктуационной чувствительностью  $0,05\text{ К}$  при постоянной времени  $4\text{ с}$  размещали на передвижной платформе, которую последовательно передвигали между участками с наледью, ледяным покровом без снега и металлическим листом. Для калибровки радиометров использовали открытую водную поверхность проруби и отраженное излучение неба от металлического листа, площади и размеры которых соответствовали наледи. Измерения были выполнены при безоблачной атмосфере. В этой схеме проводили сравнение радиояркой температуры наледи ( $T_H$ ), образованной на поверхности ледяного покрова (т. е. суммарного излучения слоя наледи и ледяного покрова на воде) и очищенного от снега ледяного покрова ( $T_L$ ). Отметим, что снежный покров перед образованием наледи был тщательно удален, а поверхность льда выравнена от шероховатостей. Фотография установки показана на рис. 2.



Рис. 2. Фотография установки для измерения фактора потерь искусственной наледи

Fig. 2. Photo of the installation for measuring the loss factor of artificial icing field

Как отмечалось выше, идея эксперимента заключалась в определении значения приращения радиоярких температур ( $T_H - T_L$ ), по которому определяли коэффициент передачи мощности радиотеплового излучения ( $G$ ) через наледь. По значениям  $G$ , находили потери ( $L$ ):  $L = \frac{1}{G}$  в слое  $D'$ , который определяется законом преломления Снеллиуса:  $D' = \frac{D}{\cos\alpha}$ . В настоящей работе сравнивали  $\epsilon''$  для  $D'$ , поэтому использовали данные для  $L$ , отнесенные к этой длине. Угол наблюдения  $\alpha$  и поляризацию принимаемого излучения задавали исходя из целей измерений.

По близкой методике, с использованием приращения радиояркой температуры, определяли значение  $\epsilon''$  пресного льда, например, в работах [4; 2].

$T_L$  связана с мощностью излучения, распространяющегося через границу (4), причем ниже этой границы (в среде)  $T_L'' = \frac{T_L}{1-R}$ , где  $R$  - коэффициент отражения по мощности от границы лед – воздух.

Для экстремально малых значений  $\varepsilon''$  пресного льда и равенства  $\varepsilon'$  для наледи и ледяного покрова отражение на границе между покровом и наледью отсутствует (т. е.  $R$  одинаков для границ наледь – воздух и ледяной покров – воздух), а для границы ледяной покров – наледь он равен нулю. Так как интерференционные явления в наледи отсутствуют, то выходящее под углом  $\alpha$  излучение можно представить формулой

$$T_H = \left[ \frac{T_L}{1-R} G + T_0 (1-G) \right] (1-R). \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое в квадратных скобках соответствует температуре излучения, поступающего на границу лед – воздух в наледи. Второе слагаемое характеризует собственное радиотепловое излучение наледи, поступающее на ту же границу (излучение аттенюатора [9]) Множитель  $(1-R)$  определяет прошедшую через границу раздела в верхнее полупространство мощность радиотеплового излучения.

После преобразований находим коэффициент передачи мощности через наледь под углом  $\beta$ :

$$G = 1 - \frac{\Delta T_{\text{я}}}{T_0(1-R) - T_L}, \quad \text{где } \Delta T_{\text{я}} = T_H - T_L. \quad (2)$$

Из этой формулы следует отсутствие необходимости учета отраженного излучения неба, так как оно автоматически обнуляется (при равенстве  $R$  для ледяного покрова и наледи). Фактор потерь определяем из (2) для случая  $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$  из формулы [10] для поглощения:

$N(\text{дБ}) = 10 \lg L = 8,68 \left( \frac{\pi}{\lambda_0} \right) \sqrt{\varepsilon' \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}} D'$ , где  $\lambda_0$  – длина волны в свободном пространстве. После преобразований

$$\varepsilon'' = \frac{\lambda_0 \sqrt{\varepsilon'} \lg L}{0,868 \pi D'} \quad (3)$$

Фактор потерь определяется толщиной наледи и потерями в слое, в котором распространяется излучение под углом  $\beta$ . И для случая  $D = 0,04$  м и  $\alpha = 45^\circ$ , используемые в эксперименте,  $\varepsilon'' \approx 14,3 \lambda_0 \lg L$ .

В предложенной методике при определении приращения  $\Delta T_{\text{я}}$  удастся повысить точность измерений  $\varepsilon''$ , так как в значительной мере устраняется влияние дрейфа параметров радиометров, а также изменений температуры излучения неба. Знаменатель второго члена уравнения (2) имеет значение несколько десятков градусов. Ошибка в определении  $T_L$  в несколько градусов дает погрешность  $G$  не более 10 %.  $T_0$  – определяли с помощью температурного датчика, помещенного в наледь с точностью  $\sim 0,1$  °С.

### Результаты измерений

Исследования проводили с 1 по 3 февраля 2019 г. на пресном озере Арахлей (Забайкальский край) в регионе с резкоконтинентальным климатом. Толщина льда при измерениях 117 см. Толщина наледи 4 см. Измерения выполняли на горизонтальной поляризации при угле наблюдения  $45^\circ$ . Для этого случая  $R = 0,14$  при  $\varepsilon'$  льда 3,15. Расстояние от антенн радиометров наледи  $\sim 0,5$  м. Температура льда наледи в дни измерений изменялась в пределах от  $-19$  до  $-31$  °С, скорость ветра 3...5 м/с.

Эксперименты начинали после девятичасовой выдержки воды в матрице для образования наледи. Измерения выполняли с интервалом 1 ч, регистрировали приращения радиояркости от температуры и времени. Изменение температуры определялось ее суточным ходом. Результаты измерений в виде зависимостей потерь пропускания в наледи приведены на рис. 3 для частот 34 и 125 ГГц.

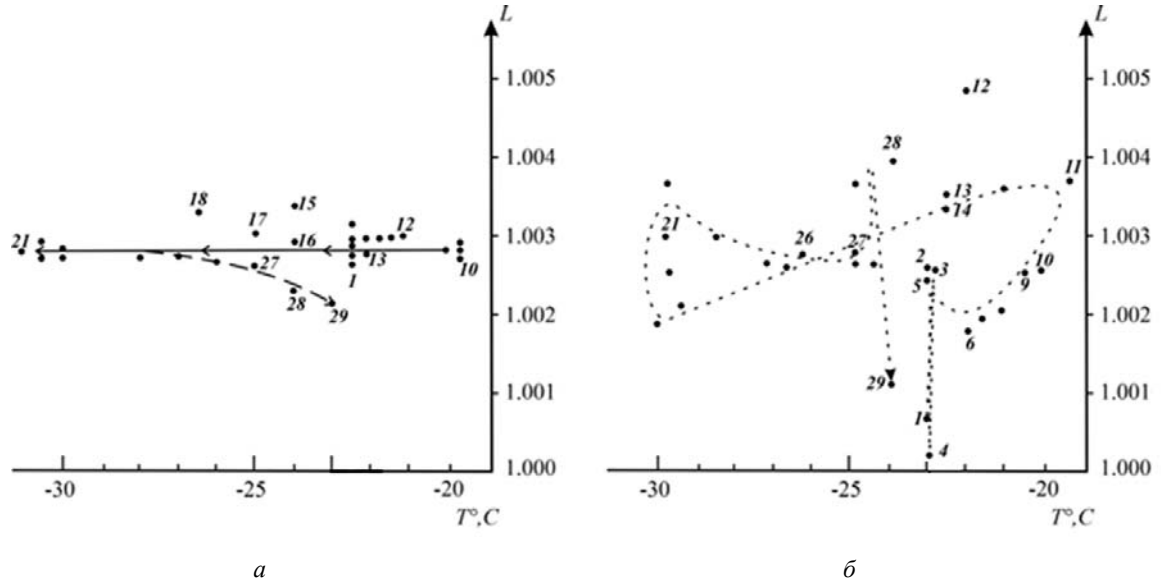


Рис. 3. Зависимости потерь пропускания от времени (последовательность отмечена цифрами: 1 – начало измерений; 29 – завершение измерений) на частотах: а – 34 ГГц; б – 125 ГГц

Fig. 3. Dependences of transmission losses on time (the sequence is marked with numbers: 1 – beginning of measurements; 29 – completion of measurements) at frequencies: a – 34 GHz; b – 125 GHz

Представляет интерес сравнение имеющихся в литературе данных  $\varepsilon''$  пресного льда [11] с полученными результатами. На рис. 4 приведены средние значения  $\varepsilon''$  в слое льда наледи, найденное с использованием формулы (3) по значениям  $L$  в зависимости от логарифма частоты.

Также приведены результаты измерений фактора потерь на третьи сутки наблюдений, когда произошла стабилизация  $L$ . Его значения, представлены для температуры льда  $-25\text{ }^\circ\text{C}$ .

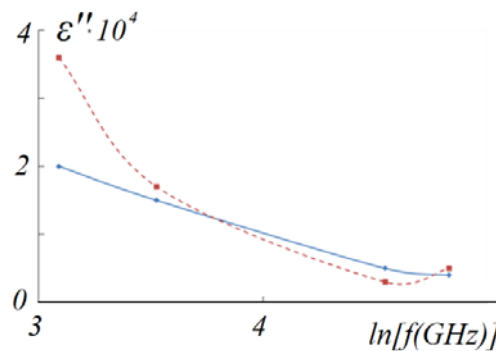


Рис. 4. Средние значения  $\varepsilon''$  льда наледи за время наблюдения в зависимости от натурального логарифма частоты (сплошная линия); значения фактора потерь при температуре  $-25\text{ }^\circ\text{C}$  через 2,5 суток после образования наледи (штриховая линия)

Fig. 4. Mean values of  $\varepsilon''$  of icing ice during the observation time depending on the natural logarithm of the frequency (solid line); values of the loss factor at a temperature of  $-25\text{ }^\circ\text{C}$  2.5 days after the formation of ice (dashed line)

### Обсуждение результатов

При постановке экспериментов использовали представление о том, что затухание радиотеплового излучения определяется потерями в среде. Однако во многих случаях требуется учет рассеяния излучения на внутренних неоднородностях объекта [2]. Зависимость  $\varepsilon''$  от частоты (рис. 4) показывают уменьшение этой величины по мере возрастания частоты. Расчеты по формулам работ [6; 12] дали значение фактора потерь для чистого льда приблизительно в 3 раза выше на частоте 22 ГГц, в 10 раз выше для 34 ГГц и в 20...100 раз выше на частотах 90–125 ГГц, т. е.  $\varepsilon''$  однородного льда возрастает с частотой. Кроме того, следует учитывать, что лед наледи исследуемого озера приблизительно на порядок больше содержит солевых включений, поэтому в природной среде ожидается еще более высокое значение  $\varepsilon''$ . Однако оно будет проявляться при температурах выше  $-21,4$  °С (температура эвтектики хлорида натрия) – основного солевого компонента воды озера, когда включения солей присутствуют в виде жидких капсул и пленок между кристаллитами. В случае образования кристаллогидратов считается, что потери среды близки случаю чистого льда.

Очевидная причина обнаруженной особенности связана с существенным рассеянием излучения. При измерениях наблюдали положительное приращение  $(T_H - T_L)$  в большинстве случаев, что указывает на преобладание вклада от электромагнитных потерь в формировании потока радиотеплового излучения. Эффекты рассеяния, очевидно, ослабевают при понижении частоты, и наиболее контрастной при данном механизме формирования излучения наледь будет на частотах ниже 22 ГГц. Это наблюдали на частоте 13,5 ГГц в работе [3], где приращения радиояростной температуры на льду (с наледями) карьера в береговой зоне в зимнее время при температурах выше  $-20$  °С достигали десятков градусов Кельвина.

Для объяснения сильного рассеяния на частотах 90–125 ГГц высказано предположение, что рассеяние возникает на мелких кристалликах кристаллогидратов из солей, имеющих в исходной воде [13] наледи. То, что образование кристаллогидратов приводит к рассеянию, следует из рис. 3, где вблизи температуры эвтектики хлорида натрия ( $-21...-22$  °С) наблюдали уменьшение  $L$ . Предполагаемый конкретный механизм этого эффекта следующий. При понижении температуры ниже точки эвтектики в среде из жидкой воды возникает переходная фаза от переохлажденной воды ко льду Ih, названная льдом 0 [14]. Для наноразмерных кристаллов льда 0 температуры его образования оказываются ниже  $-23$  °С. Это значение может варьироваться в некоторых пределах в зависимости от объема и геометрии мерзлого образования. То же для процесса нагревания такого льда, когда выше точки фазового перехода он превращается в лед Ih.

Эта модификация льда была экспериментально обнаружена в [15]. Лед 0 сегнетоэлектрик и на границе этого льда с диэлектриками возникает слой с высокой электропроводностью, что было установлено [16]. Малые частицы, покрытые проводящим слоем, являются сильными рассеивателями из-за плазмонного резонанса в слоях проводника наноразмерной толщины [17]. Причем рассеяние возникает на частотах ниже плазменной частоты и простирается до нулевых частот. В связи с этим высказана, например, гипотеза, что свечение «серебристых» облаков, образующихся в атмосфере на высотах 80–90 км, связано с конденсацией на пылевых частицах, покрытых льдом 0 [18]. На них и происходит рассеяние солнечного излучения. Если после образования льда 0 в структуре льда наледи температура повысится от точки его образования, то в среде будет проявляться трансформация кристаллогидратов и возникнут жидкие включения (слабо проводящие). При этом и рассеяние будет ослаблено, а потери возрастут [19]. Поэтому для теплого льда (с температурами выше  $-20...-18$  °С) даже с небольшой концентрацией солей у наледи будет иметь место повышенное значение  $L$ , определяемое поглощением. Соответственно, будет наблюдаться также и повышенное значение радиояростной температуры.

Наличие снежного покрова усложняет анализ и требует специального исследования.

### Заключение

1. Выполненное исследование микроволновых характеристик пресноводной наледи сантиметровых толщин при температурах ее существования  $-19...-31$  °С в миллиметровом диапазоне на частотах 22–125 ГГц выявило сильное рассеяние излучения, особенно в высокочастотной части данного участка.

2. Эффект связывается с образованием кристаллогидратов хлорида натрия, основного компонента воды исследуемого водоема, при температуре  $-21,4$  °С и возникновением тонких слоев воды на поверхности кристаллогидратов с их последующим замерзанием с образованием мелких кристаллов льда 0. Также кристаллы (даже нанометровых размеров) при контакте с диэлектрической средой (воды или кристаллов льда Ih и кристаллогидратов) образуют нанометровые слои с весьма высокой электропроводностью, что приводит к сильному рассеянию излучения в миллиметровом диапазоне.

3. На частотах ниже 20 ГГц эффект рассеяния на включениях малых размеров (микро и нано) в пресных льдах должен существенно уменьшаться, поэтому «холодная» наледь будет слабо выделяться на фоне ледяного покрова. Однако при температурах выше точки эвтектики солей радиояркая температура наледи будет возрастать во всех диапазонах из-за существования включений в жидком состоянии. Температурная граница между двумя областями определяется химическим составом воды, т. е. точками эвтектики солей. Для хлорида натрия это значение находится вблизи  $-21...-22$  °С (в зависимости от влияния других солей).

4. Рассеяние излучения для «холодной» наледи при температурах образования льда 0 (т. е. ниже  $-23$  °С) позволяет использовать для обнаружения наледей из пресной воды радары миллиметрового диапазона (на частотах 90–125 ГГц).

### Библиографические ссылки

1. Шарков Е. А. Радиотепловое дистанционное зондирование Земли: физические основы : в 2 т. Т. 1. М. : ИКИ РАН, 2014. 544 с.
2. Бордонский Г. С. Электромагнитное излучение криогенных природных сред : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Чита, 1994. 321 с.
3. Гурулев А. А., Орлов А. О., Цыренжапов С. В. Влияние наледей на радиотепловое излучение пресных ледяных покровов // Естественные и технические науки. 2018. № 8(122). С. 109–111.
4. Matzler C., Wegmuller U. Dielectric properties of freshwater ice at microwave frequencies // J. Phys. D.: Appl. Phys. (UK). 1987. P. 1623–1630.
5. A summary of the complex dielectric permittivity of ice in the megahertz range and its applications for radar sounding of polar ice sheets / S. Fujita, T. Matsuoka, T. Ishida et al. // In Physics of Ice Core Records. Edited by Takeo Hondoh. 2000. Hokkaido University Press. P. 185–212.
6. Бордонский Г. С. Диэлектрические потери пресного льда на СВЧ // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, № 11. С. 1620–1622.
7. Bordonski G. S., Krylov S. D. Loss factor behavior of freshwater ice at 13.5 and 37.5 GHz // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 1998. Vol. 36, No. 2. P. 678680.
8. Особенности собственного излучения Обской губы в L-диапазоне в период ледостава / В. В. Тихонов, И. В. Хвостов, А. Н. Романов, Е. А. Шарков и др. // Исследование Земли из космоса. 2020. № 3. С. 59–76. DOI: 10.31857/S0205961420030070.
9. Краус Д. Радиоастрономия : перевод с англ. В. Т. Федорова / под ред. проф. В. В. Железнякова. М. : Сов. Радио. 1973. 456 с.
10. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед: Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л. : Гидрометеиздат. 1980. 384 с.
11. Различие картин радарных и радиометрических измерений (на примере ледяного покрова эвтрофированного озера) / Г. С. Бордонский, А. А. Гурулев, А. О. Орлов, С. В. Цыренжапов



// Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2014. Т. 11, № 2. С. 228–240.

12. Warren S. G. Optical constants of ice from ultraviolet to the microwave // *Applied Optics*. 1984. No 23. P. 1206–1225.

13. Борзенко С. В., Замана Л. В. Гидрогеохимия Ивано-Арахлейских озер // *Геосферные исследования*. 2020. № 3. С. 69–79. DOI: 10.17223/25421379/16/6.

14. Russo J., Romano F., Tanaka Y. New metastable form of ice and its role in the homogeneous crystallization of water // *Nature Materials*. 2014. Vol. 13, No. 7. P. 733–739. DOI:10.1038/nmat3977.

15. Бордонский Г. С., Крылов С. Д., Гурулев А. А. Лёд 0 в природной среде. Экспериментальные данные и предполагаемые области его существования // *Лёд и снег*. 2020. Т. 60, № 2. С. 263–273. DOI: 10.31857/S2076673420020039.

16. Surface conductivity at the interface between ceramics and transformer oil / S. M. Korobeynikov, A. V. Melekhov, Yu. G. Soloveitchik et al. // *Journ. of Physics. D: Applied Physics*. 2005. Vol. 38, No 6. P. 915–921.

17. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М. : Мир, 1986. 664 с.

18. Bordonskiy G. S., Gurulev A. A., Orlov A. O. The possibility of observing noctilucent clouds in microwave radiometric measurements. Proc. SPIE 11208. 25th International symposium on atmospheric and ocean optics: Atmospheric Physics. P. 1120818 (18 December 2019). DOI: 10.1117/12.2539769.

19. Meissner T. Wentz F. J. The complex dielectric constant of pure and sea water from microwave satellite observations // *IEEE Trans. Geosci. Rem. Sens.* 2004. Vol. 42, No. 9. P. 1836–1849. DOI: 10.1109/TGRS.2004.831888.

## References

1. Sharkov E. A. *Radioteplovoye distantsionnoye zondirovaniye Zemli: fizicheskiye osnovy* [Radiothermal remote sensing of the Earth: physical foundations]. Moscow, IKI RAN Publ., 2014, 544 p. (In Russ.).

2. Bordonskiy G. S. *Elektromagnitnoye izlucheniye kriogennykh prirodnykh sred* [Electromagnetic radiation of cryogenic natural environments. Dr. diss.]. Chita, 1994, 321 p. (In Russ.).

3. Gurulev A. A., Orlov A. O., Tsyrenzhapov S. V. [Influence of icing on the radiothermal radiation of fresh ice covers]. *Yestestvennyye i tekhnicheskiye nauki*. 2018, No. 8(122), P. 109–111 (In Russ.).

4. Matzler C., Wegmuller U. Dielectric properties of freshwater ice at microwave frequencies. *J. Phys. D.: Appl. Phys.* (UK). 1987, P. 1623–1630.

5. Fujita S., Matsuoka T., Ishida T., Matsuoka K., Mae S. A summary of the complex dielectric permittivity of ice in the megahertz range and its applications for radar sounding of polar ice sheets. *In Physics of Ice Core Records*. Edited by Takeo Hondoh, 2000, Hokkaido University Press, P. 185–212.

6. Bordonskiy G. S. [Dielectric losses of fresh ice on microwave]. *Radiotekhnika i elektronika*. 1995, Vol. 40, No. 11, P. 1620–1622 (In Russ.).

7. Bordonski G. S., Krylov S. D. Loss factor behavior of freshwater ice at 13.5 and 37.5 GHz. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 1998, Vol. 36, No 2, P. 678680.

8. Tikhonov V. V., Khvostov I. V., Romanov A. N. et al. [Features of the natural radiation of the Ob Bay in the L-band during the freezing period]. *Issledovaniye Zemli iz kosmosa*. 2020, Vol. 3, P. 59–76 (In Russ.). DOI: 10.31857/S0205961420030070.

9. Kraus D. *Radioastronomiya* [Radio astronomy]. Ed. prof. V. V. Zheleznyakova, Moscow, Sov. Radio Publ., 1973, 456 p.

10. Bogorodsky V. V., Gavrilov V. P. *Led: Fizicheskiye svoystva. Sovremennyye metody glyatsiologii*. [Ice: Physical properties. Modern methods of glaciology]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1980, 384 p.

11. Bordonskiy G. S., Gurulev A. A., Orlov A. O., Tsyrenzhapov S. V. [Difference between radar and radiometric measurements (on the example of the ice cover of a eutrophic lake)]. *Sovremennyye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*. 2014, Vol. 11, No. 2, P. 228–240 (In Russ.).
12. Warren S. G. Optical constants of ice from ultraviolet to the microwave. *Applied Optics*. 1984, Vol. 23, P. 1206–1225.
13. Borzenko S. V., Zamana L. V. [Hydrogeochemistry of the ivano-arakhleisky lakes]. *Geospheric Research*. 2020, Vol. 3, P. 69–79 (In Russ.). DOI: 10.17223/25421379/16/6.
14. Russo J., Romano F., Tanaka Y. New metastable form of ice and its role in the homogeneous crystallization of water. *Nature Materials*. 2014, Vol. 13, No 7, P. 733–739. DOI:10.1038/nmat3977.
15. Bordonskiy G. S., Krylov S. D., Gurulev A. A. [Ice 0 in the natural environment. experimental data and supposed areas of its existence]. *Led i sneg*. 2020, Vol. 60, No. 2, P. 263–273 (In Russ.). DOI: 10.31857/S2076673420020039.
16. Korobeynikov S. M., Melekhov A. V., Soloveitchik Yu. G. et al. Surface conductivity at the interface between ceramics and transformer oil. *Journ. of Physics. D: Applied Physics*. 2005, Vol. 38, No 6, P. 915–921.
17. Boren K., Huffman D. *Pogloshcheniye i rasseyaniye sveta malymi chastitsami* [Absorption and scattering of light by small particles]. Moscow, Mir Publ., 1986, 664 p. (In Russ.).
18. Bordonskiy G. S., Gurulev A. A., Orlov A. O. The possibility of observing noctilucent clouds in microwave radiometric measurements. *Proc. SPIE 11208. 25th International symposium on atmospheric and ocean optics: Atmospheric Physics*, p. 1120818 (18 December 2019). DOI: 10.1117/12.2539769.
19. Meissner T. Wentz F. J. The complex dielectric constant of pure and sea water from microwave satellite observations. *IEEE Trans. Geosci. Rem. Sens.* 2004, Vol. 42, No 9, P. 1836–1849. DOI: 10.1109/TGRS.2004.831888.

© Бордонский Г. С., Гурулев А. А., Орлов А. О., Цыренжапов С. В., 2022

---

**Бордонский Георгий Степанович** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник; Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН. E-mail: lgc255@mail.ru.

**Гурулев Александр Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник; Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН. E-mail: lgc255@mail.ru.

**Орлов Алексей Олегович** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник; Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН. E-mail: lgc255@mail.ru.

**Цыренжапов Сергей Васильевич** – младший научный сотрудник; Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН. E-mail: lgc255@mail.ru.

**Bordonsky Georgy Stepanovich** – Dr. Sc., Professor, Chief Researcher; Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS. E-mail: lgc255@mail.ru.

**Gurulev Aleksandr Aleksandrovich** – Cand. Sc., Associate Professor, Senior Researcher; Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS E-mail: lgc255@mail.ru.

**Orlov Aleksey Olegovich** – Cand. Sc., Researcher; Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS. E-mail: lgc255@mail.ru.

**Tsyrenzhapov Sergey Vasilievich** – junior researcher; Institute of Natural Resources, Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS. E-mail: lgc255@mail.ru.

---

УДК 004.5:62-52:669

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-542-550

**Для цитирования:** Разработка человеко-машинного интерфейса для управления каскадом мельниц при получении шихты нефелиновой руды / Р. Д. Иванов, Г. Б. Даныкина, Т. В. Пискажова, Л. П. Колмакова // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 542–550. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-542-550.

**For citation:** Ivanov R. D., Danykina G. B., Piskazhova T. V., Kolmakova L. P. [Development of a human-machine interface for cascade control mills in obtaining nepheline ore charge]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 542–550. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-542-550.

## **Разработка человеко-машинного интерфейса для управления каскадом мельниц при получении шихты нефелиновой руды**

Р. Д. Иванов<sup>\*</sup>, Г. Б. Даныкина, Т. В. Пискажова, Л. П. Колмакова

Сибирский федеральный университет  
Российская Федерация, 660025, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 95  
<sup>\*</sup>E-mail: aronstoun.roman@mail.ru

*Алюминий и сплавы на его основе являются основными материалами для космического машиностроения, как при производстве деталей аппаратов, так и в организации электроснабжения и электроники. Сырьем для получения алюминия является глинозем.*

*Производство глинозема – это многостадийный процесс, включающий в себя переработку сырья различными способами: механически, термически, химически. Механическая переработка сырья является первой стадией производства, в нее входят отделение дробления и приготовления шихты. Подготовка шихты из нефелиновой руды к дальнейшим стадиям производства происходит в мельницах с добавлением известняка и оборотного раствора. Соотношение компонентов, поступающих в мельницы, напрямую влияет на состав шихты и качество конечного продукта. При этом требуемое качество шихты не всегда обеспечивается, так как расходы компонентов задаются человеком по результатам редкого химического анализа, выполняемого лабораторией с запаздыванием.*

*Целью работы является совершенствование управления мельницей при получении шихты нефелиновой руды. Разработана программа виртуального управления мельницами и мнемосхема в программной среде ПИА Portal с применением микропроцессорного контроллера S7-1500. Разработана система автоматического регулирования известкового и щелочного модулей сырьевой шихты.*

*Программа управления построена на основе расчета влажности шихты, а также щелочного и известнякового модулей в зависимости от состава руды, известняка, а также скоростей подачи в мельницу оборотной воды, руды и известняка. Мнемосхема включает в себя индикацию важных параметров процесса, тренды входных и выходных характеристик и инструменты для задания управляющих воздействий.*

*Ключевые слова: приготовление шихты, размол нефелиновой руды, виртуальное управление, мнемосхема.*

## **Development of a human-machine interface for cascade control mills in obtaining nepheline ore charge**

R. D. Ivanov<sup>\*</sup>, G. B. Danykina, T. V. Piskazhova, L. P. Kolmakova

Siberian Federal University  
95, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660025, Russian Federation  
<sup>\*</sup>E-mail: aronstoun.roman@mail.ru

*Aluminum and alloys based on it are the main materials for space engineering, both in the production of vehicle parts, and in the organization of power supply and electronics. The raw material for producing aluminum is alumina.*

*Alumina production is a multi-stage process that includes the processing of raw materials in various ways: mechanically, thermally, chemically. Mechanical processing of raw materials is the first stage of production, it includes a crushing department and a batch preparation department. The preparation of the charge from nepheline ore for further stages of production takes place in mills with the addition of limestone and recycled solution. The ratio of the components entering the mills directly affects the composition of the charge and the quality of the final product. At the same time, the required quality of the charge is not always ensured, since the costs of the components are set by a person based on the results of a rare chemical analysis performed by the laboratory with a delay.*

*The aim of the work is to improve the control of the mill when receiving a mixture of nepheline ore. A virtual mill control program and a mnemonic diagram were developed in the TIA Portal software environment using the S7-1500 microprocessor controller. A system for automatic control of the lime and alkaline modules of the raw charge has been developed.*

*The control program is built on the basis of calculating the moisture content of the charge, as well as the alkaline and limestone modules, depending on the composition of the ore, limestone, as well as the feed rates of circulating water, ore and limestone to the mill. The mnemonic diagram includes an indication of important process parameters, trends in input and output characteristics, and tools for setting control actions.*

*Keywords: batch preparation, nepheline ore grinding, virtual control, mnemonic diagram.*

### **Введение**

Глинозем ( $Al_2O_3$ ) – это основной исходный материал, используемый в производстве первичного алюминия, который, в свою очередь, является основным материалом для космического машиностроения, как при производстве деталей аппаратов, так и в организации электроснабжения и электроники. В большинстве случаев, в качестве рудной базы при создании глинозема выступают бокситы, но также применяется нефелиновые и иные содержащие глинозем руды. Одним из самых распространенных способов производства глинозема является щелочной способ путем спекания. Суть этого способа состоит в связывании  $Al_2O_3$  в алюминат натрия путем спекания и последующего выщелачивания полученного спека [1–7]. Такой способ производства глинозема используется на Ачинском глиноземном комбинате (АГК) – крупнейшем предприятии в области алюминиевой промышленности в России [8].

Подготовкой сырья для спекания занимается отделение приготовления шихты. Процесс подготовки шихты нефелиновой руды является одним из важнейших этапов получения глинозема, и при совершенствовании схемы управления можно добиться значительного экономического эффекта за счет снижения затрат энергии и материалов [9; 10].

Достичь такого эффекта можно, решив некоторые проблемы автоматизированной системы управления технологическим процессом (АСУ ТП):

- отсутствие автоматического контроля и индикации работы основного технологического оборудования (режим включения/отключения, индикация аварийного состояния);
- отсутствие вывода в АСУ ТП важных параметров оперативного контроля работы оборудования (температура подшипников, давление масла и др.);
- осуществление контроля параметров только по месту;
- отсутствие системы автоматического регулирования известкового и щелочного модулей сырьевой шихты;
- осуществление вывода на целевые показатели шихты в ручном режиме на основе результатов химического лабораторного анализа.

### **Описание технологического процесса**

Отделение приготовления шихты предназначено для приготовления шихты из нефелиновой руды и известняка с заданными характеристиками. Состав шихты характеризуют:

– известняковый модуль – молярное отношение суммы оксида кальция к диоксиду кремния ( $M_{\text{изв}} = 1,07 \cdot (\text{CaO}/\text{SiO}_2)$ );

– щелочной модуль – молярное отношение суммы оксидов натрия и калия в пересчете на  $\text{Na}_2\text{O}$  к оксиду алюминия ( $M_{\text{щел}} = 1,645 \cdot [(\text{Na}_2\text{O} + 0,659\text{K}_2\text{O}) / \text{Al}_2\text{O}_3]$ );

– крупность помола, содержание фракции +0,08 мм, %;

– влажность ( $W$ ), %;

– постоянство состава.

Размол нефелиновой руды и известняка с добавлением оборотного раствора производят в трубчатых шаровых мельницах.

На АГК существует четыре стадии приготовления шихты (рис. 1):

I стадия – размол нефелиновой руды с добавлением оборотного раствора (мельницы № 15–22);

II стадия – домол нефелиновой пульпы (мельницы № 11–14);

III стадия – размол известняка совместно с нефелиновой пульпой (мельницы № 1–8);

IV стадия – домол нефелиновой шихты, известняка (мельницы № 9–10, 23–28, 31–35).

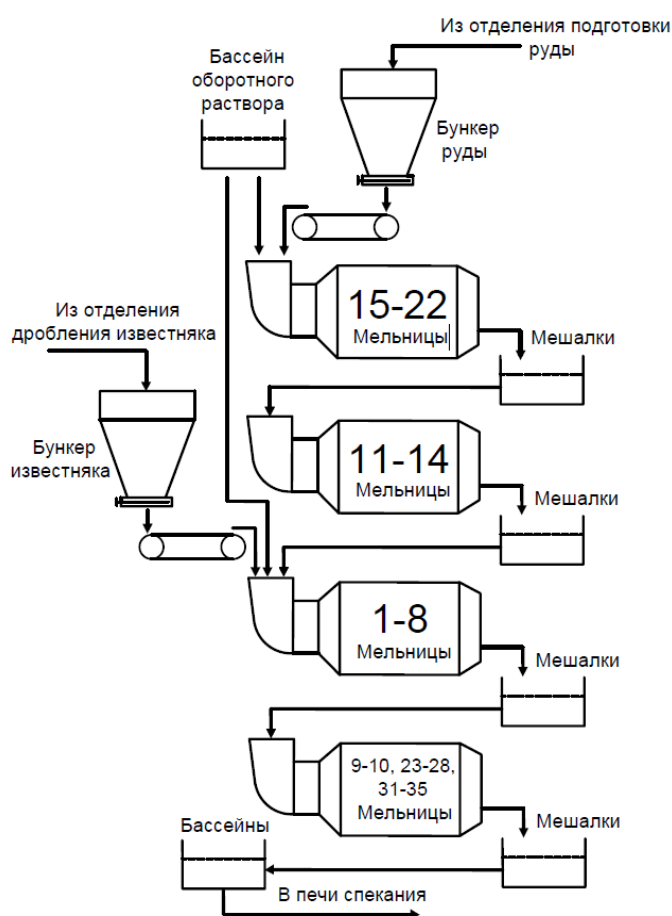


Рис. 1. Стадии приготовления шихты

Fig. 1. Stage of the mixing processes

После домольных мельниц четвертой стадии размол шихта собирается в сборную мешалку и насосами перекачивается в схемы проточного усреднения шихты в коррекционных бассейнах.

Из схем проточного усреднения шихта перекачивается в расходные бассейны, откуда насосами подается на печи спекания. Избыток шихты по кольцевым трубопроводам возвращается в расходные бассейны.

**Каскад мельниц как объект автоматизации**

На рис. 2 изображен каскад мельниц как объект автоматизации, где  $X(t)$  – вектор управляющих воздействий;  $F(t)$  и  $M(t)$  – векторы контролируемых и неконтролируемых возмущений, соответственно;  $Y(t)$  – вектор выходных параметров. Таблица содержит векторные переменные каскада мельниц.

После четвертой стадии шихта попадает в коррекционные бассейны, где путем лабораторного анализа измеряются главные выходные показатели каскада щелочной и известняковый модуль:

$M_{щел}$  – щелочной модуль,  $1,12 \pm 0,02$  ед.;

$M_{изв}$  – известняковый модуль,  $2,04 \pm 0,02$  ед.

Корректировка этих параметров заключается в регулировании входных показателей мельниц в каскаде (изменение расхода руды, раствора и т. д.). Это дает дополнительную сложность для автоматизированного управления, так как модули зависят не только от расхода входных показателей, но и от состава компонентов. Поэтому для достижения необходимых показателей щелочного и известнякового модуля можно иметь вариации показателя влажности в диапазоне 30–35 %.

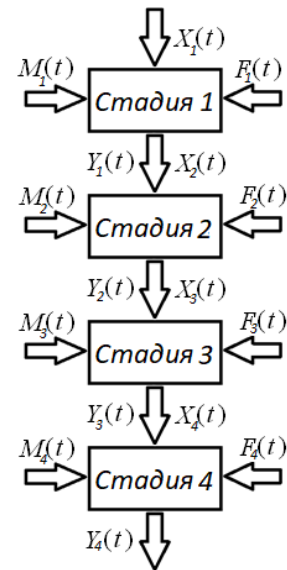


Рис. 2. Каскад как объект автоматизации

Fig. 2. Cascade as automation object

**Векторные переменные четырехстадийного каскада**

Стадия	Векторные переменные			
	Управляющие воздействия $X(t)$	Выходные параметры $Y(t)$	Контролируемые возмущения $F(t)$	Неконтролируемые возмущения $M(t)$
Стадия 1	$x_{1.1}$ – подача нефелиновой руды, 0–160 т/ч; $x_{1.2}$ – подача оборотного раствора, 0–63 м <sup>3</sup> /ч	$y_{1.1}$ – влажность шихты, 28–35 %; $y_{1.2}$ – уровень шихты в шалке, 1,5–4,5 м; $y_{1.3}$ – пульпа на выходе с мешалки, 0–200 т/ч	$f_1$ – перегрев подшипников привода и редуктора мельницы, до 75°;	$m_1$ – выход из строя датчиков; $m_2$ – износ оборудования
Стадия 2	$x_2$ – подача пульпы с первой стадии помола, 0–200 т/ч	$y_{2.1}$ – влажность шихты, 30–35 %; $y_{2.2}$ – уровень шихты в мешалке, 1,5–4,5 м; $y_{2.3}$ – пульпа на выходе с мешалки, 0–125 т/ч	$f_2$ – перегрев подшипников цапф мельницы, до 65°;	
Стадия 3	$x_{3.1}$ – подача нефелиновой пульпы, 0–125 т/ч; $x_{3.2}$ – подача известняка, 0–160 т/ч; $x_{3.3}$ – подача оборотного раствора, 0–63 м <sup>3</sup> /ч	$y_{3.1}$ – влажность шихты, 26,5–27 %; $y_{3.2}$ – уровень шихты в мешалках, 1,5–4,5 м; $y_{3.3}$ – пульпа на выходе с мешалки, 0–200 т/ч	$f_3$ – забитие загрузочной воронки мельницы, до 3 м;  $f_4$ – отсутствие материала в бункере руды;	
Стадия 4	$x_4$ – подача пульпы с третьей стадии помола, 0–200 т/ч;	$y_{4.1}$ – влажность шихты, 30–35 %; $y_{4.2}$ – уровень шихты в мешалках, 1,5–4,5 м; $y_{4.3}$ – пульпа на выходе с мешалки, 0–200 т/ч	$f_5$ – засорение маслофильтра (повышение давления)	

Для того чтобы отвечать требованиям процесса сразу по нескольким показателям и при этом делать это автоматически, необходимо разработать программу управления, содержащую контур автоматического регулирования химического состава шихты, и мнемосхему на основе современного программного обеспечения (ПО). Из ряда различных SCADA-систем была выбрана WinCC, так как она имеет мощный набор инструментов для любых задач в области автоматизации. Имитационные возможности ПО WinCC позволяют в реальном времени следить за изменениями технологического процесса, описанного с помощью программных и функциональных блоков, а также воздействовать на выходные переменные в ходе процесса [11; 12].

### Разработка мнемосхемы для управления каскадом

Разработан проект виртуального управления, который включает несколько экранов.

Экран «Мельница 1» (рис. 3) является главным экраном управления мельницей первой стадии приготовления шихты. Верхняя часть экрана является общей панелью управления. Она включает в себя тумблеры управления мельницами, выбор режимов работы мельниц 1 и 3 стадии и задание расходов материалов на входе в мельницы и выходе из мешалок [13].

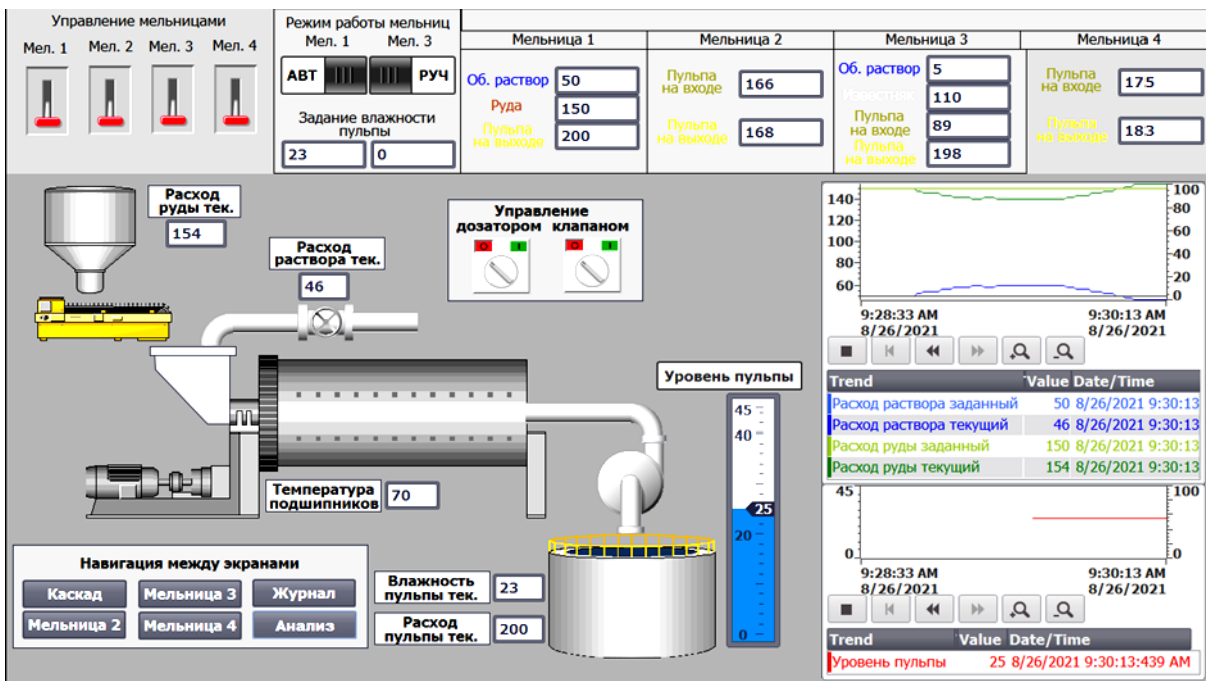


Рис. 3. Экран «Мельница 1»

Fig. 3. Screen «Mill 1»

В левой части экрана «Мельница 1» показана мельница, бункер руды, конвейер, трубопровод с раствором, мешалка и насос на выходе из мельницы. Также здесь расположены текущие показания датчиков. В нижней части расположена навигационная панель. Справа находятся тренды, на которых показаны расходы материалов текущий и заданный, а также тренд уровня пульпы в мешалке.

### Имитация работы мельницы

Управление каскадом мельниц осуществляется в несколько этапов, которые во время работы могут повторяться. На рис. 4 отображена очередность работы блоков программы управления. Входные показатели на блок-схеме включают в себя управляющие воздействия и состав сырья.

Имитация показаний датчиков реализована при помощи скриптов на языке VBS.

Изменение значений расхода материалов в мельницу может изменить также и влажность поступающей смеси. Чтобы показать это на мнемосхеме, был разработан скрипт. Работа скрипта

заключается в том, что непрерывно происходит проверка равенства между текущей влажностью в мешалке и влажностью поступающей смеси и, если равенство нарушено, то происходит уменьшение либо увеличение значения текущей влажности до необходимого значения [14].

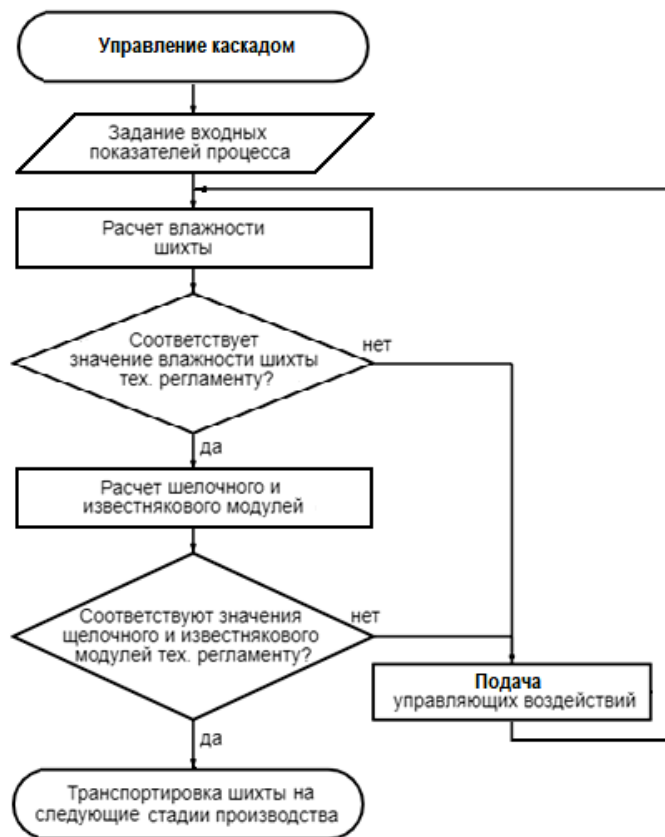


Рис. 4. Блок-схема управления каскадом

Fig. 4. Block-diagram of the cascade control

Автоматический режим работы мельницы предполагает, что отклонение значения текущей влажности от заданного будет приводить к изменению значений расхода материалов, поступающих в мельницу. Например, если значение текущей влажности меньше заданного, необходимо повысить расход раствора, но при этом снизить расход руды, чтобы общая производительность мельницы не изменилась. Ниже на панели трендов показан такой случай (рис. 5) [15].

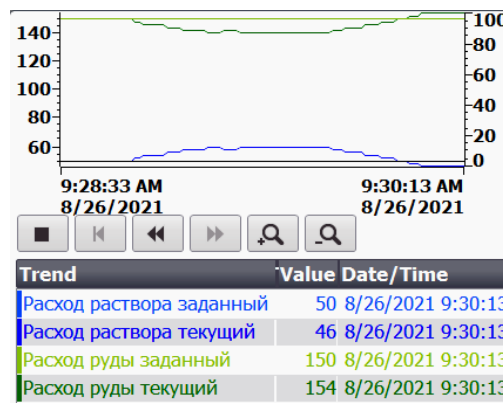


Рис. 5. Панель трендов расхода

Fig. 5. Bar of the flow trends



На рис. 6 показана панель задания состава сырья и расчета модулей. Перейти к ней можно через навигационную панель – вкладка «Анализ». Для имитации работы лабораторных анализаторов была разработана программа расчета щелочного и известнякового модулей на языке FBD. Благодаря программе, можно изменить состав сырья и увидеть изменение значения модулей в реальном времени. Известняковый и щелочной модули вычисляются на основе расчетных формул согласно технологическому регламенту, описанному выше.

Состав руды		Состав известняка	
Текущий, %	Регламент, %	Текущий, %	Регламент, %
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> <input type="text" value="+26"/>	25,5-27,5	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> <input type="text" value="+1"/>	0,1-1
SiO <sub>2</sub> <input type="text" value="+40"/>	39-41	SiO <sub>2</sub> <input type="text" value="+3"/>	1-5
CaO <input type="text" value="+8"/>	7-9	CaO <input type="text" value="+53"/>	50-55
Na <sub>2</sub> O <input type="text" value="+10"/>	10-11,5	Состав раствора Текущий, %    Регламент, %	
K <sub>2</sub> O <input type="text" value="+3"/>	2,5-3		
Модуль известняковый <input type="text" value="+2.379"/>		Модуль щелочной <input type="text" value="+1.705"/>	

Рис. 6. Панель задания состава входного сырья и расчета модулей

Fig. 6. Bar for specifying the raw material composition and module calculation

### Заключение

Автоматизация процесса приготовления шихты при производстве глинозема имеет некоторые проблемы, которые были описаны выше. Разработанные мнемосхема и программы в SCADA-системе WinCC позволяют частично решить эти проблемы, а именно: осуществить контроль технологических параметров, вывод их значений в АСУ ТП и индикацию работы оборудования; реализовать автоматическое управление каскадом на основе сбора данных в АСУ ТП; рассчитать выходные показатели шихты на основе данных о составе входного сырья и объема входных потоков на каскад мельниц. Последнее позволяет задавать и регулировать соотношение подачи руды, известняка и воды для обеспечения нужного качества шихты.

### Библиографические ссылки

1. Пат. 2006112505 Российская Федерация, МПК С 01 F 7/38. Способ переработки нефелиновой руды с дозировкой боксита / Аникеев В. И.; заявитель Открытое акционерное общество «РУСАЛ Ачинский Глиноземный Комбинат». № 2006112505/15; заявл. 14.04.06; опубл. 10.11.07. 4 с.
2. Пат. 2725228 Российская Федерация, СПК С 01 F 7/38. Способ управления приготовлением шихты при переработке нефелинового сырья с получением глинозема и содопродуктов / Анушенков А. Н., Шепелев И. И., Головных Н. В., Чудиенко К. В.; заявитель и патентообладатель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет». № 2019137933; заявл. 22.11.19; опубл. 30.06.20, Бюл. № 19. 3 с.
3. Пат. 2450066 Российская Федерация, МПК С 22 В 21/00, С 01 F 7/38, С 22 В 1/14, С 22 В 3/04. Способ переработки нефелиновых руд для получения глинозема и содопродуктов / Оголь В. Г., Ягин В. П.; заявитель и патентообладатель В. Г. Оголь. № 2011109408/02; заявл. 11.03.11; опубл. 10.05.12, Бюл. № 13. 3 с.
4. Пат. 2606821 С Российская Федерация, МПК С 22 В 21/00, С 01 F 7/38, С 22 В 1/14, С 22 В 3/04. Способ переработки нефелиновой руды / Шепелев И. И., Сахачев А. Ю., Анушенков А. Н.,

Александров А. В.; заявитель и патентообладатель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет». № 2015137673; заявл. 03.09.15; опубл. 10.01.17. 6 с.

5. Пат. 2702590 С2 Российская Федерация, МПК С 01 F 7/38. Способ переработки нефелиновой руды и концентратов / Алгебраистова Н. К., Шепелев И. И., Сахачев А. Ю., Жуков Е. И., Жижаяев А. М., Александров А. В., Свиридов Л. И.; заявитель и патентообладатель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет». № 2017146961; заявл. 28.12.17; опубл. 08.10.2019. 13 с.

6. Исследование измельчаемости нефелиновой руды и шлака ферротитанового производства для их переработки по спекательной технологии / И. И. Шепелев, Н. К. Алгебраистова, А. Ю. Сахачев и др. // Вестник Иркутского гос. тех. ун-та. 2017. Т. 21, № 11 (130). С. 167–178.

7. Козлов А. А., Колмакова Л. П., Ковтун О. Н. Анализ технологий подготовки шихты для спекания нефелиновой руды на АО «РУСАЛ Ачинск» // Евразийский Союз Ученых (ЕСУ). 2018. № 11 (56). С 20–22.

8. Ачинский глиноземный комбинат. РУСАЛ [Электронный ресурс]. URL: <https://rusal.ru/about/geography/achinskiy-glinozemu-kombinat/> (дата обращения: 24.03.2022).

9. Лайнер А. И. Производство глинозема. М. : Metallurgizdat, 1961. 619 с.

10. Пивнев А. И. Разработка и внедрение новой технологии приготовления глиноземсодержащей шихты при комплексной переработке нефелинов : дис. ... канд. техн. наук. Красноярск : КИЦМ, 1994.

11. Программное обеспечение конфигурирования SIMATIC WinCC (TIA Portal): каталог IndustryMall [Электронный ресурс]. URL: <https://mall.industry.siemens.com/mall/ru/RU/catalog/products/10090965> (дата обращения: 24.03.2022).

12. «Виртуальный СЛИПП» – математическая модель для управления агрегатом СЛИПП и ее визуализация с помощью программных продуктов WinCC 7.0 и Step 7 / Т. В. Пискажова, С. Б. Сидельников, В. М. Белолипецкий и др. // Вестник Сиб. гос. аэрокос. ун-та имени академика М. Ф. Решетнева. 2015. Вып. 2(54). С.140–144.

13. Сверчков Д. С. Разработка человеко-машинного интерфейса и его применение в системах управления // Труды Крыловского гос. науч. центра. 2018. № 1. С. 184–190.

14. Руководство по программированию контроллеров S7-1200/S7-1500: базовое системное руководство [Электронный ресурс]. URL: <https://assets.new.siemens.com/siemens/assets/api/uuid:6f74436a53942bf8f1c7b6ed34d2ae72e92ed8a8/programming-guideline-v14-rus.pdf> (дата обращения: 02.05.2022).

15. Каюков И. Ю. Создание трендов процесса в среде разработки WINCC // Междунар. студенческий науч. вестник. 2021. № 6. С. 44–50.

## References

1. Anikeev V. I. *Sposob pererabotki nefelinovoy rudy s dozirovkoy boksita* [Method for processing nepheline ore with bauxite dosage]. Patent RF, No. 2006112505, 2006.

2. Anushenkov A. N., Shepelev I. I., Golovnyh N. V., Chudiyenko K. V. *Sposob upravleniy prigotovleniem shihty pr ipererabotke nefelinovogo cyrya s polucheniem glinozema I sodoproduktov* [Method for controlling the charge preparation during the processing of nepheline raw material with the production of alumina and soda products]. Patent RF, No. 2725228, 2019.

3. Ogol V. G., Yagin V. P. *Sposob pererabotki nefelinovoy rudy dly polucheniy glinozema I sodoproduktov* [Method for processing nepheline ores for producing alumina and soda products]. Patent RF, No. 2450066, 2011.

4. Shepelev I. I., Sakhachev A. Y., Anushenkov A. N., Aleksandrov A. V. *Sposob pererabotki nefelinovoy rudy* [Method of processing nepheline ore]. Patent RF, No. 2606821 C, 2017.

5. Algebraistova N. K., Shepelev I. I., Sakhachev A. Y., Zhukov E. I., Zhizhaev A. M., Aleksandrov A. V., Sviridov L. I. *Sposob pererabotki nefelinovoy rudy I koncentratov* [Processing method of nepheline ores and concentrates]. Patent RF, No. 2702590 C2, 2019.

6. Shepelev I. I., Algebraistova N. K., Sakhachev A. Y., Zhyzhaev A. M., Prokopiev I. V. [Grindability study of nepheline ore and ferrotitanium production slag for their processing by sintering technology]. *VestnikIrGTU*. 2017, Vol. 21, No. 11 (130), P. 167–178 (In Russ.).
7. Kozlov A. A., Kolmakova L. P., Kovtun O. N. [Analysis of technologies of preparation of the charge for sintering of nepheline ore at RUSAL Achinsk]. *Evrziskisouzycheny*. 2018, No. 11 (56), P. 22–22 (In Russ.).
8. *Achinsky Glinozemny Kombinat. RUSAL* [Achinsky Alumina Plant. RUSAL] (In Russ.). Available at: <https://rusal.ru/about/geography/achinskiy-glinozemnyy-kombinat/> (accessed 24.03.2022).
9. Linder A. I. *Proizvodstvoglinozema* [Alumina production]. Moscow, Metallurgizdat Publ., 1961, 619 p.
10. Pivnev A. I. *Razrabotka i vnedreniye novoy tekhnologii prigotovleniya glinozemsoderzhashchey shikhty pri kompleksnoy pererabotke nefelinov. Kand. Dis.* [Development and introduction of a new technology for the preparation of alumina-containing charge. Cand. Dis.]. Krasnoyarsk, KICM Publ., 1994.
11. *Programmnoye obespecheniye konfigurirovaniya SIMATIC WinCC (TIA Portal): catalog Industry Mall* [Software for configuration of the SIMATIC WinCC (TIA Portal): catalogueIndustry Mall]. (In Russ.). Available at: <https://mall.industry.siemens.com/mall/ru/RU/catalog/products/10090965> (accessed 24.03.2022).
12. Piskazhova T. V., Sidelnikov S. B., Belolipetskii V. M., Yakiviyuk P. N., Sidelnikov A. S. [Virtual CC&RP – a mathematical model for the control of the unit CC&RP and its visualization by means software products WinCC 7.0 and Step 7]. *Vestnik SibGAU*. 2015, No. 2(54), P. 140–144 (In Russ.).
13. Sverchkov D. [Human-machine interface development and application in control systems]. *Transactions of the Krylov State Research Centre*. 2018, No. 1, P. 184–190 (In Russ.).
14. *Rukovodstvo po programmirovaniyu kontrollerov S7-1200/S7-1500: bazovoye sistemnoye rukovodstvo* [Guide to programming controllers S7-1200/S7-1500: base system guide]. Available at: <https://assets.new.siemens.com/siemens/assets/api/uuid:6f74436a53942bf8f1c7b6ed34d2ae72e92ed8a8/programming-guideline-v14-rus.pdf> (accessed 02.05.2022).
15. Kayukov I. Yu. [Creation process trends in the WINCC development environment]. *Mezhdunarodnyy studencheskiy nauchnyy vestnik*. 2021, No. 6, P. 44–50 (In Russ.).

© Иванов Р. Д., Даныкина Г. Б., Пискажова Т. В., Колмакова Л. П., 2022

---

**Иванов Роман Денисович** – магистрант; Сибирский федеральный университет. E-mail: aronstoun.roman@mail.ru.

**Даныкина Галина Борисовна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов в металлургии; Сибирский федеральный университет. E-mail: danykinagb-sfu@mail.ru.

**Пискажова Татьяна Валериевна** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры автоматизации производственных процессов в металлургии; Сибирский федеральный университет. E-mail: piskazhova@yandex.ru.

**Колмакова Людмила Петровна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры металлургии цветных металлов; Сибирский федеральный университет. E-mail: kolmakoval2010@mail.ru.

**Ivanov Roman Denisovich** – Master's Degree Student; Siberian Federal University. E-mail: aronstoun.roman@mail.ru.

**Danykina Galina Borisovna** – Cand. Sc., Associate Professor of the Department Automation of production processes in metallurgy; Siberian Federal University. E-mail: danykinagb-sfu@mail.ru.

**Piskazhova Tatyana Valerievna** – Dr. Sc., Professor of the department Automation of production processes in metallurgy; Siberian Federal University. E-mail: piskazhova@yandex.ru.

**Kolmakova Lyudmila Petrovna** – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of Non-Ferrous Metals Metallurgy; Siberian Federal University. E-mail: kolmakoval2010@mail.ru.

---

УДК 544.623.032.52

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-551-560

**Для цитирования:** Разработка принципов управления блоком обессоливания для замкнутых систем жизнеобеспечения космического назначения / А. А. Тихомиров, С. В. Трифонов, Е. А. Морозов, А. В. Мурыгин // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 551–560. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-551-560.

**For citation:** Tikhomirov A. A., Trifonov S. V., Morozov Ye. A., Murygin A. V. [Development of control principles for the desalination unit for closed life support systems for space purposes]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 551–560. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-551-560.

## Разработка принципов управления блоком обессоливания для замкнутых систем жизнеобеспечения космического назначения\*

А. А. Тихомиров<sup>1,2</sup>, С. В. Трифонов<sup>1,2\*\*</sup>, Е. А. Морозов<sup>1</sup>, А. В. Мурыгин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт биофизики СО РАН

Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, ул. Академгородок, 50/50

<sup>2</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

\*\*E-mail: trifonov\_sergei@inbox.ru

*Освоение Солнечной системы человеком подразумевает создание долгосрочных обитаемых баз на ряде космических тел: Луне, Марсе и др. Поддержание на таких базах среды благоприятной для экипажа возможно благодаря системам жизнеобеспечения (СЖО), в которых реализуется замкнутый массообмен продуктов и отходов между экипажем, звеном высших растений и другими звеньями. Замкнутость повышает надежность и автономность системы, снижает стоимость ее снабжения. Управление таким массообменом представляет трудной технической задачей, требующей затрат многих человеко-часов, что является ценным ресурсом при осуществлении пилотируемых космических миссий. В общем случае эта задача решается средствами автоматики, однако, необходимо учитывать специфику процессов, поддерживающих массообмен, так как это позволит найти пути упрощения аппаратной и логической составляющих, повысить их универсальность и надежность.*

*В данной статье представлен анализ технологических процессов экспериментального блока выделения NaCl из растворов минерализованных метаболитов человека и предложен простой алгоритм управления, который без принципиальных изменений может быть использован для всех процессов блока. Без разработки цикла превращений NaCl становится практически невозможным создание долгосрочно функционирующей биолого-технической системы жизнеобеспечения – оптимального варианта СЖО для инопланетных баз. В таких системах происходит массообмен между экипажем и звеном высших растений и существует опасность накопления NaCl в ирригационных растворах и последующего отравления растительного звена. Поэтому проблема управления циклом превращений NaCl в массообменных процессах высокой степени замкнутости является актуальной, а универсальные принципы автоматизированного управления могут быть использованы не только в космических, но и земных приложениях: в замкнутых агротехнических циклах и научно-образовательных стендах.*

*Ключевые слова:* управление технологическим процессом, системы жизнеобеспечения, утилизация органических отходов, обессоливание, растительное звено.

\* Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0287-2021-0024).

The study was funded by State Assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0287-2021-0024).

## Development of control principles for the desalination unit for closed life support systems for space purposes

A. A. Tikhomirov<sup>1,2</sup>, S. V. Trifonov<sup>1,2\*\*</sup>, Ye. A. Morozov<sup>1</sup>, A. V. Murygin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Biophysics SB RAS

50/50, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation

<sup>2</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology

31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

\*\*E-mail: trifonov\_sergei@inbox.ru

*The development of the Solar system by humans implies the creation of long-term habitable bases on a number of cosmic bodies: the Moon, Mars, etc. Maintaining an environment favorable for the crew on such bases is possible thanks to life support systems (LSS), in which a closed mass transfer of products and waste between the crew, the unit of higher plants and other links is implemented. Closure increases the reliability and autonomy of the system, and reduces the cost of its supply. Controlling such mass transfer appears to be a difficult technical task requiring many man-hours, which is a valuable resource in the implementation of manned space missions. In the general case, this problem is solved by means of automation, however, it is necessary to take into account the specifics of the processes that support mass transfer, since this will allow finding ways to simplify the hardware and logical components, increase their versatility and reliability.*

*This article presents an analysis of the technological processes of the experimental unit for the separation of NaCl from solutions of mineralized human metabolites and proposes a simple control algorithm that can be used for all processes of the unit without fundamental changes. Without the development of a NaCl transformation cycle, it becomes almost impossible to create a long-term functioning biological and technical life support system – the optimal LSS option for alien bases. In such systems, mass transfer occurs between the crew and the link of higher plants and there is a danger of NaCl accumulation in irrigation solutions and subsequent poisoning of the plant link. Therefore, the problem of controlling the NaCl transformation cycle in mass transfer processes of a high degree of closure is relevant, and the universal principles of automated control can be used not only in space, but also in terrestrial applications: in closed agrotechnical cycles and scientific and educational stands.*

*Keywords: process control, life support systems, utilization of organic waste, desalination, plant link.*

### Введение

Замкнутые искусственные экосистемы, включающие человека и высшие растения, представляют научный интерес в исследованиях круговоротных процессов естественных и искусственных экосистем. Технологии, разрабатываемые для организации массообмена между экипажем и звеном высших растений, планируется использовать при создании биотехнических систем жизнеобеспечения (БТСЖО) планетарных баз, в том числе лунной и марсианской [1–3]. Одним из ключевых моментов в организации массообмена является быстрая и экологически чистая переработка органических отходов, в том числе метаболитов человека, в удобрения. Существует ограниченное число методов такой утилизации [1–12], каждый из которых имеет недостатком высокое относительное содержание NaCl в продуктах переработки. Постоянное их использование в качестве удобрений приведет к засолению ирригационных растворов и снижению производительности космической оранжереи при ее долговременном многомесячном функционировании. В итоге экипаж начнет испытывать дефицит растительной пищи, а затем воды и кислорода. В этой связи представляется актуальным развитие технологий обессоливания [13; 14], в том числе развитие автоматизированного управления соответствующими технологическими процессами.

Очевидно, что разработку технологии извлечения NaCl рациональнее всего выполнять в комплексе с технологией переработки отходов, так как основным источником NaCl в массо-

обмене являются метаболиты человека. В Институте биофизики СО РАН ведется разработка комплекса физико-химической переработки отходов растительного и животного происхождения, в том числе метаболитов человека, для вовлечения элементов, содержащихся в данных отходах, в круговорот массообменных процессов БТСЖО. Данный комплекс основывается на минерализации отходов методом «мокрого» сжигания, суть которого заключается в окислении органических отходов в водном растворе перекиси водорода под действием переменного электрического тока [12; 15; 16]. В результате такой переработки образуется минерализованный раствор, который может быть использован для приготовления ирригационного раствора звена высших растений [15; 16]. Данный метод имеет большое преимущество в скорости утилизации и экологической безопасности получаемых продуктов (раствор и газ) [16].

Помимо опасности засоления, получаемая реакторная жидкость не может быть непосредственно внесена в ирригационный раствор для растений, так как метод «мокрого» сжигания практически не способен утилизировать мочевины, что повышает риск развития в системе условно патогенных уробактерий [16]. Поэтому комплекс физико-химической переработки органических отходов включает в себя несколько процессов [12]:

- 1) «мокрое» сжигание отходов;
- 2) разложение мочевины;
- 3) выделение NaCl.

Для налаживания надежного массообменного цикла БТСЖО необходимо, чтобы все процессы комплекса переработки отходов протекали в течение технологически приемлемого времени (не более 1–2 суток). Предпочтительнее всего было бы иметь возможность переработать суточную норму жидких выделений человека в течение суток.

Данная работа посвящена разработке принципов управления технологическими процессами разложения мочевины и выделения NaCl из раствора минерализованных метаболитов человека, полученных методом «мокрого» сжигания. В разрабатываемом блоке выделения NaCl осуществляется несколько физико-химических последовательных и параллельных процессов. Несмотря на различия в химии процессов, их динамика схожа, а условия протекания обеспечиваются аналогичными физико-химическими методами. Это позволяет выстроить аппаратную и программную часть элементов блока таким образом, чтобы имелась возможность взаимной замены комплектующих. Благодаря этому будет повышена живучесть и надежность БТСЖО, снижены риски успешного выполнения миссии.

### **Технологические процессы блока обессоливания**

Общая схема экспериментального комплекса физико-химической переработки органических отходов представлена на рис. 1. Согласно этой схеме, после переработки в реакторе «мокрого» сжигания, минерализованные экзометаболиты поступают в реактор ферментативного разложения мочевины с помощью уреазы [16; 17]. Также в этот реактор происходит периодическое поступление HCl, синтезируемого в реакторе синтеза HCl [18], для коррекции уровня pH раствора. Процесс гидролиза мочевины в растворе завершается при снижении уровня ее концентрации до определенного значения.

Далее раствор поступает в выделитель Cl<sub>2</sub>, где вследствие электролиза происходит образование газообразного Cl<sub>2</sub>, который поступает в реактор синтеза HCl [18], необходимой для получения NaCl на последнем этапе технологического процесса. Выделение Cl<sub>2</sub> происходит за счет электролиза раствора и завершается при снижении уровня концентрации Cl<sup>-</sup> в растворе до определенного значения.

Синтез HCl [12] протекает до тех пор, пока весь газообразный хлор, образованный на предыдущем этапе, не будет конвертирован в кислоту и зафиксирован в воде, то есть процесс останавливается при достижении определенного значения концентрации HCl в водном растворе.

После разложения мочевины и выделения хлора раствор поступает в электролизер, в котором осуществляется выделение щелочной части из минерализованных метаболитов, содержа-

щей в себе основную долю металлов. Кислая и нейтральные части возвращаются в ирригационный раствор. Процесс выделения щелочной части направлен на понижение концентрации  $\text{Na}^+$  в растворе, поэтому сигналом к его окончанию служит снижение уровня этой концентрации до определенного значения, определяемого оператором.

Далее в реакторе синтеза карбоната натрия происходит выделение  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  из щелочного раствора, а остальные компоненты щелочного раствора в виде раствора карбонатов возвращаются в ирригационный раствор. Синтез  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  многоступенчатый:

1) барботаж воздухом и нагрев до определенной температуры щелочного раствора, пока он не будет сконцентрирован до определенного объема (уровня);

2) барботаж  $\text{CO}_2$  раствора  $\text{NaHCO}_3$  и  $\text{KHCO}_3$ , до достижения определенного давления газа над раствором;

3) охлаждение до определенной температуры и раствора  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  и  $\text{K}_2\text{CO}_3$  и поддержание пониженного давления над раствором определенное время.

На последнем физико-химическом этапе в реакторе синтеза  $\text{NaCl}$  происходит смешивание  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  и  $\text{HCl}$  с образованием раствора  $\text{NaCl}$ . Процесс протекает в жидкой фазе и завершается при достижении требуемого уровня pH. Далее полученный раствор с высоким содержанием  $\text{NaCl}$  может быть доочищен для непосредственного получения пищевой соли либо использован для культивирования галофитов в фототрофном звене, обеспечивающих человека  $\text{NaCl}$ .

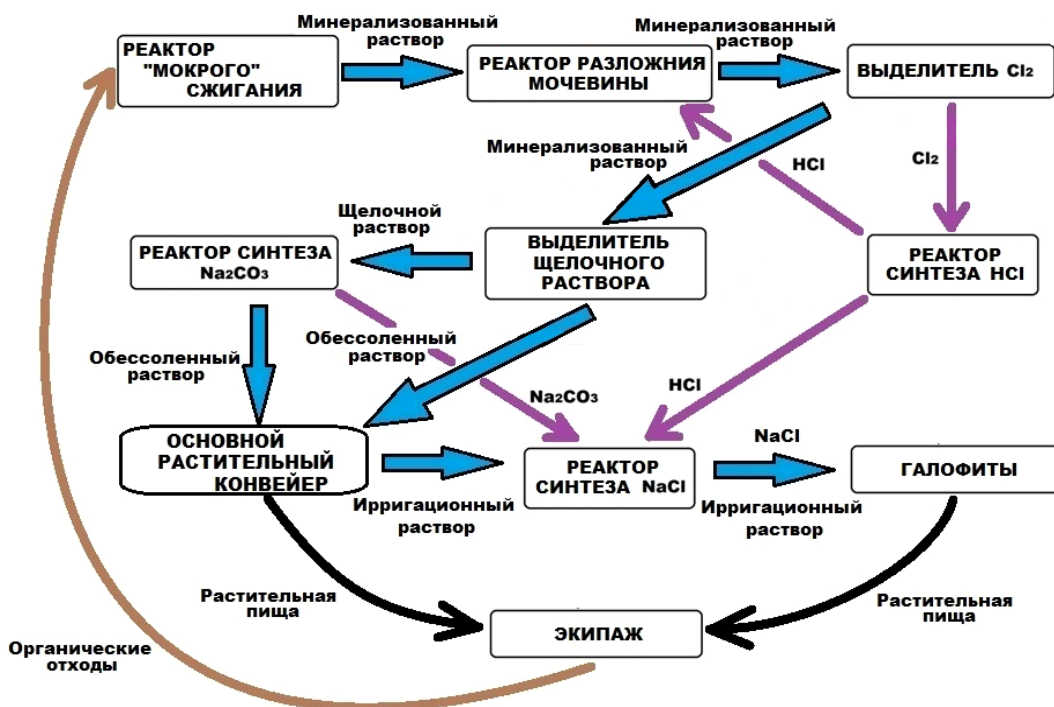


Рис. 1. Цикл NaCl в массообмене БТСЖО

Fig. 1. Cycle of NaCl in the mass transfer of BTLSS

Экспериментально показано, что разрабатываемая физико-химическая технология обессоливания минерализованных метаболитов человека в перспективе позволит менее чем за сутки удалять из раствора до 80 %  $\text{NaCl}$ , который в дальнейшем может быть использован для получения пищевой соли экипажа [19]. Выявление аналогичных моментов в технологических процессах блока обессоливания позволит применить универсальные, взаимозаменяемые элементы аппаратного обеспечения и логического управления процессами, что поможет значительно сократить массу блока, повысить его надежность, а оператору проще сохранять контроль, переходя от одного технологического этапа к другому.

### Принципы управления блока обессоливания

Каждый из технологических процессов блока обессоливания можно охарактеризовать монотонным достижением целевым параметром определенного значения, интересующего оператора. На этапе разложения мочевины о завершении процесса можно ориентироваться по изменению концентрации мочевины, или продукта ее гидролиза –  $\text{NH}_4^+$ , что технологически проще реализуется измерительными электродами [19]. Окончание процессов выделения  $\text{Cl}_2$  и синтеза  $\text{HCl}$  определяется по показаниям концентрации  $\text{Cl}^-$  в растворе, процесса выделения щелочной части – по показаниям концентрации  $\text{Na}^+$  в растворе. Выделение карбоната натрия и синтез  $\text{NaCl}$  завершаются при достижении определенного времени или значения pH, или уровня раствора. Во всех случаях оператор должен получать данные, в том числе графические, по динамике и текущему значению, только одного целевого параметра процесса, чтобы снизить вероятность ошибки и риски успешного завершения работы блока.

Соответствующие условия для технологических процессов блока обессоливания должны обеспечиваться поддержанием в оптимальном диапазоне ряда параметров среды: температуры и давления газа над раствором, температуры, pH и уровня раствора. Эти параметры могут корректироваться методом релейной автоматики путем включения/отключения исполнительного устройства (нагревателя, насоса кислоты или воздушного насоса) в зависимости от показаний датчиков. Также необходимо отслеживать критические отклонения от оптимальных параметров, способные привести к разрушению технологической линии.

Исходя из изложенных характеристик процессов, управление блоком обессоливания можно разделить на две автоматизированные подсистемы, контролирующие достижение целевого параметра и параметры условий соответственно (см. таблицу). Первая подсистема отслеживает факт достижения целевым параметром определенного значения (сигнал о завершении технологического этапа), а также динамику этого процесса для контроля скорости его течения. Динамику может контролировать оператор, ориентируясь по характеру тренда значений целевого параметра, или автоматика, удерживая значения производных целевого параметра в заданных диапазонах. Вторая подсистема поддерживает параметры среды в требуемом диапазоне либо экстренно останавливает процесс при их выходе за критическое значение.

#### Контролируемые параметры этапов обессоливания

Этап	Контролируемые параметры	
	Целевой параметр	Параметры условий
Разложение мочевины	Концентрация $\text{NH}_4^+$	$t^\circ$ раствора, pH
Выделение $\text{Cl}_2$	Концентрация $\text{Cl}^-$	$t^\circ$ раствора, V раствора
Синтез $\text{HCl}$	Концентрация $\text{Cl}^-$	$t^\circ$ раствора, V раствора
Выделение щелочного раствора	Концентрация $\text{Na}^+$	$t^\circ$ раствора, V раствора
Синтез $\text{Na}_2\text{CO}_3$	V раствора/ P газа/ Время	$t^\circ$ раствора
Синтез $\text{NaCl}$	pH	$t^\circ$ раствора

*Примечание.*  $t^\circ$  – температура; V – объем; P – давление.

Подобие задач управления технологическими процессами позволяет использовать одинаковую логику работы алгоритма управления (рис. 2) на всех этапах обессоливания. Работа алгоритма должна начинаться с блока predetermined процесса: проверки подключения датчиков и исполнительных устройств для оценки технического состояния агрегатов. Далее необходим блок данных: ввод оператором значений целевых параметров и параметров условий процесса – для возможности использования одного устройства управления на всех этапах обессоливания. Также это позволит применять систему управления для проведения опытов с физико-химическими процессами в настраиваемых экспериментальных условиях.

После ввода значений параметров работу начинает подсистема, контролирующая текущие параметры условий технологического процесса. Блок процессов считывает и записывает данные о параметрах условий. Далее блок принятия решений сравнивает значения этих параметров с требуемыми диапазонами значений. Если значение параметра находится внутри диапазона,



включая его граничные значения, то процесс протекает нормально и контроль переходит подсистеме, отслеживающей достижение целевым параметром заданного значения. Если значение параметра условий находится вне требуемого диапазона, то следующий блок принятия решений сравнивает текущее значение параметра условий с критическим диапазоном значений. Если значение параметра находится внутри критического диапазона, включая его граничные значения, то блок процессов выполняет акт корректировки условий исполнительными устройствами, после чего цикл алгоритма возвращается на этап работы блока процессов, который считывает и записывает данные об обновленных параметрах условий. Если значение параметра условий находится вне критического диапазона, то блок predetermined процесса проводит подготовку реактора к экстренному отключению и алгоритм завершает работу, отключая реактор.

Подсистема контроля целевого параметра начинает работу, если значения параметров условий находятся в заданном диапазоне. Блок процессов считывает и записывает данные о текущем значении целевого параметра. Далее блок принятия решений сравнивает текущее значение с требуемым. Если значение параметра меньше требуемого, то процесс продолжается, и цикл возвращается к блоку процессов, который считывает и записывает данные об обновленных параметрах условий. Если значение целевого параметра больше либо равно заданному, то блок predetermined процесса проводит подготовку реактора к планомерному отключению и алгоритм завершает работу, отключая реактор.

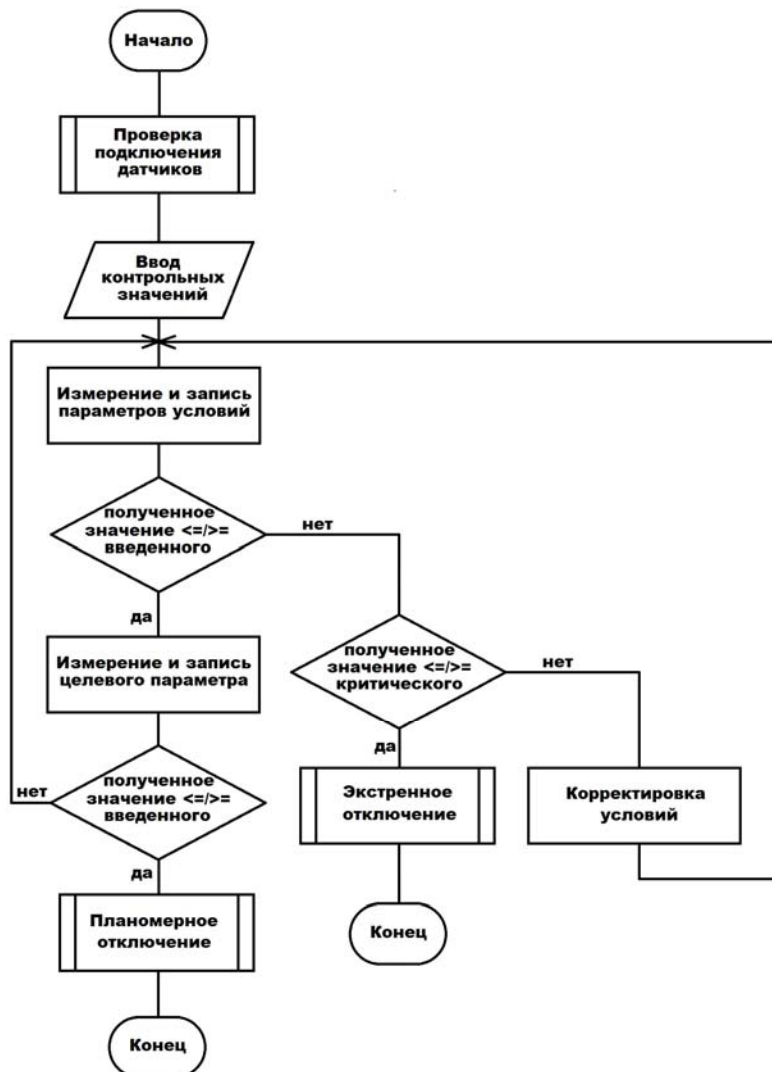


Рис. 2. Алгоритм работы программы автоматике

Fig. 2. Algorithm of the automation program

Функциональная схема автоматики представлена на рис. 3. Элементы схемы являются универсальными и могут принимать участие в нескольких этапах работы блока выделения NaCl.

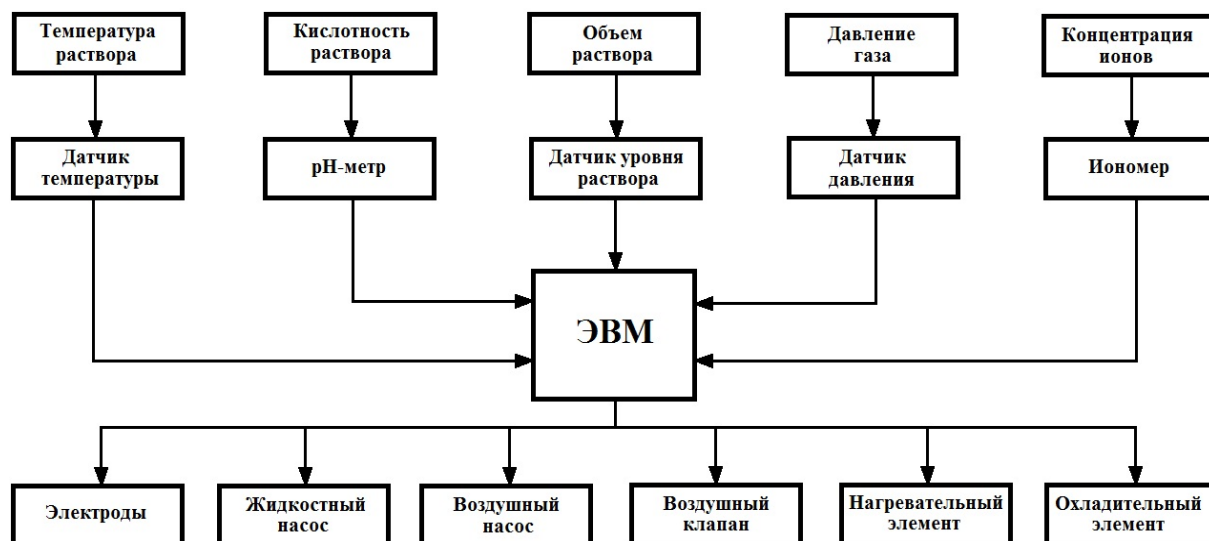


Рис. 3. Функциональная схема автоматики блока выделения NaCl

Fig. 3. Functional scheme of the NaCl extraction block automation

### Заключение

Разрабатываемый блок обессоливания растворов является частью подсистемы физико-химической утилизации органических отходов БТСЖО. В эту подсистему также входит реактор «мокрого» сжигания, процесс минерализации в котором многостадийен и имеет цепной характер. Принципы его автоматизации, изложенные в [12; 19; 20], базируются на многократном изменении целевого параметра и требуют введения дополнительного параметра – температуры – при масштабировании процесса. Вследствие этого применение подхода, изложенного в данной статье, невозможно при разработке алгоритма управления реактором «мокрого» сжигания. Тем не менее он имеет ряд преимуществ.

Представленный алгоритм может обслуживать 6 из 7 технологических этапов подсистемы физико-химической утилизации органических отходов. Использование только одного целевого параметра в качестве индикатора завершения процесса поможет оператору в сохранении контроля при переходе от одного технологического этапа к другому. Возможность внесения контрольных значений параметров условий и целевого параметра позволяет применить автоматическое управление в научно-образовательном приложении. Например, при создании опытных или образовательных стендов для изучения процессов ферментации, электродиализа и кристаллизации.

В целом можно заключить, что описанные принципы управления блоком обессоливания повысят надежность БТСЖО. Во-первых, за счет снижения нагрузки на оператора благодаря автоматизации. Во-вторых, за счет дублирования аппаратной части. Ряд параметров, контролируемых алгоритмом на разных технологических этапах, измеряют принципиально одинаково: измерительными электродами, датчиками уровня, давления и температуры. Это означает, что от одного технологического этапа к другому могут быть использованы одни и те же вычислительные устройства. Отмеченные преимущества повышают перспективность применения БТСЖО в будущих планетарных базах, что благоприятно отразится на освоении человеком Солнечной системы.

## Библиографические ссылки

1. Gitelson J. I., Lisovsky G. M., MacElroy R. D. *Manmade Closed Ecological Systems*. Taylor and Francis, New York, 2003. 402 p.
2. Nelson M., Dempster W. F., Allen J. P. Integration of lessons from recent research for “Earth to Mars” life support systems // *Advances in Space Research*. 2008. Vol. 41. P. 675–683.
3. Canadian advanced life support capacities and future directions / M. Bamsey, T. Graham, M. Stasiak et al. // *Advances in Space Research*. 2009. Vol. 44. P. 151–161.
4. Drysdale A. E., Ewert M. K., Hanford A. J. Life support approaches for Mars missions // *Advances in Space Research*. 2003. Vol. 31 (1). P. 51–61.
5. Dynamic Aspects and Controllability of the MELiSSA Project: A Bioregenerative System to Provide Life Support in Space / B. Farges, L. Poughon, C. Creuly et al. // *Applied Biochemistry and Biotechnology*. 2008, Vol. 151, P. 686–699.
6. Progress and prospect of research on controlled ecological life support technique / S. S. Guo, R. X. Mao, L. L. Zhang et al. // *Reach*. 2017. Vol. 6. P. 1–10.
7. Walker J., Granjou C. MELiSSA the minimal biosphere: Human life, waste and refuge in deep space // *Futures*. 2017. Vol. 92. P. 59–69.
8. Escobar C., Nabity J. Past, present, and future of closed human life support ecosystems – a review // *47th International Conference on Environmental Systems*. 2017. P. 18.
9. Putnam D. F. *Composition and Concentrative Properties of Human Urine*. NASA contract report, Washington, 1971. 107 p.
10. Kudenko Yu. A., Gribovskaya I. A., Zolotukhin I. G. Physical-chemical treatment of wastes: A way to close turnover of elements in LSS // *Acta Astronautica*. 2000. Vol. 46. P. 585–589.
11. Kudenko Yu. A., Gribovskaya I. A., Pavlenko R. A. Mineralization of wastes of human vital activity and plants to be used in a life support system // *Acta Astronautica*. 1997. Vol. 41. P. 193–196.
12. Подсистема физико-химических реакторов минерализации отходов для биолого-технических систем жизнеобеспечения космического назначения / Е. А. Морозов, С. В. Трифонов, М. Ю. Салтыков и др. // *Сибирский журнал науки и технологии*. 2017. Т. 18, № 3. С. 585–591.
13. Cherif M., Mkacher I., Dammak L. Water desalination by neutralization dialysis with ion-exchange membranes: Flow rate and acid/alkali concentration effects // *Desalination*. 2015. Vol. 361. P. 13–24.
14. Effect of NaCl concentration on productivity and mineral composition of *Salicornia europaea* as a potential crop for utilization NaCl in LSS / S. A. Ushakova, N. P. Kovaleva, I. V. Gribovskaya et al. // *Advances in Space Research*. 2005. Vol. 36. P. 1349–1353.
15. A biological method of including mineralized human liquid and solid wastes into the mass exchange of bio-technical life support systems / S. A. Ushakova, A. A. Tikhomirov, N. A. Tikhomi-rova et al. // *Advances in Space Research*. 2012. Vol. 50. P. 932–940.
16. Tikhomirov A., Kudenko Yu., Trifonov S., Ushakova S. Assessing the feasibility of involving gaseous products resulting from physicochemical oxidation of human liquid and solid wastes in the cycling of a bio-technical life support system // *Advances in Space Research*. 2012. Vol. 49. P. 249–253.
17. Физико-химическая переработка экзометаболитов человека для замкнутых систем жизнеобеспечения / Е. Ф. Сутормина, С. В. Трифонов, Ю. А. Куденко и др. // *Химия в интересах устойчивого развития*. 2011. Т. 19. С. 413–420.
18. Пат. 157597 Российская Федерация, МПК С 01 В 7/01. Устройство каталитического синтеза HCl из газообразного H<sub>2</sub> и Cl<sub>2</sub> / Тихомиров А. А., Куденко Ю. А., Трифонов С. В. № 2015132417/05 ; заявл. 03.08.2015 ; опубл. 10.12.2015, Бюл. № 34.
19. Trifonov S. V., Murygin A. V., Tikhomirov A. A. Physical-chemical method for desalting organic waste for agricultural cycles // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2021. Vol. 839, No. 4. P. 042062.

20. Компьютерная автоматизация установки «мокрого сжигания» органических отходов для замкнутых экосистем / М. Ю. Салтыков, Е. А. Морозов, С. В. Трифонов и др. // Вестник СибГАУ. 2016. № 2 (17). С. 438–443.

## References

1. Gitelson J. I., Lisovsky G. M., MacElroy R. D. *Manmade Closed Ecological Systems*. Taylor and Francis, New York, 2003, 402 p.
2. Nelson M., Dempster W. F., Allen J. P. Integration of lessons from recent research for “Earth to Mars” life support systems. *Advances in Space Research*. 2008, Vol. 41. P. 675–683. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2007.02.075>.
3. Bamsey M., Graham T., Stasiak M., Berinstain A., Scott A., Rondeau Vuk T., Dixon M. Canadian advanced life support capacities and future directions. *Advances in Space Research*. 2009, Vol. 44. P. 151–161. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2009.03.024>.
4. Drysdale A. E., Ewert M. K., Hanford A. J. Life support approaches for Mars missions. *Advances in Space Research*. 2003, Vol. 31 (1), P. 51–61. Available at: [https://doi.org/10.1016/S0273-1177\(02\)00658-0](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(02)00658-0).
5. Farges B., Poughon L., Creuly C., Cornet J.-F., Dussap C.-G., Lasseur, C. Dynamic Aspects and Controllability of the MELiSSA Project: A Bioregenerative System to Provide Life Support in Space. *Applied Biochemistry and Biotechnology*. 2008, Vol. 151, P. 686–699. Doi: <https://doi.org/10.1007/s12010-008-8292-2>.
6. Guo S. S., Mao R. X., Zhang L. L., Tang Y. K., Li Y. H. Progress and prospect of research on controlled ecological life support technique. *Reach*. 2017, Vol. 6, P. 1–10. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.reach.2017.06.002>.
7. Walker J., Granjou C. MELiSSA the minimal biosphere: Human life, waste and refuge in deep space. *Futures*. 2017, Vol. 92, P. 59–69. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.futures.2016.12.001>.
8. Escobar C., Nabyty J. Past, present, and future of closed human life support ecosystems – a review. *47th International Conference on Environmental Systems*. 2017, P. 18. Doi: <http://hdl.handle.net/2346/73083>.
9. Putnam D. F. *Composition and Concentrative Properties of Human Urine*. NASA contract report, Washington, 1971, 107 p.
10. Kudenko Yu. A., Gribovskaya I. A., Zolotukhin I. G. Physical-chemical treatment of wastes: A way to close turnover of elements in LSS. *Acta Astronautica*. 2000, Vol. 46, P. 585–589. Doi: [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(00\)00007-2](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(00)00007-2).
11. Kudenko Yu. A., Gribovskaya I. A., Pavlenko R. A. Mineralization of wastes of human vital activity and plants to be used in a life support system. *Acta Astronautica*. 1997, Vol. 41, P. 193–196. Doi: [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(97\)00215-4](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(97)00215-4).
12. Morozov Ye. A., Trifonov S. V., Saltykov M. Yu, Murygin A. V., Tikhomirov A. A. [Physico-chemical waste mineralization reactors subsystem for closed bio technical life support systems for space application]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2017, No. 3, P. 585–591 (In Russ.).
13. Cherif M., Mkacher I., Dammak L. Water desalination by neutralization dialysis with ion-exchange membranes: Flow rate and acid/alkali concentration effects. *Desalination*. 2015, Vol. 361, P. 13–24. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2015.01.024>.
14. Ushakova S. A., Kovaleva N. P., Gribovskaya I. V., Dolgushev V. A., Tikhomirova N. A. Effect of NaCl concentration on productivity and mineral composition of *Salicornia europaea* as a potential crop for utilization NaCl in LSS. *Advances in Space Research*. 2005, Vol. 36, P. 1349–1353. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2004.09.017>.
15. Ushakova S. A., Tikhomirov A. A., Tikhomirova N. A. Kudenko Yu. A., Litovka Yu. A., Anishchenko O. V. A biological method of including mineralized human liquid and solid wastes into the mass exchange of bio-technical life support systems. *Advances in Space Research*. 2012, Vol. 50, P. 932–940. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2012.05.023>.

16. Tikhomirov A., Kudenko Yu., Trifonov S., Ushakova S. Assessing the feasibility of involving gaseous products resulting from physicochemical oxidation of human liquid and solid wastes in the cycling of a bio-technical life support system. *Advances in Space Research*. 2012, Vol. 49, P. 249–253. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2011.10.003>.

17. Sutormina E. F., Trifonov S. V., Kudenko Yu. A., Ivanova Yu. A., Pinaeva L. G., Tikhomirov A. A., Isupova L. A. Physicochemical processing of human exometabolites for closed life support systems. *Chemistry for Sustainable Development*. 2011, Vol. 19, P. 375–382.

18. Tikhomirov A. A., Kudenko Yu. A., Trifonov S. V. *Ustrojstvo kataliticheskogo sinteza HCl iz gazoobraznogo H<sub>2</sub> i Cl<sub>2</sub>* [Apparatus of HCl catalytic synthesis from gaseous Cl<sub>2</sub> and H<sub>2</sub>]. Patent RF, no. 157597, 2015.

19. Trifonov S. V., Murygin A. V., Tikhomirov A. A. Physical-chemical method for desalting organic waste for agricultural cycles. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2021, Vol. 839, No. 4, P. 042062. Doi: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/839/4/042062>.

20. Saltykov M. Yu., Morozov Ye. A., Trifonov S. V., Murygin A. V., Tikhomirov A. A. [Computer automation of organic wastes “wet incineration” installation for closed ecosystems]. *Vestnik SibGAU*. 2016, Vol. 17, No. 2, P. 438–443 (In Russ.).

© Тихомиров А. А., Трифонов С. В., Морозов Е. А., Мuryгин А. В., 2022

---

**Тихомиров Александр Аполлинариевич** – доктор биологических наук, профессор, заведующий лабораторией управления биосинтезом фототрофов, Институт биофизики СО РАН; заведующий кафедрой замкнутых экосистем, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: alex-tikhomirov@yandex.ru.

**Трифонов Сергей Викторович** – кандидат биологических наук, старший научный сотрудник лаборатории управления биосинтезом фототрофов, Институт биофизики СО РАН; доцент кафедры замкнутых экосистем, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: trifonov\_sergei@inbox.ru.

**Морозов Егор Андреевич** – кандидат биологических наук, младший научный сотрудник; Институт биофизики СО РАН. E-mail: transserfer89@gmail.com.

**Мuryгин Александр Владимирович** – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой информационно-управляющих систем; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: avm514@mail.ru.

**Tikhomirov Alexander Apollinariievich** – D. Sc., professor; Head of laboratory of Phototrophic Biosynthesis Control, Institute of Biophysics SB RAS; Head of chair of Closed EcoSystems, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: alex-tikhomirov@yandex.ru.

**Trifonov Sergei Viktorovich** – Ph. D.; head of Laboratory for Problems of Establishing Cycling Processes in Artificial Ecosystems, Institute of Biophysics SB RAS; Associate Professor, Department of Closed Ecosystems, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: trifonov\_sergei@inbox.ru.

**Morozov Yegor Andreevich** – Ph. D., Junior researcher, Institute of Biophysics SB RAS. E-mail: transserfer89@gmail.com.

**Murygin Alexander Vladimirovich** – D. Sc., professor, Head of chair of Information and Management Systems; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: avm514@mail.ru.

---

УДК 537.312:538.911'956

Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-561-571

**Для цитирования:** Магнитные свойства и электрическая поляризация при гетерогенном замещении в пиростаннате висмута  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Me}_{0,1})_2\text{O}_7$ ,  $\text{Me} = \text{Cr}^{3+}, \text{Fe}^{3+}$  / Л. В. Удод, О. Б. Романова, М. Н. Ситников, Х. Абдельбаки // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23, № 3. С. 561–571. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-561-571.

**For citation:** Udod L. V., Romanova O. B., Sitnikov M. N., Abdelbaki H. [Magnetic properties and electric polarization at heterogeneous substitution in bismuth pyrostannate  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Me}_{0,1})_2\text{O}_7$ ,  $\text{Me} = \text{Cr}^{3+}, \text{Fe}^{3+}$ ]. *Siberian Aerospace Journal*. 2022, Vol. 23, No. 3, P. 561–571. Doi: 10.31772/2712-8970-2022-23-3-561-571.

## \*Магнитные свойства и электрическая поляризация при гетерогенном замещении в пиростаннате висмута $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Me}_{0,1})_2\text{O}_7$ , $\text{Me} = \text{Cr}^{3+}, \text{Fe}^{3+}$

Л. В. Удод<sup>1,2\*\*</sup>, О. Б. Романова<sup>1</sup>, М. Н. Ситников<sup>2</sup>, Х. Абдельбаки<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт физики имени Л. В. Киренского СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН  
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50, стр. 38

<sup>2</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский Рабочий», 31

\*\*E-mail: luba@iph.krasn.ru

*Пиростаннат висмута  $\text{Bi}_2\text{Sn}_2\text{O}_7$  является диамагнетиком и относится к структурному типу класса пирохлора  $A_2B_2O_7$ . В этом классе соединений, при наличии магнитных ионов, проявляются очень интересные магнитные свойства. Хром- и железозамещенные пиростаннаты висмута  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Me}_{0,1})_2\text{O}_7$ ,  $\text{Me} = \text{Cr}$  и  $\text{Fe}$  синтезированы методом твердофазного синтеза. Рентгеноструктурный анализ показал, что образцы соответствуют моноклинной ячейке  $Pc$  в  $\alpha$ -фазе  $\text{Bi}_2\text{Sn}_2\text{O}_7$  при комнатной температуре. Изучены магнитные свойства до 1100 К в магнитных полях до 0,86 Т и электрическая поляризация на частотах 10, 3 и 1 мГц в интервале температур 80–550 К. Исследовано влияние гетерогенного замещения ионами  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Fe}^{3+}$  на магнитные свойства и электрическую поляризацию. Анализ экспериментальных данных выявил зависимость магнитных свойств от степени заполнения электронных оболочек ионов хрома и железа. Соединение  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  проявляет ферромагнитные свойства, а  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Fe}_{0,1})_2\text{O}_7$  – антиферромагнитные. В хромзамещенном пиростаннате висмута при  $\alpha \rightarrow \beta$  переходе парамагнитная температура Кюри возрастает в 3 раза. Температурная зависимость обратной магнитной восприимчивости характеризуется гистерезисом в районе температур 400–900 К. Обратная магнитная восприимчивость  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Fe}_{0,1})_2\text{O}_7$  во всем температурном интервале удовлетворительно описывается законом Кюри–Вейсса. Исследования магнитных свойств установили, что ионы  $\text{Fe}^{3+}$  находятся в высокоспиновом состоянии. Найден гистерезис поляризации в  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$ , который смещается по оси поляризации и зависит от температуры.  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{1-x}\text{Fe}_x)_2\text{O}_7$ ,  $x = 0,1$  характеризуется линейной полевой зависимостью. С увеличением концентрации ионов железа возникает гистерезис полевой зависимости электрической поляризации. Нелинейная полевая зависимость поляризации в  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,8}\text{Fe}_{0,2})_2\text{O}_7$  объясняется взаимодействием дипольной и миграционной поляризации. Для соединения  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  обнаружен переход в состояние дипольного стекла. В  $\beta$ -фазе  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,8}\text{Fe}_{0,2})_2\text{O}_7$  выше  $T = 400$  К гистерезис поляризации не наблюдается и преобладает электронно-релаксационная поляризация. Механизм*

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки, проект № 20-42-243002.

The research was funded by RFBR, Krasnoyarsk Territory and Krasnoyarsk Regional Fund of Science, project number 20-42-243002.

возникновения электронной поляризации объясняется с возникновением анионных вакансий при гетерогенном замещении ионов олова.

Ключевые слова: рентгеноструктурный анализ, электрическая поляризация, магнитная восприимчивость, гистерезис электрической поляризации.

## Magnetic properties and electric polarization at heterogeneous substitution in bismuth pyrostannate $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.9}\text{Me}_{0.1})_2\text{O}_7$ , Me = $\text{Cr}^{3+}$ , $\text{Fe}^{3+}$

L. V. Udod<sup>1,2\*\*</sup>, O. B. Romanova<sup>1</sup>, M. N. Sitnikov<sup>2</sup>, H. Abdelbaki<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Kirensky Institute of Physics, Federal Research Center KSC SB RAS

Akademgorodok 50, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation

<sup>2</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology

31, Krasnoyarskii Rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

\*\*E-mail: luba@iph.krasn.ru

Bismuth pyrostannate  $\text{Bi}_2\text{Sn}_2\text{O}_7$  is a diamagnet and belongs to the structural type of the  $A_2B_2O_7$  pyrochlore class. In this class of compounds, in the presence of magnetic ions, very interesting magnetic properties appear. Chromium- and iron-substituted bismuth pyrostannates  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.9}\text{Me}_{0.1})_2\text{O}_7$ , Me = Cr, and Fe were synthesized by solid-phase synthesis. X-ray diffraction analysis showed that the samples correspond to the  $Pc$  monoclinic cell of the  $\text{Bi}_2\text{Sn}_2\text{O}_7$   $\alpha$ -phase at room temperature. The magnetic properties up to 1100 K in magnetic fields up to 0.86 T and the electric polarization at frequencies of 10, 3, and 1 mHz in the temperature range 80–550 K have been studied. The effect of heterogeneous substitution by  $\text{Cr}^{3+}$  and  $\text{Fe}^{3+}$  ions on the magnetic properties and electric polarization of bismuth pyrostannate is investigated. An analysis of the experimental data revealed the dependence of the magnetic properties on the degree of filling of the electron shells of chromium and iron ions. The  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.9}\text{Cr}_{0.1})_2\text{O}_7$  compound exhibits ferromagnetic properties, while  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.9}\text{Fe}_{0.1})_2\text{O}_7$  exhibits antiferromagnetic properties. In chromium-substituted bismuth pyrostannate during the  $\alpha \rightarrow \beta$  transition, the paramagnetic Curie temperature increases by a factor of 3. The temperature dependence of the inverse magnetic susceptibility is characterized by hysteresis in the temperature range of 400–900 K. The reverse magnetic susceptibility of  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.9}\text{Fe}_{0.1})_2\text{O}_7$  in the entire temperature range is satisfactorily described by the Curie-Weiss law. Studies of the magnetic properties have established that the  $\text{Fe}^{3+}$  ions are in a high-spin state. The polarization hysteresis in  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.9}\text{Cr}_{0.1})_2\text{O}_7$  is found, which shifts along the polarization axis and depends on temperature.  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{1-x}\text{Fe}_x)_2\text{O}_7$ ,  $x=0.1$  is characterized by a linear field dependence. With an increase in the concentration of iron ions, a hysteresis arises in the field dependence of the electric polarization. The hysteresis of polarization in  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.9}\text{Cr}_{0.1})_2\text{O}_7$  which depends on temperature was found. The nonlinear field dependence of the polarization in  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.8}\text{Fe}_{0.2})_2\text{O}_7$  can be explained by the interaction of the dipole and migration polarizations and the presence of oxygen vacancies. For the  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.9}\text{Cr}_{0.1})_2\text{O}_7$  compound, a transition to the dipole glass state was found. In the  $\beta$ -phase of  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.8}\text{Fe}_{0.2})_2\text{O}_7$  above  $T = 400$  K, no polarization hysteresis is observed and the electron-relaxation polarization predominates. The mechanism of the occurrence of electronic polarization is explained with the appearance of anionic vacancies upon heterogeneous substitution of tin ions.

Keywords: x-ray diffraction analysis, electric polarization, magnetic susceptibility, electric polarization hysteresis.

### Введение

Материалы, используемые в современных электронных устройствах, должны обладать одновременно сегнетоэлектрическими, ферромагнитными или антиферромагнитными свойствами. К таким материалам относятся сложные оксиды, имеющие в своем составе ионы железа. В них проявляется магнитоэлектрический эффект и свойства мультиферроиков [1–5]. Магнито-

резистивные эффекты, возникающие в результате взаимодействия магнитной подсистемы со спинами электронов проводимости, исследовались в рамках s-d модели и модели взаимодействия орбитальных магнитных моментов со спиновыми на основе сульфидов марганца. Магнитосопротивление может быть обусловлено спин-орбитальным взаимодействием в топологических изоляторах [6–11].

Сочетание магнитных и электрических свойств, характерное для мультиферроиков, показывают соединения на основе структурного типа пирохлора  $A_2B_2O_7$ . Этим материалам присущи как спонтанная намагниченность, магнитострикция, спонтанная поляризация и пьезоэлектрический эффект, так и магнитоэлектрический эффект (индуцированная магнитным полем электрическая поляризация и индуцированная электрическим полем намагниченность), а также эффект магнитоэлектрического контроля (переключение спонтанной поляризации магнитным полем и спонтанной намагниченности электрическим полем). Магнитоэлектрические эффекты могут быть обусловлены как магнитоупругим взаимодействием [12], так и в результате эффекта Максвелла–Вагнера [13–14]. Катионы А и В в структуре пирохлора  $A_2B_2O_7$  образуют подрешетку связанных углами тетраэдров, что может приводить к интенсивной фрустрации магнитного взаимодействия и низкотемпературным свойствам [15]. В  $Cd_2Ti_2O_7$  сильные фрустрации приводят к разупорядоченному состоянию спинов ниже температуры Кюри–Вейсса  $T_{CW} \approx 10$  К. Фрустрированные обменные взаимодействия могут привести к уменьшению намагниченности [16–17] и к образованию спинового стекла [18–19]. Переход в упорядоченную фазу, обусловлен диполь-дипольным взаимодействием при  $T \approx 1$  К [20]. Отсутствие полного упорядочения сопровождается полным разрушением дальнего порядка и образованием парамагнитного состояния типа спиновой жидкости [21–26]. Это вызывает магнитокалорический эффект, востребованный в криотехнике.

Катионное окружение в кристаллической структуре пирохлоров делает невозможным антиферромагнитное взаимодействие между катионами одноосных направлений [27]. По-видимому, по этой причине многие пирохлоры характеризуются отсутствием дальнего магнитного порядка. Как правило, сложные оксиды со структурой пирохлора демонстрируют спин-стекольное состояние. Однако такие соединения могут быть и ферромагнитными, например  $Ln_2V_2O_7$  ( $Ln = Lu, Yb, Tm$ ) [28]. Марганецсодержащие пирохлоры обнаруживают сложную зависимость магнитных характеристик от природы А-катиона. Так, если в А-позиции находятся Sc, Y, Lu, то соединения характеризуются спин-стекольным поведением и проявляют полупроводниковые свойства [29], а  $Tl_2Mn_2O_7$  и  $In_2Mn_2O_7$  – ферромагнетики [30]. Пиростаннат висмута  $Bi_2(Sn_{1-x}Mn_x)_2O_7$ ,  $x = 0,05$  и  $0,1$ , проявляет антиферромагнитные свойства. С увеличением концентрации  $Mn^{4+}$  наблюдается увеличение антиферромагнитного обмена.

В кристаллической структуре пиростанната висмута  $Bi_2Sn_2O_7$  отсутствуют магнитные ионы. Замещая ионы  $Sn^{4+}$  3d элементами, можно получить новые соединения, относящиеся к мультиферроикам. Изовалентное замещение ионами  $Mn^{4+}$  привело к антиферромагнетизму. При гетероэвалентном замещении ионами  $Cr^{3+}$  и  $Fe^{3+}$  будут наблюдаться искажения кислородных октаэдров, что приведет к возникновению спонтанной поляризации и магнитного порядка. Различная степень заполнения электронных оболочек ионов ( $Cr^{3+} 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^3$  и  $Fe^{3+} 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^3$ ) отразится на магнитных и электрических свойствах.

Цель работы: установить влияние гетерогенного замещения ионами  $Cr^{3+}$  и  $Fe^{3+}$  на возникновение магнитного порядка и поляризации в пиростаннате висмута  $Bi_2Sn_2O_7$ .

### Методика эксперимента

Синтез пиростанната висмута, замещенного 3d-элементами  $Bi_2(Sn_{0,9}Me_{0,1})_2O_7$ ,  $Me = Cr$  и  $Fe$ , выполнен методом многоступенчатого твердофазного синтеза. Рентгеноструктурные данные говорят, что синтезированные образцы соответствуют моноклинной ячейке  $Pc$  в  $\alpha$ -фазе  $Bi_2Sn_2O_7$  при комнатной температуре [31–35]. Кристаллическая структура  $Bi_2Sn_2O_7$  содержит 32 иона  $Bi^{3+}$ , 32 иона  $Sn^{4+}$  и 112 ионов  $O^{2-}$  в независимой части ячейки (рис. 1). Все ионы  $Bi^{3+}$



имеют в ближайшем окружении восемь ионов  $O^{2-}$  и формируют искаженные кубы, а  $Sn^{4+}$  окружены шестью ионами  $O^{2-}$  и формируют октаэдры, которые соединяются между собой вершинами. Замещая ионы  $Sn^{4+}$ , ионы  $Cr^{3+}$  и  $Fe^{3+}$  создают дефекты в кислородном октаэдре  $SnO_6$  (вставка на рис. 1).

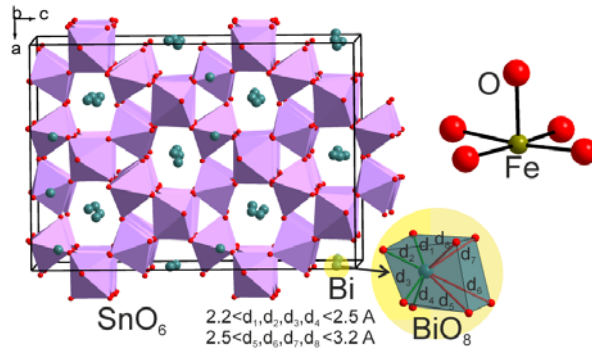


Рис. 1. Кристаллическая структура  $Bi_2Sn_2O_7$ . Отдельно показаны дефектный кислородный октаэдр  $SnO_6$  с замещением ионами  $Fe^{3+}$  и полиэдр  $BiO_8$

Fig. 1. Crystal structure of  $Bi_2Sn_2O_7$ . The defect oxygen octahedron  $SnO_6$  substituted by  $Fe^{3+}$  ions and the polyhedron  $BiO_8$  are shown separately

Магнитные свойства  $Bi_2(Sn_{0.9}Me_{0.1})_2O_7$ ,  $Me = Cr$  и  $Fe$  изучены на высокотемпературной установке методом Фарадея в интервале температур до 1100 К и магнитных полей до 0,86 Т. Полевые зависимости электрической поляризации исследованы квазистатическим методом на частотах 10,3 и 1 мГц в интервале температур 80–550 К. Проведены два цикла измерений на образцах, на которые нанесены контакты из серебра, между контактами и образцом находится лак для предотвращения токов утечки.

### 1. Магнитная восприимчивость

Температурная зависимость магнитной восприимчивости для  $Bi_2(Sn_{0.9}Cr_{0.1})_2O_7$  представлена на рис. 2, а. Величина обратной магнитной восприимчивости меняет наклон (вставка рис. 2, а) при переходе из  $\alpha \rightarrow \beta$  фазу при  $T = 370$  К. Парамагнитная температура Кюри возрастает в 3 раза. Так, для  $\alpha$ -фазы  $\theta_\alpha = 50$  К в интервале  $150 < T < 300$  К, а  $\beta$ -фазы  $\theta_\beta = 150$  К при  $T > 400$  К. Температурная зависимость  $1/\chi$  характеризуется гистерезисом в районе температур 400–900 К, соответствующим границам существования  $\beta$ -фазы.

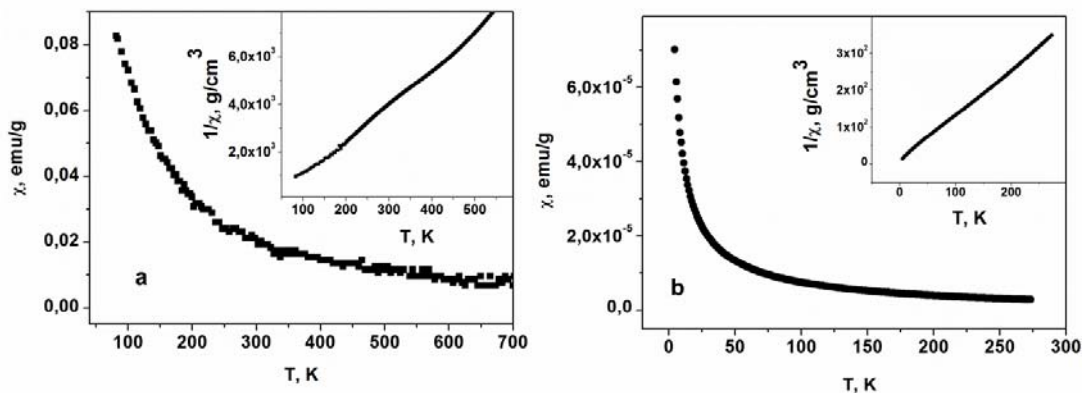


Рис. 2. Температурная зависимость магнитной восприимчивости  $Bi_2(Sn_{0.9}Me_{0.1})_2O_7$ : а –  $Me = Cr$ ; б –  $Me = Fe$ . На вставках приведены температурные зависимости обратной восприимчивости

Fig. 2. The temperature dependence of the magnetic susceptibility of  $Bi_2(Sn_{0.9}Me_{0.1})_2O_7$ : а –  $Me = Cr$ ; б –  $Me = Fe$ . The insets show the temperature dependences of the reciprocal susceptibilities

Магнитная восприимчивость в магнитном поле 600 Ое для  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Fe}_{0,1})_2\text{O}_7$  проявляет парамагнитный характер и представлена на рис. 2, б. На вставке (рис. 2, б) показана температурная зависимость обратной магнитной восприимчивости, которая во всей температурной области удовлетворительно описывается законом Кюри – Вейсса  $1/\chi = (T - \theta) / C$ , где  $\chi$  – магнитная восприимчивость,  $\theta$  – парамагнитная температура Кюри,  $C$  – постоянная Кюри. Величина парамагнитной температуры имеет отрицательное значение  $\Theta = -10$  К. Используя формулу

$$\mu_{\text{eff}} = (8C / n)^{1/2}, \quad (1)$$

был определен эффективный магнитный момент  $\text{Fe}^{3+}$ . Здесь  $C$  – постоянная Кюри;  $N_A$  – постоянная Авогадро;  $n$  – количество ионов железа в  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Fe}_{0,1})_2\text{O}_7$ . Эффективный магнитный момент  $\text{Fe}^{3+}$  вычислен по уравнению (1) и равен  $\mu_{\text{eff}} = 5,76\mu_B$ . В пиростаннате висмута ионы  $\text{Fe}^{3+}$  находятся в высокоспиновом состоянии [35]. В соответствии с уравнением

$$\mu_S = g(S(S + 1)\mu_B)^{1/2}, \quad (2)$$

где  $S$  – спин  $\text{Fe}^{3+} = 5/2$ ;  $g$  – фактор = 2, теоретическое значение эффективного магнитного момента  $\mu_S = 5,92\mu_B$ . Используя полученные экспериментальные данные магнитных характеристик, по формуле (2) рассчитан  $g$  – фактор для  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Fe}_{0,1})_2\text{O}_7$ ,  $g = 1,95$ .

Экспериментальные данные показывают различное влияние замещающих ионов на магнитное обменное взаимодействие  $\text{Bi}_2\text{Sn}_2\text{O}_7$ . Соединение  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  проявляет ферромагнитные свойства, а  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Fe}_{0,1})_2\text{O}_7$  – антиферромагнитные. Такое различие связано с различной степенью заполнения электронных оболочек, у  $\text{Cr}^{3+}$   $4s^0$ , а  $\text{Fe}^{3+}$   $4s^2$ .

## 2. Поляризация

Электрическая поляризация  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  линейно растет во внешнем электрическом поле, наблюдается гистерезис малой величины в  $\alpha$ -фазе. При циклировании ширина гистерезиса линейно растет с ростом числа циклов. Полевые зависимости поляризации  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  для температур выше 400 К представлены на рис. 3, б. Диэлектрическая восприимчивость  $\chi = P/\varepsilon_0 E$ , определенная в электрическом поле 800 В/см, увеличивается при нагревании в  $\alpha$ -фазе и обнаруживает максимум в области температуры перехода в состояние дипольного стекла (рис. 3, а). Для дипольных стекол характерен широкий максимум восприимчивости в области «замерзания» дипольных моментов и необратимое поведение восприимчивости при нагревании и охлаждении в электрическом поле.

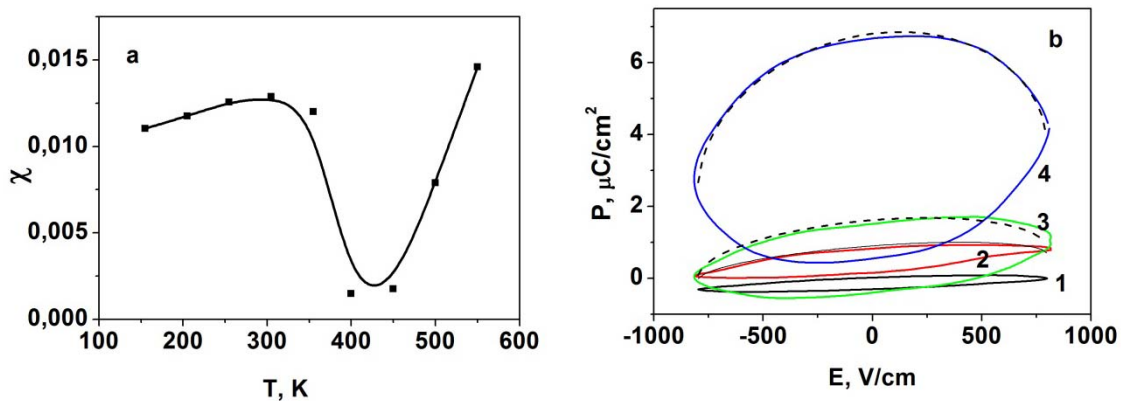


Рис. 3. Температурная зависимость диэлектрической восприимчивости  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  (а); полевая зависимость поляризации  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  (б). Кривая 1 соответствует  $T = 400$  К с серебряными контактами, 2 –  $T = 400$  К, 3 –  $T = 450$  К, 4 –  $T = 500$  К. 2, 3, 4 – лаковые контакты

Fig. 3. Temperature dependence of the dielectric susceptibility of  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  (a). The field dependence of the polarization of  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  (b). Curve 1 corresponds to  $T = 400$  K with silver contacts, 2 –  $T = 400$  K, 3 –  $T = 450$  K, 4 –  $T = 500$  K. 2, 3, 4 – varnish contacts

Соединение  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{1-x}\text{Fe}_x)_2\text{O}_7$  ( $x = 0,1$ ) проявляет параэлектрические свойства, поляризация линейна до  $T = 300$  К и соответствует закону  $P = \epsilon_0 \chi E$ , где  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость;  $\chi$  – восприимчивость;  $E$  – электрическое поле. С увеличением концентрации ионов железа,  $x = 0,2$ , пиросульфат висмута показывает симметричные петли гистерезиса во внешнем электрическом поле.

На рис. 4 показаны полевые зависимости поляризации при различных температурах в магнитном поле 12 кОе для  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{1-x}\text{Fe}_x)_2\text{O}_7$ ,  $x = 0,2$ . На вставке (рис. 4) приведена полевая зависимость поляризации в магнитном поле  $H = 0$  и 12 кОе при  $T = 160$  К. Выше комнатной температуры электрическая поляризация возрастает в результате появления дополнительного вклада в виде миграционной электронной поляризации.

Делокализация дырок в  $\alpha$ -фазе в окрестности замещающих ионов приводит к диффузии и накоплению заряда в ловушках на междукристаллических доменных границах. Под действием внешнего электрического поля носители тока диффундируют к поверхности домена и локализуются в ловушках. В результате междукристаллические границы становятся заряженными, что приводит к гистерезису поляризации и росту ширины петли гистерезиса. Образование заряженных границ и частичное экранирование приводит к неравномерному распределению потенциала по объему образца. В результате перестройки кристаллической структуры меняется плотность дефектов, например, понижается концентрация кислородных вакансий [37; 38] и индуцируется объемный заряд в образце.

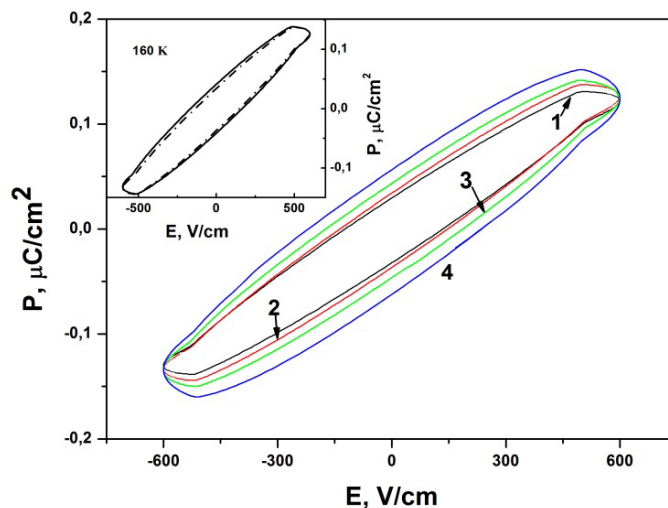


Рис. 4. Полевая зависимость поляризации  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,8}\text{Fe}_{0,2})_2\text{O}_7$  в магнитном поле  $H = 12$  кОе при различных температурах. Кривая 1 соответствует  $T = 120$  К, 2 – 160 К, 3 – 200 К, 4 – 280 К. На вставке приведена полевая зависимость при  $T = 160$  К. Сплошная линия соответствует  $H = 12$  кОе, пунктирная –  $H = 0$

Fig. 4. Field dependence of the polarization of  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,8}\text{Fe}_{0,2})_2\text{O}_7$  in a magnetic field  $H = 12$  kOe at different temperatures. Curve 1 corresponds to  $T = 120$  K, 2 – 160 K, 3 – 200 K, 4 – 280 K. The inset shows the field dependence of the polarization at  $T = 160$  K. The solid line corresponds to  $H = 12$  kOe, the dashed line corresponds to  $H = 0$

В  $\beta$ -фазе выше  $T = 400$  К преобладает электронно-релаксационная поляризация. Этот вид поляризации характерен для твердых диэлектриков, содержащих дефекты или примесные ионы, способные захватывать электроны с образованием ловушек. Во внешнем электрическом поле будут происходить переходы ловушек в направлении поля и возникает электрическая поляризация. Наиболее вероятный механизм электронной поляризации связан с возникновением анионных вакансий при гетерогенном замещении ионов олова. Кислородные вакансии являются эквивалентными положительными зарядами, вблизи которых для их компенсации в соответствии с принципом электронейтральности локализуются квазисвободные электроны, обуславливающие тепловую электронную поляризацию.

### Заключение

Установлено, что ионы  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Fe}^{3+}$  оказывают различное влияние на магнитные свойства: в  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  проявляются ферромагнитные обменные взаимодействия, а  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Fe}_{0,1})_2\text{O}_7$  – антиферромагнитные.

В  $\beta$ -фазе  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,9}\text{Cr}_{0,1})_2\text{O}_7$  установлен гистерезис поляризации, смещенный по оси поляризации. Ширина гистерезиса растет при нагревании.

Для  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0,8}\text{Fe}_{0,2})_2\text{O}_7$  найден нелинейный вид электрической поляризации от поля с отсутствием гистерезиса в  $\beta$ -фазе, что объясняется взаимодействием дипольной и миграционной поляризации.

### Библиографические ссылки

1. Влияние катионного замещения на кристаллическую структуру, магнитные и электрические свойства  $\text{BiFe}_{1-x}\text{Mn}_x\text{O}_3$  ( $x = 0,05$  и  $0,15$ ) / Т. Н. Тарасенко, В. И. Михайлов, З. Ф. Кравченко и др. // Известия РАН. Серия физическая. 2020. Т. 84, № 9. С. 1307–1309.
2. Magnetoresistive effect in the cobalt-doped bismuth ferrite films / O. B. Romanova, S. S. Aplesnin, M. N. Sitnikov, L. V. Udod, et. al. // J. Materials Science: Materials in Electronics. 2020. Vol. 31. P. 7946. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10854-020-03333-7>.
3. Low-temperature phase transition in bismuth ferrite films substituted by manganese / S. S. Aplesnin, A. N. Masyugin, U. I. Rybina, et. al. // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 822. P. 012021. DOI: [10.1088/1757-899X/822/1/012021](https://doi.org/10.1088/1757-899X/822/1/012021).
4. Magnetoelectric effect in bismuth – neodymium ferrite – garnet films / A. N. Masyugin, S. S. Aplesnin, Y. Y. Loginov et. al. // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 822. P. 012025. DOI: [10.1088/1757-899X/822/1/012025](https://doi.org/10.1088/1757-899X/822/1/012025).
5. Regulating the  $\text{BiMnxFe}_{1-x}\text{O}_3$  film conductivity upon cooling in magnetic and electric fields / S. S. Aplesnin, A. N. Masyugin, et. al. // Mater. Research Express. 2019. Vol. 6. P. 116125. DOI: [doi.org/10.1088/2053-1591/ab4ec7](https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab4ec7).
6. Магнитотранспортные эффекты и электронное фазовое расслоение в сульфидах марганца с электрон-дырочным допированием / О. Б. Романова, С. С. Аплеснин и др. // ЖЭТФ. 2021. Т. 159. С. 1–14. DOI: [10.31857/S0044451021030000](https://doi.org/10.31857/S0044451021030000).
7. Романова О. Б., Аплеснин С. С., Удод Л. В. Влияние электронного и дырочного допирования на транспортные характеристики халькогенидных систем // ФТТ. 2021. Т. 63. С. 606–609. DOI: [10.21883/FTT.2021.05.50808.269](https://doi.org/10.21883/FTT.2021.05.50808.269).
8. Аплеснин С. С., Янушкевич К. И. Изменение магнитосопротивления в халькогенидах марганца  $\text{MnSe}_{1-x}\text{TeX}$  при переходе от объемных образцов к тонкопленочным // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21, № 2. С. 254–265. DOI: [10.31772/2587-6066-2020-21-2-254-265](https://doi.org/10.31772/2587-6066-2020-21-2-254-265).
9. Magnetic Capacitance in Variable-Valence Manganese Sulfides / S. S. Aplesnin, A. M. Kharkov et. al. // Phys. Status Solidi B. 2020. Vol. 257. P. 1900637. DOI: [10.1002/pssb.201900637](https://doi.org/10.1002/pssb.201900637).
10. Magnetoresistance, magnetoimpedance, magnetothermopower, and photoconductivity in silver-doped manganese sulfides / O. B. Romanova, S. S. Aplesnin, L. V. Udod, et. al. // J. Appl. Phys. 2019. Vol. 125. P. 175706. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5085701>.
11. Aplesnin S. S., Kretinin V. V. Magnetoelectric Effect in a Paramagnetic Region in  $\text{Gd}_{0,15}\text{Mn}_{0,85}\text{Se}$  // Physics of the Solid State. 2019. Vol. 61, No. 8. P. 1379–1382. DOI: [10.1134/S1063783419080067](https://doi.org/10.1134/S1063783419080067).
12. Coexistence of the electric polarization and conductive current in the bismuth–neodymium ferrite garnet films / S. S. Aplesnin, A. N. Masyugin, M. N. Volochaev et al. // J Mater Sci: Mater Electron. 2021. Vol. 32. P. 3766–3781. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10854-020-05121-9>.
13. Aplesnin S. S., Sitnikov M. N., Zhivul'ko A. M. Magnetocapacity in the Paramagnetic Region in a Cation-Substituted Manganese Selenide // Phys. Solid State. 2018. Vol. 60. P. 673–680.

14. Влияние подложки на магнитоэлектрический эффект пленок висмутового ферритаграната с редкоземельным замещением / С. С. Аплеснин, А. Н. Масюгин, М. Н. Ситников, Т. Ишибаши // Письма в ЖЭТФ. 2019. Т. 110. С. 204–212. DOI: <https://doi.1134/S0370274X19150128>.
15. Greedan J. E. Geometrically frustrated magnetic materials // *J. Mater. Chem.* 2001. Vol. 11. P. 37.
16. Metal-insulator transition and magnetic properties in disordered systems of solid solutions  $\text{Me}_x\text{Mn}_{1-x}\text{S}$  / G. A. Petrakovskii, G. V. Loseva, L. I. Ryabinkina, S. S. Aplesnin // *JMMM*. 1995. Vol. 140–144 (PART 1). P. 147–148.
17. Aplesnin S. S. Influence of spin-phonon coupling on the magnetic moment in 2D spin-1/2 antiferromagnet // *Phys. Lett. Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. 2003. Vol. 313 (1–2). P. 122–125.
18. Aplesnin S. S. A study of anisotropic Heisenberg antiferromagnet with  $S = 1/2$  on a square lattice by Monte-Carlo method // *Phys. Status Solidi (B) Basic Research*. 1998. Vol. 207 (2). P. 491–498.
19. Aplesnin S. S. Monte-Carlo Study of Two-Dimensional Quantum Antiferromagnets with Random Anisotropies and Spin  $S = 1$  // *Physica Status Solidi (b)*. 1989. Vol. 153 (1). P. K79–K84.
20. Order in the Heisenberg pyrochlore: The magnetic structure of  $\text{Gd}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$  / J. D. M. Champion, A. S. Wills, T. Fennell et al. // *Phys. Rev. B*. 2001. Vol. 64. P. 140407(R).
21. Аплеснин С. С. Димеризация антиферромагнитных цепей с четырехспиновым взаимодействием // *ФТТ*. 1996. Т. 38 (6). С. 1031–1036.
22. Aplesnin S. S. Quantum Monte Carlo analysis of the 2D Heisenberg antiferromagnet with  $S = 1/2$ : The influence of exchange anisotropy // *Journal of Physics Condensed Matter*. 1998. Vol. 10 (44). P. 10061–10065.
23. Aplesnin S. S. Existence of massive singlet excitations in an antiferromagnetic alternating chain with // *Phys. Rev. B – Condens. Matter and Materials Physics*. 2000. Vol. 61 (10). P. 6780–6784.
24. Аплеснин С. С. Неадиабатическое взаимодействие акустических фононов со спинами  $S = 1/2$  в двумерной модели Гейзенберга // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2003. Т. 97 (5). С. 969–977.
25. Aplesnin S. S., Moskvina A. I. Magnetic structures upon ordering of  $e_g$  orbitals in a square lattice // *Journal of Physics Condensed Matter*. 2008. Vol. 20 (32). P. 325202.
26. Aplesnin S. S. Two-dimensional quantum spin liquid with  $S = 1/2$  spins interacting with acoustic phonons // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. 2004. Vol. 333 (5–6). P. 446–449.
27. Bramwell S. T., Harris M. J. Frustration in Ising-type spin models on the pyrochlore lattice // *J. Phys.: Cond. Matter*. 1998. Vol. 10. P. 215.
28. Crystal structure of the high-temperature superconductor  $\text{Ti}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  / M. A. Subramanian, J. C. Calabrese et al. // *Nature*. 1988. Vol. 332. P. 420–422. DOI: 10.1038/332420A0.
29. Frustrated pyrochlore oxides,  $\text{Y}_2\text{Mn}_2\text{O}_7$ ,  $\text{Ho}_2\text{Mn}_2\text{O}_7$ , and  $\text{Yb}_2\text{Mn}_2\text{O}_7$ : Bulk magnetism and magnetic microstructure / J. E. Greedan, N. P. Raju et al. // *Phys. Rev. B*. 1996. Vol. 54. P. 7189.
30. Colossal Magnetoresistance Without  $\text{Mn}^{3+}/\text{Mn}^{4+}$  Double Exchange in the Stoichiometric Pyrochlore  $\text{Ti}_2\text{Mn}_2\text{O}_7$  / M. A. Subramanian, B. H. Toby et al. // *Science*. 1996. Vol. 273. P. 81.
31.  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.95}\text{Cr}_{0.05})_2\text{O}_7$ : Structure, IR spectra, and dielectric properties / S. S. Aplesnin, L. V. Udod, M. N. Sitnikov, N. P. Shestakov // *Ceramics International*. 2016. Vol. 42. P. 5177–5183.
32. Aplesnin S. S., Udod L. V., Sitnikov M. N. Electronic transition, ferroelectric and thermoelectric properties of bismuth pyrochlore  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.85}\text{Cr}_{0.15})_2\text{O}_7$  // *Ceramics International*. 2018. Vol. 44. P. 1614–1620.
33. Dipole glass in chromium-substituted bismuth pyrochlore / S. S. Aplesnin, L. V. Udod, M. N. Sitnikov et al. // *Mater. Res. Express*. 2018. Vol. 5. P. 115202. DOI: <https://doi.org/10.1088/2053-1591/aaddd934>.
34. Influence of cation substitution on dielectric and electric properties of bismuth stannates  $\text{Bi}_2\text{Sn}_{1.9}\text{Me}_{0.1}\text{O}_7$  (Me=Cr, Mn) / S. S. Aplesnin, L. V. Udod, Y. Y. Loginov et al. // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 467. P. 012014(5).

35. Phase transitions in bismuth pyrostannate upon substitution of tin by iron ions / L. V. Udod, S. S. Aplesnin, M. N. Sitnikov et al. // *J. All. Compound.* 2019. Vol. 804. P. 281–287. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2019.07.020>.
36. Magnetodielectric effect and spin state of iron ions in iron-substituted bismuth pyrostannate / L. Udod, S. Aplesnin, M. Sitnikov et al. // *EPJP.* 2020. Vol. 135. P. 776. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00781-2>.
37. Relationship between Pyroelectric Properties and Electrode Sizes in (Pb, La)(Zr, Ti)O<sub>3</sub> (PLZT) Thin Films / M. Kobune, H. Ishito, A. Mineshige, S. Fujii, R. T. Tomozawa // *J. Appl. Phys.* 1998. Vol. 37. P. 5154.
38. Reappraisal of the crystal chemistry of beryl / C. Aurisicchio, G. Fioravanti, O. Grubessi, P. F. Zanazzi // *American Mineralogist.* 1988. Vol. 73 (7). P. 826–837.

## References

1. Tarasenko T. N., Mikhailov V. I., Kravchenko Z. F., Burkhovetsky V. V., Kamenev V. I., Izotov A. I., Legenkiy Yu. A., Demidenko O. F., Yanushkevich K. I., Aplesnin S. S. Effect of cationic substitution on the crystal structure, magnetic and electrical properties of BiFe<sub>1-x</sub>Mn<sub>x</sub>O<sub>3</sub> (x = 0.05 and 0.15). *Izv. RAN. Physical series.* 2020, Vol. 84, P. 1307–1309.
2. Romanova O. B., Aplesnin S. S., Sitnikov M. N., Udod L. V., Begisheva O. B., Demidenko O. F. Magnetoresistive effect in the cobalt-doped bismuth ferrite films. *J. Materials Science: Materials in Electronics.* 2020, Vol. 31, P. 7946. <https://doi.org/10.1007/s10854-020-03333-7>.
3. Aplesnin S. S., Masyugin A. N., Rybina U. I., Tarasenko T. N. and Yanushkevich K. I. Low-temperature phase transition in bismuth ferrite films substituted by manganese. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering.* 2020, Vol. 822, P. 012021. DOI:10.1088/1757-899X/822/1/012021012021.
4. Masyugin A. N., Aplesnin S. S., Loginov Y. Y. and Bandurina O. N. Magnetoelectric effect in bismuth – neodymium ferrite – garnet films. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering.* 2020, Vol. 822, P. 012025. DOI: 10.1088/1757-899X/822/1/012025.
5. Aplesnin S. S., Masyugin A. N., Kretinin V. V., Yanushkevich K. I. Regulating the BiMn<sub>x</sub>Fe<sub>1-x</sub>O<sub>3</sub> film conductivity upon cooling in magnetic and electric fields. *Mater. Research Express.* 2019, Vol. 6, P. 116125. DOI: [doi.org/10.1088/2053-1591/ab4ec7](https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab4ec7).
6. Romanova O. B., Aplesnin S. S., Sitnikov M. N., Udod L. V. Magnetotransport effects and electron phase separation in manganese sulfides with electron-hole doping. *ZhETF.* 2021, Vol. 159, P. 1–14. DOI: 10.31857/S0044451021030000.
7. Romanova O. B., Aplesnin S. S., Udod L.V. Effect of electron and hole doping on the transport characteristics of chalcogenide systems. *Solid State Phys.* 2021, Vol. 63, P. 606–609. DOI: 10.21883/FTT.2021.05.50808.269.
8. Aplesnin S. S., Yanushkevich K. I. Changes in the magnetoresistance in MnSe<sub>1-x</sub>Te<sub>x</sub> manganese chalcogenides upon transition from bulk samples to thin-film ones. *Siberian Aerospace Journal.* 2020, Vol. 21, No. 2, P. 254–265. DOI: 10.31772/2587-6066-2020-21-2-254-265.
9. Aplesnin S. S., Kharkov A. M., Filipson G. Yu. Magnetic Capacitance in Variable-Valence Manganese Sulfides. *Phys. Status Solidi B.* 2020, Vol. 257, P. 1900637. DOI 10.1002/pssb.201900637.
10. Romanova O. B., Aplesnin S. S., Udod L. V., Sitnikov M. N., Kretinin V. V., Yanushkevich K. I., Velikanov D. A. Magnetoresistance, magnetoimpedance, magnetothermopower, and photoconductivity in silver-doped manganese sulfides. *J. Appl. Phys.* 2019, Vol. 125, P. 175706. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5085701>.
11. Aplesnin S. S., Sitnikov M. N., Kharkov A. M., Masyugin A. N., Kretinin V. V., Fisenko O. B., Gorev M. V. Magnetoelectric Effect in a Paramagnetic Region in Gd<sub>0.15</sub>Mn<sub>0.85</sub>Se. *Physics of the Solid State,* 2019, Vol. 61, No. 8, P. 1379–1382. DOI: 10.1134/S1063783419080067.

12. Aplesnin S. S., Masyugin A. N., Volochaev M., Ishibashi T. Coexistence of the electric polarization and conductive current in the bismuth–neodymium ferrite garnet films. *J Mater Sci: Mater Electron*. 2021, Vol. 32, P. 3766–3781. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10854-020-05121-9>.
13. Aplesnin S. S., Sitnikov M. N., Zhivul'ko A. M. Magnetocapacity in the Paramagnetic Region in a Cation-Substituted Manganese Selenide. *Phys. Solid State*. 2018, Vol. 60, P. 673–680.
14. Aplesnin S. S., Masyugin A. N., Sitnikov m.N., Ishibashi T. Influence of the Substrate on the Magnetoelectric Effect of Rare-Earth-Substituted Bismuth Ferrite Garnet Films. *Letters to JETF*. 2019, Vol. 110, P. 204–212. DOI: <https://doi.1134/S0370274X19150128>.
15. Greedan J. E. Geometrically frustrated magnetic materials. *J. Mater. Chem*. 2001, Vol. 11, P. 37
15. Petrakovskii G. A., Loseva G. V., Ryabinkina L. I., Aplesnin S. S. Metal-insulator transition and magnetic properties in disordered systems of solid solutions  $\text{Me}_x\text{Mn}_{1-x}\text{S}$ . *JMMM*. 1995, Vol. 140–144 (PART 1), P. 147–148.
16. Aplesnin S. S. Influence of spin-phonon coupling on the magnetic moment in 2D spin-1/2 antiferromagnet. *Phys. Lett. Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. 2003, Vol. 313 (1–2), P. 122–125.
17. Aplesnin S. S. A study of anisotropic Heisenberg antiferromagnet with  $S = 1/2$  on a square lattice by Monte-Carlo method. *Phys. Status Solidi (B) Basic Research*. 1998, Vol. 207 (2), P. 491–498.
18. Aplesnin S. S. Monte-Carlo Study of Two-Dimensional Quantum Antiferromagnets with Random Anisotropies and Spin  $S = 1$  // *Physica Status Solidi (b)*. 1989. Vol. 153 (1). P. K79–K84.
19. Champion J. D. M., Wills A. S., Fennell T., Bramwell S. T., Gardner J. S., Green M. A. Order in the Heisenberg pyrochlore: The magnetic structure of  $\text{Gd}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ . *Phys. Rev. B*. 2001, Vol. 64, P.140407(R).
20. Aplesnin S. S. Dimerization of antiferromagnetic chains with four-spin interactions. *Phys. Solid State*. 1996, Vol. 38 (6), P. 1031–1036.
21. Aplesnin S. S. Quantum Monte Carlo analysis of the 2D Heisenberg antiferromagnet with  $S = 1/2$ : The influence of exchange anisotropy. *J. Phys. Condens. Matter*. 1998, Vol. 10 (44), P. 10061–10065.
22. Aplesnin S. Existence of massive singlet excitations in an antiferromagnetic alternating chain with  $S=1/2$ . *Phys. Rev. B – Condens. Matter and Materials Physics*. 2000, Vol. 61 (10), P. 6780–6784.
23. Aplesnin S. S. Nonadiabatic interaction of acoustic phonons with spins  $S = 1/2$  in the two-dimensional heisenberg model. *J. Experimental and Theoretical Physics*. 2003, Vol. 97, Is. 5, P. 969–977.
24. Aplesnin S. S., Moskvina A. I. Magnetic structures upon ordering of eg orbitals in a square lattice. *J. Phys. Condens. Matter*. 2008, Vol. 20 (32), P. 325202.
25. Aplesnin S. S. Two-dimensional quantum spin liquid with  $S = 1/2$  spins interacting with acoustic phonons. *Phys. Lett. Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. 2004, Vol. 333, Is. 5–6, P. 446–449.
26. Bramwell S. T., Harris M. J. Frustration in Ising-type spin models on the pyrochlore lattice. *J. Phys.: Cond. Matter*. 1998, Vol. 10, L215.
27. Subramanian, M. A., Calabrese, J. C., Torardi, C. C., Gopalakrishnan, J., Askew, T. R. Crystal structure of the high-temperature superconductor  $\text{Ti}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ . *Nature*. 1988, Vol. 332, P. 420–422. DOI: 10.1038/332420A0.
28. Greedan J. E., Raju N. P., Maignan A., Simon Ch., Pedersen J. S., Niraimathi A. M., Gmelin E., and Subramanian M. A. Frustrated pyrochlore oxides,  $\text{Y}_2\text{Mn}_2\text{O}_7$ ,  $\text{Ho}_2\text{Mn}_2\text{O}_7$ , and  $\text{Yb}_2\text{Mn}_2\text{O}_7$ : Bulk magnetism and magnetic microstructure. *Phys. Rev. B*. 1996, Vol. 54, P. 7189.
29. Subramanian M. A., Toby B. H., Ramirez A. P., Marshall W. J., Sleight A. W., Kwei G.H. Colossal Magnetoresistance Without  $\text{Mn}^{3+}/\text{Mn}^{4+}$  Double Exchange in the Stoichiometric Pyrochlore  $\text{Ti}_2\text{Mn}_2\text{O}_7$ . *Science*. 1996, Vol. 273, P. 81.
30. Aplesnin S. S., Udod L. V., Sitnikov M. N., Shestakov N. P.  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.95}\text{Cr}_{0.05})_2\text{O}_7$ : Structure, IR spectra, and dielectric properties. *Ceramics International*. 2016, Vol. 42, P.5177–5183.

31. Aplesnin S. S., Udod L. V., Sitnikov M. N. Electronic transition, ferroelectric and thermoelectric properties of bismuth pyrostannate  $\text{Bi}_2(\text{Sn}_{0.85}\text{Cr}_{0.15})_2\text{O}_7$ . *Ceramics International*. 2018, Vol. 44, P. 1614–1620.
32. Aplesnin S. S., Udod L.V., Sitnikov M.N., Kretinin V. V., Molokeyev M. S. and Mironova-Ulmane N. Dipole glass in chromium-substituted bismuth pyrostannate. *Mater. Res. Express*. 2018, Vol. 5, P. 115202. DOI: <https://doi.org/10.1088/2053-1591/aaddd934>.
33. Aplesnin S. S., Udod L. V., Loginov Y. Y., Kretinin V. V., Masyugin A. N. Influence of cation substitution on dielectric and electric properties of bismuth stannates  $\text{Bi}_2\text{Sn}_{1.9}\text{Me}_{0.1}\text{O}_7$  (Me=Cr, Mn). *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2019, Vol. 467, P. 012014(5).
34. Udod L. V., Aplesnin S. S., Sitnikov M. N., Romanova O. B., Molokeyev M. N. Phase transitions in bismuth pyrostannate upon substitution of tin by iron ions. *J. All. Compound*. 2019, Vol. 804, P. 281–287. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2019.07.020>.
35. Udod L., Aplesnin S., Sitnikov M., Romanova O., Bayukov O., Vorotinov A., Velikanov D., Patrin G. Magnetodielectric effect and spin state of iron ions in iron-substituted bismuth pyrostannate. *EPJP*. 2020, Vol. 135, Article number: 776. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00781-2>.
36. Kobune M., Ishito H., Mineshige A., Fujii S., Tomozawa R. T. Relationship between Pyroelectric Properties and Electrode Sizes in (Pb, La)(Zr, Ti) $\text{O}_3$  (PLZT) Thin Films. *J. Appl. Phys.* 1998, Vol. 37, P. 5154.
37. Aurisicchio C., Fioravanti G., Grubessi O., Zanazzi. P.F. Reappraisal of the crystal chemistry of beryl. *American Mineralogist*. 1988, Vol. 73, Is. 7, P. 826–837.

© Удод Л. В., Романова О. Б., Ситников М. Н., Абдельбаки Х., 2022

---

**Удод Любовь Викторовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики; Институт физики имени Л. В. Киренского СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: [luba@iph.krasn.ru](mailto:luba@iph.krasn.ru).

**Ситников Максим Николаевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: [kineru@mail.ru](mailto:kineru@mail.ru).

**Абдельбаки Хишем** – аспирант кафедры физики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: [abdel.hichem@outlook.fr](mailto:abdel.hichem@outlook.fr).

**Романова Оксана Борисовна** – кандидат физико-математических наук, Институт физики имени Л. В. Киренского СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН. E-mail: [rob@iph.krasn.ru](mailto:rob@iph.krasn.ru).

**Udod Lyubov Viktorovna** – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of Physics; Kirensky Institute of Physics, Federal Research Center KSC SB RAS; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: [luba@iph.krasn.ru](mailto:luba@iph.krasn.ru).

**Sitnikov Maxim Nikolaevich** – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of Physics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: [kineru@mail.ru](mailto:kineru@mail.ru).

**Abdelbaki Hishem** – post-graduate student of the Department of Physics; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: [abdel.hichem@outlook.fr](mailto:abdel.hichem@outlook.fr).

**Romanova Oxana Borisovna** – Cand. Sc., Kirensky Institute of Physics, Federal Research Center KSC SB RAS. E-mail: [rob@iph.krasn.ru](mailto:rob@iph.krasn.ru).

---