ВЕСТНИК ЮГОРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 г. Выпуск 1 (64). С. 101–117

УДК 519.63:532.517
DOI: 10.18822/byusu202201101-117

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ СТАЦИОНАРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Пятков Сергей Григорьевич
доктор физико-метаметических наук,
профессор кафедры цифровых технологий
Института цифровой экономики
ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет»,
Ханты-Мансийск, Россия
E-mail: pyatkov@math.nsc.ru

Белоногов Владимир Андреевич
аспирант Института цифровой экономики,
начальник отдела информационных систем
ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет»,
Ханты-Мансийск, Россия
E-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru

В работе рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева стационарных обратных задач определения коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта. Доказана теорема существования и единственности решений. Метод является конструктивным, и на основе предложенного подхода возможно построение численных алгоритмов решения задачи. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и теореме о неподвижной точке.

Ключевые слова: обратная задача, задача сопряжения, коэффициент теплопередачи, параболическое уравнение, тепломассоперенос.

ON SOME CLASSES OF STATIONARY INVERSE PROBLEMS OF DETERMINING THE HEAT TRANSFER COEFFICIENT FOR MATHEMATICAL MODELS OF HEAT AND MASS TRANSFER

Sergey G. Pyatkov
Doctor of Physical and Metametical Sciences,
Professor of the Department of Digital Technologies,
Institute of Digital Economy
Yugra State University,
Khanty-Mansiysk, Russia
E-mail: pyatkov@math.nsc.ru

Vladimir A. Belonogov
Postgraduate Student of the Institute of Digital Economy,
Head of Information Systems Department,
Yugra State University,
Khanty-Mansiysk, Russia
E-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru

In the article we consider well-posedness in Sobolev spaces of stationary inverse problems of recovering the heat transfer coefficient at the interface which is included in the transmission condition of the imperfect contact type. The existence and uniqueness theorem are exhibited. The method is constructive and the approach allows to develop numerical methods for solving the problem. The proof relies on a priori estimates obtained and the fixed-point theorem.

Keywords: inverse problem, transmission problem, heat transfer coefficient, parabolic equation, heat and mass transfer.

Введение

Мы исследуем обратные задачи определения коэффициентов теплообмена, входящих в условие сопряжения в стационарном случае. Рассматривается эллиптическое уравнение вида

$$-Lu = f(x), Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a_0(x)u - \lambda u, \quad (1)$$

где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Считаем, что область G разделена на две области G^+ и G^- такие, что $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \emptyset$. Положим, $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$. Уравнение (1) дополняется краевыми условиями:

$$Bu|_\Gamma = g, \quad (2)$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)n_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x)u$, и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(x_0) - \beta(u^+ - u^-)(x_0) = g^+(x_0), \frac{\partial u^+}{\partial N}(x_0) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(x_0), x_0 \in \Gamma_0, \quad (3)$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(x_0) = \lim_{x\in G^\pm, x\to x_0\in\Gamma_0} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\nu_j$, $u^\pm = \lim_{x\in G^\pm, x\to x_0\in\Gamma_0} u(x)$ и n, ν – внешние единичные нормали к $\Gamma, \partial G^-$ соответственно. К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$u^+(b_i) = \psi_i \ (i = 1,2,\dots,r_1), u^-(b_i) = \psi_i \ (i = r_1 + 1,\dots,r), \quad (4)$$

где $b_i \in \Gamma_0$ $(i = 1,2,\dots,r)$ и ψ_i некоторые постоянные.

Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)-(4) и неизвестной функции β вида $\beta = \sum_{j=1}^{r} \beta_j\Phi_j(x)$, где функции Φ_j заданы, а постоянные β_j считаются неизвестными. Условия сопряжения (3) совпадают с известными в теории тепломассопереноса условиями на границе двух сред, когда контакт не является идеальным (см. постановки в [1]). В этом случае β – коэффициент теплообмена. Если $\beta \to \infty$, мы получим стандартную постановку задачи дифракции (см. [2, § 16, гл. 3]), когда условия имеют вид $u^+ = u^-$, $\frac{\partial u^+}{\partial N}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u^-}{\partial N}|_{\Gamma_0}$. Обратные задачи нахождения неизвестных граничных режимов, в частности задачи конвективного теплообмена, являются классическими (см. [4]-[5]). В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных численному решению задач типа (1)-(4) в различных постановках, точки $\{b_i\}$ в (4) чаще всего являются внутренними точками областей G^+, G^-. Отметим, например, работы [6-9], посвященные задачам сопряжения с условиями типа неидеального контакта в стационарном случае, и работы [10-13]. Гораздо большее количество работ посвящено задачам (1)-(4) в нестационарном случае, в том числе и решению обратных задач (1)-(4) (см. [10]-[13]). С теоретической точки зрения задача сопряжения (1)-(3) исследована только в некоторых частных случаях, а обратная задача (1)-(4) практически не исследовалась. Ранее в основном исследовались задачи сопряжения с условиями типа дифракции. Можно отметить классические работы (L_2 теория) О. А. Ладыженской и О. А. Олейник (см. [14-17]) и ряда других авторов в 50-60-е годы. Общая теория задач типа дифракции для эллиптических операторов высокого порядка имеется в работах Шефтеля [18, 19], где приведены условия разрешимости как в пространствах Соболева, так и в пространствах Гельдера. Можно также отметить работу [20], где по существу был рассмотрен вопрос об обобщенной в некотором смысле разрешимости задач типа дифракции, и работу [21], посвященную уже задачам типа дифракции для эллиптических систем высокого порядка в пространствах Соболева и Гельдера. Среди работ, посвященных задаче (1)-(3), нет достаточно общих результатов. Можно отметить работы [22-24], где, в частности, получены теоремы существования и единственности решения в пространстве $W_2^2(G^+)\cap W_2^2(G^-)$ в цилиндрической пространственной области в модельном случае.

В данной работе мы изучаем вопросы корректности задачи (1)-(4), в частности, мы получим теоремы существования и единственности решений (основной результат – теорема 3).

Определения и вспомогательные результаты

В работе мы используем пространства Соболева и Гельдера $W_p^s(G)$, $C^\alpha(\overline{G})$ (см. определения в [25]). Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Пусть $(u,v)=\int_G u(x)\overline{v(x)}dx$. Обозначим через $B_\delta(b_i)$ – шар радиуса δ с центром в точке b_i. Параметр $\delta>0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(b_i)}\cap\partial G=\emptyset$, $\overline{B_\delta(b_i)}\cap\overline{B_\delta(b_j)})=\emptyset$ для $i\neq j$. Далее во всех условиях на данные считаем такой параметр фиксированным.

Далее мы считаем, что параметр $p>n$ зафиксирован. Говорим, что граница Γ данной области G принадлежит классу C^s, $s\geq 1$ (см. определение в [2, Гл. 1]), если для любой точки $x_0\in\Gamma$ найдется окрестность U (координатная окрестность) этой точки, и система координат y (локальная система координат), полученная с помощью поворота и переноса начала координат из исходной, такая, что ось y_n направлена по внутренней нормали в Γ в точке x_0, и уравнение части границы $U\cap\Gamma$ имеет вид $y_n=\gamma(y')$, $\gamma(0)=0$, $|y'|<\delta$, $y'=(y_1,\dots,y_{n-1})$, причем $\gamma\in C^s(\overline{B_\delta{}'(0)})$ $(B_\delta{}'(0)=\{y'\colon|y'|<\delta\})$ и $G\cap U=\{y\colon|y'|<\delta,0<y_n-\gamma(y')<\delta_1\}$, $(\mathbb{R}^n\backslash G)\cap U=\{y\colon|y'|<\delta,-\delta_1<y_n-\gamma(y')<0\}$. Числа δ,δ_1 для области G фиксированы, причем без ограничения общности считаем, что $\delta_1>(M+1)\delta$, где M – постоянная Липшица функции γ. Обозначим параметр δ из этого определения через δ_G.

Введём обозначения: $G_\delta=\cup_i B_\delta(b_i)$, $\Gamma_\delta=G_\delta\cap\Gamma_0$. Рассматривая задачу (1)-(4), мы предполагаем, что

$$\Gamma,\Gamma_0\in C^2,\Gamma_\delta\in C^3, \tag{5}$$

где δ – допустимый параметр такой, что $\delta<\delta_G$–, и для любой координатной окрестности $U_i=\{y\colon|y'|<\delta,-\delta_1<y_n-\gamma(y')<\delta_1\}$ точки b_i имеем, что $\overline{U_i}\subset G$. Чтобы достичь последнего, мы всегда можем уменьшить параметр δ. Условие $\delta_1>(M+1)\delta$ гарантирует вложение $B_\delta(b_i)\subset U_i$. Далее мы фиксируем такой параметр δ (он может быть выбран как угодно малым, если необходимо). Следующие оценки следствия стандартных теорем о следах [25] и определений норм.

Лемма 1. Пусть G – ограниченная область с границей класса C^2. Существует постоянная C такая, что

$$\|v\|_{\widetilde{W}_p^{2s_1}(\Gamma)}+\|\frac{\partial v}{\partial\nu}\|_{\widetilde{W}_p^{2s_0}(\Gamma)}\leq C\|v\|_{W_p^2(G)}, s_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}, s_1=1-\frac{1}{2p}, \tag{6}$$

для всех $v\in W_p^2(G)$. Здесь $\frac{\partial v}{\partial\nu}$ – производная по внешней нормали к Γ.

Лемма 2. Пусть $s\in(n/p,1)$ и G – область, удовлетворяющая условиям леммы 1. Тогда справедливы следующие утверждения. Произведение qv функций класса $W_p^s(G)$ снова принадлежит $W_p^s(G)$, и справедлива оценка

$$\|qv\|_{W_p^s(G)}\leq c_0\|q\|_{W_p^s(G)}\|v\|_{W_p^s(G)}.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для функций класса $W_p^s(\Gamma_0)$ при $s\in((n-1)/p,1)$.

Оператор L считается эллиптическим, т. е. для некоторой постоянной $\delta_0 > 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2 \ \forall\xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in G.$$

Рассмотрим вспомогательные задачи сопряжения

$$Lu = f(x), x \in G, Bu|_\Gamma = g, \tag{7}$$

$$B^+u = \frac{\partial u^+}{\partial N} - \beta(u^+ - u^-) = g^+, \frac{\partial u^+}{\partial N} = \frac{\partial u^-}{\partial N} + g^-, x \in \Gamma_0. \tag{8}$$

Опишем условия на данные, гарантирующие разрешимость задачи (7), (8). Считаем, что

$$a_i \in L_p(G)\ (i \geq 0), a_{ij} \in C(G^\pm)\ (i, j = 1, \dots, n), \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\Gamma); \tag{9}$$

функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{G^\pm})$ и

$$a_{ij}^\pm|_{\Gamma_0} \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{\Gamma_0}), a_{ij}|_\Gamma \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{\Gamma}), i, j = 1, \dots, n, \tag{10}$$

где $a_{ij}^\pm(t, x_0) = \lim_{x\in G^\pm, x\to x_0\in\Gamma_0} a_{ij}(t, x)$, параметр $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2})$ произволен (он может быть как угодно мал), и последнее включение в (10) считается выполненным, только если $Bu \neq u$ в (2);

$$a_i \in W_p^1(G_\delta^\pm))\ (i \geq 0), a_{ij} \in W_\infty^1(G_\delta^\pm))(i, j = 1,2, \dots, n), \tag{11}$$

где $G_\delta^\pm = G_\delta \cap G^\pm$. Построим функции $\varphi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(b_i)$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(b_i)$, положим $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)$.

Мы используем выпрямление границы $z_n = y_n - \gamma(y')$, $z' = y'$, где $y-$ локальная система координат в точке b_i. При выполнении условия (5) преобразование $x = x(y(z)) = x^i(z)$ и обратное к нему принадлежат классу C^3. Для удобства всюду ниже считаем, что на Γ_0 ось y_n локальной системы координат в каждой точке направлена вне области G^-. Пусть $U' = \{z: |z'| < \delta, -\delta_1 < z_n < \delta_1\}$, $U^{+(-)} = \{z \in U': z_n > 0 (z_n < 0)\}$ и $B_\delta{}' = \{z': |z'| < \delta\}$.

Мы считаем, что

$$g^\pm \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0), g \in W_p^{2k_0}(S), \tag{12}$$

где $k_0 = s_0$ в случае условий третьей краевой задачи и $k_0 = s_1$ в случае условий Дирихле. Пусть

$$f \in L_p(G), \beta \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0), \tag{13}$$

$$\beta \in W_p^{2-1/p}(\Gamma_\delta). \tag{14}$$

В координатной окрестности U_i точки $b_i \in \Gamma_0$ выпрямим границу и перейдем к системе координат $z = (z', z_n)$. Мы также предполагаем, что для каждого $i = 1,2, \dots, r$

$$\begin{gathered} \nabla_{z'}\varphi_i f(x^i(z)) \in L_p(U'), \nabla_{z'}\varphi_i u_0^\pm(x^i(z)) \in W_p^{2-2/p}(U^\pm)\ (i \leq r), \\ \nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z', 0)) \in W_p^{2s_0}(B_\delta{}'), \\ \nabla_{z'} a_{kl}^\pm(x^i(z', 0)) \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(B_\delta{}'), (k, l = 1,2 \dots, n, \varepsilon_0 > 0). \end{gathered} \tag{15}$$

Отметим, что условие (15) не зависит от введённой локальной системы координат y и системы координат z. Например, третье включение эквивалентно тому, что для любого гладкого касательного к Γ_0 векторного поля $l(x)$, $\frac{\partial\varphi_i g^+(x)}{\partial l} \in W_p^{2s_0}(B_\delta')$ каждая из производных $\frac{\partial}{\partial z_j}$ $(j = 1,2, \dots, n-1)$ в переменных x может быть записана как производная по направлению некоторого касательного к Γ_0 векторного поля, которые в каждой точке образуют базис в касательной плоскости к Γ_0. Условие (15) может быть переформулировано и в исходной системе координат x, однако гораздо проще записать его в виде (15).

Следующий результат фактически есть следствие теоремы 3 в [26], где эта теорема была доказана в параболическом случае.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (9)-(10), (12)-(13) *и* $\Gamma, \Gamma_0 \in C^2$. *Тогда найдется параметр* $\lambda_0 > 0$ *такой, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *существует единственное решение задачи* (7)-(8) *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(G^+) \cap W_p^{1,2}(G^-)$, *причем справедлива оценка*

$$\| u \|_{W_p^2(G^+)} + \| u \|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \, \| u \|_{L_p(G)} \leq C_0(\| f \|_{L_p(G)} + \| g^+ \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \| g^+ \|_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0}$$
$$+ \| g^- \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \| g^- \|_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \| g \|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0} \| g \|_{L_p(\Gamma)}).$$

Доказательство. Наше утверждение фактически вытекает из соответствующей теоремы для параболического случая (см. теорему 3 в [26]). По сравнению с [26], здесь мы описываем гладкость функции β в терминах принадлежности некоторому пространству Соболева. Условия такого типа на коэффициенты граничных операторов (как и в нашем случае) использовались (см., например, [27]). Получим априорную оценку для решений. Положим, $v = e^{\lambda t} u(x)$, где u –решение задачи (7), (8). Эта функция есть решение задачи

$$v_t - Lv = f(x)e^{\lambda t}, (t, x) \in Q = (0, T) \times G, T > 0,$$
$$Bv|_S = ge^{\lambda t} \; (S = \Gamma \times (0, T)), v|_{t=0} = u(x),$$
$$\frac{\partial v^+}{\partial N}(x) - \beta(v^+ - v^-)(x) = g^+(x)e^{\lambda t}, \frac{\partial v^+}{\partial N}(x) = \frac{\partial v^-}{\partial N}(x) + g^-(x)e^{\lambda t}, (t, x) \in S_0 = (0, T) \times \Gamma_0.$$

Решение этой задачи существует, единственно, и решение удовлетворяет оценке

$$\| v_t \|_{L_p(Q)} + \| v \|_{L_p(0,T;W_p^2(G^+))} + \| v \|_{L_p(0,T;W_p^2(G^-))} \leq C_1(\| fe^{\lambda t} \|_{L_p(Q)} +$$
$$\| g^+ e^{\lambda t} \|_{W_p^{s_0,2s_0}((0,T)\times\Gamma_0)} + \| ge^{\lambda t} \|_{W_p^{k_0,2k_0}((0,T)\times\Gamma)} +$$
$$\| g^- e^{\lambda t} \|_{W_p^{s_0,2s_0}((0,T)\times\Gamma_0)} + \| u \|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \| u \|_{W_p^{2-2/p}(G^-)}),$$

где C_1 – некоторая постоянная, не зависящая от данных. Рассмотрим, например, норму

$$\| g^+ e^{\lambda t} \|_{W_p^{s_0,2s_0}((0,T)\times\Gamma_0)} = (\| g^+ e^{\lambda t} \|^p_{L_p(0,T;W_p^{2s_0}((0,T)\times\Gamma_0)} + \| g^+ e^{\lambda t} \|^p_{L_p(\Gamma_0;W_p^{s_0}(0,T))})^{1/p},$$

где каждая норма в правой и левой части распадается в произведение норм по переменным t, x. Фиксируем $\lambda_0 > 0$, и пусть $\lambda \geq \lambda_0$. Например, имеем неравенство

$$\| e^{\lambda t} \|_{W_p^{s_0}(0,T)} \leq c \| e^{\lambda t} \|^{s_0}_{W_p^1(0,T)} \| e^{\lambda t} \|^{1-s_0}_{L_p(0,T)} \leq c_1 |\lambda|^{s_0} C(T, \lambda), C(T, \lambda) = ((e^{p\lambda T} - 1)/p\lambda)^{1/p},$$

откуда вытекает, что

$$(\| g^+ e^{\lambda t} \|^p_{L_p\left(0,T;W_p^{2s_0}(\Gamma_0)\right)} + \| g^+ e^{\lambda t} \|^p_{L_p\left(\Gamma_0;W_p^{s_0}(0,T)\right)})^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$C(T, \lambda)c_2(\| g^+ \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \| g^+ \|_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0}),$$

где постоянная c_2 не зависит от λ. Аналогичные рассуждения могут быть записаны и для остальных интегралов. Таким образом, используя определение нормы и структуру решения v, получим неравенство

$$C(T, \lambda)(|\lambda| \, \| u \|_{L_p(G)} + \| u \|_{W_p^2(G^-)} + \| u \|_{W_p^2(G^+)}) \leq C_2 C(T, \lambda)(\| f \|_{L_p(G)} + \| g^+ \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}$$
$$+ \| g^+ \|_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \| g^- \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}$$
$$+ \| g^- \|_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \| g \|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + \left|\lambda\right|^{k_0} \| g \|_{L_p(\Gamma)}\Big) + C_1 \left(\| u \|_{W_p^2(G^+)} + \| u \|_{W_p^2(G^-)}\right).$$

Делим обе части неравенства на $C(T, \lambda)$. Увеличивая постоянную λ_0, если необходимо, мы можем считать, что $C_1 / C(T, \lambda) \leq 1/2$ при $\lambda \geq \lambda_0$. Тогда будет справедливо неравенство

$$|\lambda| \parallel u \parallel_{L_p(G)} + \parallel u \parallel_{W_p^2(G^-)} + \parallel u \parallel_{W_p^2(G^+)} \le C_3(\parallel f \parallel_{L_p(G)} + \parallel g^+ \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} +$$
$$\parallel g^+ \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \parallel g^- \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \parallel g^- \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \parallel g \parallel_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0} \parallel g \parallel_{L_p(\Gamma)}),$$

где постоянная C_3 не зависит от λ. Эта априорная оценка, как и в доказательстве теоремы 3 в [26], и метод продолжения по параметру в соответствии со схемой, изложенной в [26], гарантирует разрешимость задачи в требуемом классе и соответствующую оценку для решений из утверждения теоремы.

Оценку из утверждения теоремы можно улучшить в следующем смысле. Построим функцию $\varphi_{0i} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $supp\ \varphi_{0i} \subset B_\delta(b_i)$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* $\lambda \ge \lambda_0 > 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\parallel \varphi_{0i}u \parallel_{W_p^2(G^+)} + \parallel \varphi_{0i}u \parallel_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \parallel \varphi_{0i}u \parallel_{L_p(G)} \le C_0(\parallel \varphi_{0i}f \parallel_{L_p(G)} + \parallel \varphi_{0i}g^+ \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} +$$
$$\parallel \varphi_{0i}g^+ \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \parallel \varphi_{0i}g^- \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \parallel \varphi_{0i}g^- \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + |\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0} J),$$
$$J = \parallel g \parallel_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0} \parallel g \parallel_{L_p(\Gamma)} + \parallel f \parallel_{L_p(G)} + \parallel g^+ \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} +$$
$$\parallel g^+ \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \parallel g^- \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \parallel g^- \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0},$$

где постоянная C_0 не зависит от λ и $\varepsilon_0 \in (0{,}1/15p)$ как угодно малая постоянная.

Доказательство. Утверждение доказывается довольно просто. Функция $v = \varphi_{0i}u$ есть решение задачи

$$-Lv = \varphi_{0i}f + [\varphi_{0i}, L]u = \tilde{f}, B^+v|_S = \varphi_{0i}g^+ - [\varphi_{0i}, B^+]u, Bv|_\Gamma = 0,$$
$$\frac{\partial v^+}{\partial N} = \frac{\partial v^-}{\partial N} + \varphi_{0iN}(v^+ - v^-) + g^-\varphi_{1i},$$

где $[\varphi_{0i}, L]u = \varphi_{0i}Lu - L(\varphi_{0i}u) = -2\sum_{l,k=1}^n a_{lk}u_{x_k}\varphi_{0ix_l} - \sum_{l,k=1}^n a_{lk}u\varphi_{0ix_lx_k} - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_{0ix_k}u$ и $[\varphi_i, B^+]u = -\sum_{k,l=1}^n a_{kl}^+\nu_k\varphi_{0ix_l}u^+$. Применяя оценку из теоремы 1 к функции v, получим

$$\begin{aligned} &\parallel v \parallel_{W_p^2(G^+)} + \parallel v \parallel_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \parallel v \parallel_{L_p(G)} \le c_1(\parallel \varphi_{0i}f \parallel_{L_p(G)} + \parallel \varphi_{0i}g^+ \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} \\ &+ \parallel \varphi_{0i}g^+ \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \parallel \varphi_{0i}g^- \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \parallel \varphi_{0i}g^- \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \\ &\parallel u^+(x^i(z',0)) \parallel_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + |\lambda|^{s_0} \parallel u^+(x^i(z',0)) \parallel_{L_p(B_{\delta'})} + \\ &\parallel u^-(x^i(z',0)) \parallel_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + |\lambda|^{s_0} \parallel u^-(x^i(z',0)) \parallel_{L_p(B_{\delta'})} + \\ &\parallel u \parallel_{W_p^1(G^+\cap B_\delta(b_i))} + \parallel u \parallel_{W_p^1(G^-\cap B_\delta(b_i))}). \end{aligned} \tag{16}$$

Последнее слагаемое оценивается через

$$\parallel u \parallel_{W_p^1(G^\pm\cap B_\delta(b_i))} \le c_2 \parallel u \parallel^{1/2}_{W_p^2(G^\pm\cap(B_{\delta_2}(b_i)))} \parallel u \parallel^{1/2}_{L_p(G^\pm\cap(B_{\delta_2}(b_i)))} \le$$
$$c_2|\lambda|^{-1/2}(\parallel u \parallel_{W_p^2(G^\pm\cap B_\delta(b_i))} + |\lambda| \parallel u \parallel_{L_p(G^\pm\cap B_\delta(b_i))}) \le c_2|\lambda|^{-1/2}J.$$

Аналогично (используем еще теоремы о следах)

$$\parallel u^\pm(x^i(z',0)) \parallel_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + |\lambda|^{s_0} \parallel u^\pm(x^i(z',0)) \parallel_{L_p(B_{\delta'})} \le$$
$$c_3|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0}(\parallel u \parallel_{W_p^2(G^\pm\cap B_\delta(b_i))} + |\lambda| \parallel u \parallel_{L_p(G^\pm\cap B_\delta(b_i))}) \le c_4|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0}J,$$

где $\varepsilon_0 \in (0{,}1/2)$ как угодно малая постоянная. Действительно, первое слагаемое в предыдущей сумме оценивается через

$$\parallel u^\pm(x^i(z',0)) \parallel_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} \le c_5 \parallel u^\pm(x^i(z)) \parallel_{W_p^1(G^\pm\cap B_\delta(b_i))} \le c_6|\lambda|^{-1/2}J,$$

а второе через ($\theta = 1/2p + 2\varepsilon_0$)

$$|\lambda|^{s_0} \parallel u^{\pm}(x^i(z',0)) \parallel_{L_p(B_{\delta'})} \leq c_6|\lambda|^{s_0} \parallel u^{\pm}(x^i(z)) \parallel_{W_p^{1/p+\varepsilon_0}(U^{\pm})} \leq$$

$$c_7|\lambda|^{s_0} \parallel u \parallel^{\theta}_{W_p^2(G^{\pm}\cap B_\delta(b^i))} \parallel u \parallel^{1-\theta}_{L_p(G^{\pm}\cap B_\delta(b^i))} \leq c_8|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0} J.$$

Подставляя полученные выше оценки в (16), получим неравенство

$$\parallel \varphi_{0i}u \parallel_{W_p^2(G^+)} + \parallel \varphi_{0i}u \parallel_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \parallel \varphi_{0i}u \parallel_{L_p(G)} \leq$$
$$C_2(\parallel \varphi_{0i}f \parallel_{L_p(G)} + \parallel \varphi_{0i}g^+ \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \parallel \varphi_{0i}g^+ \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} +$$
$$\parallel \varphi_{0i}g^- \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \parallel \varphi_{0i}g^- \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + c_6|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0} J.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5), (9)-(15). Тогда решение, полученное в теореме 1, обладает тем свойством, что $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^2(U^{\pm}), i = 1, \dots, r$, и справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{r} (\parallel \nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \parallel_{W_p^2(U^+)} + \parallel \nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \parallel_{W_p^2(U^-)} + |\lambda| \parallel \nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \parallel_{L_p(U')})$$
$$\leq C_1(|\lambda|^{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{r} (\parallel \varphi_{0i}g^+ \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \parallel \varphi_{0i}g^+ \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} +$$
$$\parallel \varphi_{0i}g^- \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \parallel \varphi_{0i}g^- \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \parallel \varphi_{0i}f \parallel_{L_p(G)}) + \sum_{i=1}^{r} \parallel \nabla_{z'}\varphi_i f \parallel_{L_p(U')}$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} [\parallel \nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z',0)) \parallel_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + |\lambda|^{s_0} \parallel \nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z',0)) \parallel_{L_p(G)} +$$
$$\parallel \nabla_{z'}\varphi_i g^-(x^i(z',0)) \parallel_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + |\lambda|^{s_0} \parallel \nabla_{z'}\varphi_i g^- \parallel_{L_p(B_{\delta'})}] + |\lambda|^{-1/2+3\varepsilon_0} J),$$

где постоянная C_1 не зависит от $\lambda \geq \lambda_0$ и f, g, g^+, $\varphi_{0i} \in C_0^\infty(B_\delta)$, $\varphi_{0i}(x) = 1$ на $supp\, \varphi_i$, и $\varepsilon_0 \in (0{,}1/15p)$ как угодно малая постоянная.

Доказательство. Доказательство использует метод конечных разностей и оценку из леммы 3. Считаем для удобства, что $supp\, \varphi_{0i} = 1$ на $B_{3\delta/4}$. Использование метода конечных разностей производится по схеме, изложенной в доказательстве теоремы 4, п. 3, § 2, гл. 4 в [29]. Поэтому мы остановимся только на основных моментах. Возьмем точку $b_i \in \Gamma_0$. Умножая уравнение на φ_i, для $v = \varphi_i u$, имеем:

$$-Lv = \varphi_i f + [\varphi_i, L]u = \tilde{f}, B^+ v|_S = \varphi_i g^+ - [\varphi_i, B^+]u,$$
$$\frac{\partial v^+}{\partial N}(x_0) = \frac{\partial v^-}{\partial N}(x_0) + \varphi_{iN}(v^+ - v^-) + g^- \varphi_i,$$

где $[\varphi_i, L]u = \varphi_i Lu - L(\varphi_i u) = -2\sum_{l,k=1}^n a_{lk} u_{x_k} \varphi_{ix_l} - \sum_{l,k=1}^n a_{lk} u \varphi_{ix_l x_k} - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{ix_k} u$ и $[\varphi_i, B^+]u = -\sum_{k,l=1}^n a^+_{kl} \nu_k \varphi_{ix_l} u^+$. Запишем L в локальной системе координат y и обозначим полученные коэффициенты через $\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}_i$. Выпрямим границу преобразованием $z_n = y_n - \gamma(y')$, $z' = y'$. Получим задачу

$$\tilde{L}v = \tilde{f},$$
$$\tilde{B}^+ v|_{z_n=0} = \varphi_i g^+(x^i(z',0)) - [\varphi_i, B^+]u^+(x^i(z',0)) = \tilde{g}^+(z'),$$
$$\frac{\partial v^+}{\partial N} = \frac{\partial v^-}{\partial N} + \varphi_{iN}(v^+ - v^-) + g^- \varphi_i, \varphi_{iN} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial N},$$

где $\tilde{L}$, $\tilde{B}^+$ – операторы L, B^+, записанные в системе координат z. Обозначим коэффициенты $\tilde{L}$ через c_{kl}, c_k, оператор $\tilde{B}^+$ запишется в виде $\tilde{B}^+ v = \sum_{k=1}^n b_k(z') v_{z_k} - \beta(z')(v^+ - v^-)$. Пусть $\Delta_j v(z) = (v(z + e_j\eta) - v(z))/\eta$ (e_j – j-й координатный вектор), где $|\eta| < \delta/8$ и $j \leq n - 1$. Тогда функция $w = \Delta_j v$ есть решение задачи

$$\begin{aligned}&\tilde{L}(z,D)w=[\tilde{L},\Delta_j]v+\Delta_j\tilde{f}=\tilde{f}_0,\\&\tilde{B}^+w|_{z_n=0}=[\tilde{B}^+,\Delta_j]v+\Delta_j\tilde{g}^+=\tilde{g}_0^+,\\&\frac{\partial w^+}{\partial N}=\frac{\partial w^-}{\partial N}+\Delta_j(\varphi_{iN}(v^+-v^-))+\Delta_j g^-\varphi_i+[\frac{\partial}{\partial N},\Delta_j](w^+-w^-),\end{aligned}\tag{17}$$

где $[\tilde{L},\Delta_j]v=-\sum_{k,l=1}^{n}\Delta_j c_{kl}(z)v_{z_kz_l}(z+e_j\eta)-\sum_{k=1}^{n}\Delta_j c_k(z)v_{z_k}(z+e_j\eta)-\Delta_j c_0(z)v(z+e_j\eta)$, $[\tilde{B}^+,\Delta_j]v=-\sum_{k=1}^{n}\Delta_j b_k v_{z_l}(z'+e_j,\eta,0)+\Delta_j\beta(v^+-v^-)(z'+e_j,\eta,0)$, где $e_j{}'$ – j-й координатный вектор в $\mathbb{R}^{n-1}$. Вернемся к переменным x и продолжим все функции в (17) нулем вне $U_j\cap G$. Тогда функция $w\in W_p^2(G^+)\cap W_p^2(G^-)$ есть решение задачи (7)-(8) с некоторыми новыми правыми частями в граничном условии и уравнении, т. е.

$$Lw=\tilde{f}_0\ (x\in G), Bw|_\Gamma=0, B^+w=\tilde{g}_0^+,\frac{\partial w^+}{\partial N}=\frac{\partial w^-}{\partial N}+\tilde{g}^-.\tag{18}$$

По теореме 1, имеем оценку

$$\|w\|_{W_p^2(G^+)}+\|w\|_{W_p^2(G^-)}+|\lambda|\,\|w\|_{L_p(G)}\le$$
$$c_0(\|\tilde{f}_0\|_{L_p(G)}+\|\tilde{g}_0^+\|_{\tilde{W}_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+|\lambda|^{s_0}\|\tilde{g}_0^+\|_{L_p(\Gamma_0)}+\|\tilde{g}^-\|_{\tilde{W}_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+|\lambda|^{s_0}\|\tilde{g}^-\|_{L_p(\Gamma_0)}).$$

Наша следующая цель – показать, что правая часть ограничена равномерно по параметру η. Это делается стандартным образом с использованием представлений

$$\Delta_j f=\int_0^1 f_{z_j}(z+e_j\tau\eta)\,d\tau.$$

Окончательное неравенство имеет вид

$$\begin{aligned}&\|\Delta_j v(z)\|_{W_p^2(U^+)}+\|\Delta_j v(z)\|_{W_p^2(U^-)}+|\lambda|\,\|\Delta_j v\|_{L_p(G)}\le c_1(\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(U')}+\\&\|f\|_{L_p(G)}+\|\nabla_{z'}\varphi_i g^+\|_{W_p^{2s_0}(B_{\delta}')}+\|\nabla_{z'}\varphi_i g^+\|_{L_p(B_\delta')}|\lambda|^{s_0}+\|\nabla_{z'}\varphi_i g^-\|_{L_p(B_\delta')}|\lambda|^{s_0}\\&+\|\nabla_{z'}\varphi_i g^-\|_{W_p^{2s_0}(B_\delta')}+\|u^+\|_{W_p^{1+2s_0}(B_{3\delta/4}')}+|\lambda|^{s_0}\|u^+\|_{W_p^1(B_{3\delta/4}')}+\|u^-\|_{W_p^{1+2s_0}(B_{3\delta/4}')}+\\&|\lambda|^{s_0}\|u^-\|_{W_p^1(B_{3\delta/4}')}+\|u\|_{W_p^2(G^+\cap B_{3\delta/4}(b_i))}+\|u\|_{W_p^2(G^-\cap B_{3\delta/4}(b_i))})=J_2,\end{aligned}\tag{19}$$

где постоянная c_1 не зависит от η. Используя лемму 3, получим оценку

$$\|\varphi_{0i}u(z)\|_{W_p^2(U^+)}+\|\varphi_{0i}u(z)\|_{W_p^2(U^-)}+|\lambda|\,\|\varphi_{0i}u\|_{L_p(G)}\le c_2(\|\varphi_{0i}g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+$$
$$\|\varphi_{0i}g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+\|\varphi_{0i}g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}\left|\lambda\right|^{s_0}+\|\varphi_{0i}g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}\left|\lambda\right|^{s_0}+\|\varphi_{0i}f\|_{L_p(G)}+\left|\lambda\right|^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon_0}J\Big).$$

Далее из теорем вложения мы можем записать неравенство

$$\begin{aligned}&\|u^+\|_{W_p^{1+2s_0}(B_{3\delta/4}')}+|\lambda|^{s_0}\|u^+\|_{W_p^1(B_{3\delta/4}')}+\|u^-\|_{W_p^{1+2s_0}(B_{3\delta/4}')}+|\lambda|^{s_0}\|u^-\|_{W_p^1(B_{3\delta/4}')}\\&\|u\|_{W_p^2(G^+\cap B_{3\delta/4}(b_i))}+\|u\|_{W_p^2(G^-\cap B_{3\delta/4}(b_i))}\le c_3|\lambda|^{\varepsilon_0}(\|\varphi_{0i}u\|_{W_2^2(G^+\cap B_\delta(b_i))}\\&+\|\varphi_{0i}u\|_{W_2^2(G^-\cap B_\delta(b_i))}+|\lambda|\,\|\varphi_{0i}u\|_{L_p(B_\delta(b_i))}).\end{aligned}$$

Из двух последних неравенств вытекает, что величина J_2 допускает оценку

$$\begin{aligned}&J_2\le c_4(\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(U')}+\|f\|_{L_p(G)}+\|\nabla_{z'}\varphi_i g^+\|_{W_p^{2s_0}(B_\delta')}+\|\nabla_{z'}\varphi_i g^+\|_{L_p(B_\delta')}|\lambda|^{s_0}+\\&\|\nabla_{z'}\varphi_i g^-\|_{L_p(B_\delta')}|\lambda|^{s_0}+\|\nabla_{z'}\varphi_i g^-\|_{W_p^{2s_0}(B_\delta')}+c_5|\lambda|^{\varepsilon_0}(\|\varphi_{0i}g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+\|\varphi_{0i}g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+\\&\|\varphi_{0i}g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}+\|\varphi_{0i}g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}+\|\varphi_{0i}f\|_{L_p(G)})+c_6|\lambda|^{-1/2+3\varepsilon_0}J).\end{aligned}$$

В силу произвольности j и известных свойств конечных разностей (см. в [3, гл. 1, лемма 4.6] и теоремы 4 п. 4, § 3, гл. 3 в [22]) заключаем, что для всех $j=1,2,\dots,n-1$ существуют обобщенные производные $v_{z_j}\in W_p^2(U^+)\cap W_p^2(U^-)$. В силу произвольности параметров i,j справедлива оценка из утверждения теоремы.

Основные результаты

Приведем условия на данные. Считаем, что функции $\Phi_j(x)$ при всех допустимых j обладают свойствами

$$\Phi_j \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0) \cap W_p^{2-1/p}(\Gamma_\delta)). \tag{20}$$

Пусть $\Phi(t)$ – матрица с элементами $\phi_{ij}(t) = \Phi_j(b_i)$ $(i,j = 1,2,\dots,r)$. В силу теорем вложения $\Phi_j(x) \in C^{\alpha_0}(\overline{\Gamma_0})$ с $\alpha_0 = 1 - n/p$ (см. теоремы вложения в [25]). Считая, что условия теорем 1, 2 выполнены, построим решение задачи сопряжения (7), (8), где возьмем $\beta = 0, g^- = 0$. Обозначим полученное решение через w_0. Функция $v = u - w_0$ есть решение задачи

$$Lv = 0, (x \in G), Bv|_\Gamma = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - \beta(v^+ - v^-) = \beta(w_0^+ - w_0^-), \frac{\partial v^+}{\partial N} = \frac{\partial v^-}{\partial N}\ (x \in \Gamma_0), \tag{22}$$

$$\begin{gathered} v^+(b_i) = \tilde{\psi}_i = \psi_i - w_0^+(b_i)(i = 1,2,\dots,r_1), \\ v^-(b_i) = \tilde{\psi}_i = \psi_i - w_0^-(b_i)(i = r_1+1,\dots,r). \end{gathered} \tag{23}$$

Дополнительные условия на данные имеют вид

$$\tilde{\psi}_i \neq 0\ (i \le r), |det\ \Phi| > 0. \tag{24}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5), (9)–(15), (20), (24). Тогда найдется параметр $\lambda_0 > 0$ такой, что при $\lambda \ge \lambda_0$ существует единственное решение u задачи (1)-(4) $(u, \beta_1, \dots, \beta_r)$ такое, что $u \in W_p^2(G^+) \cap W_p^2(G^-)$, причем $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^2(U^+) \cap W_p^2(U^-), i = 1,\dots,r$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для вспомогательной задачи (21)-(23). Фиксируем $R_0 > 0$ (эту величину мы определим позже) и предположим, что $\vec{\alpha} = (\beta_1,\dots,\beta_r) \in B_{R_0} = \{\vec{\alpha} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)\colon |\vec{\alpha}| \le R_0\}$. Фиксируя $\vec{\alpha} \in B_{R_0}$ и решая задачу (21), (22), мы тем самым построим отображение $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$. Функция v обладает свойствами, указанными в формулировках теорем 1, 2. Мы сведем вопрос разрешимости задачи (21)-(23) к вопросу разрешимости приведенного ниже операторного уравнения относительно вектора $\vec{\alpha}$, разрешимость которого устанавливается при помощи теоремы о неподвижной точке. Кроме отображения $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$, нам понадобится еще одно отображение. Пусть v – решение задачи (21), (22). Фиксируя k и умножая уравнение (30) на φ_k, имеем

$$-Lw = [\varphi_k, L]v = f_{0k}, w = \varphi_k v, \tag{25}$$

где $[\varphi_k, L]v = \varphi_k Lv - L(\varphi_k v) = -2\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} \varphi_{kx_j} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v \varphi_{kx_i x_i} - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{kx_i} v$. Сделав замену переменных $x = x^k(z)$, перепишем (25) в виде

$$-b_{nn}^{\pm}(z) w_{kz_n z_n}^{\pm} + \lambda w_k = \sum_{i+j<2n} b_{ij}^{\pm} w_{kz_i z_j}^{\pm} + \sum_{i=1}^n b_i^{\pm} w_{kz_i}^{\pm} + b_0^{\pm} w_k^{\pm} + f_{0k} = f_k(z), z \in U^{\pm}, \tag{26}$$

где $w_k^{\pm} = \varphi_k v(x^k(z))|_{U^\pm}$. Отметим, что $b_{nn}^{\pm} > 0$ для всех z в силу эллиптичности оператора L. Рассмотрим уравнения

$$-b_{nn}^{+}(0,z_n)\omega_{iz_n z_n} + \lambda\omega_i = f_i(0,z_n)\ (i = 1,2,\dots,r_1), z_n \in (0,\delta_1), \tag{27}$$

$$-b_{nn}^{-}(0,z_n)\omega_{iz_n z_n} + \lambda\omega_i = f_i(0,z_n)\ (i = r_1+1,\dots,r), z_n \in (-\delta_1,0). \tag{28}$$

Дополним уравнения (27), (28) начальными и краевыми условиями

$$\omega_i|_{z_n=0} = \tilde{\psi}_i, \omega_i|_{z_n=\delta_1} = 0, i \le r_1. \tag{29}$$

$$\omega_i|_{z_n=0} = \tilde{\psi}_i, \omega_i|_{z_n=-\delta_1} = 0, i > r_1. \tag{30}$$

Пусть $v(\vec{\alpha})$ – решение задачи (21), (22), построим функции ω_i как решение задачи (27), (29) (или (28), (30) соответственно). В случае, если $v(\vec{\alpha})$ есть решение задачи (21)-(22), то

$\omega_i(z_n) = w_i^+(x^i(0,z_n))$ при $i \le r_1$ и $\omega_i(z_n) = w_i^-(x^i(0,z_n))$ при $i > r_1$. Перепишем равенства (24) в окрестности U_i в виде

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{j=1}^{n} b_j(z')v_{z_j}^+(x^i(z',0)) = (\beta(v^+ - v^-) + \beta(w_0^+ - w_0^-))(x^i(z',0)),\\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n} b_j(z')v_{z_j}^+(x^i(z',0)) = \sum_{j=1}^{n} b_j(z')v_{z_j}^-(x^i(z',0))). \end{aligned} \tag{31}$$

Если функции $v, \vec{\alpha}$ есть решение обратной задачи, то легко увидеть, что $\omega_{iz_n}(0) = v_{z_n}^+(x^i(0,0))$ при $i \le r_1$ и $\omega_{iz_n}(0) = v_{z_n}^-(x^i(0,0))$ при $i > r_1$. Полагая $z' = 0$ и используя (31), мы придем к равенствам

$$b_n(0)\omega_{iz_n}(0) + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} b_j(0)v_{z_j}^+(x^i(0)) = \beta(\tilde{\psi}_i - v^-)(x^i(0)) + \beta(w_0^+ - w_0^-)(x^i(0)), i \le r_1, \tag{32}$$

$$b_n(0)\omega_{iz_n}(0) + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} b_j(0)v_{z_j}^-\left(x^i(0)\right) = \beta\left(v^+ - \tilde{\psi}_i\right)\left(x^i(0)\right) + \beta(w_0^+ - w_0^-)\left(x^i(0)\right), i > r_1, \tag{33}$$

которые также можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\beta(x^i(0)) = (b_n(0)\omega_{iz_n}(0) + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} b_j(0)v_{z_j}^+(x^i(0)) + \beta v^-(x^i(0)) +\\ &\beta(w_0^+ - w_0^-)(x^i(0)))/\tilde{\psi}_i = F_i, i = 1,2, \dots, r_1 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &\beta(x^i(0)) = (-b_n(0)\omega_{iz_n}(0) - \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} b_j(0)v_{z_j}^+(x^i(0)) + \beta v^+(x^i(0)) +\\ &\beta(w_0^+ - w_0^-)(x^i(0)))/\tilde{\psi}_i = F_i, i = r_1 + 1, \dots, r. \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь функция v строится как решение задачи (21), (22), а функции ω_i как решение задач задачи (27), (29) (или (28), (30) соответственно). Отметим, что в силу (24) знаменатели в равенствах (34), (35) отделены от нуля. Это и есть искомая система уравнений для нахождения координат вектора $\vec{\alpha}$. Она также может быть переписана в виде

$$\vec{\alpha} = \Phi^{-1}\vec{F}(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}), \tag{36}$$

где координаты вектора F определены равенствами (34), (35). Отметим, что условие (24) гарантирует оценку

$$|\Phi^{-1}\vec{F}| \le c|\vec{F}|. \tag{37}$$

Покажем, что оператор $R(\vec{\alpha})$ является сжимающим в некотором шаре B_{R_0} и переводит его в себя. Возьмем $\vec{\alpha} = 0$. Тогда в силе единственности решений задачи сопряжения (21), (22) $v = v(\vec{\alpha}) = 0$, в этом случае вектор $\vec{F}(0)$ запишется в виде

$$F_i(0) = b_n(0)\omega_{iz_n}(0)/\tilde{\psi}_i, i = 1, \dots, r_1.$$
$$F_i(0) = -b_n(0)\omega_{iz_n}(0)/\tilde{\psi}_i, i = r_1 + 1, \dots, r,$$

где функции ω_i решения задач задачи (27), (29) (или (28), (30) соответственно), где в правой части равенств (27), (28) стоят нули. Положим, $R_0 = 2|\Phi^{-1}\vec{F}(0)|$. Если у нас есть два вектора $\vec{\alpha}_i \in B_{R_0}$, $i = 1,2$, то неравенство (37) влечет

$$|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)| \le c\textstyle\sum_{i=1}^{r} |F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)|. \tag{38}$$

Проверим выполнение условий теоремы о неподвижной точке. Вначале получим оценки для решений $v(\vec{\alpha})$. Из теоремы 1 имеем оценку

$$\begin{aligned} &\| v \|_{W_p^2(G^+)} + \| v \|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \| v \|_{L_p(G)} \le c_0(\| \beta(v^+ - v^-) + \beta(w_0^+ - w_0^-) \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}\\ &+ \| \beta(v^+ - v^-) + \beta(w_0^+ - w_0^-) \|_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} = c_0 J_0, \end{aligned} \tag{39}$$

где постоянная c_0 не зависит от λ. В силу леммы 2 получим, что

$$\begin{aligned} &J_0 \le c_1 \| \beta \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} (\| v^+ - v^- \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \| w_0^+ - w_0^- \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} +\\ &|\lambda|^{s_0}(\| v^+ - v^- \|_{L_p(\Gamma_0)} + \| w_0^+ - w_0^- \|_{L_p(\Gamma_0)})). \end{aligned} \tag{40}$$

Из теорем вложения имеем

$$\| v^\pm \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} \le c_2 \| v \|_{W_p^1(G^\pm)} \le c_2|\lambda|^{-1/2}(\| v \|_{W_p^2(G^\pm)} + |\lambda| \| v \|_{L_p(G)}). \tag{41}$$

Кроме того, имеем

$$|\lambda|^{s_0} \parallel v^{\pm} \parallel_{L_p(\Gamma_0)} \leq c_3 \parallel v \parallel_{W_p^{1/p+\varepsilon_0}(G^{\pm})} |\lambda|^{s_0} \leq c_4 |\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0/2} (\parallel v \parallel_{W_p^2(G^{\pm})} + |\lambda| \parallel v \parallel_{L_p(G)}), \quad (42)$$

где $\varepsilon_0 \in (0,1/2)$ как угодно малая положительная постоянная. Неравенства (39)-(42) гарантируют оценку

$$\parallel v \parallel_{W_p^2(G^+)} + \parallel v \parallel_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \parallel v \parallel_{L_p(G)} \leq c_5 \parallel \beta \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} |\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0/2} (\parallel v \parallel_{W_p^2(G^+)} + \parallel v \parallel_{W_p^2(G^-)}$$
$$+ |\lambda| \parallel v \parallel_{L_p(G)}) + c_6 \parallel \beta \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} (\parallel w_0^+ - w_0^- \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0} \parallel w_0^+ - w_0^- \parallel_{L_p(\Gamma_0)}). \quad (43)$$

Выбрав $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такое, что $c_5 R_0 \lambda_1^{-1/2+\varepsilon_0} \leq 1/2$, из (43) получим при $\lambda \geq \lambda_1$, что

$$\parallel v \parallel_{W_p^2(G^+)} + \parallel v \parallel_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \parallel v \parallel_{L_p(G)} \leq$$
$$2c_6 \parallel \beta \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} (\parallel w_0^+ - w_0^- \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0} \parallel w_0^+ - w_0^- \parallel_{L_p(\Gamma_0)}). \quad (44)$$

Сейчас мы запишем оценки из теоремы 2. Как вытекает из этой теоремы, имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{r} (\parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{W_p^2(U^+)} + \parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{W_p^{1,2}(U^-)} + |\lambda| \parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{L_p(U')}) \leq$$
$$c_7 (\parallel \beta(v^+ - v^-) + \beta(w_0^+ - w_0^-) \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0} \parallel \beta(v^+ - v^-) + \beta(w_0^+ - w_0^-) \parallel_{L_p(\Gamma_0)}) +$$
$$c_8 (\sum_{i=1}^{r} (\parallel \nabla_{z'} \varphi_i (\beta(v^+ - v^-) + \beta(w_0^+ - w_0^-)) \parallel_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} +$$
$$|\lambda|^{s_0} \parallel \nabla_{z'} \varphi_i (\beta(v^+ - v^-) + \beta(w_0^+ - w_0^-)) \parallel_{L_p(B_{\delta'})})),$$

где постоянная C_1 не зависит от $\lambda \geq \lambda_0$. Повторяя предыдущие рассуждения, используемые при выводе (43), и используя оценку (44), придем к неравенству вида

$$\sum_{i=1}^{r} (\parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{W_p^2(U^+)} + \parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{W_p^2(U^-)} + |\lambda| \parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{L_p(U')}) \leq$$
$$c_8 \lambda^{-1/2+\varepsilon_0/2} (\sum_{i=1}^{r} (\parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{W_p^2(U^+)} + \parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{W_p^2(U^-)} + |\lambda| |\nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{L_p(U')})$$
$$+ c_9 (\sum_{i=1}^{r} \parallel \nabla_{z'} \varphi_i (w_0^+ - w_0^-) \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \parallel \nabla_{z'} \varphi_i (w_0^+ - w_0^-) \parallel_{L_p(\Gamma_0)} +$$
$$(\parallel w_0^+ - w_0^- \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0} \parallel w_0^+ - w_0^- \parallel_{L_p(\Gamma_0)}),$$

где постоянные c_i не зависят от λ и зависят от величины R_0. Выберем $\lambda_2 \geq \lambda_1$ такое, что $c_8 \lambda_2^{-1/2+\varepsilon_0}/2 \leq 1/2$. Тогда при $\lambda \geq \lambda_2$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{r} (\parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{W_p^2(U^+)} + \parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{W_p^2(U^-)} + |\lambda| \parallel \nabla_{z'} \varphi_i v(x^i(z)) \parallel_{L_p(U')}) \leq$$
$$2c_9 (\sum_{i=1}^{r} (\parallel \nabla_{z'} \varphi_i (w_0^+ - w_0^-) \parallel_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + \parallel \nabla_{z'} \varphi_i (w_0^+ - w_0^-) \parallel_{L_p(B_{\delta'})}) +$$
$$\left(\parallel w_0^+ - w_0^- \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \left| \lambda \right|^{s_0} \parallel w_0^+ - w_0^- \parallel_{L_p(\Gamma_0)} \right). \quad (45)$$

Оценим норму правой части. По теореме 1

$$\parallel w_0 \parallel_{W_p^2(G^+)} + \parallel w_0 \parallel_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \parallel w_0 \parallel_{L_p(G)} \leq c_{10} (\parallel f \parallel_{L_p(G)} + \parallel g^+ \parallel_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \parallel g^+ \parallel_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} +$$
$$+ \parallel g \parallel_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0} \parallel g \parallel_{L_p(\Gamma)}) = C_0 J.$$

В частности, отсюда вытекает оценка

$$\| w_0^{\pm} \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0} \| w_0^{\pm} \|_{L_p(\Gamma_0)} \le c_1|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0}(\| w_0 \|_{W_p^2(G^+)} + \| w_0 \|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \| w_0 \|_{L_p(G)}) \le C_1 + C_2|\lambda|^{s_0+\varepsilon_0}, \quad (46)$$

где C_i – постоянные, не зависящие от λ. Далее мы используем лемму 3. Возьмем $\varphi_{0i} \in C_0^{\infty}(B_\delta(b_i))$ такую, что $\varphi_{0i} = 1$ на $supp\ \varphi_i$.

$$\| \varphi_{0i}w_0 \|_{W_p^2(G^+)} + \| \varphi_{0i}w_0 \|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \| \varphi_{0i}w_0 \|_{L_p(G)} \le C_0(\| \varphi_{0i}f \|_{L_p(G)} + \| \varphi_{0i}g^+ \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \| \varphi_{0i}g^+ \|_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + |\lambda|^{-1/2+3\varepsilon_0}J),$$

$$J = \| g \|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0} \| g \|_{L_p(\Gamma)} + \| f \|_{L_p(G)} + \| g^+ \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \| g^+ \|_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0}.$$

Из этого неравенства вытекает оценка

$$\| \varphi_{0i}w_0 \|_{W_p^2(G^+)} + \| \varphi_{0i}w_0 \|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \| \varphi_{0i}w_0 \|_{L_p(G)} \le C_3 + C_4|\lambda|^{s_0+3\varepsilon_0}, \quad (47)$$

где ε_0 как угодно малая положительная постоянная. Далее, используя теорему 2, получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{r} (\| \nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z)) \|_{W_p^2(U^+)} + \| \nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z)) \|_{W_p^2(U^-)} + |\lambda| \| \nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z)) \|_{L_p(U')})$$
$$\le c_3(\| g^+ \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \| g^+ \|_{L_p(\Gamma_0)} |\lambda|^{s_0} + \| f \|_{L_p(G)}) + c_4(\| g \|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{s_0+3\varepsilon_0} \| g \|_{L_p(\Gamma)}) +$$
$$c_5(\sum_{i=1}^{r} \| \nabla_{z'}\varphi_i f \|_{L_p(U')} + \sum_{i=1}^{r} [\| \nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z',0)) \|_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + |\lambda|^{s_0} \| \nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z',0)) \|_{L_p(B_{\delta'})}]),$$

где c_i постоянные, не зависящие от параметра $\lambda \ge \lambda_1$. Как и ранее, имеем неравенство

$$\sum_{i=1}^{r} (\| \nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z)) \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{s_0} \| \nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z)) \|_{L_p(G)} + |\lambda| \| \nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z)) \|_{L_p(U')}) \le C_5 + C_6|\lambda|^{s_0+3\varepsilon_0}. \quad (48)$$

В силу (20) $\beta \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0)$, $\nabla_{z'}\beta(x^i(z',0)) \in W_p^{2s_0}(B_\delta{}')$ $(i = 1, \dots, r)$ и имеем оценки

$$\| \beta \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} \le c_0 \sum_{i=1}^{r} |\beta_i| \| \Phi_i \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} \le |\vec{\alpha}|c_1 \le c_1R_0, \quad (49)$$

$$\| \nabla_{z'}\beta(x^i(z',0)) \|_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} \le c_0 \sum_{i=1}^{r} |\beta_i| \| \nabla_{z'}\Phi_i \|_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} \le c_2|\vec{\alpha}| \le c_2R_0. \quad (50)$$

Пусть $\vec{\alpha}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ir}) \in B_{R_0}$ $(i = 1,2)$ и v_i – соответствующие решения задачи (21)-(22), где функция β заменяется на соответствующие функции $\beta^j = \sum_{i=1}^{r} \beta_{ji}\Phi_i$ $(j = 1,2)$. Тогда разности $v_1 - v_2 = \widetilde{\omega}$, $\tilde{\beta} = \beta^1 - \beta^2$ есть решение задачи

$$-L\widetilde{\omega} = 0, x \in G,$$
$$B\widetilde{\omega}|_\Gamma = 0, \text{для } x \in \Gamma_0: \frac{\partial\widetilde{\omega}^+}{\partial N} = \frac{\partial\widetilde{\omega}^-}{\partial N},$$
$$\frac{\partial\widetilde{\omega}^+}{\partial N} = \frac{(\beta^1 + \beta^2)}{2}(\widetilde{\omega}^+ - \widetilde{\omega}^-) + \frac{\tilde{\beta}}{2}(v_1^+ + v_2^+ - v_1^- - v_2^-) + \tilde{\beta}(w_0^+ - w_0^-).$$

Теперь мы повторим рассуждения, использованные при получении оценок (43), (45), но применительно к этой задаче вместо задачи (21), (22). Точно так же, используя оценку (43), получим, что при $\lambda \ge \lambda_3 \ge \lambda_2$ (для некоторого λ_3) справедливо неравенство

$$\| \widetilde{\omega} \|_{W_p^2(G^+)} + \| \widetilde{\omega} \|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \| \widetilde{\omega} \|_{L_p(G)} \le 2c_6|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2| \left(\| w_0^+ - w_0^- \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \left|\lambda\right|^{s_0} \| w_0^+ - w_0^- \|_{L_p(\Gamma_0)}\right), \quad (51)$$

где c_6 не зависит от λ. Аналогично при $\lambda \ge \lambda_4 \ge \lambda_3$ имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{r} (\| \nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(x^i(z)) \|_{W_p^2(U^+)} + \| \nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(x^i(z)) \|_{W_p^2(U^-)} + |\lambda||\widetilde{\omega}(x^i(z)) \|_{L_p(U')}) \leq$$
$$c_{10}|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|(\sum_{i=1}^{r} \| \nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+ - w_0^-) \|_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + |\lambda|^{s_0} \| \nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+ - w_0^-) \|_{L_p(B_{\delta'})} + \quad (52)$$
$$(\| w_0^+ - w_0^- \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0} \| w_0^+ - w_0^- \|_{L_p(B'_\delta)})).$$

Аналог оценок (49), (50) в нашем случае дает неравенство

$$\| \tilde{\beta} \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \sum_{i=1}^{r} \| \nabla_{z'}\tilde{\beta}(x^i(z',0)) \|_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} \leq c|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|. \quad (53)$$

Пусть w_i^j $(j = 1,2)$ решения задач (27), (29) и (28, (30) с новыми правыми частями, где вместо v стоят функции v_j. Пусть $w^0 = \varphi_i\widetilde{\omega}$. Тогда разности $k_i = w_i^1 - w_i^2$ есть решения задач

$$-b_{nn}^+(0,z_n)k_{iz_nz_n} + \lambda k_i = \sum_{i+j<2n} b_{ij}\omega_{z_iz_j}^0 + \sum_{i=1}^{n} b_i\omega_{z_i}^0 + b_0\omega^0 + [\varphi_i, L]\widetilde{\omega}|_{z'=0} = \tilde{f}_i|_{z'=0}, \quad (54)$$

$$k_i|_{z_n=0} = 0, k_i|_{z_n=\delta_1} = 0, i \leq r_1. \quad (55)$$

$$-b_{nn}^-(0,z_n)k_{iz_nz_n} + \lambda k_i = \sum_{i+j<2n} b_{ij}\omega_{z_iz_j}^0 + \sum_{i=1}^{n} b_i\omega_{z_i}^0 + b_0\omega^0 + [\varphi_i, L]\widetilde{\omega}|_{z'=0} = \tilde{f}_i|_{z'=0}, \quad (56)$$

$$k_i|_{t=0} = 0, k_i|_{z_n=0} = 0, k_i|_{z_n=-\delta_1} = 0, i > r_1. \quad (57)$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{r_1} (\| k_i \|_{W_p^2((0,\delta_1))} + |\lambda| \| k_i \|_{L_p(0,\delta_1)}) + \sum_{i=r_1+1}^{r} (\| k_i \|_{W_p^2((-\delta_1,0))} + |\lambda| \| k_i \|_{L_p(-\delta_1,0)}) \leq$$
$$\sum_{i=1}^{r_1} \| \tilde{f}_i(0,z_n) \|_{L_p((0,\delta_1))} + \sum_{i=r_1+1}^{r} \| \tilde{f}_i(0,z_n) \|_{L_p((-\delta_1,0))}. \quad (58)$$

Приведем оценку для правой части. Пусть, например, $i \leq r_1$. Имеем

$$\| f_i(0,z_n) \|_{L_p(0,\delta_1)} \leq c_1 \| f_i(z',z_n) \|_{W_p^s(B_{\delta'};L_p((0,\delta_1)))} = J, s = (n-1)/p + \varepsilon_0,$$

в силу теорем вложения (см. следствие 4.3 и соотношения (3.1)-(3.12) в [28]). Далее используем неравенства, вытекающие из соответствующих интерполяционных теорем (см. [25])

$$J \leq c_1 \| f_i(z) \|_{W_p^1(B_{\delta'};L_p((0,\delta_1)))}^{\theta} \| f_i(z) \|_{W_p^{-1}(B_{\delta'};L_p((0,\delta_1)))}^{1-\theta}, 2\theta - 1 = s. \quad (59)$$

Исходя из определения f_i и условий (9), (11) на коэффициенты, имеем

$$\| f_i \|_{W_p^{-1}(B_{\delta'};L_p((0,\delta_1)))} \leq c \| \widetilde{\omega} \|_{W_p^1(U^+))} \leq c_1\lambda^{-1/2}(\| \widetilde{\omega} \|_{W_p^2(U^+)} + |\lambda| \| \widetilde{\omega} \|_{L_p(G^+)}), \quad (60)$$

где постоянная c_1 не зависит от τ. Последняя оценка получается, если мы используем интерполяционное неравенство

$$\| \widetilde{\omega} \|_{W_p^1(U^+)} \leq c \| \widetilde{\omega} \|_{W_p^2(U^+)}^{1/2} \| \widetilde{\omega} \|_{L_p(U^+)}^{1/2}.$$

Также в силу условий (11) (используем еще вложение $W_p^1(U^+) \subset L_\infty(U^+)$)

$$\| f_i(z) \|_{W_p^1(B_{\delta'};L_p((0,\delta_1)))} \leq c(\| \widetilde{\omega} \|_{W_p^2(G^+)} + \| \nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(z) \|_{W_p^2(U^+)}). \quad (61)$$

Оценки (50)-(51) влекут, что

$$\| f_i(0,z_n) \|_{L_p(0,\delta_1)} \leq c_2\lambda^{(\theta-1)/2}(\| \nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(z) \|_{W_p^2(U^+)} +$$
$$\| \nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(z) \|_{W_p^2(U^-)} + \| \widetilde{\omega} \|_{W_p^2(U^+)} + \| \widetilde{\omega} \|_{W_p^2(U^-)} + |\lambda| \| \widetilde{\omega} \|_{L_p(G^+)}), \quad (62)$$

где c_2 – постоянная, не зависящая от τ. Очевидно, что точно такая оценка имеет место и при $i > r_1$. Используя оценки (57), (61), получим

$$\sum_{i=1}^{r_1} (\| k_i \|_{W_p^2((0,\delta_1))} + |\lambda| \| k_i \|_{L_p(0,\delta_1)}) + \sum_{i=r_1+1}^{r} (\| k_i \|_{W_p^2((-\delta_1,0))} + |\lambda| \| k_i \|_{L_p(-\delta_1,0)})$$
$$\leq c_3\lambda^{(\theta-1)/2}(\| \nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(z) \|_{W_p^2(U^+(\tau))} + \quad (63)$$
$$\| \nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(z) \|_{W_p^2(U^-)} + \| \widetilde{\omega} \|_{W_p^2(U^+)} + \| \widetilde{\omega} \|_{W_p^2(U^-)} + |\lambda| \| \widetilde{\omega} \|_{L_p(G^+)}).$$

В частности, отсюда и из (51), (52), (63) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{r} |k_{iz_n}(0)| \le c\lambda^{-1/2+1/2p+\varepsilon_0/2}(\| k_i \|_{W_p^2(0,\delta)} + |\lambda| \| k_i \|_{L_p(0,\delta)}) \le c_1\lambda^{\gamma}C_0(\lambda)|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|, \gamma = -3/4 + (n+1)/4p + 3\varepsilon_0/4, \tag{64}$$

где, в отличие от других постоянных, постоянная $C_0(\lambda)$ зависит от λ

$$C_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{r} (\| \nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+ - w_0^-) \|_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + |\lambda|^{s_0} \| \nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+ - w_0^-) \|_{L_p(B_{\delta'})}) + \| w_0^+ - w_0^- \|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0} \| w_0^+ - w_0^- \|_{L_p(B_{\delta'})}.$$

Однако мы имеем, что в силу (46), (48), что

$$C_0(\lambda) \le c_5 + c_6|\lambda|^{s_0+3\varepsilon_0}. \tag{65}$$

Тогда неравенство (64) может быть переписано в виде

$$\sum_{i=1}^{r} |k_{iz_n}(0)| \le C|\lambda|^{\frac{15\varepsilon_0}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n-1}{4p}}, \tag{66}$$

где постоянная C не зависит от λ. Мы получили необходимые оценки. Оценим теперь норму $|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)|$, считая, что $\lambda \ge \lambda_4$. В силу (38) оценим норму $|\vec{F}_1 - \vec{F}_2|$. Приведем покоординатные оценки. Рассмотрим первое слагаемое в координате $F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)$. Пусть, например, $i \le r_1$. Оно записывается в виде

$$J_1 = b_n(\omega_{iz_n}^1(0) - \omega_{iz_n}^2(0))/\tilde{\psi}_i, \tag{67}$$

где $b_n = \sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{k,l}(y^i(z))\nu_k\nu_l|_{z_n=0}$ ($\tilde{a}_{k,l}$ – старшие коэффициенты L, записанного в локальной системе координат y). Здесь $\nu_k = -\gamma_{z_k}(z')/\sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}$ при $k<n$ и $\nu_n = 1/\sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}$. В силу условий на коэффициенты 2 и неравенства (63) имеем

$$|J_1| \le c|\omega_{iz_n}^1(0) - \omega_{iz_n}^2(0)| \le c_2C_0(\lambda)\lambda^{\gamma}|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|, \tag{68}$$

где все постоянные не зависят от λ, за исключением $C_0(\lambda)\tau$. Рассмотрим второе слагаемое. Пусть, например, $i \le r_1$.

$$J_2 = \sum_{i=1}^{n-1} (b_i(0)\tilde{w}_{z_i}^+(x^i(0)) + \beta\tilde{w}^-)(x^i(0)))/\tilde{\psi}_i.$$

В силу условий на коэффициенты имеем

$$|J_2| \le c_3\sum_{i=1}^{r} (|\tilde{w}^+(x^i(0))| + |\tilde{w}^-(x^i(0))| + |\nabla_{z'}(\tilde{w}^+(x^i(z)))|_{z=0}.$$

Каждое из слагаемых, входящих в эту сумму, оценивается одинаково. Рассмотрим, например, последнее слагаемое в оценке для $|J_2|$. Имеем (см. например, [25])

$$\left|\nabla_{z'}\left(\tilde{w}^+\left(x^i(z)\right)\right)|_{z=0}\right| \le c_4 \| \nabla_{z'}\varphi_i\left(\tilde{w}^+\left(x^i(z)\right)\right) \|_{W_p^s(U^+)}, s = \frac{n}{p} + \varepsilon_0.$$

Далее, используя интерполяционное неравенство и теоремы о следах (см. [25]), получим

$$|\nabla_{z'}(\tilde{w}^+(x^i(z)))|_{z=0}| \le c_2 \| \nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z))) \|_{W_p^s(U^+)} \le$$
$$c_3 \| \nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z))) \|_{W_p^2(U^+)}^{\theta} \| \nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z))) \|_{L_p(U^+)}^{1-\theta} \le$$
$$c_4|\lambda|^{\theta-1}(\| \nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z))) \|_{W_p^2(U^+)} + |\lambda| \| \varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z))) \|_{L_p(U^+)}, \theta = n/2p + \varepsilon_0/2.$$

Используя (51), (52) и (65), получим оценку

$$\| \nabla_{z'}(\tilde{w}^+(x^i(z)))|_{z=0} \|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_6\lambda^{-1/2+(n-1)/2p+7\varepsilon_0/2}|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|.$$

Аналогично оцениваются оставшиеся слагаемые в $|J_2|$, и можно сказать, что

$$|J_2| \le c_7\lambda^{-1/2+(n-1)/2p+7\varepsilon_0/2}|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2| \tag{69}$$

для некоторой не зависящей от λ постоянной c_7. Оценим $J_3 = \tilde{\beta}(w_0^+ - w_0^-)(0)$. Используя (47), имеем, что ($s = n/p + \varepsilon_0$)

$$|J_3| \le |\tilde{\beta}(0)| \left(\| \varphi_{0i} w_0 \|_{W_p^s(U^+)} + \| \varphi_{0i} w_0 \|_{W_p^s(U^-)} \right) \le c_7 \| \varphi_{0i} w_0 \|^{\theta}_{W_p^2(U^+)} \| \varphi_{0i} w_0 \|^{1-\theta}_{L_0(U^+)} + \| \varphi_{0i} w_0 \|^{\theta}_{W_p^2(U^-)} \| \varphi_{0i} w_0 \|^{1-\theta}_{L_0(U^-)} \le c |\lambda|^{\theta - 1 + s_0 + 3\varepsilon_0} |\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|. \tag{70}$$

Таким образом,

$$|J_3| \le c_8 |\lambda|^{-1/2 + (n-1)/2p + 7\varepsilon_0/2} |\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|. \tag{71}$$

Окончательная оценка, как вытекает из (71), (68), (69), имеет вид

$$\| R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2) \|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{10} \lambda^{\gamma_0} |\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|,$$

причем в силу условия $p > n$, число γ_0 (минимальное из постоянных в (66), (69), (70)) отрицательно, если параметр ε_0 достаточно мал. Условие $\varepsilon_0 < 1/15p$ это гарантирует. Возьмем в качестве λ_5 число со свойством $\lambda_5 \ge \lambda_4$, $c_{10}\lambda^{\gamma_0} \le 1/2$. В этом случае при $\lambda \ge \lambda_5$ оператор R переводит шар B_{R_0} в себя и является в нем сжимающим. Следовательно, уравнение (36) имеет решение $\vec{\alpha}$. Используя найденное решение $\vec{\alpha}$, найдем решение v задачи сопряжения (21)-(23).

Покажем, что у нас выполнены условия переопределения (23). Взяв равенства (39) в точке $z' = 0$ и вычитая первое равенство (с учетом второго при $i > r_1$) из соответствующих равенств (40), (41), получим

$$b_n(0)(w_{iz_n}(0) - v^+_{z_n}(x^i(0))) = \alpha(\tilde{\psi}_i(t) - v^+)(x^i(0)), i = 1,2,\dots,r_1, \tag{72}$$

$$b_n(0)(w_{iz_n}(0) - v^-_{z_n}(x^i(0))) = \alpha(-\tilde{\psi}_i(t) + v^-)(x^i(0)), i = r_1 + 1,\dots,r, \tag{73}$$

Функции $\omega_i^+(z)$ $(i \le r_1)$ и $\omega_i^-(z)$ $(i > r_1)$ удовлетворяют уравнению (34). Возьмем в этом уравнении $z' = 0$ и вычтем его из равенства (35) при $i \le r_1$ и из (36) при $i > r_1$.

Вычитая равенства (26) из (27), (28), получим

$$-b^+_{nn}(0,z_n)(w_{iz_nz_n} - \omega^+_{iz_nz_n}(0,z_n)) + \lambda(w_{iz_nz_n} - \omega^+_{iz_nz_n}(0,z_n)) = 0, i \le r_1, \tag{74}$$

$$-b^-_{nn}(0,z_n)(w_{iz_nz_n} - \omega^-_{iz_nz_n}(0,z_n))) + \lambda(w_{iz_nz_n} - \omega^-_{iz_nz_n}(0,z_n)) = 0, i \le r_1, = 0, i > r_1. \tag{75}$$

Функции $w_i(z_n) - \omega_i^+(0,z_n)$ при $i = 1,\dots,r_1$ и $w_i(z_n) - \omega_i^-(0,z_n)$ при $r > r_1$ при $z' = 0$ удовлетворяют уравнениям (26), вычитая которые из соответствующих уравнений (27), (28), придем к равенствам

$$b_n(0)(w_{iz_n}(0) - \omega^+_{iz_n}(0)) = \beta(w_i(0) - \omega_i^+(0)), w_i(\delta_1) - \omega_i^+(0,\delta_1) = 0,$$

$$b_n(0)(w_{iz_n}(0) - \omega^-_{iz_n}(0)) = \beta(\omega_i^-(0,z_n) - w_i(0)), w_i(-\delta_1) - \omega_i^+(0,-\delta_1) = 0,$$

где в первом равенстве $i = 1,2,\dots,r_1$ и во втором $i = r_1 + 1,\dots,r$. Выбирая параметр λ, если необходимо, можем считать, что решение смешанных начально-краевых задач единственно, и тогда $w_i(z_n) = \omega_i^+(0,z_n)$ при $i = 1,\dots,r_1$ и $w_i(z_n) = \omega_i^-(0,z_n)$ при $i = r_1 + 1,\dots,r$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (5), (9)-(15), (20), (24). Тогда задача (1)-(4) об определении решения $(u,\beta_1,\dots,\beta_r)$ фредгольмова, т. е. из теоремы единственности вытекает теорема существования решений в заданном классе, описанном в теореме 3.

Замечание 1. Вообще говоря, граница Γ области может состоять из нескольких компонент связности, в этом случае мы можем брать различные граничные условия на каждой из них. Утверждения теорем 1, 2, 3 останутся справедливыми. В случае если граница Γ_0 состоит из нескольких компонент связности $\Gamma_0 = \cup \Gamma_i$, на каждой из которых задано условие сопряжения вида (8) и ищутся соответствующие функции β_i, входящие в условие сопряжения того же вида, что и в теореме 3, то утверждение теоремы 3 также остается справедливым при выполнении соответствующих условий на данные.

Заключение

В работе рассмотрен вопрос о корректности в пространствах Соболева стационарных обратных задач определения коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта. Доказаны теоремы существования и единственности решений. Получены априорные оценки на решение, гарантирующие его устойчивость по отношению к данным задачи. Задача сводится к интегральному уравнению с оператором типа Вольтерры, который имеет малую норму при малых временах. Показано, что метод последовательных приближений сходится. Это уравнение можно использовать и при численном определении решения. Таким образом, метод является конструктивным, и на основе предложенного подхода возможно построение численных алгоритмов решения задачи.

Список литературы

1. Baehr, H. D. Heat and Mass Transfer / H. D. Baehr, K. Stephan. – Berlin : Springer-Verlag, 2006. – 710 p.

2. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, В. А. Солонников. – Москва : Наука, 1968 – 736 с. – Текст : непосредственный.

3. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – Москва : Наука, 1973 – 575 с. – Текст : непосредственный.

4. Алифанов, О. М. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, А. В. Ненарокомов. – Москва : Янус-К, 2009 – 299 с. – Текст : непосредственный.

5. Ткаченко, В. Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов / В. Н. Ткаченко. – Киев : Наукова думка, 2008. – 243 с. – Текст : непосредственный.

6. Манапова, А. Р. О конечно-разностном методе решения задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений с условиями неидеального контакта / А. Р. Манапова. – Текст : непосредственный // Вестник Башкирского университета. – 2015. – № 3 (20). – С. 795–811.

7. Ravshanov, N. D. Numerical modeling of the filtration problem of oil and gas in three-layer porous medium / N. D. Ravshanov, Yu. N. Islomov, M. Kukanova // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2016. – № 1 (3). – С. 29–45.

8. Bryan, K. Reconstruction of cracks with unknown transmission condition from boundary data / K. Bryan, F. R. Ogborne, M. Vellela // Inverse Problems. – 2005. – № 1 (21). – P. 21–36.

9. Problems of heat mass and charge transfer with discontinuous solutions / V. F. Demchenko, V. O. Pavlyk, U. Dilthey [et al.] // European Journal of Applied Mathematics. – 2011. – № 4 (22). – P. 365–380.

10. Huang, C. An inverse problem of simultaneously estimating contact conductance and heat transfer coefficient of exhaust gases between engine’s exhaust valve and seat / C. Huang, T. Ju // International journal for numerical methods in engineering. – 1995. – № 1 (38). – P. 735–754.

11. Loulou, T. An inverse heat conduction problem with heat flux measurements / T. Loulou, E. Scott // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2006. – № 67 (11). – P. 1587–1616.

12. Identification of contact failures in multi-layered composites / A. Abreu, H. R. B. Orlande, C. P. Naveira-Cotta [et al.] // Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2011 August 28-31. – 2011. – P. 1–9.

13. A comparison of two inverse problem techniques for the identification of contact failures in multi-layered composites / A. Abreu, M. J. Colaco, C. J. S. Alves [et al.] // 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013) November 3-7. – 2013. – P. 5422–5432.

14. Ладыженская, О. А. О классической разрешимости задач дифракции для уравнений эллиптического и параболического типов / О. А. Ладыженская, В .Я. Ривкинд, Н. Н. Уральцева. – Текст : непосредственный // Доклады АН СССР. – 1964. – № 3 (158). – С. 513–515.

15. Ладыженская, О. А. О классической разрешимости задач дифракции / О. А. Ладыженская, В. Я. Ривкинд, Н. Н. Уральцева. – Текст : непосредственный // Труды МИАН СССР. – 1966. – № 1 (92). – С. 116–146.

16. Олейник, О. А. Об уравнениях эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами / О. А. Олейник. – Текст : непосредственный // Успехи математичских наук. – 1959. – № 5 (14). – С. 164–166.

17. Олейник, О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами / О. А. Олейник. – Текст : непосредственный // Известия Академии Наук СССР. Серия математическая. – 1961. – № 1 (25). – С. 3–20.

18. Шефтель, З. Г. Разрешимость в Lp и классическая разрешимость общих граничных задач для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами / З. Г. Шефтель. – Текст : непосредственный // Успехи математичских наук. – 1964. – № 4 (19). – С. 230–232.

19. Шефтель, З. Г. Оценки в Lp решений эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющих общим граничным условиям и условиям сопряжения / З. Г. Шефтель. – Текст : непосредственный // Доклады АН СССР. – 1963. – № 1 (149). – С. 48–51.

20. Schechter, M. A. Generalization of the problem of transmission / M. A. Schechter // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. – 1960. – № 3 (14). – P. 207–236.

21. Житарашу, Н. В. Априорные оценки и разрешимость общих краевых задач / Н. В. Житарашу. – Текст : непосредственный // Доклады АН СССР. – 1965. – № 1 (165). – С. 24–27.

22. Qamlo, A. H. Boundary Control for 2×2 elliptic systems with conjugation conditions / A. H. Qamlo, B. G. Mohammed // Intelligent Control and Automation. – 2013. – № 1 (4). – P. 280–286.

23. Шадрина, Н. Н. О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа / Н.Н. Шадрина. – Текст : непосредственный // Математические заметки СВФУ. – 2014. – № 1 (21). – С. 75–89.

24. Шадрина, Н. Н. О влиянии параметров на разрешимость некоторых задач сопряжения для эллиптических уравнений / Н. Н. Шадрина. – Текст : непосредственный // Сибирские электронные математические известия. – 2016. – № 1 (13). – С. 411–425.

25. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – Москва : Мир, 1980. – 664 с. – Текст : непосредственный.

26. Белоногов, В. А. О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта / В. А. Белоногов, С. Г. Пятков – Текст : непосредственный // Известия вузов. Математика. – 2020. – № 7. – С. 18–32.

27. Denk, R. Optimal $\mathrm{L_p} - \mathrm{L_q}$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data / R. Denk, M. Hieber, J. Prüss // Mathematische Zeitschrift. – 2007. – № 1 (257). – P. 193–224.

28. Amann, H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces / H. Amann // Glasnik matematicki. – 2000. – № 1 (35). – P. 161–177.

29. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – Москва : Наука, 1976. – 390 с. – Текст : непосредственный.