ВЕСТНИК ЮГОРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 г. Выпуск 3 (58). С. 36–46

DOI: 10.17816/byusu20200336-46
УДК 517.956

В. А. Баранчук, С. Г. Пятков

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ С ТОЧЕЧНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

В работе рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратных задач о восстановлении функции источников специального вида для математических моделей конвекции-диффузии и тепломассопереноса. Неизвестные функции, зависящие от времени, входят в функцию источника. В качестве условий переопределения рассматриваются значения решения в некотором наборе точек области, лежащих как внутри области, так и на ее границе. Приведены условия, гарантирующие глобальную по времени корректность задачи в классах Соболева. Условия на данные задачи минимальны. Полученные результаты являются точными.

Ключевые слова: модели тепломассопереноса, параболическая система, обратная задача, функция источника, конвекция-диффузия.

V. A. Baranchuk, S. G. Pyatkov

ON SOME CLASSES OF INVERSE PROBLEMS WITH POINT OVERDIRECTION FOR MATHEMATICAL MODELS OF HEAT AND MASS TRANSFER

The paper considers the question of the correctness in Sobolev spaces of inverse problems of recovering the function of sources of a special form for mathematical models of convection-diffusion and heat and mass transfer. Unknown time-dependent functions are included in the source function. The values of the solution in a certain set of points of the region lying both inside the region and on its boundary are considered as conditions for redefining. Conditions are given that guarantee the global correctness of the problem in Sobolev classes. The conditions for these tasks are minimal. The results are accurate.

Key words: heat and mass transfer models, parabolic system, inverse problem, source function, convection-diffusion.

Введение

Мы рассматриваем обратные задачи с точечным переопределением для параболической системы вида

$$Lu = u_t + A(t,x,D)u = f(x,t), \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times G, \; G \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $\quad A(t,x,D)u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_j x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} + a_0(t,x)u,$

G – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, a_{ij}, a_i матрицы размера $h \times h$ и u – вектор длины h. Система (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad Bu|_S = g, \quad S = (0,T) \times \Gamma, \qquad (2)$$

где $Bu = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t,x)u_{x_i} + \gamma_0(t,x)u$. Условия переопределения записываются в виде:

$$u(x_i,t) = \psi_i(t), \quad i = 1,2,\dots,r. \; (3)$$

Правая часть имеет вид $f = \sum_{i=1}^{m} f_i(x,t)q_i(t) + f_0(x,t)$. Задача состоит в определении неизвестных функций $q_i(t)$ и решения u системы (1), удовлетворяющего условиям (2), (3).

1. Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях (см. [1, 2]. Прежде всего мы сошлемся на работу [3], где получена теорема существования и единственности решений задачи (1)-(3) в пространствах Гельдера в случае $h = r = 1$, $s = 1$. В случае $n = 1$, $r = 1$ и $G = \mathbb{R}$ аналогичный результат получен в работах [4, 5]. Общие теоремы о разрешимости абстрактных задач такого вида в квазилинейном случае получены в монографии [6, 6.6,9.4] в пространствах функций, удовлетворяющих условию Гельдера по t в случае, когда главная часть оператора A не зависит от неизвестных функций и $D(A)$ не зависит от времени. Результаты применимы и к задачам вида (1)-(3), и при выполнении некоторых (довольно жестких и, вообще говоря, значительно завышенных) условий на данные задачи, которые гарантируют локальную по времени разрешимость. Задачи вида (1)-(3) были рассмотрены в работах авторов в [7, 8, 9] (здесь условия на данные минимальны), а квазилинейные задачи того же вида в работе [8], где были ослаблены условия на данные по сравнению с теми, которые были использованы в [6, 9.4]. В отличие от этих результатов в данной работе мы рассматриваем случай, когда точки замеров $\{x_i\}$ могут лежать и на границе области G. Этот случай труднее того, что уже был рассмотрен. В приложениях такая ситуация также возникает, и имеется ряд работ, посвященных численным методам решения этой задачи, в том числе и в случае точечных источников (см., например, [10]). Отметим, что численные методы решения различных модельных задач, входящих в класс (1)-(3), рассматривались, например, в книгах [2, 3] и большом количестве работ (см., например, [11, 12]), выделим работу [13], где рассматривался случай квазилинейной параболической системы.

1. Вспомогательные результаты

Вначале приведем некоторые обозначения. Пусть E – банахово пространство. Через $L_p(G;E)$ (G – область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E и конечной нормой $\| \| u(x) \|_E \|_{L_p(G)}$ [14]. Мы также используем пространства $C^k(\overline{G};E)$, состоящие из функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ и т. д. – стандартные (см. [14, 15, 16]). При нецелых s пространство Соболева $W_p^s(G;E)$ совпадает с пространством Бесова $B_{p,p}^s(G;E)$. Если $E = \mathbb{C}$ или $E = \mathbb{C}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $B_{p,p}^s(G)$. Аналогично вместо $W_p^s(G;E)$ или $C^k(\overline{G};E)$ используем обозначение $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Таким образом, включение $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ означает, что каждая из компонент u_i принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Будем считать, что аналогичное соглашение справедливо и для матриц, т. е. включение $a \in W_p^s(G)$ для данной матрицы-функции $a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$ означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^s(G)$ для всех i,j. Для данного интервала $J = (0,T)$, положим, $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J;L_p(G)) \cap L_p(J;W_p^r(G))$, соответственно, $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J;L_p(\Gamma)) \cap L_p(J;W_p^r(\Gamma))$. Аналогично определяем анизотропные пространства Гельдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$, $C^{\alpha,\beta}(\overline{S})$.

Определение вложения $\Gamma \in C^2$ может быть найдено в [17, Гл. 1]. Далее мы считаем, что параметр $p > n + 2$ зафиксирован. Пусть $B_\delta(x_i)$ – шар радиуса δ с центром в точке x_i (см. условие (3)). Будем считать, что точки $\{x_i\}_{i=1}^s$ – граничные, а точки $\{x_i\}_{i=s+1}^r$ – внутренние. Параметр $\delta > 0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(x_i)} \subset G$ для внутренних точек $x_i \in G$, $\overline{B_\delta(x_i)} \cap$

$\overline{B_\delta(x_j)} = \emptyset$ для $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,r$. Пусть $Q^\tau = (0,\tau) \times G$, $G_\delta = \cup_i B_\delta(x_i)$, $\widetilde{G}_\delta = \cup_{i=1}^{s} B_\delta(x_i)$, $Q_\delta = (0,T) \times G_\delta$, $Q_\delta^\tau = (0,\tau) \times G_\delta$.

Наложим условия на коэффициенты операторов A и B: найдется допустимое $\delta > 0$ такое, что

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}),\ a_k \in L_p(Q),\ \gamma_i \in C^{1/2,1}(\overline{S}),\ a_{ij} \in L_\infty(0,T; W_\infty^1(G_\delta \cap G)); \qquad (4)$$

$$a_k \in L_p(0,T; W_p^1(G_\delta \cap G)),\ i,j = 1,2,\dots,n,\ k = 0,1,\dots,n. \quad (5)$$

Также предполагается, что L – параболический оператор и выполнено условие Лопатинского. Сформулируем эти условия. Рассмотрим матрицу $A_0(t,x,\xi) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$ и предположим, что существует постоянная $\delta_1 > 0$, такая что корни p полинома

$$\det(A_0(t,x,i\xi) + pE) = 0$$

(E – единичная матрица) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} p \leq -\delta_1|\xi|^2 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall(x,t) \in Q. \qquad (6)$$

Условие Лопатинского может быть сформулировано следующим образом: для любой точки $(t_0,x_0) \in S$ и операторов $A_0(x,t,D)$ и $B_0(x,t,D) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t,x)\,\partial_{x_i}$, записанных в локальной системе координат y в этой точке (ось y_n направлена по нормали к S, и оси $y_1,\dots,y_{n-1}$ лежат в касательной плоскости в точке (x_0,t_0)), система

$$(\lambda E + A_0(x_0,t_0,i\xi',\partial_{y_n}))v(z) = 0, \quad B_0(x_0,t_0,i\xi',\partial_{y_n})v(0) = h_j, \qquad (7)$$

где $\xi' = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$, $y_n \in \mathbb{R}^+$, имеет единственное решение из $C(\overline{\mathbb{R}}^+)$, убывающее на бесконечности при всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg\lambda| \leq \pi/2$ и $h_j \in \mathbb{C}$ таких, что $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$.

Алгебраические условия, гарантирующие выполнение (7), могут быть найдены, например, в [17]. Дополнительно к условию Лопатинского для задачи (1)-(3) мы также будем предполагать, что существует постоянная $\varepsilon_1 > 0$, такая, что

$$\operatorname{Re}\,(-A_0(t,x,\xi)\eta,\eta) \geq \varepsilon_1|\xi|^2|\eta|^2 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{C}^h, \ (8)$$

где скобки $(\cdot,\cdot)$ обозначают скалярное произведение в $\mathbb{C}^h$. Последнее условие называется условием сильной эллиптичности (см. [17, определение 7, § 8, Гл. 7]). Как показано в работе [18], условие (8) влечет, что выполнено условие параболичности и условие Лопатинского на S для задачи (1)-(3), где условие третьей краевой задачи заменено условием Дирихле, т. е. $Bu = u$.

Без ограничения общности можем считать, что

$$|\det(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \gamma_i\nu_i)| \geq \varepsilon_0 > 0, \qquad (9)$$

где ν – внешняя единичная нормаль к Γ и ε_0 – некоторая положительная постоянная. Основные условия на данные имеют вид

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G),\ g \in W_p^{2k_0,k_0}(S),\ B(x,0)u_0(x)|_\Gamma = g(x,0)\ \ \forall x \in \Gamma, \qquad (10),$$

где $k_0 = 1/2 - 1/2p$. Фиксируем допустимое $\delta > 0$. Построим функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(G_\delta)$ такую, что $\varphi(x) = 1$ в $G_{\delta/2}$ и $\varphi(x) = 0$ в $G\backslash G_{3\delta/4}$. В силу допустимости в этом случае $\varphi = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)$, $\varphi_i(x) \in C_0^\infty(B_\delta(x_i))$ и эти функции имеют непересекающиеся носители. Дополнительно предположим, что

$$\varphi(x)u_0(x) \in W_p^{3-2/p}(G). \qquad (11)$$

Поскольку Γ принадлежит классу C^2, найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что для любой $x_0 \in \Gamma$ найдется окрестность U (координатная окрестность) этой точки, и система координат y (локальная система координат), полученная с помощью поворота и переноса начала координат из исходной такая, что ось y_n направлена по внутренней нормали в Γ в точке x_0 и уравнение границы $U \cap \Gamma$ имеет вид $y_n = \omega(y')$, $\omega(0) = 0$, $|y'| < \delta_0$, $y' = (y_1,\dots,y_{n-1})$, причем $\omega \in C^2(\overline{B_{\delta_0}'(0)})$ $(B_{\delta_0}'(0) = \{z' : |z'| < \delta_0\})$ и $G \cap U = \{y : |y'| < \delta_0, 0 < y_n - \omega(y') < \delta_1\}$, $(\mathbb{R}^n \backslash G) \cap U = \{y : |y'| < \delta_0, -\delta_1 < y_n - \omega(y') < 0\}$. Числа δ_0, δ_1 для области G фиксированы. Отметим, что мы всегда сможем считать, что $\delta_1 > (M+1)\delta_0$, где M – постоянная Липшица функции ω. Это условие обеспечивает включение $B_{\delta_0}(x_0) \subset U_i$. Ниже без ограничения общности мы считаем, что допустимый параметр δ в вышеприведенных условиях на данные таков, что $\delta = \delta_0$ (иначе мы уменьшим значения параметров). Обозначим через U_i координатные окрестности, отвечающие точкам x_i $(i = 1, \dots, s)$. Дополнительно к условию $\Gamma \in C^2$ мы предположим, что

$$\Gamma \cap B_\delta(x_i) \in C^3, \quad i = 1,2,\dots,s, \tag{12}$$

т. е. имеем $\omega(y') \in C^3(\overline{B_\delta'(0)})$ для соответствующих функций ω.

Мы используем выпрямление границы. Это преобразование $z_n = y_n - \omega(y')$, $z' = y'$. При выполнении условия (12) оно и обратное к нему $y_n = z_n + \omega(z')$, $y' = z'$ принадлежат классу C^3 в области U_i.

Пусть $S_\delta = (0,T) \times \cup_{i=1}^{s} (\Gamma \cap B_\delta(x_i))$. Фактически это множество состоит из s непересекающихся компонент связности. По аналогии с условием (11) введем условие

$$\varphi g \in W_p^{k_1,2k_1}(S) \ (k_1 = 1 - 1/2p), \ \nabla_{z'} \gamma_k(x(z',0)), \in C^{1/2,1}(S_0), \tag{13}$$

где $k = 0,1,2,\dots,n$, $S_0 = (0,T) \times B_\delta'(0)$ и последнее включение выполнено для любой из областей U_i и соответствующего преобразования координат z. Для удобства записи мы опускаем индекс i в обозначениях систем координат.

Применяя лемму 7.2 в [19], можем отметить, что первое включение в (13) влечет, что

$$\nabla_{z'} \varphi g\big(t, x(z',0)\big) \in W_p^{k_0,2k_0}(S_0), \| \nabla_{z'} \varphi g\big(t, x(z',0)\big) \|_{W_p^{k_0,2k_0}(S_0)} \le c \| \varphi g \|_{W_p^{k_1,2k_1}(S)}, \tag{14}$$

где c – некоторая положительная постоянная. Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4)–(13) для некоторого достаточно малого допустимого $\delta > 0$ и соответствующей функции φ, $f \in L_p(Q^\tau)$, $f\varphi \in L_p(0,\tau; W_p^1(G))$ и $\tau \in (0,T]$. Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{2,1}(Q^\tau)$ задачи

$$Lu = u_t + Au = f \quad ((x,t) \in Q), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad Bu|_S = g. \tag{15}$$

Причем $\varphi u_t \in L_p(0,\tau; W_p^1(G))$, $\varphi u \in L_p(0,\tau; W_p^3(G))$. Если $g \equiv 0$, $u_0 \equiv 0$, то справедливы оценки

$$\| u \|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \le c \| f \|_{L_p(Q^\tau)}, \qquad \| u \|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} + \| \varphi u_t \|_{L_p\left(0,\tau; W_p^1(G)\right)} + \| \varphi u \|_{L_p(0,\tau; W_p^3(G))} \le c[\| f \|_{L_p(Q^\tau)} + \| \varphi f \|_{L_p(0,\tau; W_p^1(G))}], \tag{16}$$

где постоянная c не зависит от f, решения u и $\tau \in (0,T]$.

Доказательство. Вначале считаем, что $\tau = T$. Как вытекает из известных результатов (см., например, теорему 10.4 гл. 7 [4]), существует единственное решение задачи (15) из класса $u \in W_p^{1,2}(Q)$, удовлетворяющее оценке

$$\| u \|_{W_p^{1,2}(Q)} \le c(\| f \|_{L_p(Q)} + \| u_0 \|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \| g \|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(S)}). \tag{17}$$

Утверждение теоремы о дополнительной гладкости решений в Q может быть обосновано с применением результатов и рассуждений из гл. 3 (§ 12) и гл. 4 в [4]. В случае, если все точки x_i внутренние, аналогичное утверждение получено в теореме 1.1 работы [21]. Поэтому мы остановимся на более сложном случае граничной точки x_i и приведем только схему доказательства без подробных выкладок. Возьмем точку $x_i \in \Gamma$ и отвечающую окрестности U_i функцию φ_i $(i \le s)$. Умножая уравнение на φ_i, имеем

$$Lv = v_t + Av = \varphi_i f + [\varphi_i, A]u = \tilde{f}, \quad v = \varphi_i u,$$
$$v|_{t=0} = \varphi_i u_0(x), \quad Bv|_S = \varphi_i g + [\varphi_i, B]u, \ (18)$$

где $[\varphi_i, A]u = \varphi_i Au - A(\varphi_i u) = 2\sum_{l,k=1}^{n} a_{lk} u_{x_k} \varphi_{ix_l} - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{ix_k} u$, $[\varphi_i, B]u = -\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi_{ix_k} u$ (т. о. квадратные скобки обозначают соответствующий коммутатор). Выпрямим границу преобразованием $z_n = y_n - \omega(y')$, $z' = y'$ и перейдем к новым координатам z в уравнении. Получим задачу

$$Lv = v_t + \widetilde{A}v = \tilde{f}, \quad v|_{t=0} = \tilde{u}_0(z) = \varphi(x(z))u_0(x(z)),$$
$$\widetilde{B}v|_{z_n=0} = \varphi_i g(x(z',0)) + [\varphi_i, B]u(x(z',0)) = \tilde{g}(t,z'), \qquad (19)$$

где $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ – операторы A, B, записанные в системе координат z с коэффициентами $\tilde{a}_{kl}, \tilde{a}_k, \tilde{\gamma}_k$. Уравнение рассматривается в соответствующей окрестности $\{z: |z'| < \delta, 0 < z_n < \delta_1\}$. Пусть $\Delta_j v = (v(z + e_j\eta) - v(z))/\eta$ (e_j – j-й координатный вектор), где $|\eta| < \delta/4$ и $j \le n-1$. Тогда функция $w = \Delta_j v$ есть решение задачи

$$w_t + \widetilde{A}(t,z,D)w = [\widetilde{A}, \Delta_j]v + \Delta_j\tilde{f} = \tilde{f}_0,$$
$$\widetilde{B}w|_{z_n=0} = [\widetilde{B}, \Delta_j]v + \Delta_j\tilde{g} = \tilde{g}_0, \quad w|_{t=0} = \Delta_j\tilde{u}_0 = \tilde{u}_{01}, \qquad (20)$$

где $[\widetilde{A}, \Delta_j]v = \sum_{k,l=1}^{n} \Delta_j\tilde{a}_{kl} v_{z_k z_l} - \sum_{k=1}^{n} \Delta_j\tilde{a}_k v_{z_k} - \Delta_j\tilde{a}_0 u$, $[\widetilde{B}, \Delta_j]v = -\sum_{k=1}^{n} \Delta_j\tilde{\gamma}_k v_{z_k} - \Delta_j\tilde{\gamma}_0 v$. Вернемся к переменным x и продолжим все функции в (20) нулем вне $U_j \cap G$. Тогда функция $w \in W_p^{1,2}(Q)$ есть решение задачи (15) с некоторыми новыми правыми частями в граничном условии и уравнении, т. е.

$$Lw = w_t + Aw = \tilde{f}_0 \quad ((x,t) \in Q), \quad w|_{t=0} = \tilde{u}_{01}, \quad Bu|_S = \tilde{g}_0. \qquad (21)$$

Далее нам нужны некоторые оценки. Они более или менее очевидны. Мы используем леммы 4.10, 4.11 гл. 2 в [4] о свойствах конечных разностей и теоремы о точечных мультипликаторах (см., например, [22, теорема 3.3.2, с. 198]), а также наши условия на коэффициенты и теоремы о следах. Имеем, что

$$\| \tilde{u}_{01} \|_{W_p^{2-2/p}(U_i \cap G)} \le c \| \varphi u_0(x(z)) \|_{W_p^{3-2/p}(B_{\delta'}(0))} \le c_1 \| \varphi u_0 \|_{W_p^{3-2/p}(G)}, \qquad (22)$$

где постоянная c_1 не зависит от величины η. Используя также (14) и лемму 3.4 гл. 2 в [4], имеем

$$\| \tilde{g}_0 \|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(S_0)} \le c(\| u \|_{W_p^{1,2}(Q)} + \| \varphi g \|_{W_p^{1-1/2p,2-1/p}(S)}), \qquad (23)$$

где опять постоянная c не зависит от η. Наконец, имеем оценку

$$\| \tilde{f}_0 \|_{L_p((0,T)\times U_i \cap G)} \le c(\| u \|_{W_p^{1,2}(Q)} + \| \varphi_i f \|_{L_p(0,T;W_p^1(G))}). \qquad (24)$$

Используя оценку (17) для решений задачи (21) для каждого $j = 1,2 \dots, n-1$ и $i = 1,2,\dots,s$ и переходя к переменным z в координатных окрестностях U_i , получим, что

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} \| \Delta_j \varphi_i u \|_{W_p^{1,2}((0,T)\times B_{\delta'}(0)\times(0,\delta_1))'} \le C_0,$$

где постоянная C_0 не зависит от параметра η и есть сумма соответствующих правых частей неравенств (22)-(24), умноженная на некоторую постоянную. Тогда лемма 4.11 гл. 2 в [4] гарантирует, что

$$\nabla_{z'} \varphi_i u(x(z)) \in W_p^{1,2}((0,T) \times B_{\delta}'(0) \times (0,\delta_1)) \qquad (25)$$

для каждого i. Таким образом, мы показали, что касательные производные обладают необходимой гладкостью. Покажем это для нормальной производной u_{z_n}. Фиксируем параметр i и рассмотрим равенства (19). Перепишем уравнение и граничные условия в виде

$$v_t - \tilde{a}_{nn}(t,z)v_{z_n z_n} = \tilde{f} + \sum_{k,l=1,k+l<2n}^{n} \tilde{a}_{kl} v_{z_k z_l} - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k u_{z_k} - \tilde{a}_0 u = f_{02}(t,z),$$

$$V|_{t=0} = \varphi(x(z))u_0(x(z)) = u_{02}(z),$$

$$v_{z_n}|_{z_n=0} = \tilde{\gamma}_n^{-1}(\tilde{g}(t,z') - \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\gamma}_k v_{z_k} - \gamma_0 v) = g_{02}(z'). \qquad (26)$$

Отметим, что $\det\tilde{\gamma}_n = (-1)^n(1+|\nabla\omega|^2)^{n/2}\det(\sum_{i=1}^n \gamma_i \nu_i) \neq 0$ (см. (9)). Отметим, что условие (8) сохраняется при невырожденном преобразовании координат. В частности, для предыдущего уравнения будет выполнено условие

$$\mathrm{Re}(\tilde{a}_{nn}\xi^2\eta,\eta) \geq \varepsilon_2|\xi|^2|\eta|^2, \quad \varepsilon_2 > 0, \ \forall\xi \in \mathbb{R}, \ \eta \in \mathbb{C}^h, \qquad (27)$$

для всех $t \in (0,T)$, $z \in B_\delta{}'(0) \times (0,\delta_1)$. Предыдущее условие есть таким образом просто условие положительной определенности матрицы $\tilde{a}_{nn}$. Мы можем ее продолжить на всю область $z_n > 0$ с сохранением этого условия. Например, нужное нам продолжение можно осуществить следующим образом. Построим функцию $\psi(z) \in C_0^\infty(B_\delta(0))$ такую, что $\psi = 1$ на $B_{3\delta/4}(0)$, $\psi \geq 0$ и $\psi = 0$ при $z \notin B_\delta(0)$. Таким образом, ψ равна 1 на носителе $\varphi_i(x(z))$. В качестве новой матрицы возьмем матрицу $E(1-\psi) + \psi\tilde{a}_{nn}$. Она удовлетворяет всем условиям и совпадает с единичной матрицей при $z \to \infty$. Для продолжения сохраним то же самое обозначение. Продолжим функцию v и данные задачи нулем на всю область $z_n > 0$. Функция v будет решением задачи (26) уже в области $z_n > 0$. В силу включения (25) правая часть f_{02} в уравнении принадлежит $L_p(0,T;W_p^1(\mathbb{R}^n))$, соответственно, $u_{02} \in W_p^{3-2/p}(\mathbb{R}_+^n)$ ($\mathbb{R}_+^n = \{z: z_n > 0\}$), $g_{02} \in W_p^{1-1/2p,2-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Рассмотрим задачу

$$v_{0t} - \tilde{a}_{nn}(z)v_{0z_n z_n} - \tilde{a}_{nnz_n}v_{0z_n} = f_{02z_n}(t,z),$$

$$v_0|_{t=0} = u_{02z_n}(z), \quad v_0|_{z_n=0} = g_{02}(z') \ (28)$$

для $z \in \mathbb{R}_+^n$. В силу общей теории (см. теорему 10.4 в [4]) и выполнения условия (27) существует единственное решение задачи из класса $W_p^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}_+)$ при п.в. z' и справедлива оценка

$$\| v_0(t,z) \|_{W_p^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}_+)} \leq c(\| f_{02z_n}(t,z) \|_{W_p^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}_+)} + \| u_{02} \|_{W_p^{3-\frac{2}{p}}(R_+)} +$$

$$\| g_{02}(z') \|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}((0,T)\times\mathbb{R}_+)}).$$

Используя известные свойства интеграла Лебега, заключаем, что

$$v_0 \in L_p(\mathbb{R}^{n-1};W_p^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}_+).$$

В силу компактности носителей данных полученное решение обладает свойством, что $(1+|z|^2)^\beta v_0 \in L_p(\mathbb{R}^{n-1};W_p^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}_+)$ для всех $\beta > 0$. Установить это факт несложно. На первом шаге умножим уравнение (28) и начально-краевые условия на $(1+|z|^2)^{1/2}$ и обозначим $v_1 = (1+|z|^2)^{1/2}v_0$. Существует единственная функция $v_1 \in L_p(\mathbb{R}^{n-1};W_p^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}_+)$ являющаяся решением полученной задачи. Функция $\tilde{v}_0 = v_1/(1+|z|^2)^{1/2}$ есть уже решение исходной задачи, и в силу единственности получим, что $v_0 = \tilde{v}_0$. Таким образом, $(1+|z|^2)^{1/2}v_0 \in L_p(\mathbb{R}^{n-1};W_p^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}_+)$. Повторяя рассуждение, мы установим нужное вложение. Положим, $w_0 = -\int_{z_n}^\infty v_0(t,z',\xi)\,d\xi$. Функция w_0 удовлетворяет уравнению и граничным условиям в (26) и $w_0, w_{0z_n} \in L_p(\mathbb{R}^{n-1};W_p^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}_+)$. В силу теоремы единственности заключаем, что

$w_0 = v$. Следовательно, существует обобщенная производная $v_{z_n} \in L_p(\mathbb{R}^{n-1}; W_p^{1,2}((0,T) \times \mathbb{R}_+))$. Отсюда заключаем, что $\nabla_z v \in W_p^{1,2}(Q)$. В исходных переменных x мы получим, что $\nabla_x \varphi_i u \in W_p^{1,2}(Q)$. Оценка из условия теоремы очевидным образом вытекает из вышеприведенных рассуждений. Чтобы показать, что оценка справедлива в области Q^τ и постоянные не зависят от τ, используется следующее доказательство. Фиксируем $\tau \in (0,T)$. Строим функцию $f_\tau(t,x) = f(t,x)$ на $(0,\tau)$ и равную 0 при $t > \tau$. Соответствующее решение в Q удовлетворяет оценке (16), где $\tau = T$, т. е. оценке

$$\| u \|_{W_p^{1,2}(Q)} + \| \varphi u_t \|_{L_p\left(0,T;W_p^1(G)\right)} + \| \varphi u \|_{L_p\left(0,T;W_p^3(G)\right)} \le c[\| f_\tau \|_{L_p(Q)} + \| \varphi f_\tau \|_{L_p(0,T;W_p^1(G))}]. \quad (29)$$

Здесь постоянная c не зависит от τ. Однако в Q^τ это решение будет совпадать с решением задачи (15). Следовательно, имеет место оценка (16), поскольку

$$\| f_\tau \|_{L_p(Q)} + \| \varphi f_\tau \|_{L_p(0,T;W_p^1(G))} = \| f \|_{L_p(Q^\tau)} + \| \varphi f_\tau \|_{L_p(0,\tau;W_p^1(G))}.$$

2. Главные результаты

Опишем дополнительные условия на данные. Фиксируем достаточно малое $\delta > 0$ и построим функцию φ, описанную перед теоремой 1. Предположим, что

$$\psi_j \in W_p^1(0,T), \quad u_0(x_j) = \psi_j(0), \quad j = 1,2,\dots,r, \qquad (30)$$

$$f_i \in L_\infty(0,T; L_p G)), \qquad \varphi(x) f_i \in L_\infty(0,T; W_p^1(G)) \ (i = 1,\dots,m), \quad m = rh,$$

$$f_0 \in L_p(Q), \ \varphi(x) f_0 \in L_p(0,T; W_p^1(G_\delta \cap G)). \ (31)$$

Построим матрицу $B(t)$ размерности $m \times m$, чьи строки с номерами с $(j-1)h + 1$ до jh состоят из вектор-столбцов $(f_1(x_j,t), f_2(x_j,t), \dots, f_m(x_j,t))$.. Отметим, что при выполнении условий (31) имеем $\varphi f_i \in W_p^1(G; L_p(0,T))$ и, следовательно, можем считать, что $\varphi f_i \in C^{1-n/p}(\overline{G}; L_p(0,T))$ (см. [13, вложение (5.4)] и [23, соотношения~(3.3), (3.6)]). Таким образом, определены следы $f_k(t,x_j)$ при всех i, j. Более того, имеем неравенство

$$\| f_k(t,x_j) \|_{L_\infty(0,T)} \le c \| \| \varphi_k f_k(t,x) \|_{W_p^1(G)} \|_{L_\infty(0,T)} \le c \| \varphi_k f_k(t,x) \|_{L_\infty(0,T;W_p^1(G))},$$

откуда вытекает, что $f_k(t,x_j) \in L_\infty(0,T)$. Далее считаем параметр $\delta > 0$ фиксированным. Нам также необходимо следующее условие: существует число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$|\det B(t)| \ge \delta_0 \ \text{п. в. на } (0,T). \ (32)$$

Отметим, что элементы матрицы B принадлежат $L_\infty(0,T)$. Теперь мы можем сформулировать наш основной результат.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (4)–(13), (30)–(32) для некоторого достаточно малого допустимого $\delta > 0$. Тогда существует единственное решение $(u, q_1, q_2, \dots, q_m)$ задачи (1)-(3) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$, $q_i(t) \in L_p(0,T)$, $i = 1,\dots,m$. Более того, $\varphi u \in L_p(0,T; W_p^3(G))$, $\varphi u_t \in L_p(0,T; W_p^1(G))$.

Доказательство. Сначала мы строим функцию Φ как решение задачи

$$L\Phi = f_0 \quad ((x,t) \in Q), \quad \Phi|_{t=0} = u_0(x), \quad B\Phi|_S = g. \ (33)$$

По теореме 1 $\Phi \in W_p^{1,2}(Q)$, $\varphi \Phi_t \in L_p(0,T; W_p^1(G))$, $\varphi \Phi \in L_p(0,T; W_p^3(G))$. По теореме Фубини $\Phi_t \in W_p^1(G; L_p(0,T))$ и поэтому $\Phi_t \in C(\overline{G}; L_p(0,T))$ (см. [13, 23]). Вследствие этого $\Phi(t,x_j) \in W_p^1(0,T)$. Функция $w = u - \Phi$, где u – решение задачи (1)-(3), есть решение задачи

$$Lw = \sum_{i=1}^m f_i q_i = F \quad ((x,t) \in Q), \quad w|_{t=0} = 0, \quad Bw|_S = 0, \ (34)$$

$$w(x_j,t) = \tilde{\psi}_j(t) = \psi_j(t) - \Phi(x_j,t) \in W_p^1(0,T), \ j = 1,2,\dots,r. \qquad (35)$$

Зафиксируем функцию $q_j \in L_p(0,\tau)$ и найдя решение w задачи (34) на интервале $(0,\tau)$, построим отображение $w = w(\vec{q}) = L^{-1}F$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$). Из теоремы 1 следует, что это отображение переводит $L_p(0,\tau)$ в класс $w \in W_p^{1,2}(Q^\tau)$, $\varphi w \in L_p(0,\tau; W_p^3(G))$, $\varphi w_t \in L_p(0,\tau; W_p^1(G))$ для всех $\delta_1 < \delta$. Используя теорему 1 и условия (31), получим

$$\| w \|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} + \| \varphi w_t \|_{L_p(0,\tau;W_p^1(G))} + \| \varphi w \|_{L_p(0,\tau;W_p^3(G))} \le c \| \vec{q} \|_{L_p(0,\tau)}, \quad (36)$$

где постоянная c не зависит от τ. Предположим, что w является решением задачи (34), (35). Возьмем $x = x_j$ в (34). Заметим, что эти следы существуют, поскольку w_t и все слагаемые в выражении Aw принадлежат пространству $W_p^1(G; L_p(0,T))$. В силу теорем вложения для векторнозначных пространств Соболева (см. [13, вложение (5.4)] и [23, соотношения~(3.3), (3.6)])) они принадлежат $C^\alpha(\overline{G}; L_p(0,T)) \subset C(\overline{G}; L_p(0,T))$ с $\alpha \le s - n/p$. Получим систему

$$\tilde{\psi}_{j_t} + Aw(x_j,t) = \sum_{i=1}^m f_i(x_j,t) q_i(t), \quad j = 1,2,\dots,r, \quad (37)$$

которую можно записать в виде $B\vec{q} = \vec{\psi} + R(\vec{q})$, где координаты векторов $\vec{\psi}$ and $R(\vec{q})$ с числами от $(j-1)h+1$ до jh совпадают с векторами $\tilde{\psi}_{j_t}$ и $Aw(x_j,t)$ $(w = w(\vec{q}))$ соответственно. Таким образом, мы приходим к интегральному уравнению

$$\vec{q} = B^{-1}\vec{\psi} + B^{-1}R(\vec{q}), \quad (38)$$

где оператор $B^{-1}R(\vec{q}) : L_p(0,\tau) \to L_p(0,\tau)$ ограничен. Получим соответствующие оценки. С учетом условия (32) получим

$$\| B^{-1}R(\vec{q}) \|_{L_p(0,\tau)} \le c_1 \| R(\vec{q}) \|_{L_p(0,\tau)}. (39)$$

Для оценки правой части мы используем (36) и теоремы вложения. Легко заметить, что

$$\| R(\vec{q}) \|_{L_p(0,\tau)} \le c_2 \sum_{j=1}^r \Big(\sum_{|\alpha|=2} \| D^\alpha w(x_j,t) \|_{L_p(0,\tau)} + (\| \nabla u(x_j,t) \|_{L_\infty(0,\tau)} +$$

$$\| u(x_j,t) \|_{L_\infty(0,\tau)}) \Big), \quad (40)$$

где константа c_2 зависит от величины $\| a_{ij} \|_{L_\infty(Q)}$ и $\| a_i(x_j,t) \|_{L_p(0,T)}$. Мы можем оценить последнюю величину $\| a_i \|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))}$. Оценим старшие производные. Оставшиеся оценки проще. Имеем для $n/p < s_1 < 1$, и $|\alpha| = 2$, что

$$\| D^a w(x_j,t) \|_{L_p(0,\tau)} \le c_3 \| \varphi_j w \|_{L_p\left(0,\tau;W_p^{2+s_1}(G)\right)} \le$$

$$c_4 \| \varphi_j w \|^\theta_{L_p\left(0,\tau;W_p^3(G)\right)} \| \varphi_j w \|^{1-\theta}_{L_p\left(0,\tau;L_p(G)\right)} \le$$

$$c_5 \| \varphi_j w \|^\theta_{L_p(0,\tau;W_p^3(G))} \tau^{1-\theta} \| \varphi_j w \|^{1-\theta}_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \le c_6 \| \vec{q} \|_{L_p(0,\tau)} \tau^{1-\theta}. \quad (41)$$

В последнем неравенстве $\theta = (2+s_1)/3$ и мы используем (36) интерполяционные неравенства [10] и известное неравенство

$$\| \omega \|_{L_p(0,\tau)} \le c\tau \| \omega_t \|_{L_p(0,\tau)}, \quad \omega(0) = 0.$$

Неравенства (39)-(41) дают оценку

$$\| B^{-1}R(\vec{q}) \|_{L_p(0,\tau)} \le c_7 \| \vec{q} \|_{L_p(0,\tau)} \tau^{1-\theta}, \quad (42)$$

где константа c_7 не зависит от τ. Эта оценка говорит, что оператор $B^{-1}R$ является сжимающим, например, если $\tau \le \tau_0 = 1/(2c_7)^{1/(1-\theta)}$, и тогда уравнение (38) разрешимо. Покажем, что пара $w(\vec{q})$, $\vec{q}$ является решением задачи (34), (35), которая эквивалентна нашей исходной задаче (1)-(3). Возьмем $x = x_j$ in (34). Получаем систему

$$w_t(x_j,t) + Aw(x_j,t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_j,t)q_i(t), \quad j = 1,2,\dots,r. \qquad (43)$$

С другой стороны, мы имеем равенства (37), которые эквивалентны уравнению (38). Вычитая (37) и (43), мы получаем, что $w_t(x_j,t) = \widetilde{\psi}_{jt}$. Интегрируя это равенство по t и используя (30), мы получим $w(x_j,t) = \widetilde{\psi}_j(t)$.

Далее мы продолжаем по индукции. Достаточно продемонстрировать второй шаг процедуры. Дальнейшие рассуждения очевидны. Положим, $\vec{q}_0 = \begin{cases} \vec{q}, & t \le \tau_0 \\ 0, & t > \tau_0 \end{cases}$. Сделаем замену переменных $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_0$. Новая функция $\vec{q}_1$ удовлетворяет уравнению

$$\vec{q}_1 = B^{-1}\vec{\psi} + B^{-1}R(\vec{q}_1) + B^{-1}R(\vec{q}_0) - \vec{q}_0. \qquad (44)$$

В силу единственности решений мы можем заключить, что $\vec{q}_1 = 0$ on $(0,\tau_0)$. Соответствующая функция $w_1 = w_1(\vec{q}_1)$ является решением задачи

$$Lw_1 = \sum_{i=1}^{m} f_i q_{1i} = F \quad ((x,t) \in Q), \quad w_1|_{t=0} = 0, \quad Bw_1|_S = 0, \qquad (45)$$

и, следовательно, $w_1 = 0$ на $(0,\tau_0)$. Далее оценим норму

$$\| B^{-1}R(\vec{q}_1) \|_{L_p(\tau_0,\tau)} \le c \| \vec{q}_1 \|_{L_p(\tau_0,\tau)} (\tau - \tau_0)^{1-\theta},$$

и без ограничения общности можно считать, что постоянная c здесь совпадает с постоянной c_7 in (42). Таким образом, если мы берем $\tau_1 = 2\tau_0$, то уравнение (44) разрешимо, а соответствующий оператор есть сжатие. Чтобы доказать разрешимость уравнения (38) на всем интервале $(0,T)$, достаточно повторить рассуждения несколько раз.

Далее мы покажем, что наши условия являются достаточно точными.

Замечание 1. Если матрица B вырождена, то задача (1)-(3) значительно усложняется и, возможно, некорректна в классах конечных гладкостей. Тип некорректности зависит от поведения этой матрицы-функции. Приведем простейший пример. Рассмотрим задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x,t)q(t), \; u|_{t=0} = 0, \; u|_S = 0, \; u(x_0,t) = \psi(t) \; (x_0 \in G). \qquad (46)$$

Если условие (32) выполняется, то $|f(x_0,t)| \ge \delta_2 > 0$ for почти всех $t \in (0,T)$, где δ_2 – некоторая постоянная. Неизвестными являются функции u и $q(t)$. Если мы предположим, что $f(x,t)$ обращается в нуль на некотором множестве вида $\Omega_\delta = B_\delta(x_0) \times [0,T] \subset Q$, то задача (46) уже некорректна в классах конечной гладкости, и можно указать классы данных, удовлетворяющих условиям теоремы, для которых задача неразрешима. Доказательство этого факта можно найти в замечании 1 в [9].

Замечание 2. Отметим также, что условие дополнительной гладкости данных в некоторой окрестности точек x_i также является точным в определенном смысле. Мы ограничимся случаем уравнения (46). Предположим, например, что $f \in L_\infty(0,T;L_p(G))$ и $f \notin L_\infty(0,T;W_p^s(B_\delta(x_0) \cap G))$ для $s \ge n/p$ и некоторого $\delta > 0$. В этом случае в любой окрестности f можно найти функции $\tilde{f}$ как угодно гладкие, для которых задача неразрешима (см. [9]).

Заключение

В работе рассмотрен вопрос о корректности в пространствах Соболева обратных задач о восстановлении функции источников специального вида для математических моделей конвекции-диффузии и тепломассопереноса. Неизвестные функции, зависящие от времени, входят в функцию источника. Показано, что при определенных условиях на данные задача является корректной в пространствах Соболева. Получены теоремы существования и единственности решений. В качестве метода используется теорема о неподвижной точке и априорные оценки. Условия на данные задачи близки к минимальным.

Литература

1. Marchuk, G. I. Mathematical Models in Environmental Problems / G. I. Marchuk Amsterdam : Elsevier Science Publishers, 1986. – 216 p.

2. Ozisik, M. N. Inverse Heat Transfer / M. N. Ozisik, H. R. B. Orlande. – New York : Taylor & Francis, 2000. – 314 p.

3. Прилепко, А. И. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа / А. И. Прилепко, В. В. Соловьев. – Текст : непосредственный // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, 10. – С. 1791–1799.

4. Afinogenova, O. A. Stabilization of the solution to the identification problem of the source function for a one-dimensional parabolic equation / O. A. Afinogenova, Yu. Ya. Belov, I. V. Frolenkov // Doklady Mathematics. – 2009. – Vol. 79, № 1. – P. 70–72.

5. Белов, Ю. Я. О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун. – Текст : непосредственный // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2012. Vol. 5 (4). – P. 497–506.

6. Prilepko,A. I. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. – New-York : Dekker, 1999. – 709 p.

7. Пятков, С. Г. О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений / С. Г. Пятков, М. Л. Самков. – Текст : непосредственный // Математические труды. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 155–177.

8. Пятков, С. Г. Об определении функции источника в квазилинейных параболических задачах с точечными условиями переопределения / С. Г. Пятков, В. В. Ротко. – Текст : непосредственный // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2017. – Т. 9, № 4. – С. 19–26.

9. Pyatkov, S. G. On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination / S. G. Pyatkov, V. V. Rotko // AIP Conference Proceedings. – 2017. Vol. 1907. – P. 020008.

10. Neto, J. Silva. Department of Mechanical and Aerospace Two-dimensional inverse heat conduction problem of estimating the time-varying strength of a line heat source / J. Silva Neto, M. N. Ozisic. – DOI 10.1063/1.350554 // Journal of Applied Physics. – 1992. – Vol.71. – P. 5357.

11. Badia, A. El. Inverse source problem in an advection-dispersion - reaction system: application to water pollution / A. El. Badia, A. Hamdi // Inverse Problems. – 2007. – Vol. 23. – P. 2103–2120.

12. Badia, A. El. Inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem / A. El. Badia, T. Ha-Duong // Journal of Inverse and Ill- PosedProblems. – 2002. – Vol. 10, № 6. – P. 585–599.

13. Mamonov, A. V. Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems / A. V. Mamonov, Y-H. R. Tsai // Inverse Problems. – 2013. – Vol. 29, № 3. – P. 26.

14. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – Москва : Мир, 1980. – 664 с. – Текст : непосредственный.

15. Denk, R. Optimal L_p-L_q-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data / R. Denk, M. Hieber, J. Prüss // Mathematische Zeitschrift. – 2007. – Vol. 257, № 1. – P. 193–224.

16. Amann, H. OperatorValued Fourier multipliers, vectorvalued Besov spaces, and applications / H. Amann // Mathematische Nachrichten. – 1997. – Vol. 186, № 1. – P. 5–56.

17. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – Москва : Наука, 1967. – 736 с. – Текст : непосредственный.

18. Ladyzhenskaya, O. A. Classical solvability of diffraction problems in the case of elliptic and parabolic equations / O. A. Ladyzhenskaya, V. Ya. Rivkind, N. N. Ural'tseva USSR Academy of Sciences. – Moscow, 1964. – P. 513–515.

19. Grisvard, P. Equations differentielles abstraites / P. Grisvard // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. – 1969. Vol. 2, № 3. – P. 311–395.

20. Пятков, С. Г. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений / С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов // Научные ведомости Бел.ГУ. – 2014. – Вып. 35, № 7 (183). – С. 61–75.

21. Triebel, H. Theory of function spaces / H. Triebel. – Basel : Birkhauser Verlag, 1983. – 447 p.

22. Amann, H. Compact embeddings of vectorvalued Sobolev and Besov spaces / H. Amann // Glasnik Matematicki Series III. – 2000. – Vol. 35 (55), № 1. – P. 161–177.