

С. И. Мартынов, М. С. Дерябина

**ДИНАМИКА ЧАСТИЦ ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
ЧЕРЕЗ ЯЧЕЙКИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ**

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(проект № 15-41-0007).

На основе разработанной ранее математической модели изучается динамика течения вязкой жидкости с частицами в пористой среде. Модель учитывает гидродинамическое взаимодействие всех частиц, как подвижных, так и неподвижных. Для компьютерного моделирования динамики частиц в такого рода течениях используется разработанный программный комплекс. Проведен численный расчет динамики вязкой жидкости с частицами при заданном градиенте давления в двух модельных структурах пористой среды, образованных, соответственно, из 450 и 478 частиц эффективного размера. Размеры дисперсной частицы, помещенной в вязкую жидкость, составляли 0.3 и 0.2 от размера эффективных частиц. Задавалось течение вязкой жидкости с градиентом давления.

Получено, что при наличии градиента давления перемещение диспергированной частицы в пористой структуре имеет составляющую, направленную против течения жидкости вне структуры.

Ключевые слова: численное моделирование, вязкая жидкость, пористая структура, гидродинамическое взаимодействие частиц, внутренние силы взаимодействия.

S. I. Martynov, M. S. Deryabina

**PARTICLE DYNAMICS WITH A VISCOUS LIQUID THROUGH A POROUS MEDIUM CELL
WITH A PRESSURE GRADIENT**

On the basis of the previously developed mathematical model, the dynamics of the flow of a viscous liquid with particles in a porous medium is studied. The model takes into account the hydrodynamic interaction of all particles, both moving and stationary. For computer simulation of particle dynamics in such currents, a developed software package is used. A numerical calculation of the dynamics of a viscous liquid with particles at a given pressure gradient in two model structures of a porous medium, formed respectively of 450 and 478 particles of effective size is carried out. The dimensions of the dispersed particle placed in a viscous liquid were 0.3 and 0.2 of the effective particle size. The flow of a viscous liquid with a pressure gradient was specified.

It is found that in the presence of a pressure gradient, the movement of the dispersed particle in the porous structure has a component directed against the flow of liquid outside the structure.

Key words: numerical simulation, viscous liquid, porous structure, hydrodynamic interaction of the particles, the internal forces of interaction.

Введение

Проблема моделирования течения вязкой жидкости в пористой среде является одной из актуальных в механике жидкости. Причем это обусловлено как математической сложностью самой задачи, так и чрезвычайно широкой областью возможных приложений результатов моделирования: извлечение нефти и газа из пласта, водоотведение и водоотбор, создание бытовых и промышленных фильтров для очистки жидкостей и т. п.

В мировой практике используются различные подходы для моделирования движения таких сред. Наиболее распространенный подход основан на уравнении Дарси и его модификациях [1–4]. Полученная система уравнений решается аналитически или численно при заданных значениях коэффициентов, характеризующих параметры среды, и которые определяются экспериментально. Однако для реальных пористых сред экспериментальное нахождение этих параметров – достаточно сложная задача, так как такие системы уникальны по своим свойствам, и, кроме того, достаточно трудно воспроизвести в лаборатории условия, характеризующие такую систему в естественном состоянии.

Развитие компьютерных технологий дало возможность использовать и другие подходы к моделированию фильтрации жидкости в пористой среде. Это численное моделирование, позволяющее

рассматривать течения в пористой среде на масштабе пор [5–7]. В этом случае задача сводится к прямому численному решению уравнений гидродинамики в некоторой пористой среде, геометрия которой воспроизводит структуру реального пористого материала. При этом используются известные методы численного решения уравнений гидродинамики и методы компьютерной томографии образца материала для моделирования его структуры. Проблема данного подхода в том, что для его реализации требуются значительные вычислительные ресурсы. Так, например, для цифрового представления реального образца пористого материала в виде кубика размерами в 600 мкм по каждой стороне требуется 10^9 пикселей [8]. Помимо этого, реализация самих численных методов интегрирования уравнений гидродинамики с граничными условиями на сложных геометрических поверхностях также является сложной задачей. Сложность задачи возрастает, когда в жидкости присутствуют подвижные диспергированные частицы и расчет ведется на реальном масштабе пор. Даже в последнее время, когда возможности вычислительной техники выросли, применение такого метода для большого числа обтекаемых поверхностей является трудной задачей, требующей большого объема вычислений.

Поэтому, как указывается в работе [8], получение уравнений фильтрационных течений вязкой жидкости с использованием средних величин, характеризующих поток в пористой среде, по-прежнему является актуальной задачей. Фактически это означает, что необходимо исследовать процессы массо- или теплопереноса на масштабе пористой ячейки, а затем получить средние значения параметров на масштабе, много большим, чем размер ячейки, но много меньшим, чем размер пласта.

Таким образом, в настоящее время не существует достаточно точного и при этом несложного метода, позволяющего моделировать фильтрацию жидкости с частицами с учетом их взаимодействия между собой и пористой структурой. Трудности моделирования возрастают при увеличении числа частиц, взаимодействующих между собой, что сказывается на практической реализации вычислительных схем известных методов. Поэтому получение новых аналитических и численных результатов в этой области по-прежнему остается актуальной задачей.

В работе [12] на основе результатов, ранее полученных авторами, предлагается метод, основанный на представлении динамики частиц в пористой среде, как динамики системы частиц при учете как внутренних сил, так и сил гидродинамического взаимодействия между ними. Пористая среда моделируется большим числом неподвижных полидисперсных частиц, имитирующих структуру пористой среды. Движение частиц, моделирующих включения, происходит в результате течения жидкости через модельную структуру. В расчет берется взаимодействие модельных частиц между собой и с частицами структуры.

Постановка задачи и метод решения

Рассматривается модель фиктивного грунта, состоящего из N_1 твердых сферических частиц, образующих случайную структуру в объеме V , и помещенных в несжимаемую жидкость плотности ρ и вязкости η . Частицы имеют эффективный радиус a . Предполагается, что на частицы наложены связи, препятствующие их поступательному и вращательному движению. Как возможный вариант постановки задачи – наличие вдали или вблизи от рассматриваемой структуры частиц в жидкости плоской стенки в качестве модели непроницаемой поверхности, вдоль которой происходит течение со скоростью U . Внутри структуры помещаются N_2 частиц меньшего радиуса b , чем эффективный радиус частиц a , и которые могут поступательно и вращательно перемещаться в жидкости. Эти частицы моделируют наличие второй фазы в жидкости. Для расчета течения жидкости внутри рассматриваемой структуры и динамики системы свободных частиц записываются уравнения движения жидкости и каждой частицы с учетом всех сил и моментов, связанных с гидродинамическим взаимодействием всех частиц и сил реакции связей. Рассматривается случай малых чисел Рейнольдса. Система уравнений для вязкой жидкости имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

На поверхности неподвижной частицы с номером k должны выполняться следующие граничные условия:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \left| \mathbf{x}^k \right| = a, \quad k = 1, \dots, N_1 \quad (2)$$

На поверхности подвижной частицы с номером k должны выполняться следующие граничные условия:

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}^k + \mathbf{\Omega}^k \times \mathbf{x}^k, \quad |\mathbf{x}^k| = b, \quad k = 1, \dots, N_2 \quad (3)$$

Далеко от частиц имеет место затухание возмущений:

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (4)$$

Здесь \mathbf{u} – скорость жидкости, \mathbf{V}^k и $\mathbf{\Omega}^k$ – соответственно, поступательная и угловая скорости частицы с номером k , p_0 – невозмущенное давление в жидкости, \mathbf{x}^k – вектор положения произвольной точки среды относительно центра частицы с номером k .

Уравнения динамики для подвижных частиц записываются в виде (квазистационарное приближение):

$$\mathbf{F}^k = 0, \quad \mathbf{M}^k = 0 \quad (5)$$

здесь \mathbf{F}^k – сумма сил, \mathbf{M}^k – сумма моментов сил, действующих на подвижную частицу с номером k со стороны жидкости.

Для неподвижных частиц имеем соотношения:

$$\mathbf{F}_1^k + \mathbf{R}^k = 0, \quad \mathbf{M}_1^k + \mathbf{T}^k = 0 \quad (6)$$

здесь \mathbf{F}_1^k – сумма внешних сил, \mathbf{R}^k – реакции связей, удерживающих частицы в заданном положении, \mathbf{M}_1^k – сумма моментов внешних сил, \mathbf{T}^k – сумма моментов реакций связей, наложенных на неподвижную частицу с номером k .

Метод решения системы уравнений (1), (5), (6) с граничными условиями (2), (3), (4), а также процедура получения гидродинамических сил и моментов, действующих на частицы со стороны жидкости с учетом гидродинамического взаимодействия всех частиц, представлены в работах [9–11].

Скорости подвижных частиц находятся из условия (5), а реакции связей – из (6). Ввиду большого количества уравнений $6(N_1+N_2)+4$ был применен специальный программный комплекс, аналогичный тому, что использовался в работах [10–12]. Полученная система уравнений решается численным способом, и по найденным числовым значениям находятся скорости свободных частиц, строятся траектории их движения частиц, а также определяются усилия, возникающие в связях, удерживающих частицы в структуре.

Моделирование динамики частиц при фильтрационном течении

Моделирование динамики частиц при течении вязкой жидкости через пористую среду основывается на методе подобия, разработанном в работах [10]. Вместо реальных размеров частиц a и таких параметров жидкости, как её вязкость η и скорость \mathbf{U} течения, при компьютерном моделировании задаются модельные значения размеров частиц \hat{a} , вязкости жидкости $\hat{\eta}$ и скорости внешнего потока $\hat{\mathbf{U}}$. Это связано с тем, что значения реальных параметров достаточно малы, что затрудняет нахождение численного решения системы уравнений и визуализацию результатов. Поскольку плотность жидкости ρ явным образом не входит в уравнения движения жидкости и частиц, то ее значение считается одинаковым для модельной и реальной жидкостей. Условие подобия реального и модельного течений означает, что число Рейнольдса должно быть одинаковым в обоих случаях. Откуда получаем следующее равенство:

$$\frac{\rho \hat{v} \hat{a}}{\hat{\eta}} = \frac{\rho v a}{\eta} \quad (7)$$

Из соотношения (7) получаем:

$$v = \frac{\hat{v} \hat{a} \eta}{a \hat{\eta}} \quad (8)$$

Поскольку программа для моделирования течения жидкости через упаковку частиц использует промежуток времени, то необходимо найти связь между такими параметрами, как характерное время в реальном процессе фильтрации $t=a/v$ и при моделировании $\hat{t} = \hat{a}/\hat{v}$. Используя соотношение (8), получим такую зависимость между указанными параметрами:

$$t = \frac{a^2 \hat{\eta} \hat{t}}{\hat{a}^2 \eta}.$$

Зная время движения частиц в пористой структуре при моделировании, можно найти время движения реальной частицы при фильтрации.

Для определения модельной скорости течения жидкости внутри структуры использовался следующий подход. Из решения системы уравнений для модельных частиц, образующих пористую структуру, получаем значения составляющих реакций связей \hat{F}_{ik} по оси k для частицы с номером i , удерживающих частицы на месте. Причем эти значения учитывают гидродинамическое взаимодействие всех частиц, как неподвижных N , так и подвижных n . Для каждой неподвижной частицы записываем соотношение:

$$6\pi\hat{\eta}\hat{a}\hat{v}_{ik} = -\hat{F}_{ik} \quad (9)$$

Здесь \hat{v}_{ik} – составляющая скорости потока жидкости для частицы с номером i , учитывающая гидродинамическое взаимодействие всех частиц. Другими словами, \hat{v}_{ik} – скорость самосогласованного течения жидкости, образованная основным потоком и возмущениями от всех остальных частиц. Поскольку для каждой частицы из структуры можно получить такого рода течения, то для всей структуры в целом можно считать, что имеется течение со скоростью потока жидкости внутри структуры, определяемое как средняя скорость течений для всех частиц, которая находится из соотношения:

$$\hat{v}_k = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{v}_{ik}}{N} \quad (10)$$

С учетом равенства (9) из (10) получим выражение для средней скорости потока жидкости внутри структуры:

$$\hat{v}_k = \frac{-\hat{R}_k}{6\pi\hat{\eta}\hat{a}}, \quad \hat{R}_k = \sum_{i=1}^N \hat{F}_{ik} \quad (11)$$

Аналогичные выражения можно записать и для величин реального фильтрационного потока. Учитывая равенства (8), (9), можно получить следующее соотношение для величин \hat{R} и R в модельном и реальном течениях:

$$\frac{R}{\hat{R}} = \frac{\eta}{\hat{\eta}} \quad (12)$$

Выражение (11) можно представить и в другом виде. Вводя такие величины, характеризующие структуру, как пористость ϵ , удельную поверхность частиц $\hat{\delta}$, составляющую напряжение на поверхности частиц \hat{P}_i , получим соотношение:

$$\hat{v}_k = \frac{2\hat{a}^2 \hat{P}_k \hat{\delta}}{9\hat{\eta}(1-\epsilon)}.$$

Здесь учтены следующие соотношения:

$$\hat{P}_k = \frac{-\hat{R}_k}{4\pi\hat{a}^2N}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{4\pi\hat{a}^3N}{3V_s}, \quad \hat{\delta} = \frac{4\pi\hat{a}^2N}{V_s}.$$

Необходимо отметить, что параметр пористости ε для модельной и реальной структуры одинаковый, так как не зависит от масштаба, а только от геометрии структуры.

Возможны два варианта моделирования: зная реальные значения параметров, при моделировании можно задавать значения двух параметров, а значение третьего находится из условия подобия или, задавая значения всех трех модельных параметров, можно найти один из трех реальных параметров, зная значения двух из них.

Результаты моделирования

Для моделирования пористой структуры и динамики частиц внутри ее была использована программа, аналогичная той, что использовалась в [10–12]. В заданном объеме пространства, ограниченном координатами $-10 \leq x_1 \leq 10$, $-10 \leq x_2 \leq 10$, $-10 \leq x_3 \leq 10$, случайным образом располагаются частицы. Из них N частиц неподвижны и имеют радиус $\hat{a} = 1$, а одна, моделирующая подвижную частицу, располагается внутри структуры и имеет радиус $k\hat{a}$.

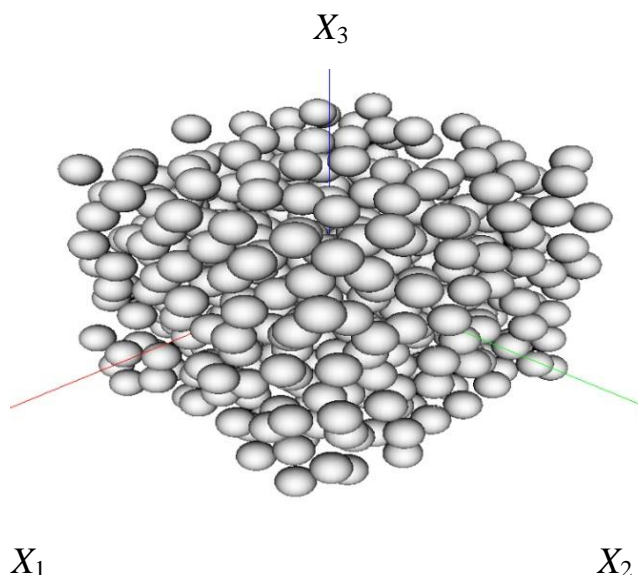


Рисунок 1 – Структура пористой среды, образованной неподвижными частицами

Рассматривались два модельных случая N и подвижной частицы: $N=449$, $k = 0,3$; $N=477$, $k = 0,2$. На рисунке (рис. 1) показана характерная структура, образуемая неподвижными частицами. Задавались следующие модельные значения: скорость потока $\hat{U}_2 = 0,001(100 - x_3^2)$ вдоль оси OX_2 , вязкость жидкости $\hat{\eta} = 1$, начальное положение подвижной частицы и промежуток времени $\Delta t = 0,1$. Скорость течения выбрана таким образом, чтобы на границах структуры $x_3 = \pm 10$, имитирующих плоские поверхности, жидкость покоилась. Заданному потоку жидкости соответствует градиент давления вдоль оси OX_2 , равный $\nabla_x p = -0,002 x_3$.

Затем запускалась программа. Результаты расчетов динамики частиц представлены ниже на рисунках. На рис. 2 представлена динамика частицы для случая $N=449$, $k = 0,3$. Начальное положение подвижной частицы задавалось координатами $(0; -7,5; 0)$.

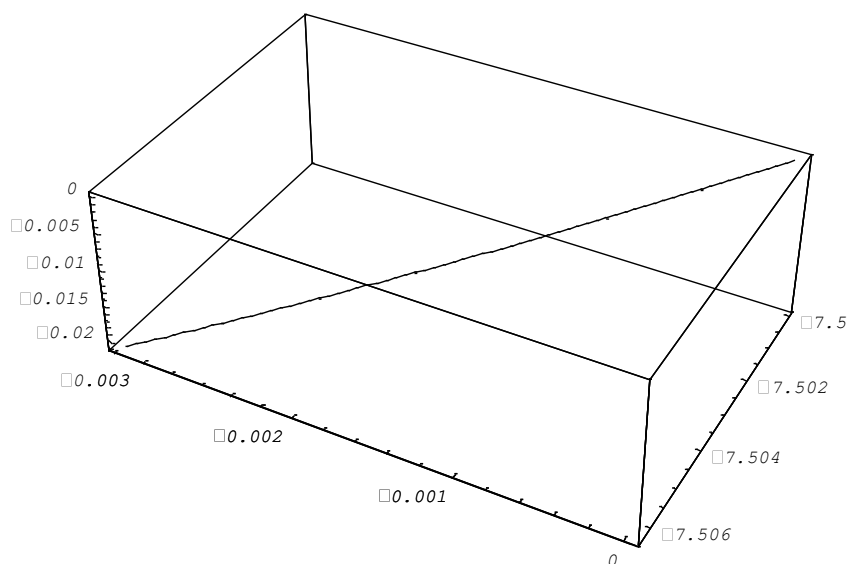


Рисунок 2 – Траектория движения подвижной частицы при $k = 0,3$. Общее время счета $\hat{t} = 7,0$

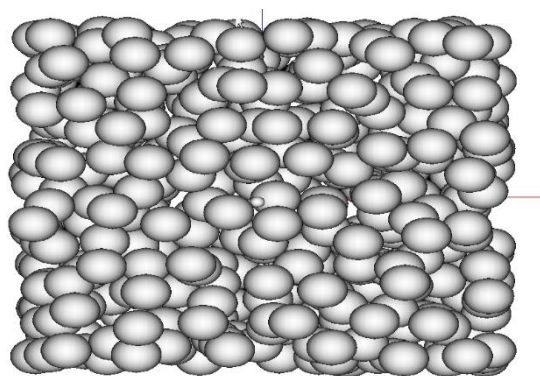


Рисунок 3 – Сечение структуры с движущейся частицей при $k = 0,3$

Траектория движения подвижной частицы в случае $N=477$, $k = 0,2$ представлена на рисунке (рис. 4).

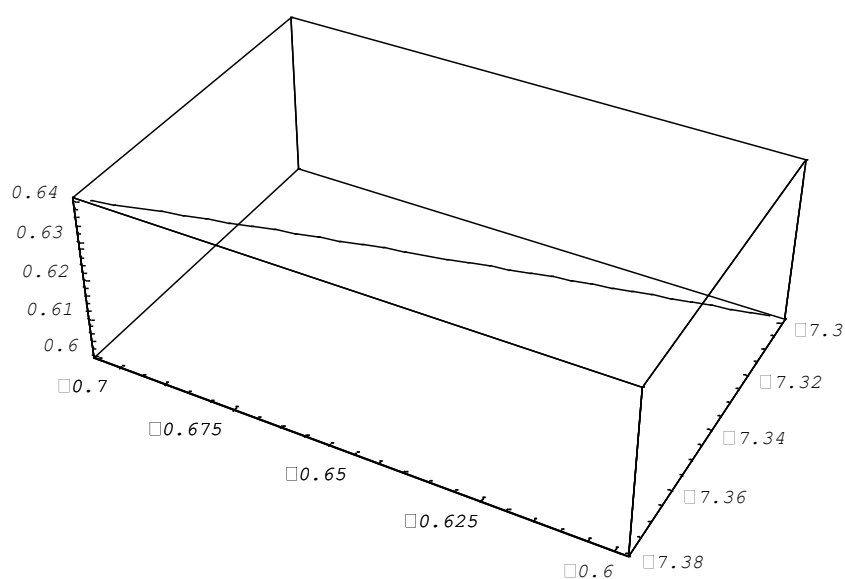
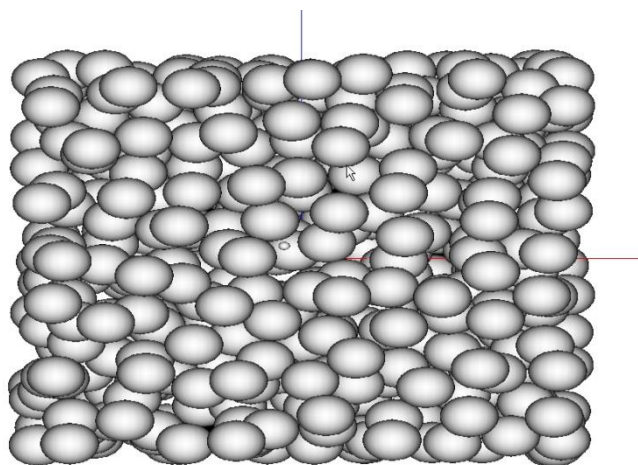
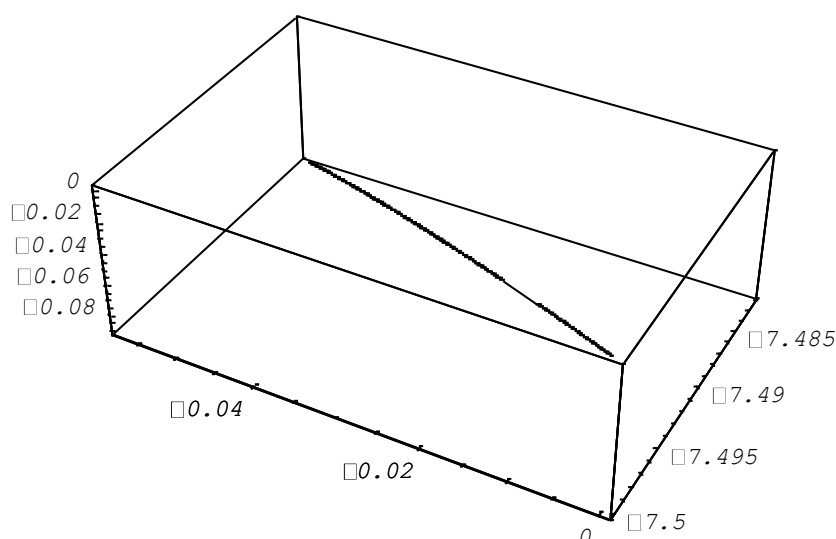


Рисунок 4 – Траектория движения подвижной частицы при $k = 0,2$. Общее время счета $\hat{t} = 3,2$

Начальное положение подвижной частицы задавалось координатами $(-0,6; -7,3; 0,6)$.

Рисунок 4 – Сечение структуры с движущейся частицей при $k = 0,2$

В рассмотренных случаях имеется составляющая перемещения подвижной частицы внутри структуры в направлении, противоположном течению жидкости без структуры. Такое поведение частицы кардинальным образом отличается от того, которое имеет место при однородном течении вязкой жидкости через аналогичные структуры. Как установлено в работе [12], в этом случае перемещение подвижной частицы происходит вдоль и перпендикулярно направлению течения жидкости (рис. 5).

Рисунок 5 – Траектория движения подвижной частицы при $k = 0,3$ (однородный поток). Общее время счета

$$\hat{t} = 9,5$$

Поскольку в одних случаях имеется градиент давления, а в других нет, а скорость однородного потока бралась равной скорости параболического при $x_3 = 0$, то можно предполагать, что такое существенное отличие объясняется только наличием градиента давления.

Заключение

На основе предложенной ранее модели фильтрации двухфазной жидкости, основанной на представлении пористой структуры, как системы неподвижных частиц, а диспергированной фазы – как системы подвижных частиц, находящихся внутри пористой структуры, рассмотрен случай фильтрации с заданным градиентом давления. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц, как подвижных, так и неподвижных.

Компьютерное моделирование рассмотренных течений проводилось с помощью разработанного программного комплекса. Проведен численный расчет течения жидкости в пористой среде на примере 2 модельных структур, образованных, соответственно, из 450 и 478 частиц эффективного размера.

Размеры дисперсной частицы, помещенной в вязкую жидкость, составляли 0,3 и 0,2 от размера эффективных частиц.

Результаты численного моделирования показывают, что динамика подвижных частиц в потоке с градиентом давления количественно и качественно отличается от динамики частицы в однородном потоке. В частности обнаружено, что перемещение подвижной частицы в градиентном потоке имеет составляющую, противоположную направлению течения жидкости вне структуры. Это означает, что использование градиента давления для вытеснения двухфазной жидкости из пористой среды может приводить не к увеличению, а к уменьшению массопереноса диспергированной фазы. Необходимо более точно учитывать влияния микротечений на перенос каждой из фаз, что позволит более качественно предсказывать массоперенос каждой фазы и определять способы его увеличения.

Литература

1. Лаевский, Ю. М. Моделирование фильтрации двухфазной жидкости смешанным методом конечных элементов [Текст] / Ю. М. Лаевский, П. Е. Попов, А. А. Калинин // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, № 3. – С. 74–90.
2. Моделирование задач фильтрации на гибридных вычислительных системах [Текст] / Д. Н. Морозов, М. А. Трапезникова, Б. Н. Четверушкин [и др.] // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 10. – С. 33–39.
3. Бervено, Е. В. Фильтрация двухфазной жидкости в неоднородной среде на компьютерах с распределенной памятью [Текст] / Е. В. Бervено, А. А. Калинин, Ю. М. Лаевский // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2014. – № 4(30). – С. 57–62.
4. Никифоров, А. И. О переносе дисперсных частиц двухфазным фильтрационным потоком [Текст] / А. И. Никифоров, Р. В. Садовников, Г. А. Никифоров // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 47–53.
5. Zaretskiy, Y. Direct numerical simulation of pore-scale reactive transport: applications to wettability alteration during two-phase flow [Text] / Y. Zaretskiy, S. Geiger, K. Sorbie // Int. Journal of Oil, Gas and Coal Technology. – 2012. – Vol. 5, № 2/3. – Pp. 142–156.
6. Sadhukhan, S. Porosity and permeability changes in sedimentary rocks induced by injection of reactive fluid: A simulation model [Text] / S. Sadhukhan, P. Gouze, T. Dutta // J. Hydrol. – 2012. – Vol. 450–451. – Pp. 134–139.
7. Molins, S. Reactive interfaces in direct numerical simulation of pore-scale processes [Text] / S. Molins // Reviews in Mineralogy & Geochemistry. – 2015. – Vol. 80. – Pp. 461–481.
8. Gray, W. G. Introduction to the thermodynamically constrained averaging theory for porous medium systems. Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics [Text] / W. G. Gray, C. T. Miller. – 2014. – 582 p.
9. Мартынов, С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц [Текст] / С. И. Мартынов // Изв. РАН. МЖГ. – 1998. – № 2. – С. 112–119.
10. Баранов, В. Е. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости [Текст] / В. Е. Баранов, С. И. Мартынов // Изв. РАН. МЖГ. – 2004. – № 1. – С. 152–164.
11. Мартынов, С. И. Моделирование динамики агрегатов частиц в вязкой жидкости [Текст] / С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 2. – С. 285–294.
12. Дерябина, М. С. Моделирование течения вязкой жидкости с частицами через ячейки пористой среды [Текст] / М. С. Дерябина, С. И. Мартынов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 420–429.