

СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ДЛИННОГО АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

А.В. Степашкин, О.А. Ситнова, М.А. Пантелеев, А.Д. Асоскова, Д.А. Шляхин

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Обоснование. Большинство строительных конструкций испытывает нестационарный неравномерный нагрев, что приводит к образованию больших деформаций и механических напряжений. Для их определения используются различные теории термоупругости, в которых формулируется несамосопряженная система исходных дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент вектора перемещений и функции приращения температуры [1–3]. Сложность ее исследования приводит к тому, что рассматриваемые задачи решаются приближенными численными или вариационными методами. Однако слабую связанность упругих и температурных полей удастся учесть в расчетах только с помощью аналитических методов, позволяющих построить замкнутое решение [4, 5]. Один из таких математических подходов — метод неполного разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований. При этом в случае исследования несамосопряженных дифференциальных уравнений получить общий интеграл удастся при использовании специального разложения в виде обобщенного биортогонального преобразования [6].

Цели — построение нового замкнутого решения связанной нестационарной задачи термоупругости для длинного полого цилиндра в случае действия на его внешней цилиндрической поверхности нестационарной нагрузки в виде функции изменения температуры и заданном законе конвекционного теплообмена на внутренней цилиндрической поверхности (граничные условия теплопроводности 1-го и 3-го рода).

Методы. В общем случае система дифференциальных уравнений термоупругости и краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме имеют вид:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\theta}{r} \right) + a_1 \frac{\theta}{r} = 0; \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[\theta + a_2 \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) \right] = 0. \quad (2)$$

$$r = R, 1; \quad \sigma_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r} + a_3 \frac{U}{r} - \theta = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} + a_4 \theta = a_4 P; \quad \theta(1, t) = \omega(t);$$

$$t = 0; \quad U = \theta = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,$$

$$\text{где } \{U, r, R\} = \{U^*, r^*, a\} / b; \quad \{\theta, \omega, P\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \{\theta^*, \omega^*, P^*\};$$

$$a_1 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}; \quad a_2 = \frac{T_0 \gamma_{33}^2}{k C_{33}}; \quad a_3 = \frac{C_{13}}{C_{33}}; \quad a_4 = \frac{\alpha b}{\Lambda}; \quad t = \frac{\Lambda}{b^2 k} t^*; \quad \beta = \frac{\Lambda}{b^2 k} \beta_{rel},$$

α — коэффициент теплоотдачи.

В равенствах (1)–(3) $U^*(r^*, t^*)$ — радиальная составляющая вектора перемещений в размерной форме; $\theta^*(r^*, t^*) = T(r^*, t^*) - T_0(r^*, t^*)$; θ^* , T , T_0 — соответственно приращение температуры, текущая температура, а также температура первоначального состояния тела, при котором отсутствуют механические напряжения; C_{ms} — модули упругости анизотропного материала ($m, s = \overline{1, 3}$); γ_{11} и γ_{33} — компоненты тензора температурных напряжений ($\gamma_{11} = C_{13} \cdot \alpha_t$, $\gamma_{33} = C_{33} \cdot \alpha_t$); Λ , k , α_t — коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного температурного расширения материала; β_{rel} — время релаксации; a , b — внутренний и внешний радиусы цилиндра в размерной форме.

Результаты. Решение задачи осуществляется с помощью обобщенного метода биортогонального конечного интегрального преобразования, основанного на многокомпонентном соотношении собственных вектор-функций двух однородных краевых задач. Окончательные выражения функций перемещений и температуры имеет вид:

$$U(r, t) = H_1(r, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_i, t) N_1(\lambda_i, r)}{\|K_i\|^2}, \quad \theta(r, t) = H_2(r, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_i, t) N_2(\lambda_i, r)}{\|K_i\|^2},$$

$$\|K_i\|^2 = \int_R^1 K(\lambda_i, r)^2 r dz.$$

Здесь H_1, H_2 — стандартизирующие функции; $G(\lambda_i, t)$ — трансформанта нагрузки; $K_{1i}, K_{2i}, N_{1i}, N_{2i}$ — компоненты ядер преобразований; λ_i, μ_i — собственные значения.

Выводы. Разработанный алгоритм расчета может быть использован при проектировании конструкций различного функционального назначения. Он позволяет уточнить напряженно-деформированное состояние, что актуально при определении прочностных характеристик упругих систем. Кроме того, разработанный алгоритм расчета может использоваться в качестве тестовой разработки при решении задач термоупругости приближенными методами.

Ключевые слова: длинный анизотропный цилиндр; задача термоупругости; интегральные преобразования.

Список литературы

1. Подстригач Я.С. Теплоупругость тел неоднородной структуры. Москва: Наука, 1984. 368 с.
2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. Москва: Мир, 1970. 256 с.
3. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наукова думка, 1965. 204 с.
4. Sargsyan S.H. Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells // J Therm Stresses. 2013. Vol. 36, No. 11. P. 1200–1216. DOI: 10.1080/01495739.2013.819265
5. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Известия РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 138–154.
6. Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 4. С. 191–200.
7. Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // Известия вузов. Математика. 1996. № 8. С. 71–81.

Сведения об авторах:

Александр Вячеславович Степашкин — студент, группа 114М, факультет промышленного и гражданского строительства; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: a.v.stepashkin99@gmail.com

Олеся Александровна Ситнова — студентка, группа 114М, факультет промышленного и гражданского строительства; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: sitnova.lesya@yandex.ru

Михаил Алексеевич Пантелеев — студент, группа 114М, факультет промышленного и гражданского строительства; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: ipanmihale@gmail.com

Александра Денисовна Асоскова — студентка, группа 114М, факультет промышленного и гражданского строительства; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: asoskova.99@mail.ru

Дмитрий Аверкиевич Шляхин — научный руководитель, доктор технических наук, профессор, доцент кафедры строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: d-612-mit2009@yandex.ru