ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГАУССА

Б.А. Уткин, Л.В. Воропаева

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Обоснование. Математические модели, в которых физическая величина является функцией только координат точки, например, функцией температуры для стационарного теплового процесса, функцией потенциала сил в области, не содержащей массы, потенциала электростатического поля в области, не содержащей зарядов, и т. д., приводят к граничным задачам для гармонических функций. На примере решения интегрального уравнения, порожденного гармоническим потенциалом двойного слоя с неизвестной плотностью, сингулярного на границе области, а также на примере решения задачи Дирихле в области, ограниченной эллипсом, рассматриваются приближенные методы представления решений граничных задач для гармонических функций. Решения ищутся одним из методов разложения по системам фундаментальных функций оператора Лапласа, предложенным В.Д. Купрадзе [1, 2], идейно близким методу граничных элементов. Использование таких методов позволяет уменьшить объем вычислений по сравнению с разностными методами и методами конечных элементов, но требует обоснования сходимости приближенных решений.

Цель — детальное исследование приближенных методов представления решений граничных задач по системам фундаментальных функций, дополнение и уточнение результатов расчетов на примере модельных задач.

Методы. Поиск приближенных решений задач ведется либо сразу в виде ряда по системе фундаментальных функции основного дифференциального оператора и удовлетворяющего граничным условиям, либо вначале ищется неизвестная функция из граничного интегрального уравнения, которая потом участвует в решении в качестве плотности потенциала. На вспомогательном контуре (поверхности), ограничивающем область и не имеющем общих точек с ее границей, выбирается всюду плотная система точек, которой ставится в соответствие система фундаментальных решений основного оператора граничной задачи. Для решения, построенного в виде разложения по фундаментальным функциям, как и в методе граничных элементов, достаточно удовлетворения только граничных условий. Несмотря на то, что с точки зрения устойчивости расчетных схем методы В.Д. Купрадзе проигрывают, так как приходится аппроксимировать интегральные уравнения первого рода, сингулярные вблизи границы, результаты вычислительных экспериментов показывают, что удачное приближение контура к основной границе задачи и выбор метода квадратур определяют успех в практической реализации решения.

Результаты. В качестве первого примера были проведены расчеты приближенного решения функционального уравнения Гаусса [1, с. 364], точное решение которого $\varphi = 1$ внутри единичного круга единственно. Дискретизация интегрального уравнения проводилась с помощью квадратурных формул прямоугольников и квадратурных формул Гаусса. Всюду плотная система точек выбиралась на концентрических окружностях радиусов меньших единицы, имеющих один и тот же центр с основной окружностью. Применение формул прямоугольников с увеличением числа узлов дает следующую аппроксимацию решения: для $n = 40$ погрешность решения $\varepsilon \leq \max\limits_{i=1,\,n} \left| \varphi_i - 1 \right|$, и, на расстоянии 0,1 до границы, не превышает $1{,}64E-02$; для $n = 80$, $\varepsilon \leqslant 2{,}43E-04$; для $n = 160$, $\varepsilon \leqslant 5{,}69E-08$. При отдалении от контура при любом числе узлов квадратурной формулы нет равномерного распределения погрешностей: на расстоянии 0,5 от границы при $n = 40$ погрешность минимальна, $\varepsilon = 6{,}38E-12$, на расстоянии 0,01 от центра окружности $\varepsilon = 4{,}44E-06$. Увеличение числа узлов квадратурных формул Гаусса не только ухудшило картину аппроксимации решения вблизи контура, но, в целом, не сильно обеспечило уменьшение погрешности приближенного решения вдали от границы. Оказалось, что самое «оптимальное» число узлов квадратурной формулы Гаусса $n = 7$. На расстоянии 0,1 от границы, $\varepsilon = 6{,}35E-01$. При этом, ближе к центру круга число обусловленности матрицы системы линейных уравнений, порождаемой численным методом, даже при таком числе узлов возрастает до $1{,}64E+08$, что сразу влечет возмущение решения. Эти факты ранее представлены не были.

Второй пример разложения приближенного решения — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области, ограниченной эллипсом. Исследована зависимость погрешности приближенного решения

от числа узлов квадратурной формулы вблизи границы области и расстояния до вспомогательного контура. Результаты уточнили и дополнили выводы [1, 2].

Выводы. Поведены уточнения результатов ранних исследований [1, 2]. Достаточно хорошую аппроксимацию приближенного решения функционального уравнения Гаусса дают формулы прямоугольников. Вблизи границы области и около центра точность приближенного решения падает в связи с ростом числа обусловленности матрицы СЛУ. При достаточно близком расположении вспомогательных точек решения предлагается строить методом последовательных приближений [1, 2].

Ключевые слова: метод граничных элементов; сингулярный интегральные уравнения; граничная задача; фундаментальные функции дифференциального оператора; гармонический потенциал; функциональное уравнение Гаусса.

Список литературы

1. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1963. 472 с.
2. Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. Москва: Наука, 1991. 352 с.

Сведения об авторах:

Богдан Алексеевич Уткин — студент, группа 2-ИАиИТ-10М, институт автоматики и информационных технологий; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: umm97@list.ru

Людмила Вячеславовна Воропаева — научный руководитель; старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: ludmilav2@yandex.ru