

## АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ, СВЯЗАННЫХ С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ

В.А. Шокуров, М.А. Кальмова

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

**Обоснование.** Многим процессам, происходящим как в строительстве так и в промышленном производстве, можно сопоставить физическую модель — движение тел вращения по вязкоупругим средам, подчиняющимся модели Кельвина, как наиболее полно учитывающей механические свойства неметаллических материалов. По гипотезе Кельвина – Фойхта [1], несовершенной упругости материала приписывается вязкая природа. Применение этой гипотезы корректно при рассмотрении как стационарных, так и нестационарных колебаний.

**Целью** данной работы является теоретическое и экспериментальное исследование в области задач, посвященных исследованию динамике тел вращения на вязкоупругом основании.

**Методы.** В данной работе найдена связь реологической силы реакции в структуре уравнения Лагранжа — получено модифицированное уравнение Лагранжа. Рассмотрено движение механической системы с голономными, идеальными, удерживающими связями. За основу взято уравнение Даламбера – Лагранжа:

$$\sum_{v=1}^{3N} (X_v - m_v \ddot{x}_v) \delta x_v = 0. \quad (1)$$

Выражение для силы  $X_v$ , наделенной вязкоупругими свойствами, присущими для модели тела Кельвина, соответствует:

$$X_v = F_v - \tilde{c} \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K P_k(y_k) e_{vk}, \quad \dot{X}_v = \dot{F}_v - c \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K (\dot{P}_k(y_k) e_{vk} + P_k(y_k) \dot{e}_{vk}), \quad (2)$$

где учтены модули упругости элементов тела Кельвина и реологическая координата.

Получена система уравнений:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{3N} \left[ \left( \dot{F}_v - m_v \ddot{x}_v - c \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K \dot{P}_k e_{vk} - \sum_{k=1}^K P_k \dot{e}_{vk} \right) \frac{\partial X_v}{\partial q_i} + \left( F_v - m_v \ddot{x}_v - \tilde{c} \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K P_k e_{vk} \right) \frac{\partial \dot{X}_v}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0, \\ \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{3N} \left( F_v - m_v \ddot{x}_v - \tilde{c} \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K P_k e_{vk} \right) \frac{\partial \dot{X}_v}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = 0. \quad (3)$$

Используя известные тождества Лагранжа

$$\frac{\partial x_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \ddot{x}_v}{\partial \ddot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \ddot{x}_v}{\partial \ddot{q}_i}, \quad (4)$$

а также понятия энергии ускорений, потенциальной энергии и функции рассеяния энергии

$$S = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{3N} m_v \ddot{x}_v, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{3N} \tilde{c} \dot{x}_v^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{3N} b_k \dot{x}_v^2, \quad (5)$$

где  $b_k$  — коэффициент внутреннего трения, найдено

$$\sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{3N} m_v \ddot{x}_v \frac{\partial x_v}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} \right] \delta q_i, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} \right) + \sum_{k=1}^K \dot{P}_k b_{ki} + \sum_{k=1}^K P_k \dot{b}_{ki} = \frac{dQ_i}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} + \sum_{k=1}^K P_k b_{ki} = Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=1, 2, 3, \dots, m). \quad (8)$$

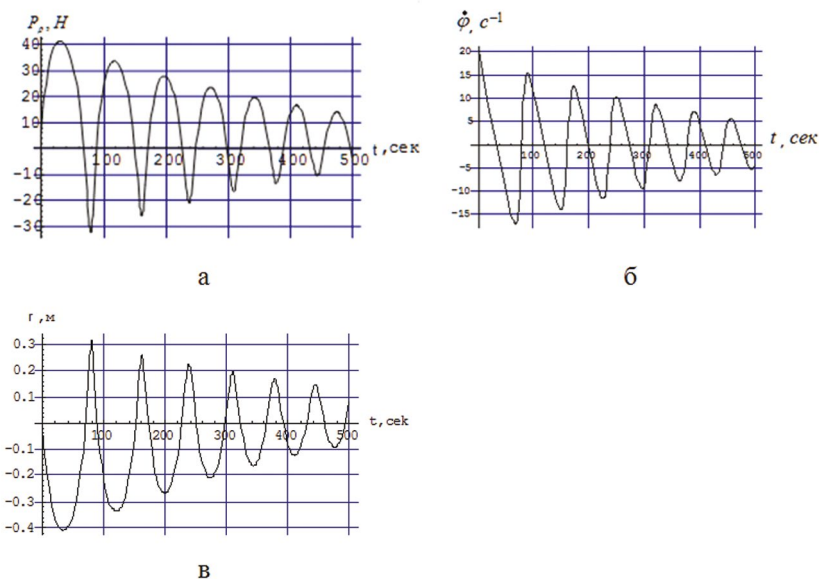


Рис. Результат численного анализа

В силу независимостей этих уравнений составлено уравнение (8). Проводя замену  $\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$ , где  $T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{3N} m_v \dot{x}_v^2$  — кинетическая энергия, окончательно записано

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^K P_k b_{kj} = Q_j - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j=1, 2, 3, \dots, m). \quad (9)$$

Уравнение (9) было получено в [2] другим способом. Применение этих уравнений было рассмотрено в задачах, посвященных исследованию динамики тел вращения на вязкоупругом основании.

**Результаты.** С использованием численных методов проведен анализ режима движения диска (см. рисунок).

**Выводы.** Анализ графических зависимостей показывает, что при угловой скорости диска, равной нулю, возникает максимальный изгиб балки. Диск останавливается и начинает двигаться вместе с балкой. В соответствии с фазовым портретом механическая система будет совершать затухающие низкочастотные колебания вблизи устойчивого положения равновесия [3, 4].

**Ключевые слова:** связь неголомная; ядро релаксации; реологическое основание; тело Кельвина; уравнение Лагранжа.

### Список литературы

1. Василенко Н.В. Теория колебаний. Киев: Вища Школа, 1992. 430 с.
2. Аидов А.А. Автопараметрические колебания в системе с сухим трением и с ограниченным возбуждением // Известия РАН. Механика твердого тела. 1977. № 4. С. 68–78.
3. Павлов Г.В., Кальмова М.А. Специфика движения диска на реологическом основании // Вестник ТГУ. 2012. № 3. С. 68–77.
4. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. Москва: Эдиториал УРСС, 1998. 166 с.

Сведения об авторах:

**Владислав Андреевич Шокуров** — студент, группа 20п-4, факультет промышленного и гражданского строительства; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: ya.dezender73@gmail.com

**Мария Александровна Кальмова** — научный руководитель, старший преподаватель; старший преподаватель кафедры Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: kalmova@inbox.ru